NUMERO: 2390A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Tamburi Cesare

MATERIA: Tamburi Cesare - Fisica I - Prof. Gamba

GRANDEZZE FISICHE

FONDAMENTALI

SPAZIO	L	[m]
TEMPO	T	[s]
MATERIA	M	[kg]

UNITÀ DI MISURA DEL SISTEMA INTERNAZIONALE S.I.

DERIVATE

VELOCITÀ $v = \frac{\text{SPAZIO}}{\text{TEMPO}}$ $[v] = \left[\frac{m}{s}\right]$ UNITÀ DI MISURA DELLA VELOCITÀ

$V = 20\ m/s \Rightarrow km/h\ ?$ $20 \cdot \frac{3600}{1000} = 20 \cdot 3,6\ km/h$

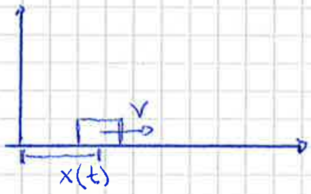
ACCELERAZIONE

$$a = \frac{\text{VAR. VELOCITÀ}}{\text{TEMPO}} \cdot \left[\frac{v}{T}\right] = \left[\frac{m}{s} \cdot \frac{1}{s}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$g = 9,81\ [m/s^2]$$

ANALISI DIMENSIONALE

AD OGNI GRANDEZZA FISICA È ASSOCIATA UNA UNITÀ DI MISURA



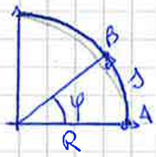
$$[x] = [L] = [m]$$

$$[v] = \left[\frac{dx}{dt}\right] = \left[\frac{L}{T}\right] = \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$[a] = \left[\frac{dv}{dt}\right] = \left[\frac{V}{T}\right] = \left[\frac{L}{T}\frac{1}{T}\right] = \left[\frac{L}{T^2}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

ESISTONO GRANDEZZE FISICHE ADIMENSIONALI A CUI NON VENGONO ASSOCIATE DELLE UNITÀ DI MISURA, ESSE SONO DEI NUMERI PURI

φ ANGOLO MISURATO IN RADIANTI

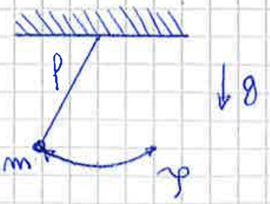


$$\varphi_{RAD} = \frac{s}{R} \quad \left[\frac{s}{R}\right] = \left[\frac{L}{L}\right] = [1]$$

$$\varphi_{GIRI} = \frac{s}{2\pi R} = \frac{\varphi_{RAD}}{2\pi} \quad [1]$$

$$\varphi_{GRADI} = 360° \cdot \varphi_{GIRI} = \frac{180}{\pi}\varphi_{RAD} \quad [1]$$

ES 3 PERIODO DEL PENDOLO



$\tau\ [T]$

$\ell\ [L]$

$m\ [M]$ → UNICO FATTORE CON TALE DIMENSIONE, PROBABILMENTE IL PERIODO NON DIPENDE DA LUI

$g\ [L/T^2]$

$$\tau = \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

COERENZA DIMENSIONALE, DEVO AGGIUNGERE UN FATTORE ADIMENSIONALE PER RENDERLA APPLICABILE ALLA REALTÀ

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

IL SEMIPERIODO DI UN PENDOLO DI LUNGHEZZA 1 metro SUL 45° PARALLELO È

$$\frac{\tau}{2} = \pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \simeq 1\ \text{sec}$$

ATTRAVERSO MISURE DIRETTE SI POSSONO DETERMINARE MISURE INDIRETTE

ℓ, τ SONO MISURE DIRETTE
g È UNA MISURA INDIRETTA

$$g = 4\pi^2\frac{\ell}{\tau^2}$$

TUTTI I DATI SPERIMENTALI OTTENUTI POSSONO ESSERE INSERITI IN UN GRAFICO PER STUDIARE MEGLIO LE MISURE E DETERMINARE GLI ERRORI

LA FISICA È UNA SCIENZA SPERIMENTALE:

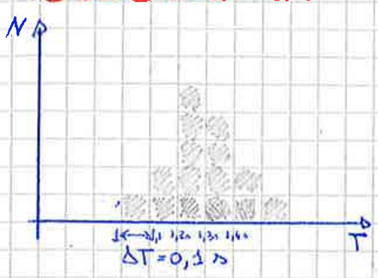
- SERVE LA TEORIA PER INTERPRETARE GLI ESPERIMENTI
- LE MISURE SPERIMENTALI SONO AFFETTE DA ERRORI:

CASUALI: SONO INELIMINABILI, VANNO PER ECCESSO O PER DIFETTO, IN MEDIA SU MOLTE MISURE ANDRANNO A CANCELLARSI, A COMPENSARSI FRA DI LORO

SISTEMATICI: SI CERCA POSSIBILMENTE DI ELIMINARLI ATTRAVERSO STRUMENTI MIGLIORI O UN DIVERSO APPROCCIO SPERIMENTALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 194

- ISTOGRAMMA



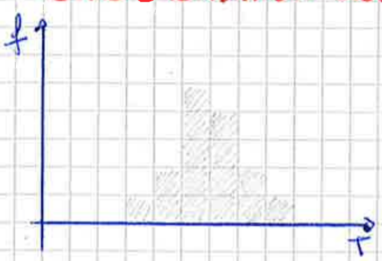
- N SONO IL NUMERO DI MISURE IN UNA CERTA CLASSE
- SI INTRODUCE IL CONCETTO DI CLASSE
- OGNI MISURA CADRÀ IN UN CERTO INTERVALLO
- LA CLASSE K-ESIMA RACCOGLIE LE MISURE DI T CHE CADONO NELL'INTERVALLO

$$K\Delta T < T < (K+1)\Delta T$$ DEFINIZIONE DI CLASSE

HO TRASFORMATO I MIEI DATI IN UNA MISURA DI NUMEROSITÀ

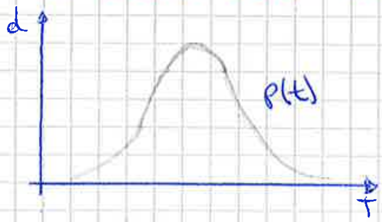
$$\sum_{K=1} N_K = \text{NUMERO DI MISURAZIONI EFFETTUATE}$$

- ISTOGRAMMA delle FREQUENZE



- $f_K = \dfrac{N_K}{N}$ FREQ. DEL NUMERO DI VOLTE IN CUI AVRÒ UN CERTO RISULTATO
- FACENDO PIÙ ESPERIMENTI IL GRAFICO TENDERÀ A RESTARE STABILE
- LA SOMMA DELLE FREQUENZE SARÀ SEMPRE 1
- L'AMPIEZZA DELLE CLASSI È UN VALORE IMPORTANTE, SE DIMEZZO L'AMPIEZZA TUTTE LE FREQ. SI DIMEZZANO

- ISTOGRAMMA delle DENSITÀ



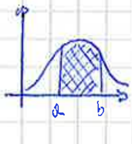
- $pK = \dfrac{fK}{\Delta T} = \dfrac{NK}{N \cdot \Delta T}$
- $\sum_{K=1}^{m \text{ classi}} \underbrace{pK}_{\text{ALTEZZA RETTANGOLO}} \cdot \underbrace{\Delta T}_{\text{BASE RETTANGOLO}} = 1$ LA SOMMA DELLE AREE È 1

NEL LIMITE DI $\Delta T \to 0$ È L'AREA DELLA CURVA ($N \to +\infty$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(t) \cdot \Delta T = 1$$ DENSITÀ DI PROBABILITÀ O DISTRIBUZIONE DI PROB.

NEL LIMITE DI MOLTE MISURE PRECISE OTTENGO UNA DENSITÀ DI PROBABILITÀ CHE PERMETTE DI CALCOLARE LA PROB. CHE LA MISURA DI T CADA IN UN INTERVALLO

$$P(a < T < b) = \int_a^b p(t)\, dt$$



L'ESEMPIO PRINCIPALE È LA CURVA A CAMPANA DI GAUSS

$$p(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(T-\bar{T})^2}{2\sigma^2}}$$

PER STUDIARE IL GRAFICO CONVIENE STUDIARE LA VARIANTE STANDARD CON $\bar{T} = 0$ e $\sigma = 1$ E POI TORNARE ALLA PRINCIPALE CON TRASLAZIONI E DILATAZIONI.

ERRORE STANDARD DELLA MEDIA

$\overline{T} = \frac{1}{N}(\overline{T}_1 + \overline{T}_2 + \dots + \overline{T}_N)$ N NUMERO DI MISURE

POSSO RIPETERE GLI ESPERIMENTI PER DIVERSI GIORNI:

$$
\begin{array}{lccccc}
\text{giorno 1} & T_1^1 & T_2^1 & \dots & T_N^1 & \to \overline{T}^1 \\
\text{giorno 2} & T_1^2 & T_2^2 & \dots & T_N^2 & \to \overline{T}^2 \\
\vdots & & & & & \\
\text{giorno M} & T_1^M & T_2^M & \dots & T_N^M & \to \overline{T}^M \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \overline{T}_1 & \overline{T}_2 & & \overline{T}_N & \overline{T}_M
\end{array}
$$

$\overline{T}_M \to$ È LA MEDIA DELLE MEDIE $= \overline{\overline{T}}$

VOGLIO CAPIRE QUANTO FLUTTUA LA MEDIA, QUANTO ESSE SONO DIVERSE FRA DI LORO

$$\sigma_{\overline{T}} = ?$$

CONSIDERO GLI SCARTI: $\delta T_k^M = T_k^M - \overline{T}_k$

$\overline{T}_k$ ↳ MEDIA LUNGO LA COLONNA

E NE FACCIO LA MEDIA LUNGO LE RIGHE

$$\overline{\delta T^M} = \frac{1}{N}(\delta T_1^M + \delta T_2^M + \dots \delta T_N^M) = \overline{T}^M - \overline{\overline{T}}$$

POSSO CALCOLARE LA VARIANZA DI $\overline{T}$:

$$\sigma_{\overline{T}}^2 = \overline{\delta \overline{T}^{M\,2}} = \overline{\left[\frac{1}{N}(\delta T_1^M + \delta T_2^M + \dots \delta T_N^M)\right]^2} = \overline{\frac{1}{N^2}\left[\delta T_1^{M\,2} + \delta T_2^{M\,2} + \dots + 2\delta T_1^M \delta T_2^M + \dots\right]}$$

VA MEDIATA SU TUTTE LE RIGHE, AVREMO MOLTI CALCOLI ED ALTRETTANTI DOPPI PRODOTTI:

$\overline{\delta T_1^M \delta T_2^M}$ → È UNA MEDIA CHE PUÒ ESSERE POSITIVA O NEGATIVA: CON MOLTE PROVE IL NUMERO SARÀ PICCOLO E TRASCURABILE PERCHÉ GLI ERRORI SI COMPENSANO

$\overline{\delta T_1^{M\,2}}$ → OTTENGO SOLO VALORI POSITIVI, ESSI NON SI ANNULLANO

QUINDI OTTENGO

$$\sigma_{\overline{T}}^2 = \frac{1}{N^2} N \sigma_T^2$$ È LA VARIANZA DELLA MEDIA

PER LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI AVREMO:

$$\sigma_{\overline{T}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma_T^2$$ DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA

σ_T^2 ↓ DEVIAZIONE DI UN SINGOLO GRUPPO DI MISURE

DALL'EQ. POSSIAMO VEDERE CHE PER DIMEZZARE L'ERRORE DEVO FARE 4 VOLTE LE MISURE

SUPPONIAMO DI AVERE DELLE MISURAZIONI

x	y	f
x_1	y_1	$f_1 = f(x_1, y_1)$
x_2	y_2	$f_2 = f(x_2, y_2)$
x_N	y_N	$f_N = f(x_N, y_N)$

DATE LE INCERTEZZE SU x, y COME OTTENGO L'INCERTEZZA SU f?

RICORDIAMO IL DIFFERENZIALE:

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

SONO GLI SCARTI DELLA MEDIA

$$d\,dx_k = x_k - \bar{x}$$

$$\overline{\delta f_k^2} = \overline{\frac{df}{dx}\delta x_k^2} + \overline{\frac{df}{dy}dy_k^2} + \overline{\frac{2\,df^2}{dx\,dy}(dx_k dy_k)}$$

SONO GLI SCARTI INDIPENDENTI, IN MEDIA I VALORI VANNO A CANCELLARSI ≈ 0

$$\boxed{\sigma_f^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2\sigma_y^2}$$

FORMULA DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

PER IL PENDOLO

$x \to \ell$

$y \to T$

$f \to g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2} = g(\ell, T)$

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{dg}{d\ell}\right)^2\sigma_\ell^2 + \left(\frac{dg}{dT}\right)^2\sigma_T^2$$

CONOSCO LE VARIANZE DI ℓ e T

DERIVO LA FUNZIONE, UNA VARIABILE COSTANTE L'ALTRA LA DERIVO:

$$\frac{dg}{d\ell} = \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \frac{dg}{dT} = \frac{-8\pi^2\ell}{T^3}$$

SOSTITUISCO:

$$\sigma_g^2 = \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2\sigma_\ell^2 + \left(\frac{8\pi^2\ell}{T^3}\right)^2\sigma_T^2$$

DIVIDO OGNI MEMBRO PER $g^2 = \left(\frac{4\pi^2\ell}{T^2}\right)^2$

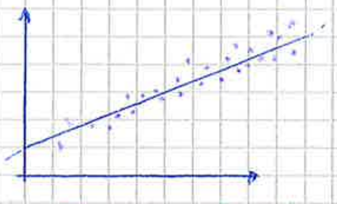
$$\left(\frac{\sigma_g}{g}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\ell}{\ell}\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2$$

FORMULA PER GLI ERRORI PER IL PENDOLO

IN EFFETTI LA PROPORZIONALITÀ DEGLI ERRORI È SEMPLICE QUANDO $f(x,y) = C x^\alpha y^\beta$ CIOÈ QUANDO CONTIENE SOLO PRODOTTI e POTENZE

TROVARE LA RETTA TEORICA CHE MEGLIO SI ADATTA ALLA NUVOLA DI PUNTI PRESI SPERIMENTALMENTE

$Y = BX + A$



$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2} = \frac{4\pi^2}{B}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}\ell = B\ell$$

INTRODUCIAMO LA FUNZIONE DI COSTO:

$$f(A,B) = \sum_{k=1}^{N} \Big[\underbrace{(BX_k + A)}_{\text{VALORE TEORICO}} - Y_k\Big]^2$$

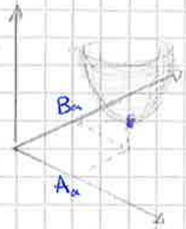
^{2} → NON HO DIFFERENZE

X e Y SONO NOTI

Y_k ↳ VALORE (REALE DI y) SPERIMENTALE

SOMMO IL QUADRATO DELLE DISTANZE TRA LA RETTA E I PUNTI SPERIMENTALI, CERCO DI RENDERLA MINIMA:

A^* e B^* SONO QUELLI OTTIMALI PER RENDERE MINIMA $f(A,B)$



SI TROVA LA DERIVATA DI A e B E SI PONGONO A ZERO

$$\frac{df}{dA} = 0 \qquad \frac{df}{dB} = 0$$

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{df}{dA} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{d[(BX_k+A)-Y_k]^2}{dA} = \sum_{k=1}^{N} 2[(BX_k+A)-Y_k] \\ 0 = \dfrac{df}{dB} = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} 2[BX_k+A-Y_k]\cdot X_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left\{B\sum_{k=1}^{N} X_k + A\sum_{k=1}^{N} 1 - \sum_{k=1}^{N} Y_k\right\} = 0 \\ 2\left\{B\sum_{k=1}^{N} X_k^2 + A\sum_{k=1}^{N} X_k - \sum_{k=1}^{N} Y_k X_k\right\} = 0 \end{cases}$$

IMPONGO $\langle x\rangle = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_k$

E SIMILI, ESSI SONO LA MEDIA

$$\begin{cases} A + \langle x\rangle B = \langle y\rangle \\ \langle x\rangle A + \langle x^2\rangle B = \langle xy\rangle \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \langle x\rangle \\ \langle x\rangle & \langle x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle y\rangle \\ \langle xy\rangle \end{bmatrix}$$

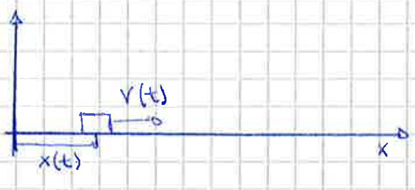
UTILIZZO KRAMER E DEFINISCO IL DETERMINANTE $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \langle x\rangle \\ \langle x\rangle & \langle x^2\rangle \end{vmatrix} = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \langle y\rangle & \langle x\rangle \\ \langle xy\rangle & \langle x^2\rangle \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\langle y\rangle\langle x^2\rangle - \langle xy\rangle\langle x\rangle}{\Delta}$$

$$B = \frac{\begin{vmatrix} \langle 1\rangle & \langle y\rangle \\ \langle x\rangle & \langle xy\rangle \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\Delta}$$

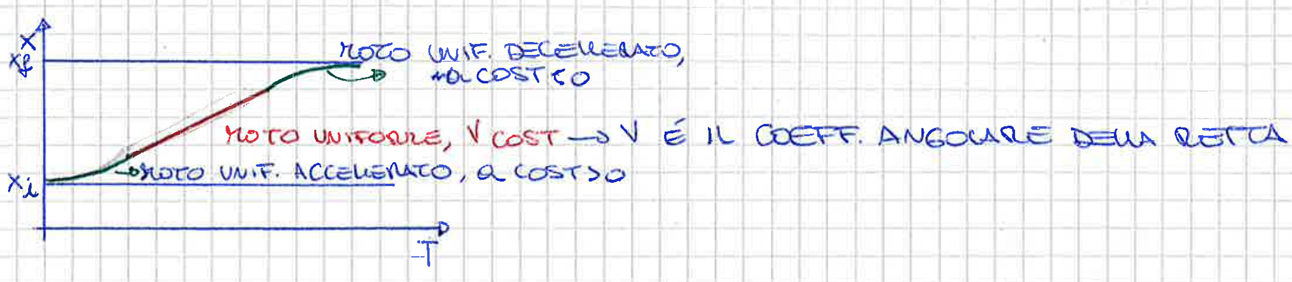
DA B POSSO CALCOLARE LA GRAVITÀ

CINEMATICA

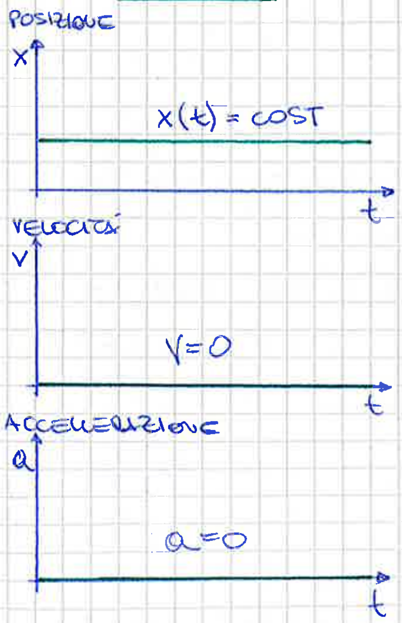


DESCRIVIAMO UN MOTO UNIDIMENSIONALE, ESSO È REGOLATO DA 3 GRANDEZZE.

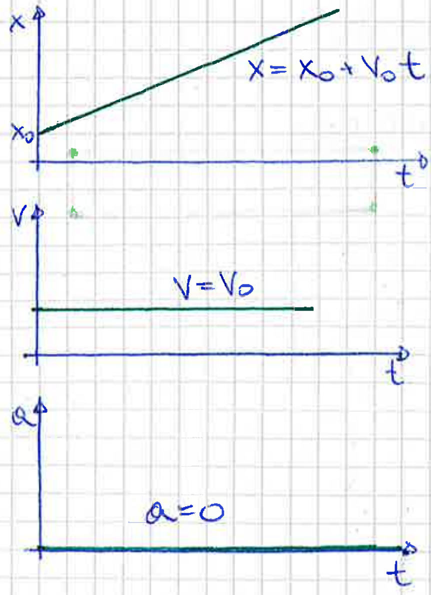
- $x(t)$ LEGGE ORARIA
- $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t}$ VELOCITÀ ISTANTANEA PER INTERVALLI MOLTO PICCOLI
- $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{v(t+\delta t) - v(t)}{\delta t}$ ACCELERAZIONE



QUIETE



MOTO UNIFORME



k	t	x	dt	dx	v	dV	a
1	t_1	x_1	$dt_1 = t_2 - t_1$	$dx_1 = x_2 - x_1$	$V_1 = \frac{dx_1}{dt_1}$	$dV_1 = V_2 - V_1$	$a_1 = \frac{dV_1}{dt_1}$
2	t_2	x_2	$dt_2 = t_3 - t_2$	$dx_2 = x_3 - x_2$	$V_2 = dx_2/dt_2$	$dV_2 = V_3 - V_2$	$a_2 = dV_2/dt_2$
⋮							
N	t_N	x_N	$dt_N = t_{N+1} - t_N$	$dx_N = x_{N+1} - x_N$	$V_N = dx_N/dt_N$	$dV_N = V_{N+1} - V_N$	$a_N = dV_N/dt_N$

SUPPONGO GLI INTERVALLI UGUALI

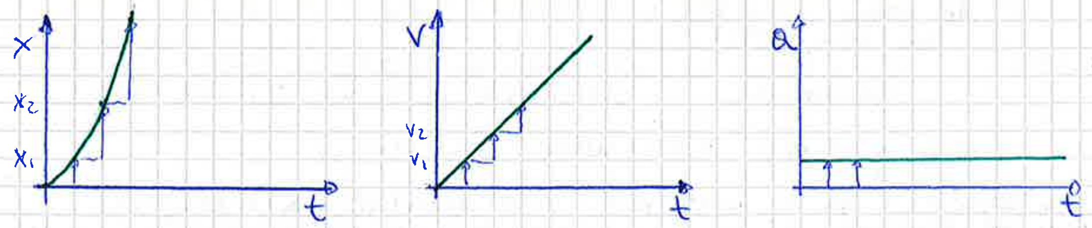
SUPPONIAMO DI TROVARCI IN UNA SITUAZIONE IN CUI LA COLONNA DELLE ACCELLERAZIONI (COLONNA A DX) È NOTA AD OGNI ISTANTE E VOLER RICAVARE DA QUESTA LA LEGGE ORARIA (LA COLONNA DELLE X A SX)

a	dV	V	dx	x
a_0	$a_0 \cdot dt$	V_0	$V_0\, dt$	x_0
a_1	$a_0 \cdot dt$	$V_1 = V_0 + a_0\, dt$	$V_1\, dt$	$x_1 = x_0 + V_1\, dt$
⋮				
a_m	$a_0 \cdot dt$	$V_N = V_{N-1} + a_0\, dt$	$V_N\, dt$	$x_N = x_{N-1} + V_N\, dt$

SUPPONGO UN ACCELLERAZIONE COSTANTE

V_0 e X_0 SONO VALORI INIZIALI CHE NON POSSONO ESSERE RICAVATI, DEVO CONOSCERLI, IL PROCEDIMENTO È RICORSIVO; CONOSCENDO LA VELOCITA' O LA POSIZIONE NELL'ISTANTE PRECEDENTE POSSO CONOSCERE QUELLA DELL'ISTANTE CONSIDERATO

LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEL MOTO UNIF. ACCELERATO È:



CRESCITA PARABOLICA — CRESCE LINEARMENTE — COSTANTE

NEL LIMITE $dt \to 0$ QUESTO SCHEMA NUMERICO SI RICONDUCE ALLA SOLUZIONE DATA PRIMA CON I METODI DEL CALCOLO DIFFERENZIALE

ALLA BASE DI TUTTO C'È IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE:

$$\int_{t_{in}}^{t_f} \frac{dx}{dt}\, dt' = x(t_f) - x(t_{in})$$

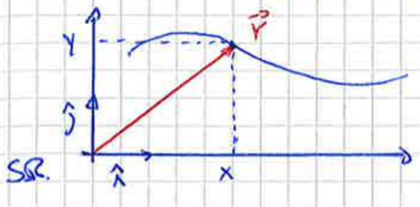
DA CUI DISCRETIZZANDO IL TEMPO OTTENGO:

$$x(t_f) = x(t_{in}) + dx_1 + dx_2 + \dots + dx_{N-1}$$
$$= x(t_{in}) + \frac{dx}{dt}(t_1)\, dt + \dots \frac{dx}{dt}(t_N)\, dt$$
$$= x(t_{in}) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{dx}{dt}(t_k)\, dt \simeq x(t_{in}) + \int_{t_{in}}^{t_f} \frac{dx}{dt}\, dt'$$

15

DESCRIZIONE DEL MOTO

SE DESCRIVIAMO E RAPPRESENTIAMO LA TRAIETTORIA DEL MOTO NON ABBIAMO INFORMAZIONI SUL TEMPO DI PERCORRENZA



PER DESCRIVERE LA TRAIETTORIA NEL TEMPO UTILIZZIAMO UNA LEGGE ORARIA DATA DA:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{j}$$

LE COORDINATE x, y DIVENTANO IN FUNZIONE DEL TEMPO, QUESTA NUOVA NOTAZIONE "FISICA" TIENE CONTO ANCHE DELLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO E DELLA SUA ORIGINE

DALL'EQ DELLA LEGGE ORARIA POSSIAMO RICAVARE LA VELOCITÀ E L'ACCELERAZIONE IN FUNZIONE DEL TEMPO: ~~CON SEMPLICI INTEGR~~

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{dt\to 0} \frac{\vec{r}(t+dt) - \vec{r}(t)}{dt} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{j}\right) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = \boxed{V_x\hat{\imath} + V_y\hat{j}}$$

LA VELOCITÀ È DATA DALLA SOMMA VETTORIALE DELLE VELOCITÀ PRESE SULLE DUE DIREZIONI DI RIFERIMENTO.

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} V_x(t) \\ V_y(t) \end{cases} \qquad \vec{r}(t) = \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$$

I VERSORI DEL SISTEMA SONO FISSI E NON SI MODIFICANO

$$\frac{d\hat{\imath}}{dt} = \frac{d\hat{j}}{dt} = 0$$

RIPETO LA DERIVAZIONE PER OTTENERE L'ACCELERAZIONE

$$\vec{a}(x) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[V_x(t)\hat{\imath} + V_y(t)\hat{j}\right] = \frac{dV_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dV_y}{dt}\hat{j} =$$

$$= \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} = \boxed{a_x\hat{\imath} + a_y\hat{j}}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} a_x(t) \\ a_y(t) \end{cases}$$

INTEGRO NUOVAMENTE PER OTTENERE LA LEGGE ORARIA

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = x_0 + u_0 t \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}}$$

LA LEGGE ORARIA È LA DEFINIZIONE DI UNA CURVA IN FORMA PARAMETRICA, CON PARAMETRO TEMPO

POSSO RICAVARMI L'EQUAZIONE DELLA CURVA, LA TRAIETTORIA SEGUITA ELIMINANDO DALL'EQUAZIONI IL TEMPO.

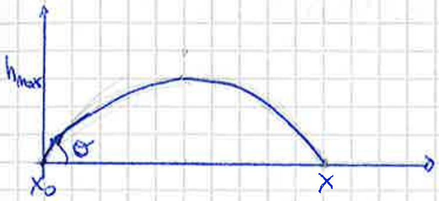
$$x(t) = x_0 + u_0 t \qquad t = \frac{x - x_0}{u_0} = \frac{x}{u_0}$$

SOSTITUENDO NELLA SECONDA ED IMPONENDO PER SEMPLICITÀ $x_0, y_0 = 0$, PARTENZA DALL'ORIGINE OTTENGO

$$y = v_0 \frac{x}{u_0} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{u_0}\right)^2 = \frac{v_0}{u_0} x - \frac{1}{2} \frac{g}{u_0^2} x^2 = \frac{x}{u_0}\left(v_0 - \frac{g}{2u_0} x\right)$$

$$\boxed{y = \frac{x}{u_0}\left(v_0 - \frac{g}{2u_0} x\right)}$$

È L'EQUAZIONE DI UNA PARABOLA



L'ANGOLO θ È L'ALZO CON CUI VIENE LANCIATO IL PROIETTILE

STUDIO LA GITTATA MASSIMA: $y=0$

$$0 = x\left(\frac{v_0}{u_0} - \frac{1}{2}\frac{g}{u_0^2} x\right) \qquad x = 0 \text{ PUNTO DI PARTENZA}$$

$$\frac{v_0}{u_0} = \frac{1}{2}\frac{g}{u_0^2} x \qquad x = \frac{2 v_0 \cdot u_0^2}{\cancel{u_0} g} \qquad \boxed{x = \frac{2 v_0 u_0}{g}}$$

GITTATA MASSIMA

STUDIO L'ALTEZZA MASSIMA, È IL PUNTO IN CUI LA VELOCITÀ LUNGO $y=0$. QUINDI $y'=0$

$$y'(x) = \frac{v_0}{u_0} - \frac{g}{u_0^2} x \qquad y' = 0 \qquad \frac{v_0}{u_0} = \frac{g}{u_0^2} x \qquad x = \frac{u_0^2 v_0}{\cancel{u_0} g} = \frac{u_0 v_0}{g}$$

ANDANDO A SOSTITUIRE NELLA y OTTENGO

$$y\left(\frac{u_0 v_0}{g}\right) = \frac{v_0}{\cancel{u_0}} \frac{\cancel{u_0} v_0}{g} - \frac{1}{2} \frac{\cancel{g}}{\cancel{u_0^2}} \frac{v_0^2 \cancel{u_0^2}}{g^{\cancel{2}}} = \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}$$

$$\boxed{y = \frac{v_0^2}{2g}}$$

ALTEZZA MASSIMA

LEGGI DI NEWTON

I LEGGE PRINCIPIO DI INERZIA

OGNI CORPO PERSEVERA NEL PROPRIO STATO DI QUIETE O MOTO RETTILINEO UNIFORME FINO A QUANDO NON È COSTRETTO DALLE FORZE APPLICATE A MUTARE IL PROPRIO STATO

$$\vec{F} = 0 \qquad \vec{a} = 0$$

LA LETTERA SCRITTA IN GRASSETTO INDICA IL VETTORE

LA PRIMA LEGGE NON IMPLICA $\vec{V} = 0$, IL CORPO SI PUÒ MUOVERE A VELOCITÀ COSTANTE

UN MOTO SI SVOLGE IN MANIERA DIVERSA A SECONDA DI QUALE SIA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DA CUI ESSO VIENE OSSERVATO

UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE È DEFINITO DALLA CONDIZIONE CHE IN ESSO UN PUNTO MATERIALE "LIBERO" SE POSTO INIZIALMENTE IN QUIETE, PERMANE IN QUIETE.
IN QUESTI SISTEMI VALE IL PRINCIPIO DI INERZIA

PRINCIPIO DI RELATIVITÀ GALILEIANA:
NON ESISTE ALCUN ESPERIMENTO FISICO CHE PERMETTA DI DISTINGUERE DUE SISTEMI INERZIALI IN MOTO RETTILINEO UNIFORME UNO RISPETTO ALL'ALTRO:
SE MI TROVO IN UNA STIVA DI UNA NAVE NON RIESCO A CAPIRE SE SI STA MUOVENDO DI MOTO RETT. UNIFORME O MENO

RIASSUMENDO:
UN SISTEMA INERZIALE NON RUOTA
UN SISTEMA NON INERZIALE RUOTA SU SE STESSO:
IL MOTO TERRESTRE PUÒ ESSERE APPROSSIMATO E IL SISTEMA È INERZIALE

II LEGGE SECONDO PRINCIPIO DELLA DINAMICA

LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO (DERIVATA) È PROPORZIONALE ALLA FORZA MOTRICE ED È DIRETTA COME LA FORZA STESSA

QUANTITÀ DI MOTO $q = mV$

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = m\frac{d\vec{V}}{dt} = m\vec{a}$$

SE RADDOPPIO LA FORZA RADDOPPIO LA QUANTITÀ DI MOTO

SE CONSIDERO DEI CORPI A MASSA VARIABILE AVRÒ:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{dm}{dt}\vec{V} + \frac{d\vec{V}}{dt}m = \frac{dm}{dt}\vec{V} + m\vec{a}$$

LA QUANTITÀ DI MOTO E LA POSIZIONE DEL CORPO SONO DETERMINATI DALLE LORO CONDIZIONI INIZIALI

$$mV \simeq mV_0 + (F_1\Delta t_1 + F_2\Delta t_2 \dots F_m\Delta T_m) \simeq mV_0 + \int_0^t F\,dt$$

$$r \simeq r_0 + (V_1\Delta t_1 + V_2\Delta t_2 \dots V_m\Delta t_m) \simeq r_0 + \int_0^t V\,dt$$

LE LEGGI DELLA FISICA HANNO UN CONTENUTO PREDITTIVO, MI DICONO COSA SUCCEDERÀ AL MIO CORPO
CON $F=0$ E MASSA COSTANTE TROVO $a=0$ CHE CORRISPONDE AL PRINCIPIO DI INERZIA

POSSIAMO USARE LA II LEGGE PER LA MISURA DINAMICA DELLE FORZE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 194

RISPETTO AI VERSORI DI RIFERIMENTO AVREMO:

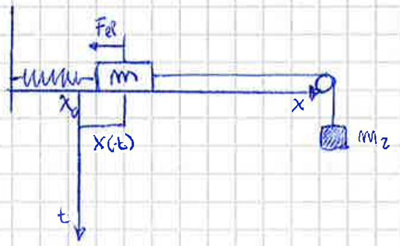
$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -g \end{cases} \xrightarrow[\text{INTEGRANDO}]{} \begin{cases} x(t) = x_0 + u_0 t \\ y(t) = y_0 + v_0 t \\ z(t) = z_0 + w_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

LEGGE ORARIA DEL MOTO DEL PROIETTILE

LA MASSA È UNA MISURA DELL'INERZIA, DI QUANTO IL CORPO "DESIDERA" PERMANERE NEL SUO STATO DI MOTO

FORZA ELASTICA

È UN CASO PARTICOLARE DI ATTRAZIONE ELETTROSTATICA



APPLICO ALLA MASSA m UNA MASSA m_2, ESSA HA UNA FORZA PESO NOTA $\vec{F} = -g m \hat{k}$

DENOTO CON x_0 L'ORIGINE DEGLI ASSI LA POSIZIONE IN CUI LA MOLLA È A RIPOSO

X È LO SPOSTAMENTO DALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO: ELONGAZIONE

PARLIAMO DI MOLLE IDEALI QUANDO CONSIDERIAMO PICCOLE VARIAZIONI CHE CI FANNO SPOSTARE NEL REGIME DI FORZA LINEARE

SAPPIAMO CHE LA LEGGE DELLA FORZA ELASTICA È

$$F_{el}(x) = -kx$$

CON: $-$ È UNA FORZA DI RICHIAMO
x ELONGAZIONE
k COSTANTE ELASTICA

CONSIDERO UN BINARIO LISCIO SENZA ATTRITO

PER TROVARE L'EQUAZIONE DEL MOTO UTILIZZO LA LEGGE DI NEWTON

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t)$$

È UN EQUAZIONE ~~ORDINARIA~~ DIFFERENZIALE DEL SECONDO ORDINE, RISOLVENDOLA MI PERMETTE DI DETERMINARE LA LEGGE ORARIA DEL MOTO $x(t)$

PER TROVARE LA LEGGE ORARIA DOBBIAMO CONOSCERE ANCHE LE CONDIZIONI INIZIALI

$x(0) = x_0$ SE LA MOLLA ERA ALLUNGATA

$\frac{dx}{dt}(0) = v_0$ SE LA MASSA SI MUOVEVA

IL PROBLEMA DI CAUCHY CONTIENE ANCHE LE DUE CONDIZIONI INIZIALI

23

TUTTE LE COMBINAZIONI LINEARI DELLE DUE PRECEDENTI SOLUZIONI SONO DETTE "SOLUZIONI FONDAMENTALI" E SONO SOLUZIONI DELL'EQ DEL MOTO

ABBIAMO TROVATO UNA FAMIGLIA DI SOLUZIONI CHE DIPENDE DALLE DUE COSTANTI ARBITRARIE A, B CHE POSSO PENSARE DI SCEGLIERE IN MODO DA AVERE QUALSIASI POSSIBILE CONDIZIONE INIZIALE X_0, V_0.

CHIAMO LA SOLUZIONE COSÌ OTTENUTA INTEGRALE GENERALE DELL'EQUAZIONE DEL MOTO

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$$

CON $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\qquad \cos(\omega t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$ T → PERIODO

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad \boxed{\omega = 2\pi\nu}$$

→ $\nu = \frac{1}{T}$ = FREQ

ω SARÀ UNA PULSAZIONE, AVRÒ QUINDI:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

IL MOTO DELLA MASSA È OSCILLATORIO

$$A = \sqrt{\left(\frac{V}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$$

LA LEGGE ORARIA DEL MOTO SARÀ:

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ V(t) = -\omega A\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t) \\ a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\sin(\omega t) \end{cases}$$

L'ACCELERAZIONE NON È PIÙ COSTANTE, IL MOTO NON È UNIFORME NÉ NEPPURE UNIFORMEMENTE ACCELERATO, SI CHIAMA MOTO VARIO

ESSO HA DELLE OSCILLAZIONI ARMONICHE

ORA SUPPONIAMO DI VOLER RISOLVERE IL PROBLEMA A VALORI INIZIALI, LA MASSA SI TROVA IN $x = x_0$, È FERMA

IL PROBLEMA È DETERMINARE IL MOTO

$$\begin{cases} x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) \\ v(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t) \end{cases} \quad t=0 \quad \begin{cases} X(0) = A = x_0 \\ V(0) = B\omega = 0 \end{cases}$$

DEVO DETERMINARE A e B.

MI INTERESSA DETERMINARLI IN DUE CONDIZIONI

1. LA MASSA È IN QUIETE E LA MOLLA HA UN ELONGAZIONE $x_0 > 0$
2. LA MOLLA È A RIPOSO MA LA MASSA HA $V_0 > 0$

INOLTRE VOGLIAMO DET. LA LEGGE ORARIA DEL MOTO DI m DATI I VALORI INIZIALI:

$x_0 = 0{,}2$ m
$m = 8$ kg
$k = 2$ N/m
$V_0 = 0{,}1$ m/s

E DETERMINARE I VALORI DI: AMPIEZZA, PULSAZIONE, PERIODO E FREQUENZA DELLE OSCILLAZIONI

ATTENZIONE ALLE CIFRE SIGNIFICATIVE: ESSE SONO TUTTE LE CIFRE TRASCRITTE DOPO L'ULTIMO ZERO

$14{,}70 \rightarrow 4$ CIFRE
$0{,}84 \rightarrow 2$ CIFRE
$0{,}0100 \rightarrow 3$ CIFRE

PER IL PRODOTTO E IL RAPPORTO LA PRECISIONE DELLE CIFRE È DEL RISULTATO È QUELLA DEL FATTORE CHE NE HA MENO

- FREQUENZA

$$\omega = 2\pi\mu \qquad \mu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}080\ s^{-1}$$

- PERIODO

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 13\ s$$

CASO 2 $\quad x_0 = 0 \quad V_0 > 0$

PROCEDO COME PER IL CASO PRECEDENTE

$$x(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$
$$\dot{x}(t) = -\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)$$

CONDIZIONI INIZIALI $t=0$

$$x(0) = A = 0 \qquad A = 0$$
$$\dot{x}(0) = B\omega = V_0 \qquad B = \frac{V_0}{\omega} \qquad x(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

DA CONDIZIONI INIZIALI DIVERSE OTTENGO UNA LEGGE ORARIA DIFFERENTE

- SEMIAMPIEZZA

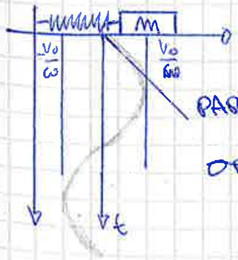
LA POSSO OTTENERE COME $\frac{V_0}{\omega}$ $\qquad \left[\frac{V_0}{\omega}\right] = \left[\frac{m}{s}\cdot s\right] = [m]$

$$\frac{V_0}{\omega} = \frac{0{,}1\ m/s}{0{,}50\ s^{-1}} = 0{,}2\ m$$

- ω, T, μ RIMANGONO COME PRIMA

OSSERVAZIONE

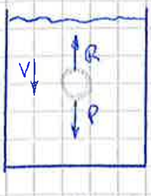
IL PERIODO E LA FREQUENZA NON DIPENDONO DALLE CONDIZIONI INIZIALI MA DA k E m



PARTO DA UN PUNTO CON TANGENTE $V_0 > 0$

OTTENGO IL GRAFICO DEL SENO

MOTO IN REGIME DI ATTRITO VISCOSO



Pb: LEGGE ORARIA DEL MOTO DELLA SFERETTA

$x(0)=0$

$\dot{x}(0) = V_0 > 0$

LEGGI DELLE FORZE

$P = mg \qquad R = \gamma V$ CON γ COEFF. DI ATTRITO VISCOSO

CORPOSTA CON LA II LEGGE DI NEWTON AVREMO:

$m\ddot{x} = mg - \gamma\dot{x} \rightarrow$ È UNA FORZA RESISTENTE CHE SI OPPONE SEMPRE AL MOTO

È UN EQ DIFF IN INCOGNITA $x(t)$ DEL SECONDO ORDINE

$\ddot{x} = g - \frac{\gamma}{m}\dot{x}$ LA FUNZIONE INCOGNITA NON APPARE COME $x(t)$

SE PONGO $\dot{x} = V$ e $\ddot{x} = \dot{V}$

$\dot{V} = g - \frac{\gamma}{m}V$ EQ DIFF. DEL PRIMO ORDINE

$[g] = \left[\frac{L}{T^2}\right] \qquad \left[\frac{\gamma}{m}\right] = \left[\frac{1}{T}\right]$ QUINDI $\left[\frac{m}{\gamma}\right] = [T]$

ESSO È UN TEMPO CARATTERISTICO DELL'EQ $\tau = \frac{m}{\gamma}$ (TAO)

$\dot{V} = g - \frac{1}{\tau}\cdot V(t)$ EQ DIFF. A VARIABILI SEPARABILI

$\frac{dv}{dt} = g - \frac{1}{\tau}v(t) \qquad dv = \left(g - \frac{1}{\tau}V(t)\right)dt$

NELL'EQUAZIONE t È DETTA VARIABILE INDIPENDENTE MENTRE V È LA VARIABILE DIPENDENTE. METODO A VARIABILI SEPARABILI

$$\int_{V(0)}^{V(t)} \frac{dv}{g - \frac{1}{\tau}V} = \int_0^t dt' \rightarrow t$$

DEVO INTEGRARE IL PRIMO MEMBRO, POSSO RICONDURMI ALLA FORMA:

$$\int \frac{dx}{1-x} = -\log|1-x| + k$$

NEL NOSTRO CASO

$$\left[\log\left|g - \frac{1}{\tau}V\right| \cdot (-\tau)\right]_{V_0}^{V(t)} = -\tau\log\left|g - \frac{1}{\tau}V(t)\right| + \tau\log\left|g - \frac{1}{\tau}V_0\right| =$$

$$= \tau\log\left|\frac{g - V_0/\tau}{g - V(t)/\tau}\right| = \tau\log\left|\frac{g\tau - V_0}{g\tau - V(t)}\right|$$

OTTENGO L'EQUAZIONE IMPLICITA PER t:

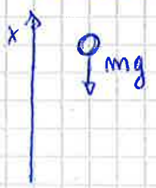
$$t = \tau\log\left|\frac{g\tau - V_0}{g\tau - V(t)}\right|$$

29

TRUCCO FONDAMENTALE di Newton

FINO AD ADESSO UTILIZZANDO LE LEGGI DELLE FORZE E LA SECONDA LEGGE DI NEWTON CON DUE INTEGRAZIONI TROVIAMO LA LEGGE ORARIA DEL MOTO CONSIDERATO. UN PROBLEMA FISICO LO TRASFORMIAMO IN UNO MATEMATICO

UN ESEMPIO ELEMENTARE PUÒ ESSERE LA CADUTA DI UN CORPO:



PER LA LEGGE DELLA FORZA HO:

$$\cancel{m}a = -\cancel{m}g$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

ATTRAVERSO UNA PRIMA INTEGRAZIONE TROVO LA VELOCITÀ:

$$\int_0^t \frac{d^2x}{dt'^2}\,dt' = -\int_0^t g\,dt' \qquad \frac{dx}{dt} = V_0 - gt$$

INTEGRO NUOVAMENTE PER OTTENERE LA LEGGE ORARIA

$$\int_0^t \frac{dx}{dt}\,dt' = \int_0^t (V_0 - gt)\,dt'$$

$$x(t) - x_0 = V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$x(t) = x_0 + V_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

QUESTO METODO ELEMENTARE NEL CASO DI MOTI PIÙ COMPLESSI NON FUNZIONA PIÙ PERCHÉ LA FORZA NON È COSTANTE, PENSIAMO TIPO NEI MOTI ARMONICI (SISTEMA MASSA-MOLLA)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \qquad \int_0^t m\frac{d^2x}{dt^2}\,dt' = -k\int_0^t x\,dt'$$

NON RIESCO A RISOLVERE IL ~~SEO~~ PROBLEMA PERCHÉ NON CONOSCO $x(t)$ NEPPURE UNA SUA PRIMITIVA

USO UN METODO CHE UTILIZZA LE ENERGIE

IL METODO UTILIZZATO DA NEWTON FUNZIONA NEL SEG. MODO:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$$

MOLTIPLICO ENTRAMBI I MEMBRI PER LA VELOCITÀ $V(t) = \frac{dx}{dt}$

$$m\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}}_{\text{RISCRIVO COME DERIVATA TOTALE}} = -k\underbrace{x(t)\cdot\frac{dx(t)}{dt}}_{\text{POSSO RISCRIVERLA COME DERIVATA DI UNA SOLA FUNZIONE:}}$$

$$V^{2\prime} = 2VV' \qquad f^{2\prime}(x) = 2f(x)f'(x)$$

NEL NOSTRO CASO AVREMO

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}V^2(t)\right] = \frac{d}{dt}\left[-\frac{k}{2}x^2(t)\right]$$

IL PRIMO MEMBRO PRENDE IL NOME DI ENERGIA CINETICA

SOSTITUISCO

$$\int_{X_0}^{X(t)} \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}\, dX}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}\frac{2E}{k}X^2}} = \frac{\sqrt{\frac{2E}{k}}}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} \int_{X_0}^{X(t)} \frac{dX}{\sqrt{1-X^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \arcsin[X(t)] - \arcsin[X_0] \right\}$$

TORNO ALLA VARIABILE INIZIALE $X = \sqrt{\frac{k}{2E}}\, x$

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \left\{ \arcsin\left[\sqrt{\frac{k}{2E}}\, x(t)\right] - \underbrace{\arcsin\left[\sqrt{\frac{k}{2E}}\, x_0\right]}_{} \right\} = \pm t$$

È UN NUMERO Φ_0 VIENE DETTO FASE

DALL'EQUAZIONE METTO IN EVIDENZA LA LEGGE ORARIA

$$\arcsin\left[\sqrt{\frac{k}{2E}}\, x(t)\right] = \pm\sqrt{\frac{k}{m}} + \Phi_0$$

~~PONGO~~ DEFINISCO $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ LA PULSAZIONE

$$\sqrt{\frac{k}{2E}}\, x(t) = \sin\left(\pm\sqrt{\frac{k}{m}} + \Phi_0\right)$$

$$x(t) = \pm\sqrt{\frac{2E}{k}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} + \Phi_0\right)$$

VADO A SOSTITUIRE LE CONDIZIONI INIZIALI IN CUI

$$E = \frac{m}{2} V_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2$$

$$A := \sqrt{\frac{2E}{k}} = \sqrt{\frac{2}{k}\left(\frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2\right)} = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x_0^2} = \sqrt{\left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2 + x_0^2}$$

L'EQUAZIONE DEL MOTO FINALE SARÀ

$$\boxed{x(t) = \pm A \sin(\omega t + \Phi_0)}$$

RICORDIAMO CHE:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \qquad e \qquad \sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$

QUINDI PONENDO A MIO PIACERE Φ_0

$$\Phi_0 = \Phi_0' + \frac{\pi}{2} \qquad \Phi_0 = \Phi_0' + \pi$$

POSSO RICONDURRE L'EQUAZIONE DEL MOTO NELLA FORMA

$$x(t) = \pm A \cos(\omega t + \Phi_0) \qquad \text{con } \Phi_0 \text{ RIDEFINITO}$$

Th ENERGIA CINETICA 1D

UTILIZZO LO SCHEMA GENERALE DELLE FORZE POSIZIONALI

$F = F(x)$ NON C'È RESISTENZA

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x(t))$$

UTILIZZO IL TRUCCO DI NEWTON

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right] = F(x(t))\,\frac{dx}{dt} \Rightarrow \text{POTENZA}$$

ENERGIA CINETICA

INTEGRO ENTRAMBI I MEMBRI $\int_0^t \dots dt'$

$$\frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 - \frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(0)\right]^2 = L$$

$$K \qquad \boxed{K_f - K_i = L}$$

TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

LA VARIAZIONE ~~DEL LAV~~ DELL'ENERGIA CINETICA È IL LAVORO: DIFFERENZA TRA L'ENERGIA FINALE E QUELLA INIZIALE

SE POI:

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\,U(x) \rightarrow \text{ENERGIA POTENZIALE}$$

L'UGUAGLIANZA È SEMPRE POSSIBILE IN UNA DIMENSIONE PERCHÉ $U(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x')dx'$

OTTENGO CHE

$$\cancel{F(x)} \; \frac{m}{2}\left[\frac{dx}{dt}(t)\right]^2 + U[x(t)] = E$$

$$\boxed{K + U = E}$$

CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

L'ENERGIA RIMANE COSTANTE NEL TEMPO!

$$K_{in} + U_{in} = K_f + U_f$$

LA CONSEGUENZA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA È LA POSSIBILITÀ DI RISOLVERE TUTTI I PROBLEMI DINAMICI IN UNA DIMENSIONE CON FORZE PROPORZIONALI

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + U_x = E \qquad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_x\right]}$$

PER VARIABILI SEPARABILI

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U_x\right]}} = \pm \int_0^t dt$$

SI PROCEDE CON IL METODO DELLE QUADRATURE: SI VA A CERCARE LA SOLUZIONE DELL'INTEGRALE

RICORDIAMO CHE

POTENZA = FORZA · VELOCITÀ = LAVORO / TEMPO (PRODOTTO SCALARE)

LAVORO = $\int$ FORZA dx SE LA FORZA È COSTANTE POSSO SCRIVERE $L = F \cdot \Delta x$

FORZA ELASTICA $\quad F = -kx$

RICORDIAMO CHE L'ENERGIA POTENZIALE U É IL LAVORO FATTO PER PORTARE LA MASSA IN x PARTENDO DA UN PUNTO DI RIFERIMENTO FISSO x_0 CAMBIATO DI SEGNO.
PER ACCUMULARE ENERGIA DEVO FARE LAVORO SULLA MOLLA

$$U = -\int_{x_0}^{x} F(x')\,dx' = -\int_{x_0}^{x} -kx'\,dx' = k\int_{x_0}^{x} x'\,dx' = k\left[\frac{(x')^2}{2}\right]_{x_0}^{x} =$$

$$= k\left\{\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}\right\} = \frac{k}{2}x^2 + \text{COST}$$

L'ENERGIA É SEMPRE DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE ARBITRARIA:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$ ANNULLO LA COSTANTE

SICCOME U É UNA PRIMITIVA DEFINITA GRAZIE AD UNA COSTANTE, QUANDO DERIVO PER RITROVARE LA FORZA LA MIA COSTANTE SCOMPARE: MI CONVIENE DI VOLTA IN VOLTA SCEGLIERE UNA COSTANTE x_0 IN MANIERA COMODA $\Rightarrow x_0 = 0$ POSIZIONE DI RIPOSO

IN QUESTO MODO POSSO SCRIVERE

$$U^{el} = \frac{k}{2}x^2$$

POSSO UTILIZZARE IL METODO ENERGETICO PER CALCOLARE CON QUALE VELOCITÁ PASSA LA MASSA PER IL PUNTO DI RIPOSO DELLA MOLLA.

IMPONGO LE CONDIZIONI INIZIALI $\dot{x}(0) = 0 \quad x(0) = x_0 > 0$

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\frac{m}{2}V_f^2 + \cancel{\frac{k}{2}x_f^2} = \cancel{\frac{m}{2}V_i^2} + \frac{k}{2}x_i^2$$

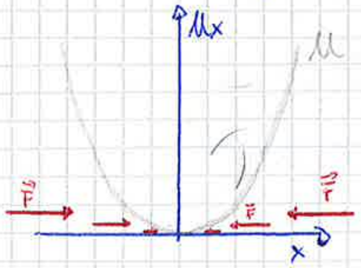
$V = 0 \qquad x = x_0$

AL TEMPO FINALE DELLA MIA MISURAZIONE LA MOLLA SI TROVA NELLA CONDIZIONE DI RIPOSO $x = 0$

$$\frac{m}{2}V_f^2 = \frac{k}{2}x_0^2 \qquad V_f = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x_0$$

CON QUESTO METODO NON MI DEVO CALCOLARE IL TEMPO ESATTO IN CUI LA MOLLA SI TROVA NELLA POSIZIONE DI RIPOSO E NON UTILIZZO LE EQUAZIONI DEL MOTO

IL GRAFICO DELL'ENERGIA POTENZIALE SARÁ:



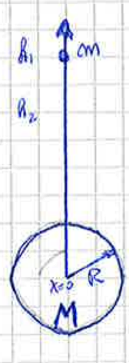
$$\vec{F} = -\frac{d}{dx}U$$

LA DIREZIONE DELLA FORZA É SEMPRE VERSO IL MINIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE, LA FORZA TENDE A FARLA DIMINUIRE

- LA POSIZIONE $x=0$ É LA POSIZIONE DI RIPOSO DELLA MOLLA, É ANCHE PUNTO DI EQUILIBRIO
- MINIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE

MA LA FORZA PESO È SEMPRE COSTANTE?

DOBBIAMO TENERE PRESENTE CHE È SOLO UNA MANIFESTAZIONE DELL'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE TERRESTRE.



$R = 6400\ km$

UTILIZZIAMO UN ESEMPIO:
UN CORPO È LASCIATO CADERE DA FERMO $V=0$ DA UNA QUOTA h_1 ALLA QUOTA h_2, MISURATE DAL LIVELLO DEL SUOLO, CON QUALE FORZA VIENE ATTRATTO IL CORPO DALLA TERRA?

UTILIZZO LA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE:

$$F(x) = -\frac{Mm}{x^2}\cdot G$$

$\ominus$ È UNA FORZA ATTRATTIVA
x^2 DISTANZA DAL CENTRO DEI DUE CORPI

DA UN ANALISI DIMENSIONALE OTTENGO LE DIMENSIONI DI G, DEFINITA COME COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$\left[kg\,\frac{m}{s^2}\right] = [G]\left[\frac{kg^2}{m^2}\right] \qquad [G] = \left[\frac{m^3}{kg\,s^2}\right] = 6{,}67\cdot 10^{-11}$$

MA QUAL'È LA RELAZIONE TRA G e g?

AL SUOLO SO CHE $F = -mg$ E CHE $x = R$

$$+G\frac{Mm}{R^2} = +mg \qquad \boxed{g = \frac{GM}{R^2}}$$

NEL MIO PROBLEMA AVRÒ UNA DIVERSA g, MA A QUALE ALTITUDINE DEVO INIZIARE A TENERE CONTO CHE LA FORZA PESO NON È COSTANTE?

PONIAMO $x = R + z$ CON $z \ll R$ DEFINITA COME LA DISTANZA DAL SUOLO

$$F = -G\frac{Mm}{x^2} = -G\frac{Mm}{(R+z)^2} = -G\frac{Mm}{R^2\left(1+\frac{z}{R}\right)^2} =$$

$$= -G\frac{Mm}{R^2}\left(1+\frac{z}{R}\right)^{-2} \underset{\text{TAYLOR}}{=} -G\frac{Mm}{R^2}\Big(1-\underbrace{\frac{2z}{R}}_{\text{PRIMA CORREZIONE}}+\dots\Big)$$

NEL NOSTRO CASO SE $h = z = 500\ km$ ABBIAMO UNA PRIMA CORREZIONE DATA DA

$$\frac{2z}{R} \simeq \frac{1000}{6500} \simeq 0{,}2 = 20\%$$

CONSIDERANDO LA FORZA PESO COSTANTE COMPIAMO UN ERRORE DEL 20%.

L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE SARÀ

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} -G\frac{Mm}{x'^2}\,dx' = GMm\int_{x_0}^{x}\frac{1}{x'^2}\,dx' = GMm\left[-\frac{1}{x'}\right]_{x_0}^{x}$$

$$= GMm\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x_0}\right) = -G\frac{Mm}{x} + \text{COST}$$

$x_0 \to +\infty \quad \frac{1}{x_0} = 0$

$$U^{GRAV} = -G\frac{Mm}{x}$$

RIASSUNTO

- FORZA PESO in posizione del suolo

$$F(z) = -\frac{d}{dz} mgz = -mg$$

$$U(z) = mgz$$

- FORZA ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

$$F(z) = -\frac{d}{dz}\left(-G\frac{Mm}{z}\right) = -G\frac{Mm}{z^2}$$

$$U(z) = -G\frac{Mm}{z}$$

- FORZA DI REPULSIONE ELETTROSTATICA

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(k\frac{Qq}{x}\right) = k\frac{Qq}{x^2}$$

$$U(x) = k\frac{Qq}{x}$$

- FORZA ELASTICA

$$F(x) = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2\right) = -kx$$

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

- ENERGIA CINETICA

$$K = \frac{1}{2}mV^2 \qquad L = K_f - K_i$$

- LAVORO

$$L = \int_{x_0}^{x_t} F(x)\,dx$$

É LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA $= K_f - K_i$

- ENERGIA POTENZIALE

$$U(x) = -L$$

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x_t} F(x)\,dx$$

L'ENERGIA POTENZIALE É IL LAVORO SPESO PER SPOSTARE UN CORPO, SPENDO ENERGIA PER FARE LAVORO

- CONSERVAZIONE ENERGIA

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

PER LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA ABBIAMO BISOGNO DI CAPIRE COME SI COMPORTA L'ENERGIA POTENZIALE IN PIÙ DIMENSIONI

- IN UNA DIMENSIONE SE LE FORZE SONO POSIZIONALI ALLORA IL LAVORO FATTO DALLA FORZA È:

$$L_{x_0 \to x} = \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx'$$

ESSA È UNA FUNZIONE BEN DEFINITA DEL PUNTO DI ARRIVO X, SI TRATTA DI UNA PRIMITIVA DI F:

$$\frac{d}{dx} L_{x_0 \to x} = F(x)$$

C'È UNA DIPENDENZA DAL PUNTO INIZIALE PRESO IN CONSIDERAZIONE

$$L_{x_1 \to x_f} = \int_{x_1}^{x_f} F(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_f} F(x)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x)\,dx = L_{x_0 \to x_f} - L_{x_0 \to x_1}$$

HO VISTO CHE FISSATO UN X_0 NON HO PERSO NESSUNA INFORMAZIONE

POSSO RISCRIVERE L'EQ. DELL'ENERGIA CINETICA COSÌ:

$$K_f - K_i = L_{x_0 \to x_f} - L_{x_0 \to x_i}$$

$$\underbrace{K_f - L_{x_0 \to x_f}}_{U_f} = \underbrace{K_i - L_{x_0 \to x_i}}_{U_i}$$

RICORDO CHE L'ENERGIA POTENZIALE È IL LAVORO CAMBIATO DI SEGNO

$$U = -L_{x_0 \to x}$$

$$\boxed{K_f + U_f = K_i + U_i}$$

L'ENERGIA POTENZIALE È DEFINITA A MENO DELLA SCELTA ARBITRARIA DEL PUNTO X_0 DI PARTENZA, SCELTE DIVERSE DI X_0 DANNO U_x CHE SONO DIVERSE SOLO PER L'AGGIUNTA DI UNA COSTANTE

- POSSO FARE LO STESSO IN 2/3 D? CIOÈ TROVARE UNA "ENERGIA POTENZIALE" CHE SIA UNA SPECIE DI PRIMITIVA DELLA FORZA CAMBIATA DI SEGNO?

LA FORZA $\vec{F}$ IN 2/3 D È UN VETTORE, NON È OVVIO COSA SIA LA SUA PRIMITIVA:

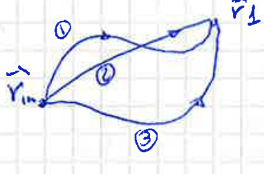
$$L = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_{in}}^{\vec{r}_f} (\vec{F}_x \hat{i} + \vec{F}_y \hat{j} + \vec{F}_z \hat{k}) \cdot (\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy + \hat{k}\,dz) =$$

$$= \int_{\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)}^{\vec{r}_f = (x_f, y_f, z_f)} \left[F_{(x)}(x,y,z)\,dx + F_y(x,y,z)\,dy + F_z(x,y,z)\,dz \right]$$

QUESTA SCRITTURA È CHIAMATA INTEGRALE DI LINEA

P 114

IL PROBLEMA PRINCIPALE È CHE NON ESISTE UNA SOLA TRAIETTORIA PER ANDARE DA UN PUNTO AD UN ALTRO, ESISTONO INFINITI PERCORSI DA SEGUIRE.



POSSO PASSARE LUNGO UNA CURVA QUALSIASI, NON HO SCRITTO DA NESSUNA PARTE QUALE LAVORO COMPIO

OSSERVAZIONE

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{d}{dy} \cdot \frac{dL}{dx} = \frac{d^2L}{dy\,dx} \overset{\text{th SHAWARZ}}{=} \frac{d^2L}{dx\,dy} = \frac{dF_y}{dx}$$

LA DERIVATA DELLA COMPONENTE X RISPETTO A Y È UGUALE ALLA DERIVATA DI F_y RISPETTO A X

$$\frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx}$$

LA CONDIZIONE POTREBBE NON ESSERE VERIFICATA QUANDO L'INTEGRALE DIPENDE DALLA TRAIETTORIA. IN GENERALE AVREMO:

B
$$\begin{cases} \frac{dF_x}{dy} = \frac{dF_y}{dx} \\ \frac{dF_x}{dz} = \frac{dF_z}{dx} \\ \frac{dF_y}{dz} = \frac{dF_z}{dy} \end{cases}$$

$x \to y \to z \to x$ È UNA PERMUTAZIONE CICLICA

ABBIAMO TROVATO 3 CONDIZIONI ALGEBRICHE CHE UNA FORZA DEVE VERIFICARE PER AMMETTERE UN POTENZIALE, È QUINDI EVIDENTE CHE NON TUTTE LE FORZE AMMETTONO UN POTENZIALE IN PIÙ DIMENSIONI

INTRODUCIAMO UN NUOVO OPERATORE PER SCRIVERE IN MANIERA PIÙ COMPATTA I SISTEMI PRECEDENTI

$$\boxed{\vec{\nabla} = \hat{\imath}\frac{d}{dx} + \hat{\jmath}\frac{d}{dy} + \hat{k}\frac{d}{dz}}$$

ESSO VIENE CHIAMATO GRADIENTE O "NABLA"

AVRÒ LA SCRITTURA SEMPLIFICATA DEI SISTEMI

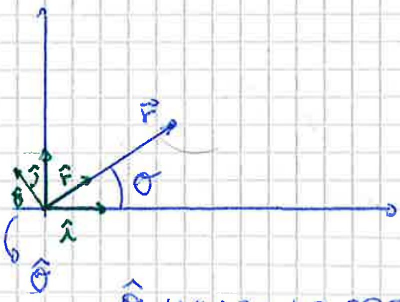
A $\vec{F} = \vec{\nabla} \cdot L$

B $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ (VETTORIALE)

LA SECONDA EQUAZIONE È VERIFICABILE:

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dx} \\ \frac{d}{dy} \\ \frac{d}{dz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dF_z}{dy} - \frac{dF_y}{dz} \\ \frac{dF_z}{dx} - \frac{dF_x}{dz} \\ \frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

COORDINATE POLARI:



INTRODUCIAMO IL VERSORE $\hat\theta$ ORTOGONALE AL VERSORE $\hat r$
ESSI SONO I VERSORI $\hat i$ e $\hat j$ RUOTATI DI UN CERTO ANGOLO θ

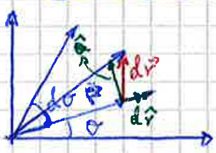
$$\hat r = \hat i \cos\theta + \hat j \sin\theta$$

$$\hat\theta = -\hat i \sin\theta + \hat j \cos\theta = \frac{d\hat r}{d\theta}$$

$\hat\theta$ INDICA LO SPOSTAMENTO DEL VETTORE $\hat r$ SE SI INCREMENTA LENTAMENTE L'ANGOLO θ

$$\hat\theta = \frac{d}{d\theta}\hat r \qquad d\hat r = d\theta\,\hat\theta \qquad d\theta \to 0 \qquad \theta = \theta + d\theta$$

VOGLIO RIUSCIRE A DECOMPORRE LO SPOSTAMENTO IN UNA DIREZIONE RADIALE E UNA TANGENZIALE



POSSO RISCRIVERE $d\vec r$ COME

$$\boxed{d\vec r = \hat r\, dr + \hat\theta\, r\, d\theta}$$

IN CUI dr e $r\,d\theta$ SONO MODULI e $\hat r, \hat\theta$ VERSORI

CON QUESTA FORMULA DESCRIVIAMO I PICCOLI SPOSTAMENTI NELLE DIREZIONI RADIALI E TANGENZIALI

VIENE RICAVATA
LA PARTE TANGENTE POSSO ~~SCRIVERLA COME~~ RICAVARLA CON LE FORMULE DI TRIGONOMETRIA PER PICCOLI SPOSTAMENTI:

$$(\vec r + d\vec r)\sin(d\theta) \sim r\sin(d\theta) + \overbrace{dr\sin(d\theta)}^{\text{SECONDO ORDINE}}$$

$$\sim r\sin(d\theta) \sim r\,d\theta + \text{TERMINI DI SECONDO ORDINE}$$

ORA CHE CONOSCIAMO LE COORDINATE DEL NOSTRO SISTEMA POSSIAMO CALCOLARCI LA FORZA E IL LAVORO CHE AVVIENE NEL NOSTRO SISTEMA

$$\vec F(\vec r) = f(\vec r)\cdot\hat r = -k(r - l_0)\hat r$$

SAPPIAMO CHE IL LAVORO È UNA PRIMITIVA DELLA FORZA

$$L = \int_A^B \vec F\cdot d\vec r = \int_A^B -k(r-l_0)\,\hat r\cdot d\vec r = \int_A^B f(\vec r)\,\hat r\cdot d\vec r$$

$$\hat r\cdot d\vec r = \hat r\cdot(\hat r\,dr + r\,d\theta\,\hat\theta)$$

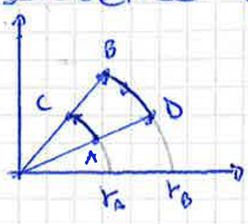
RICORDIAMO $\hat r\cdot\hat r = 1$
$\hat r\cdot\hat\theta = 0 \quad \hat r \perp \hat\theta$

$$= dr + 0 \qquad \boxed{\hat r\cdot d\vec r = dr}$$

$$L = \int_A^B f(\vec r)\,dr$$

IN CUI $r = \sqrt{x^2+y^2}$ MODULO DEL VETTORE

PERÒ TROVANDOCI IN 2D IL LAVORO PUÒ ESSERE COMPIUTO SEGUENDO TRAGITTI DIVERSI:



VOGLIO TROVARE

L_{A-C-B} e L_{A-D-B}

FORZE CENTRALI

LO STUDIO PER LA FORZA ELASTICA SI ESTENDE IMMEDIATAMENTE A QUALSIASI FORZA CHE ABBIA LA FORMA:

$$\vec{F} = f(\vec{r})\,\hat{r}$$

QUESTE VENGONO DETTE FORZE CENTRALI E SONO SEMPRE CONSERVATIVE

$$L = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B f(\vec{r})\,\hat{r}\, d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(\vec{r})\, dr$$

IL CALCOLO DELL'INTEGRALE DI LINEA IN 3D SI RIDUCE AL CALCOLO DI UN INTEGRALE TRADIZIONALE IN 1D

FORZA ELASTICA

$$f(r) = -kr$$

$$U = -\int_0^r -kr'\,dr' = \frac{k}{2} r^2$$

ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE

$$f(r) = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$U = -\int_\infty^r f(r')\,dr' = -\int_\infty^r -G\frac{Mm}{r'^2}\,dr' = \cancel{\int_\infty^r G\frac{Mm}{r^2}}$$

$$= GMm\int_\infty^r \frac{dr'}{r'^2} = -GMm\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = -G\frac{Mm}{r}$$

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} \quad \text{IN CUI } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

NOTO CHE IN UN SISTEMA A PIÙ DIMENSIONI L'ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE HA LA STESSA FORMA IN 1D PUR SOSTITUENDO X CON IL MODULO DEL VETTORE

ATT-REP ELETTROSTATICA

$$f(r) = +k\frac{Qq}{r^2}$$ + PERCHÉ È UNA FORZA REPULSIVA

$$U = k\frac{Qq}{r}$$ È SEMPRE UGUALE A QUELLA IN 1D, PERCHÉ IL SISTEMA DI RIFERIMENTO PUÒ ESSERE PRESO COME SE FOSSE UNIDIMENSIONALE

TUTTI I RAGIONAMENTI CHE ABBIAMO FATTO SONO PER FORZE POSIZIONALI, SE LE FORZE SONO NON POSIZIONALI I RAGIONAMENTI NON FUNZIONANO COME PER LA RESISTENZA VISCOSA O AERODINAMICA:

$$\vec{F} = -\gamma\dot{\vec{r}} \qquad \vec{F} = -\alpha v^2 \frac{\vec{r}}{r}$$

PER QUESTE FORZE NON POSSIAMO DEFINIRE UN POTENZIALE E L'ENERGIA MECCANICA NON SI CONSERVA!

$$K_i - K_f = L < 0$$

CI SONO FORZE RESISTENTI CHE MI IMPEDISCONO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$K_f < K_i$ QUESTE FORZE SONO DETTE **DISSIPATIVE**
ATTRITI e RESISTENZE

CONDIZIONI di IRROTAZIONALITÁ

FORZA CONSERVATIVA

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u$$

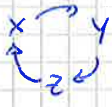
SE É CONSERVATIVA É NECESSARIAMENTE VERA CHE:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \qquad \underline{\text{rot}\,\vec{F} = 0}$$

(ROTORE)

LA QUALE IMPLICA CHE

$$\begin{cases} \dfrac{dF_x}{dy} = \dfrac{dF_y}{dx} \\[2mm] \dfrac{dF_y}{dz} = \dfrac{dF_z}{dy} \\[2mm] \dfrac{dF_z}{dx} = \dfrac{dF_x}{dz} \end{cases}$$



MA LA CONDIZIONE É ANCHE SUFFICIENTE?? SI SCOPRE CHE TUTTO DIPENDE DALLA "FORMA" DEL DOMINIO DI

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$$

forma

PER ESEMPIO NEL PIANO LA TOPOLOGIA DEL DOMINIO PUÓ ESSERE:

1

DOMINIO NON CONNESSO TANTI

2

DOMINIO NON SEMPLICEMENTE CONNESSO, HO DEI BUCHI

3

DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO, UN UNICO PEZZO

PER ESEMPIO

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r} \quad \text{É DEFINITA PER } r \neq 0$$

$$\text{dom}\,\vec{F} = \mathbb{R}^3 - \{0,0,0\}$$

HO UN BUCO NELL'ORIGINE MI TROVO NELLA SITUAZIONE 2

TEOREMA

SE $F(x,y,z)$ É CONTINUA CON DERIVATE CONTINUE (C^1) SU UN DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO É INOLTRE É UN CAMPO DI FORZE IRROTAZIONALE ($\text{rot}\,\vec{F} = 0$) ALLORA $\vec{F}$ AMMETTE UN POTENZIALE CIOÉ É UNA FORZA CONSERVATIVA

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} u$$

VERIFICO CHE $\vec{F}(\vec{r}) = \hat{k} \times \vec{r}$ NON SODDISFA LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÁ $\text{rot}\,\vec{F} = 0$

NON SODDISFANDO LA CONDIZIONE $\text{rot}\,\vec{F} = 0$ CI TROVIAMO IN UN CAMPO NON CONSERVATIVO

$$\vec{F} = \hat{k} \times (x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) = \hat{k} \times \hat{\imath}\, x + \hat{k} \times \hat{\jmath}\, y + \hat{k} \times \hat{k}\, z$$

RICORDIAMO CHE $\hat{k} \times \hat{k} = 0 \quad \hat{k} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \quad \hat{\imath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \quad \hat{\jmath} \times \hat{k} = \hat{\imath}$

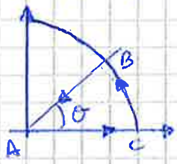
NEL PUNTO PRECEDENTE ABBIAMO VISTO CHE NEL CASO ROTAZIONALE IL LAVORO DIPENDE DAL CAMMINO

- SUPPONIAMO ORA UNA FORZA IRROTAZIONALE MA NON CONSERVATIVA

$$\vec F = \frac{\hat k \times \vec r}{r^2} \quad \text{NEL PIANO} \qquad rot\,\vec F \neq 0$$

$$\vec F = -\frac{y}{r^2}\hat\imath + \frac{x}{r^2}\hat\jmath \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{d\sqrt{x^2+y^2}}{dx} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

IL DOMINIO DI $\vec F$ HA UN BUCO IN $\vec r = 0$:
ANCHE SE LA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÀ È SODDISFATTA IL LAVORO DIPENDE DAL CAMMINO



$\hat\theta \perp \hat r \rightarrow$ SCALARE ORTOGONALE $= 0$

$$\int_A^C \vec F \cdot d\vec r = \int_A^C \frac{\hat k \cdot \hat\theta}{r^2} \cdot (\hat r\, dr + \hat\theta\, r\, d\theta) = 0 = \int_A^B \vec F\, d\vec r$$

$$\int_C^B \vec F \cdot d\vec r = \int_C^B \frac{r\hat\theta}{r^2} \cdot (\hat r\, dr + \hat\theta\, r\, d\hat\theta) = \int_0^\theta d\theta = \theta$$

IL LAVORO COMPIUTO DAGLI SPOSTAMENTI VIENE ESATTAMENTE UGUALE ALL'ANGOLO, HO INFINITI MODI DI ARRIVARE IN B FACENDO LAVORI DIVERSI.

SE FACCIO UN GIRO COMPLETO HO L'INTEGRALE CHIUSO

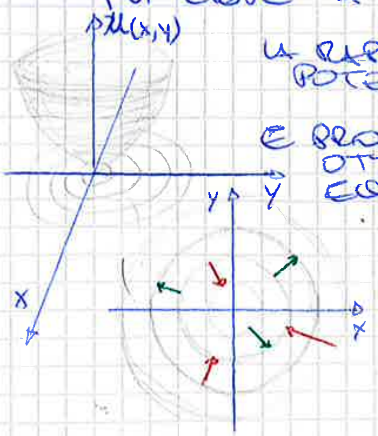
$$\oint_\gamma \vec F \cdot d\vec r = 2\pi \neq 0 \qquad \text{FORZA NON CONSERVATIVA}$$

- TORNO AD ANALIZZARE UN CASO DI FORZA CONSERVATIVA, CON LA MOLLA

$$\vec F(\vec r) = -k\vec r \Rightarrow \begin{cases} F_x = -kx \\ F_y = -ky \\ F_z = -kz \end{cases}$$

$$U_{\vec r} = -\int \vec F(\vec r)\, d\vec r = \frac{k}{2} r^2 = \frac{k}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

NEL PIANO $U_{\vec r}$ SARÀ SOLO $U_{(x,y)} = \frac{k}{2}(x^2+y^2)$ UNA FUNZIONE A DUE VARIABILI.



LA RAPPRESENTAZIONE SULLO SPAZIO DELL'ENERGIA POTENZIALE SARÀ UN PARABOLOIDE DI ROTAZIONE

E PROIETTANDO SUL PIANO xy DEI PIANI U = COST OTTENGO UNA RAPPRESENTAZIONE CON LINEE EQUIPOTENZIALI:

$$\vec F = -\vec\nabla U$$

$\longrightarrow \vec\nabla U$

$\longrightarrow \vec F$

DOBBIAMO SAPERE CHE $\vec\nabla U$ È UN PIANO VETTORIALE SEMPRE ORTOGONALE ALLE LINEE EQUIPOTENZIALI ED È DIRETTO VERSO LA DIREZIONE DI CRESCITA DI U.
MENTRE LA FORZA È DIRETTA VERSO ZONE AD ENERGIA POTENZIALE MINORE, VERSO LA ZONA DI EQUILIBRIO DELLA MOLLA RAPPRESENTATA DAL PUNTO (0,0,0)

LA FORZA VIENE SEMPRE APPLICATA NEL PUNTO CENTRALE E POSSIEDE DUE COMPONENTI

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 0 + \frac{dF_x}{dx}x + \frac{dF_y}{dx}y + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ F_y(x,y) = 0 + \frac{dF_y}{dx}x + \frac{dF_y}{dy}y + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases}$$

dx, dy É L'INCREMENTO LUNGO LA COMPONENTE

POSSO CALCOLARE IL LAVORO SUL TRATTO ORIZZONTALE A-C

$$L_{A-C} = \int_A^C \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_A^C F_x dx + \cancel{F_y dy} = \int_0^\varepsilon F_{x(x,0)}\, dx =$$

$$= \int_0^\varepsilon \frac{dF_x}{dx} x\, dx = \frac{dF_{(x)}(0,0)}{dx} \int_0^\varepsilon x\, dx = \frac{dF_{(x)}(0,0)}{dx} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}$$

INTEGRANDO TUTTI I TRATTI OTTENGO I LAVORI COMPLESSIVI COME

$$L_{A-C-B} = \frac{dF_x(0,0)}{dx}\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{dF_y}{dx}(0,0)\,\varepsilon^2 + \frac{dF_y}{dy}(0,0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$L_{A-D-B} = \frac{dF_x}{dx}(0,0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{dF_x}{dy}(0,0)\,\varepsilon^2 + \frac{dF_y}{dy}(0,0)\frac{\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

FACCIO LA DIFFERENZA MEMBRO A MEMBRO ED OTTENGO

$$L_{A-C-B-D-A} = 0 + \left[\frac{dF_y}{dx}(0,0) - \frac{dF_x}{dy}(0,0)\right]\varepsilon^2 + 0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

QUELLO OTTENUTO É IL DIFETTO DI LAVORO, PROPORZIONALE ALLA DIFFERENZA DELLE DERIVATE IN CROCE DIVERSE DA ZERO SE FOSSE ZERO AVREI UNA CONDIZIONE DI IRROTAZIONALITÀ

$$L_{A-C-B-D-A} = \oint \vec{F}(\vec{r})\, d\vec{r}$$

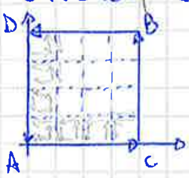
É IL LAVORO COMPIUTO SUL PERIMETRO PERCORRENDOLO IN SENSO ANTIORARIO

$$\oint \vec{F} \circ d\vec{r} = \left[\frac{dF_y}{dx} - \frac{dF_x}{dy}\right]\varepsilon^2 + \underbrace{\mathcal{O}(\varepsilon^3)}_{\text{TERMINI TRASCURABILI}}$$

PER $\varepsilon \to 0$ ε^2 É ~~LA~~ L'AREA DEL QUADRATO

COME ESTENDIAMO I CALCOLI FATTI PER UN QUADRATO INFINITESIMO NEL CASO DI UN QUADRATO CON LATI REALI?

SAPPIAMO CHE SE $\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ AVREMO IN PRIMA APPROSSIMAZIONE CHE IL LAVORO SUL CAMMINO CHIUSO É ZERO



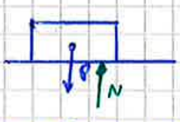
- SUPPONIAMO UN QUADRATO DI LATO 1
- IMMAGINO DI DIVIDERE OGNI LATO IN m PARTI $m = 4$
- IN QUESTO MODO CREO DEI QUADRATINI CON LATO $1/m$
- AGGIUNGO COPPIE DI CAMMINI OPPOSTI IN OGNI QUADRATO IN MODO CHE DIANO LAVORI NULLI E NON CAMBINO IL RISULTATO

TASSELLANDO IL QUADRATO PIÙ GRANDE CON QUADRATINI SEMPRE PIÙ PICCOLI, INFINITESIMI, POSSO DIRE CHE IL ~~LA SOMMA DEI~~ LAVORO DEL QUADRATO GRANDE SARÀ DATO DALLA SOMMA DEI LAVORI DEI QUADRATI PIÙ PICCOLI

VINCOLI E REAZIONI VINCOLARI

UN BLOCCO SU UN TAVOLO RISENTE DI UNA FORZA PESO E DI UNA FORZA VINCOLARE DATA DAL TAVOLO AL BLOCCO

SE IL CORPO È IN QUIETE DEVO AMMETTERE CHE LA SUPERFICIE DI VINCOLO ESERCITA UNA REAZIONE VINCOLARE UGUALE E CONTRARIA ALLA FORZA PESO



$$P = N$$

PRENDIAMO AD ESEMPIO UN PENDOLO IDEALE
- FILO IDEALE: INESTENDIBILE, INDEFORMABILE E DI MASSA TRASCURABILE (ASTA RIGIDA)
- MASSA PUNTIFORME

- NEL CASO DI UN ASTA RIGIDA LA MASSA È VINCOLATA A MUOVERSI SU UNA CIRCONFERENZA:

$$x^2+y^2=\rho^2$$

NEL PIANO AVREI 2 GRADI DI LIBERTÀ, IL VINCOLO ME NE TOGLIE UNO. IN GENERALE UN VINCOLO È RAPPRESENTATO MATEMATICAMENTE DALL'EQUAZIONE

$$f(x,y,z)=0 \Rightarrow f(x,y)=x^2+y^2-\rho^2=0$$

IN QUESTO CASO IL VINCOLO VIENE DETTO BILATERO

- NEL CASO DI UN FILO POSSIAMO AVVICINARCI AL VINCOLO:

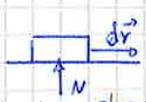
$$x^2+y^2<\rho^2$$

IL VINCOLO VIENE DETTO UNILATERO
ESSI VENGONO TRATTATI COME FOSSERO BILATERI FINTANTO CHE LE FORZE MANTENGONO IL PUNTO SULLA SUPERFICIE DI VINCOLO E DAL MOMENTO DI DISTACCO IN POI TRATTIAMO IL PUNTO MATERIALE COME FOSSE LIBERO

ATTENZIONE
LE REAZIONI VINCOLARI SARANNO SEMPRE PER NOI DELLE INCOGNITE DEL PROBLEMA CHE DEVONO ESSERE DETERMINATE.
ESSE SONO FORZE CHE EMERGONO DALLE PROPRIETÀ ELASTICHE DEI CORPI MA NON NE CONOSCIAMO LE LEGGI O SE LE CONOSCIAMO SONO TROPPO COMPLICATE DA PRENDERE IN CONSIDERAZIONE

VINCOLI LISCI O IDEALI

PARLIAMO DI VINCOLI IDEALI QUANDO LA REAZIONE VINCOLARE È NORMALE AL VINCOLO



$d\vec{r}$ È UNO SPOSTAMENTO COMPATIBILE CON IL VINCOLO ED È TANGENTE AD ESSO

IL VINCOLO FARÀ QUINDI LAVORO NULLO SUL NOSTRO PUNTO

I VINCOLI IDEALI SONO QUELLI PER I QUALI LA REAZIONE VINCOLARE FA LAVORO NULLO

$$dL_N = \vec{N}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{ORTOGONALI}$$

RICORDANDO IL TEO. DELL'ENERGIA CINETICA POSSIAMO DIRE CHE C'È UNA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

ABBIAMO VISTO COME L'ACCELERAZIONE SI PUÒ SCOMPORRE IN UN'ACC. TANGENZIALE ED IN UNA RADIALE

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta \qquad \begin{cases} \vec{a}_\theta = \rho\ddot{\theta} \\ \vec{a}_r = -\rho\dot{\theta}^2 \end{cases}$$

LA COMPONENTE RADIALE È LA CAUSA DEL VINCOLO, LA DISTANZA TRA LA MASSA E IL CENTRO È COSTANTE, ED ESSA TENDE VERSO IL CENTRO

$$\underbrace{\vec{a}_r = -}_{\text{CENTRO}}\underbrace{\rho}_{[L]}\underbrace{\dot{\theta}^2}_{\left[\frac{1}{T}\right]} \quad \text{ACC. CENTRIPETA}$$

NELL'ACCELERAZIONE TANGENZIALE ABBIAMO UN TERMINE DI VELOCITÀ ANGOLARE

$\alpha = \ddot{\theta}$ VIENE CHIAMATA ACC. ANGOLARE

PONGO $\omega = \dot{\theta}$, POSSO RISCRIVERE LE ACCELERAZIONI COSÌ

$$\begin{cases} \vec{a}_\theta = \rho\alpha \\ \vec{a}_r = -\rho\omega^2 \end{cases}$$

CON QUESTI ELEMENTI SIAMO IN GRADO DI PROIETTARE L'EQ. DI NEWTON NELLE DIREZIONI TANGENTI E NORMALI

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{P} + \vec{T}$$

P FORZA PESO
T REAZIONE VINCOLARE

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot m\ddot{\vec{r}} = \hat{r}\cdot(\vec{P}+\vec{T}) \\ \hat{\theta}\cdot m\ddot{\vec{r}} = \hat{\theta}\cdot(\vec{P}+\cancel{\vec{T}}) \end{cases}$$

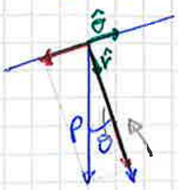
PROIETTO LE FORZE NELLE DIREZIONI RADIALI E TANGENZIALI

VEDO SUBITO CHE $\hat{\theta}\cdot\vec{T} = 0$ PERCHÉ NORMALI, OTTENGO L'EQ PURA DEL MOTO, NON HO TENSIONE SUL FILO

DALLE EQ A PRIMO MEMBRO OTTENGO

$$\begin{cases} \hat{r}\cdot m\ddot{\vec{r}} = m(-\rho\dot{\theta}^2) \\ \hat{\theta}\cdot m\ddot{\vec{r}} = m(\rho\ddot{\theta}) \end{cases}$$

A SECONDO MEMBRO DEVO SCOMPORRE LA FORZA PESO NELLE DUE DIREZIONI



$$\hat{r}\cdot\vec{P} = mg\cos\theta$$
$$\hat{\theta}\cdot\vec{P} = -mg\sin\theta$$

$\vec{T}$ RIVOLTO VERSO INTERNO

VERSORE CON VERSO OPPOSTO

INOLTRE POSSO DIRE CHE $\hat{r}\cdot\vec{T} = -T$ CENTRIPETA

VADO A SOSTITUIRE NELLE EQUAZIONI DI PARTENZA

$$\begin{cases} m(-\rho\dot{\theta}^2) = mg\cos\theta - T \\ m(\rho\ddot{\theta}) = -mg\sin\theta + 0 \end{cases}$$

CONSIDERIAMO ORA UN θ_f QUALSIASI, DIVERSO DA ZERO.
L'EQUAZIONE SI MODIFICA COME

$$\frac{1}{2} m V^2 - m g \rho \cos\theta_f = - m g \rho \cos\theta_0$$

IL TERMINE A SECONDO MEMBRO PUÒ ESSERE PRESO COME COSTANTE PERCHÉ DIPENDE DAL PUNTO DI PARTENZA

$$COST = -g \rho \cos\theta_0$$

RICORDIAMO CHE LA VELOCITÀ DELLA MASSA È DATA DA

$$\dot{\vec{r}} = \rho \dot{\theta}$$

ESSA È SEMPRE NORMALE AL VINCOLO E DIRETTA NEL VERSO DI $\hat{\theta}$
L'EQUAZIONE SARÀ:

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta}^2 = g \rho \cos\theta_f + cost$$

APPLICHIAMO IL TRUCCO DI NEWTON E DERIVIAMO ENTRAMBI I MEMBRI PER IL TEMPO $\frac{d}{dt}$

OTTENIAMO

$$\frac{1}{\cancel{2}} \rho^2 \cancel{2} \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} = -g \rho \sin\theta_f \cdot \cancel{\dot{\theta}}$$

ABBIAMO OTTENUTO L'EQUAZIONE PURA DEL MOTO

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\rho} \sin\theta_f$$

È LA STESSA ACCELERAZIONE ANGOLARE OTTENUTA IN PRECEDENZA USANDO LA GEOMETRIA E LA CINEMATICA, MA IN QUESTO CASO NON HO INFORMAZIONE SULLA REAZIONE VINCOLARE

$$\frac{h}{\sin\theta} = \frac{1}{2} g t_f^2 \sin\theta \Rightarrow t_f^2 = \frac{2h}{g \sin^2\theta} \Rightarrow t_f = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

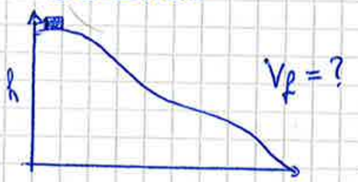
SOSTITUENDO I DATI NELL'EQUAZIONE DELLA VELOCITÀ OTTENGO

$$\dot{x}_f = g \sin\theta \cdot \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2hg}$$

PARTENDO DA UNO STATO DI QUIETE IL CORPO ARRIVA AL TERMINE DEL PERCORSO CON UNA VELOCITÀ DI

$$\dot{\vec{x}}_f = \sqrt{2hg}$$

QUESTO METODO NON POTEVAMO USARLO PER UNO SCIVOLO CURVO:



POSSIAMO USARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PERCHÉ IL VINCOLO È IDEALE E QUINDI NON HO LAVORO

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

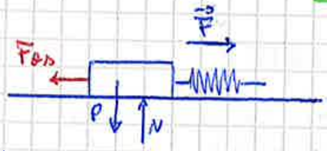
$$K_f - K_i = -(U_f - U_i)$$

SO CHE $U_f - U_i = mgh$ PERCHÉ DIFFERENZA DI ENERGIE POTENZIALI, MA SONO ANDATO DA UNA AD U MAGGIORE AD UNA AD U MINORE QUINDI DEVO CAMBIARLA DI SEGNO $= -mgh$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V_f^2 = \cancel{m} g h \Rightarrow V_f^2 = 2gh \Rightarrow V_f = \sqrt{2gh}$$

ABBIAMO OTTENUTO LO STESSO RISULTATO NON CONSIDERANDO IL PERCORSO SEGUITO MA SOLO I PUNTI DI PARTENZA E ARRIVO

ATTRITO STATICO



LA FORZA DI ATTRITO STATICO È UNA REAZIONE VINCOLARE TANGENTE AL PIANO, ESSA SI OPPONE ALLA FORZA APPLICATA

L'ATTRITO STATICO FUNZIONA FINO AD UN CERTO VALORE DI SOGLIA DOPO IL QUALE LA MASSA SI INIZIA A MUOVERE.

POSSIAMO CONSIDERARE UN ATTRITO STATICO SE

$$|F_{as}| \leq F_{as}^{MAX} \rightarrow \text{VALORE DI SOGLIA}$$

$\boxed{F_{as}^{MAX} = \mu_s N}$ IN CUI μ_s È IL COEFF. DI ATTRITO STATICO ADIMENSIONALE

SOSTITUENDO NELLA PRIMA DISEQUAZIONE OTTENIAMO LA LEGGE DI AMONTON-COULOMB:

$$\boxed{|F_{as}^{MAX}| \leq \mu_s N}$$

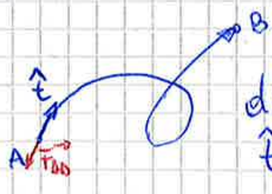
SECONDO CUI L'ATTRITO STATICO È DOVUTO ALLE FORZE ELETTROSTATICHE CHE SI FORMANO TRA I PIANI MAI PERFETTAMENTE LISCI

1

FORZE DISSIPATIVE

$$\vec{F}_{AD} = \mu_D N$$

NON HO INFORMAZIONI SULLA DIREZIONE DELLA FORZA.



$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}}{v}$$

v MODULO DELLA VELOCITÀ

PER DEFINIZIONE SO CHE LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO È SEMPRE OPPOSTA A QUELLA DELLO SPOSTAMENTO

$$\vec{F}_{AD} = -\mu_D N \hat{t}$$

IL LAVORO FATTO DALLA FORZA SARÀ QUINDI

$$dL = \vec{F}_{AD} \circ d\vec{r} = -\mu_D N \hat{t} \circ d\vec{r}$$

$$= -\mu_D N \frac{\vec{v}}{v} \circ \vec{v}\,dt$$

$$= -\mu_D N \frac{v^2}{v} dt = -\mu_D N v\,dt < 0$$

É UNA FORZA SEMPRE NEGATIVA PERCHÉ DISSIPATIVA.

CALCOLO IL LAVORO COMPIUTO LUNGO TUTTO IL PERCORSO:

$$L_{A-B} = \int_{A-B} -\mu_D N v\,dt = -\mu_D N \int_{A-B} v\,dt$$

SO CHE: $|\vec{v}|dt = ds \geq 0$ $\quad \int_{A-B} ds = \widehat{AB}$

É UN PARAMETRO AD ARCO CHE MISURA QUANTA STRADA HO FATTO LUNGO LA TRAIETTORIA DA QUANDO SONO PARTITO.
É UNA MISURA DI UNA LUNGHEZZA CURVILINEA

$$L_{A-B} = -\mu_D N \widehat{AB} < 0$$ É UNA FORZA DISSIPATIVA

IL LAVORO DIPENDE DALLA STRADA CHE SEGUO, NON HO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$K_f - K_i = L < 0$$ L'ENERGIA CINETICA DIMINUISCE

QUESTA FORZA PORTA IL CORPO A FERMARSI DOPO UN CERTO PERCORSO

$$L_{A-B} = -\mu_D N \sum_{k=0}^{m} |d\vec{r}_k| < 0$$

ABBIAMO VISTO CHE IL LAVORO DIPENDE DALLA TRAIETTORIA ANCHE IN UNA DIMENSIONE, SE LA FORZA È POSIZIONALE I TRATTI SOVRAPPOSTI SI CANCELLANO MENTRE IN QUESTO CASO SI SOMMANO

RIASSUNTO

ATT. RADENTE DINAMICO $\vec{F}_A = -\mu N \hat{t}$ $\quad \hat{t} = \frac{\vec{v}}{v}$

ATT. VISCOSO $\vec{F}_V = -\gamma v \hat{t}$

ATT. AERODINAMICO $\vec{F}_{AER} = -\alpha v^2 \hat{t}$

TUTTE DIRETTE COME LA VELOCITÀ MA CON VERSO OPPOSTO ALLA FORZA

$$\lambda = \pm\sqrt{-\omega_0^2} = \pm i\sqrt{\omega_0^2} = \pm i\omega_0$$

IN UN EQUAZIONE DIFFERENZIALE RADICI IMMAGINARIE PURE IMPLICANO SOLUZIONI OSCILLANTI:

$$z_\pm(t) = e^{\pm i\omega_0 t}$$

HO OTTENUTO LE SOLUZIONI DELLA NOSTRA EQUAZIONE

PER I NUMERI COMPLESSI POSSO DIRE CHE

- $z_+(t) = \overline{z_-(t)}$ $\qquad z_+ = e^{i\omega_0 t}$
- $e^{iy} = \cos y + i\sin y$

$$\cos y = Re(e^{iy})$$
$$\sin y = Im(e^{iy})$$

LE EQUAZIONI DELLA FISICA SONO REALI, DEVO PRENDERE SOLO LA PARTE REALE DELLA FUNZIONE.

CALCOLO L'INT. GENERALE DELLA FUNZIONE:

$$z(t) = a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t}$$

ADESSO VOGLIO OTTENERE L'INTEGRALE GENERALE DELLA FUNZIONE APPLICABILE ALLA FISICA, CIOÈ LA SUA PARTE REALE:

$$x(t) = Re(z(t))$$ VEDI SOPRA

$$x(t) = \frac{1}{2}[z(t) + \bar{z}(t)] = \frac{1}{2}\left[a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t} + \bar{a} e^{-i\omega_0 t} + \bar{b} e^{+i\omega_0 t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\underline{(a+\bar{b})} e^{i\omega_0 t} + (\bar{a}+b) e^{-i\omega_0 t}\right)$$

I VALORI a E b SONO COSTANTI, POSSO RISCRIVERLE COME:

$$c = a + \bar{b} = C e^{\phi i}$$

IN CUI $C = |c|$ E ϕ È L'ARGOMENTO O FASE

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[C e^{\phi i} e^{i\omega_0 t} + C.C\right]$$ COMPLESSO CONIUGATO

$$= \frac{1}{2}\left[C e^{i(\omega_0 t + \phi)} + C.C\right] = Re\left[C e^{i(\omega_0 t + \phi i)}\right]$$

$$\boxed{x(t) = C\cos(\omega_0 t + \phi)}$$

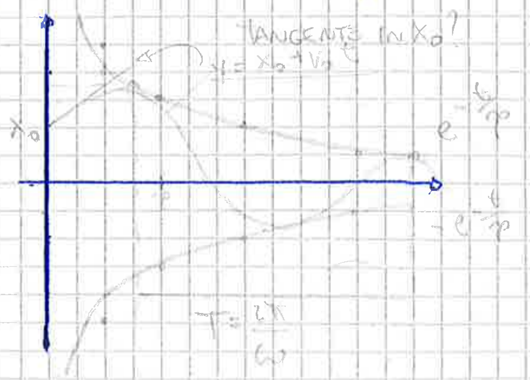
- UTILIZZO LO STESSO METODO NEL CASO DI $\gamma \neq 0$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - \frac{\gamma}{m}\dot{x}$$

PASSO A VARIABILI COMPLESSE $x \to z$

$$\ddot{z} = -\frac{k}{m}z - \frac{\gamma}{m}\dot{z}$$

GRAFICAMENTE AVREMO



$e^{-\frac{t}{\tau}}$ FATTORE DI SMORZAMENTO

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ FREQUENZA RIDOTTA

• SMORZAMENTO CRITICO $\gamma = \gamma_c$

$\gamma = \gamma_c = 2\sqrt{km}$ É IL γ CRITICO

$\lambda_+ = \lambda_- = -\frac{1}{\tau}$

DALLO STUDIO DELL'INTEGRALE GENERALE CONOSCO LA SOLUZIONE COME:

$$C\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

POSTE A, B CONDIZIONI ARBITRARIE OTTENGO LE SOLUZIONI FONDAMENTALI SE MOLTIPLICO PER $e^{-t/\tau}$, IL FATTORE DI SMORZAMENTO

LO SMORZAMENTO CRITICO SI AVRÁ QUANDO

$\gamma \to \gamma_c$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \to 0 \qquad T = \frac{1}{\omega} \to \infty$

CON A DISPOSIZIONE UN OLIO PIÙ VISCOSO LA FREQUENZA TENDE A ZERO, IL PERIODO DELLE OSCILLAZIONI DIVENTA LUNGO, ESSO TENDE A INFINITO,
CON UN $T \to +\infty$ POSSIAMO DIRE CHE NON ABBIAMO PIÙ OSCILLAZIONI, INFATTI:

$\lim_{\omega \to 0} \cos\omega t = 1$

$\lim_{\omega \to 0} \sin\omega t = 0$ IN QUESTO MODO PERÓ SI PERDE UNA SOLUZIONE FONDAMENTALE

DEVO FARE IL LIMITE DI TUTTO L'INTEGRALE

$$\lim_{\omega \to 0} (A\cos\omega t + B\sin\omega t) = \lim_{\omega \to 0} \left(A\cos\omega t + B\omega \frac{\sin\omega t}{\omega}\right)$$

$$\lim_{\omega \to 0} B\omega \frac{\sin\omega t}{\omega} = B' \frac{\omega t}{\omega} = B't$$

$$\lim_{\omega \to 0} (A\cos\omega t + B\sin\omega t) = A + B't$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}(A + B't)}$$

CASI PARTICOLARI

- SE $\gamma = 0$, NON HO LO SMORZATORE MI TROVO AD AVERE SOLO LA FORZA ELASTICA, POSSO RISCRIVERE L'INTEGRALE PARTICOLARE COME:

$$x_p(t) = \frac{\frac{F_0}{m}\cos(\omega_F t)}{\omega_0^2 - \omega_F^2}$$

$x_p(t)$ ASSUMERÀ VALORI POSITIVI O NEGATIVI A SECONDA DELLE FREQUENZE

$>0 \quad \omega_0 > \omega_F$ IN FASE

$<0 \quad \omega_0 < \omega_F$ IN OPPOSIZIONE DI FASE

- SE $F = 0$ NON HO SPOSTAMENTO

- SE $\omega_F = \omega_0$ AVRÒ:

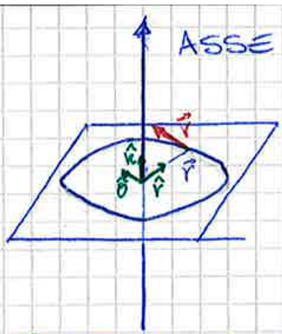
$$\frac{1}{\omega_0^2 - \omega_F^2} \longrightarrow +\infty$$

$$\lim_{\omega_0 \to \omega_F} \frac{\frac{F_0}{m} e^{i\omega_F t}}{\omega_0^2 - \omega_F^2} = +\infty$$

NON SO TROVARE UN INTEGRALE PARTICOLARE CONOSCENDO QUESTO LIMITE, AGGIUNGO ALL'INTEGRALE PARTICOLARE UN INTEGRALE DELL'OMOGENEA ASSOCIATA, AVRÒ

$$\lim_{\omega_0 \to \omega_F} \frac{F_0/m}{(\omega_0 + \omega_F)(\omega_0 - \omega_F)} \cdot \left(e^{i\omega_F t} - e^{i\omega_0 t}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 194



$$\hat{\theta} = \hat{k} \times \hat{r} \qquad \hat{r} = -\hat{k} \times \hat{\theta}$$

UTILIZZO LA REGOLA DELLA MANO DX

POSSO RISCRIVERE LE FORMULE COME COMBINAZIONE DEI VERSORI:

- $\vec{v} = r\omega\hat{\theta} = r\omega(\hat{k} \times \hat{r}) = (\omega\hat{k}) \times (r\hat{r})$

POSSO DEFINIRE UN NUOVO VETTORE

$\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ VETT. VELOCITÀ ANGOLARE: NON CONTIENE INFORMAZIONI SOLO SULLA RAPIDITÀ DI VARIAZIONE DELL'ANGOLO MA ANCHE SULLA DIREZIONE DELL'ASSE DI ROTAZIONE

$\vec{r} = r\hat{r}$

LA VELOCITÀ SARÀ QUINDI $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

DAL VERSO DI $\vec{\omega}$ POSSO CONOSCERE LA DIREZIONE DI ROTAZIONE DEL MOTO GRAZIE ALLA MANO DX: POLLICE IN DIREZIONE DI $\vec{\omega}$, LE DITA DANNO LA DIR. DEL MOTO

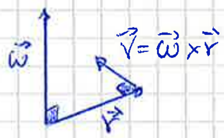
- $\vec{a} = -r\omega^2\hat{r} = r\omega^2(\hat{k} \times \hat{\theta}) = \omega\hat{k} \times r\omega\hat{\theta}$

COME PRODOTTO VETTORIALE SARÀ SCRITTA COME

$$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

HO OTTENUTO LE FORMULE IN MODO SCALARE E VETTORIALE, LE SECONDE MI DANNO ANCHE L'INFORMAZIONE SULLA DIREZIONE E SUL VERSO

DA GEOMETRIA SO CHE IL PRODOTTO VETTORIALE TRA DUE VETTORI MI GENERA UN VETTORE ORTOGONALE AD ENTRAMBI



LE EQ. CHE ABBIAMO RICAVATO VALGONO SOLO PER IL MOTO UNIFORME: RAGGIO E VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE

OSSERVO CHE $\vec{v}$ E $\vec{a}$ HANNO RELAZIONI DI FORMA MOLTO SIMILE, QUESTO È DOVUTO AL FATTO CHE SONO DERIVATE RISPETTO AL TEMPO DI VETTORI DI MODULO COSTANTE:

$|\vec{r}| = \text{cost} \qquad |\vec{v}| = \text{cost}$

POSSO RIPETERE LA COSTRUZIONE GEOMETRICA PER QUALSIASI VETTORE DI MODULO COSTANTE, TROVANDO CHE LA DERIVATA DEL VETTORE RISPETTO AL TEMPO SI PUÒ SCRIVERE

$\vec{w} \to \hat{r}$
$d\vec{w} \to \hat{\theta}$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\vec{w} = \vec{\omega} \times \vec{w}}$$

VIENE CHIAMATA FORMULA DI POISSON

PER DEFINIZIONE I VERSORI POSSONO ESSERE VISTI COME VETTORI DI MODULO UNO, POSSO USARE LA FORMULA DI POISSON PER CALCOLARE LA DERIVATA:

$\hat{r}, \hat{\theta}$ PER DEF $|\hat{r}| = |\hat{\theta}| = 1$ COSTANTI

IN ALTRE PAROLE:

IN UN INTERVALLO DI TEMPO BREVE OGNI TRAIETTORIA PUÒ ESSERE DESCRITTA COME UN MOTO DI ROTAZIONE

$$\vec{a} = \dot{v}\hat{t} + \frac{v^2}{R}\hat{m}$$

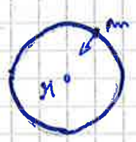
SE ABBIAMO UN MOTO NELLO SPAZIO POSSIAMO RICONDURCI AD UN MOTO DI ROTAZIONE SUL PIANO SAPENDO CHE:

- PER TRE PUNTI NON COLLINEARI PASSA UNO E UN SOLO PIANO
- PER TRE PUNTI NON COLLINEARI PASSA UNA ED UNA SOLA CIRCONFERENZA

CHIAMEREMO LA CIRCONFERENZA CERCHIO OSCULATORE

APPLICAZIONI

ORBITE CIRCOLARI



T PERIODO DI ROTAZIONE

r RAGGIO DELL'ORBITA

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3 \qquad \text{RICAVATA DA} \qquad a_c = v\omega^2 = \frac{GM}{r^2}$$

III LEGGE DI KEPLERO PER ORBITE CIRCOLARI

1) $r \rightarrow$ SEMIASSE MAGGIORE DELL'ORBITA ELLITTICA
2) $M = M + m$
3) TRASCURO LE INTERAZIONI TRA I VARI PIANETI

DALLO STUDIO DI QUESTA LEGGE POSSIAMO NOTARE UN'INTERESSANTE CONSEGUENZA:

$\odot$ SOLE
$\oplus$ TERRA
$\circ$ LUNA

$$T_\oplus^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\odot} r_\oplus^3$$

$$T_\circ^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\oplus} r_\circ^3$$

POSSO RICAVARE LA G, O SUPPOSTO DI NON CONOSCERLA USARE LA FORMULA PER TROVARE LA MASSA DI ALTRI PIANETI

$$\left(\frac{T_\oplus}{T_\circ}\right)^2 = \frac{M_\oplus}{M_\odot}\left(\frac{r_\oplus}{r_\circ}\right)^3$$

CONOSCENDO G POSSO CALCOLARMI LA MASSA DELLA TERRA

PER L'ACCELERAZIONE

$$\vec{A} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}_0 + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}) = \frac{d\vec{V}_0}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\vec{v}}{dt} =$$

$$= \vec{A}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}) + \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{a}$$

- $\frac{d\vec{v}}{dt}$ USO IL RAGIONAMENTO DI PRIMA: $\vec{a} = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$
  ED È L'ACC. DEL PUNTO P VISTA DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE
  $\vec{a}$ = ACCELERAZIONE RELATIVA
- $\vec{A}_0$ ACC. DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

OTTENGO

$$\boxed{\vec{A} = \vec{A}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}) + \vec{a}}$$

$\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}$ CONTIENE IL TERMINE DELL'ACCELERAZIONE ANGOLARE

$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$ È L'ACCELERAZIONE CENTRIFUGA

$2(\vec{\omega}\times\vec{v})$ È L'ACC. DI CORIOLIS

I PRIMI TRE TERMINI PRENDONO IL NOME DI ACC. DI TRASCINAMENTO

NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE VALE LA II LEGGE DI NEWTON, IL VOCABOLARIO CHE ABBIAMO TROVATO PERMETTE DI CALCOLARE COME APPAIONO GLI EFFETTI DELLA II LEGGE DAL PUNTO DI VISTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE

- INERZIALE $\vec{F} = m\cdot\vec{a}$ FORZE AGENTI DA TERRA
- NON INERZIALE, FORZE AGENTI DALL'AEREO:

$$m\left(\vec{A}_0 + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}) + a\right) = \vec{F}$$

POSSO CONSIDERARE LE ACCELERAZIONI COME DELLE FORZE APPARENTI O FORZE DI INERZIA

$$m\vec{a} = \vec{F} \underbrace{- m\vec{A}_0 - m\dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}}_{\text{FORZE DI TRASCINAMENTO}} \underbrace{- m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\text{FORZA CENTRIFUGA}} \underbrace{- 2m\vec{\omega}\times\vec{v}}_{\text{FORZA DI CORIOLIS}}$$

CASI PARTICOLARI

- IL SISTEMA MOBILE SI MUOVE DI MOTO UNIFORME RISPETTO AL SR INERZIALE:

  $\vec{A}_0 = 0 \qquad \vec{\omega} = 0$

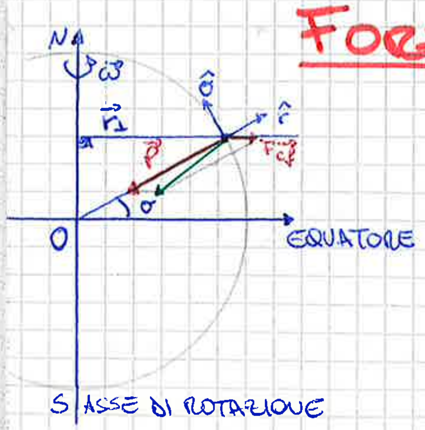
  TRENO IN MOTO UNIFORME RISPETTO ALLA STAZIONE

  SR FISSO: $m\vec{A} = \vec{F}$
  SR MOBILE: $m\vec{a} = \vec{F}$
  } STESSA FORMULA

  LA II EQ. DI NEWTON È INVARIANTE CIOÈ HA LA STESSA FORMA NEI DUE SISTEMI:

  NON È POSSIBILE IN ALCUN MODO DISTINGUERE I DUE SISTEMI

FORZA CENTRIFUGA



$\hat{r}$ VERSORE DELLA DIREZIONE CHE CONGIUNGE IL CENTRO CON IL PUNTO IN CUI CI TROVIAMO

$$\vec{P} = -mg_0\hat{r} = -G\frac{Mm}{R^2}\hat{r}$$

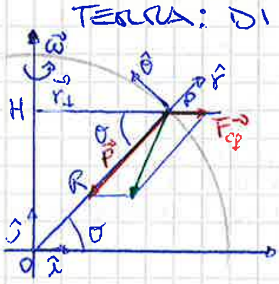
$$g_0 = G\frac{M}{R^2} \quad \frac{\text{MASSA}}{\text{RAGGIO}^2}\ \text{TERRA}$$

NB. VEDREMO CHE L'EFFETTO COMBINATO DELL'ATTRAZIONE VERSO LE VARIE PARTI DELLA TERRA È EQUIVALENTE ALL'ATTRAZIONE CHE SI AVREBBE SE TUTTA LA MASSA FOSSE CONCENTRATA IN UN UNICO PUNTO

OLTRE ALLA FORZA PESO PRESENTE, LA TERRA È IN ROTAZIONE. QUESTA GENERA UNA FORZA CENTRIFUGA DIRETTA ORTOGONALMENTE RISPETTO ALL'ASSE DI ROTAZIONE

$$\boxed{\vec{F}_{cf} = m\omega^2\vec{r}_\perp}$$

IL FILO A PIOMBO SI DIRIGE NELLA RISULTANTE DI $\vec{P}+\vec{F}_{cf}$, QUINDI ESSO NON È ESATTAMENTE DIRETTO VERSO IL CENTRO DELLA TERRA: DI QUANTO È DEVIATO??



- PROIETTIAMO $\vec{P}+\vec{F}_{cf}$ NELLE DIREZIONI $\hat{\theta}$, $\hat{r}$:

- $\vec{P}$: • $\vec{P}\cdot\hat{r} = -mg_0$
  • $\vec{P}\cdot\hat{\theta} = 0$ ORTOGONALI

- $\vec{F}_{cf} = m\omega^2 r_\perp\hat{\imath} = m\omega^2 R\cos\theta\,\hat{\imath}$

$$r_\perp = R\cos\theta$$

• $\vec{F}_{cf}\cdot\hat{r} = m\omega^2 R\cos\theta\,\hat{\imath}\cdot\hat{r} = m\omega^2 R\cos^2\theta$

PER LA DEFINIZIONE DEL PRODOTTO SCALARE:

$\hat{r}\cdot\hat{\imath} = \cos\theta$ COSENO ANGOLO COMPRESO

• $\vec{F}_{cf}\cdot\hat{\theta} = m\omega^2 R\cos\theta\,\hat{\imath}\cdot\hat{\theta} = m\omega^2 R\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}m\omega^2 R\sin 2\theta$

$$\hat{\theta}\cdot\hat{\imath} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sin\theta$$

SOMMIAMO ORA LE COMPONENTI NELLA DIREZIONE $\hat{r}$:

$$(\vec{P}+\vec{F}_{cf})\hat{r} = -mg_0 + m\omega^2 R\cos^2\theta = -mg_0\left(1+\frac{\omega^2 R\cos^2\theta}{g_0}\right)$$

FACCIO UN CAMBIAMENTO DI VARIABILE

$$\Delta g_0 = \omega^2 R\cos^2\theta$$

$$(\vec{P}+\vec{F}_{cf})\hat{r} = -m(g_0-\Delta g_0) = -mg_0\left(1-\frac{\Delta g_0}{g_0}\right)$$

A CAUSA DELLA FORZA CENTRIFUGA L'ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ MISURATA È MINORE DI g_0

FORZA di CORIOLIS

$$\boxed{\vec{F}_{Co} = -2m\,\vec{\omega} \times \vec{v}}$$

- È NULLA SE $\vec{v} = 0$, CIOÈ SE SIAMO SOLIDALI CON IL SISTEMA MOBILE
- QUESTA FORZA NON COMPIE LAVORO, È DEVIATRICE:

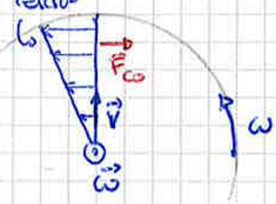
$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt$$

$$dL = \vec{F}_{Co} \cdot d\vec{r} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} \cdot \vec{v}\,dt = 0$$

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} \rightarrow$ VETTORE ORTOGONALE AD $\vec{\omega}$ e $\vec{v}$

$\vec{a} \cdot \vec{v} = 0 \qquad \vec{a} \perp \vec{v}$

VARIE VELOCITÀ VISTE DA TERRA



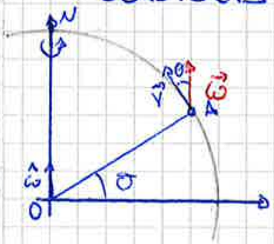
VERSO L'ESTERNO DEL FOGLIO

SE CAMMINO DAL CENTRO VERSO IL BORDO DI UNA GIOSTRA CHE GIRA IN SENSO ANTIORARIO SENTO UNA FORZA CHE MI DEVIA VERSO DX

LA VELOCITÀ DELLA GIOSTRA VISTA DA TERRA È ZERO AL CENTRO E AUMENTA LINEARMENTE VERSO L'ESTERNO

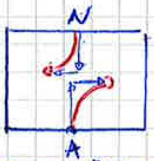
IN UN SR. FISSO LA MASSA SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

IN UN SR. MOBILE LA MASSA È DEVIATA DALLA FORZA DI CORIOLIS



IL PRODOTTO VETTORIALE $\vec{\omega} \times \vec{v}$ MI DA UN VETTORE CON DIREZIONE USCENTE DAL FOGLIO, CAMBIO SEGNO ED È ENTRANTE, HO UNO SPOSTAMENTO VERSO DX

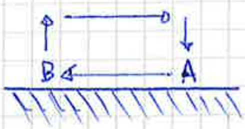
OSSERVANDO LO SPOSTAMENTO DAL PUNTO A



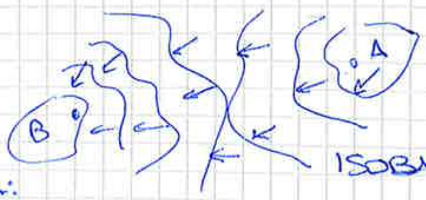
NELL'EMISFERO NORD VENIAMO DEVIATI VERSO DX
NELL'EMISFERO SUD VENIAMO DEVIATI VERSO SX

LA FORZA DI CORIOLIS HA UN EFFETTO RILEVANTE SU MEZZI CHE SI MUOVONO A ELEVATE VELOCITÀ PER LUNGHI TRATTI SULLA SUPERFICIE TERRESTRE SVINCOLATI DA TERRA; MISSILI, AEREI, MASSE D'ARIA E ACQUA

LE MASSE D'ARIA SI MUOVONO DA ZONE DI ALTA PRESSIONE A ZONE DI BASSA PRESSIONE



A → ARIA SECCA
B → ARIA UMIDA H_2O e O_2



LA FORZA ESERCITATA È DATA DA:

$$\vec{F}_{GRAD} = -V\,\vec{\nabla}p = -m\vec{\nabla}$$

$\rho \rightarrow$ DENSITÀ

$V \rightarrow$ VOLUME MASSA D'ARIA

DINAMICA ROTAZIONALE

SE UN CORPO È ESTESO NON IMPORTA SOLO QUANTA FORZA APPLICO MA ANCHE IN QUALE PUNTO LA APPLICO

P PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA

$$m = |\vec{OP}| \cdot F$$

m È IL MOMENTO DELLA FORZA, IN QUESTO CASO IL SUO MODULO

SE LA FORZA NON È APPLICATA IN MODO ORTOGONALE C'È UNA SOLA COMPONENTE UTILE ED EFFICACE PER FAR MUOVERE LA PORTA, LA COMPONENTE AD ESSA NORMALE $\vec{F}_\theta$:

$$m = |\vec{OP}| \cdot F_\theta = |\vec{OP}| \cdot F \cdot \sin\theta$$

LA COMPARSA DI $\sin\theta$ SUGGERISCE CHE LA ~~DEF~~ PIÙ UTILE DI MOMENTO SIA:

$$\boxed{\vec{m} = \vec{OP} \times \vec{F}}$$

ESSO VIENE CHIAMATO MOMENTO DELLA FORZA RISPETTO AL POLO O, LA CERNIERA

MOMENTO TORCENTE

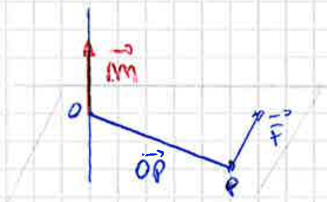
NOTARE CHE NELLA DEFINIZIONE È IMPORTANTE SPECIFICARE:

- IL POLO O, PUNTO GEOMETRICO
- IL PUNTO P DI APPLICAZIONE DELLA FORZA

DIVENTA IMPORTANTE OSSERVARE CHE LA FORZA È UN VETTORE APPLICATO:

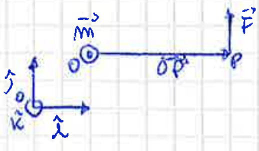
$$(P, \vec{F})$$

↳ VETTORE
↳ PUNTO DI APPLICAZIONE



VIENE DEFINITO UN PIANO DAI DUE VETTORI $\vec{OP}$ e $\vec{F}$, IL MOMENTO È ORTOGONALE AL PIANO

PER UN MOTO PIANO AVREMO



$$\vec{m} = m\hat{k} = m_z\hat{k} \qquad m_z > 0$$

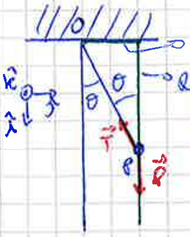
SE LA ~~ROTAZIONE~~ FORZA INDUCE UNA ROTAZIONE ANTIORARIA $m_z > 0$

$$\vec{m} = -m\hat{k} = m_z\hat{k} \qquad m_z < 0$$

⊗ IL VETTORE $\vec{m}$ È ENTRANTE NEL FOGLIO, ABBIAMO UNA ROTAZIONE ORARIA

DEL VETTORE $\vec{m}$ CONTA UNA SOLA COMPONENTE, QUELLA PERPENDICOLARE AL PIANO DI ROTAZIONE.

POSSO UTILIZZARE IL TH DEL MOMENTO ANGOLARE PER DESCRIVERE IL MOTO DEL PENDOLO
(GIÀ STUDIATO CON LA II LEGGE DI NEWTON E CON L'EQ DELL'ENERGIA K



BRACCIO = $\overline{OP}\sin\theta = a\sin\theta$

→ RETTA DI APPLICAZIONE DELLA FORZA PESO

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \vec{m}$$

OSSERVIAMO CHE IL MOTO È PIANO

$\vec{\ell} = \ell \cdot \hat{k}$
$\vec{m} = m \cdot \hat{k}$
DOVE ℓ e m INDICANO LE COMPONENTI NELLA DIREZIONE $\hat{k}$

$\ell = \ell_z = \vec{\ell} \cdot \hat{k}$
$m = m_z = \vec{m} \cdot \hat{k}$

SOLO LA COMPONENTE Z DI $\vec{\ell}$ e $\vec{m}$ CONTA, LE ALTRE SONO NULLE, POSSO PASSARE DA UN EQUAZIONE VETTORIALE AD UNA SCALARE

$$\frac{d\ell}{dt} = m = m^P + m^V$$

DEVO CALCOLARE I DUE MOMENTI, SCEGLIAMO COME POLO O IL PUNTO DOVE IL FILO È VINCOLATO:

m^V = BRACCIO X FORZA = 0 PERCHÉ LA RETTA DI APPLICAZIONE DELLA TENSIONE PASSA PER L'ORIGINE

SCALARE

$m^P = -mg \times \overline{OP}\sin\theta$

- SE $\theta = 0$ IL BRACCIO NON PUÒ PIÙ FARE EFFETTO
- "$-$" LA ROTAZIONE DEL DISEGNO È IN SENSO ANTIORARIO

DEVO RICAVARE IL MOMENTO ANGOLARE ℓ:

ℓ = BRACCIO $\times \vec{q}$ SCALARE

$V = a\ddot{\theta}$

$= a \cdot mV = a\,m\,a\ddot{\theta} = ma^2\ddot{\theta}$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZIONE INIZIALE

$\cancel{m} a^{\cancel{2}}\ddot{\theta} = -\cancel{m} g \cancel{a} \sin\theta$

$$\boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin\theta}$$

TROVO L'EQUAZIONE PURA DEL MOTO DEL PENDOLO, HO SCELTO ~~COME~~ IL PUNTO O IN MODO TALE CHE IL MOMENTO DELLA REAZIONE VINCOLARE FOSSE NULLO

SE L'ORBITA NON È CIRCOLARE

$dA = \frac{1}{2}$ BASE · ALTEZZA $= \frac{1}{2}\,\overline{OP}\cdot \vec{v}_0$

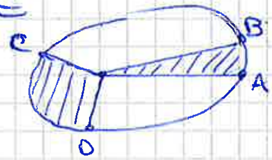
LA FORMULA CONTINUA A VALERE NELLA STESSA FORMA $dA = \frac{1}{2} r V_0 dt$

$dA = \frac{L_0}{2m} dt$ $\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{L_0}{2m}}$ $L_0 = \text{COST}$ → VEDI DERIVATA ...

ESSA VIENE CHIAMATA VELOCITÀ AEREOLARE: I PIANETI SPAZZANO AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI

ABBIAMO TROVATO CHE LA II LEGGE DI KEPLERO DEL MOTO DEI PIANETI È SEMPLICEMENTE UNA CONSEGUENZA DELLE LEGGI DELLA DINAMICA DI NEWTON E IN PARTICOLARE DELLA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE DI FORZE CENTRALI

IL PIANETA SI MUOVE PIÙ VELOCEMENTE VICINO AL SOLE



$\frac{dA}{dt} = \text{COST}$

LA VELOCITÀ È MAGGIORE A RAGGI MINORI

$dA = \frac{L_0}{2m} dt$ $A = \frac{L_0}{2m} T$

A AREA ELLISSE, T PERIODO DI RIVOLUZIONE

$\boxed{L_0 = 2m\frac{A}{T}} = 2m\frac{\pi a b}{T}$ a, b SEMIASSE MAGGIORE, MINORE

MOMENTO ANGOLARE

ES PER LA TERRA

$L_0 = 2\cdot(6\cdot 10^{24}\ \text{kg})\cdot \frac{\pi(150\times 10^9)^2\ \text{m}^2}{365\cdot 24\cdot 3600\ \text{s}} = 2{,}6\cdot 10^{40}\ [\text{J}\cdot\text{s}]$

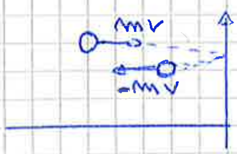
$\left[\text{kg}\cdot\frac{\text{m}^2}{\text{s}}\right] = \left[\text{kg}\cdot\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2\text{s}\right] = [\text{J}\cdot\text{s}]$

TEOREMA dell' IMPULSO

VIENE DEFINITO IMPULSO L'INTEGRALE DELLA FORZA NEL TEMPO

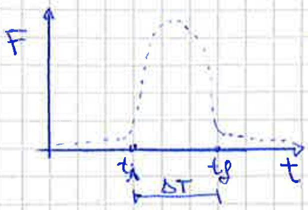
$$q_f - q_i = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt$$

ESSO È UTILE PER DESCRIVERE GLI URTI



DURANTE L'URTO APPAIONO DELLE FORZE IMPULSIVE: REAZIONI VINCOLARI INCOGNITE CHE AGISCONO PER UN TEMPO BREVISSIMO

LE LEGGI DI QUESTE FORZE NON SONO NOTE, PER DESCRIVERE LA FISICA DELL'URTO CI VIENE IN AIUTO IL TEOREMA DELL'IMPULS



Δt BREVE

LA FORZA È INCOGNITA VARIA NEL TEMPO PER ISTANTI BREVISSIMI, POSSO AVERE UNA MEDIA DELLE FORZE APPLICATE

$$\cancel{\Delta t} \cdot \vec{F}_m = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\,dt \cdot \cancel{\Delta t}$$

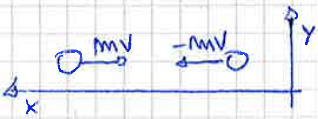
SOSTITUENDO

$$\vec{q}_f - \vec{q}_i = \vec{F}_m \cdot \Delta t$$ → MOLTIPLICO E DIVIDO PER LA STESSA COSA

$$\Delta Q = m\vec{v} - (-m\vec{v}) = 2m\vec{v}$$ ± A SECONDA DEGLI ASSI DI RIFERIMENTO

$$\boxed{\vec{F}_m = \frac{2m\vec{v}}{\Delta t}}$$

• FORZA MEDIA DI UN URTO PERFETTAMENTE ELASTICO



$m = 0,05\ kg$

$v = 50\ m/s = 180\ km/h$

$t = 15/40000\ s$

$\Delta Q = 2mv$

$2mv = \vec{F}_m \Delta t$

$$\vec{F}_m = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2m\vec{v}}{\Delta t}$$

$$F_m = \frac{2 \cdot 0,05 \cdot 50}{15/40000} = 14000\ [N]$$

CON MASSE MOLTO PICCOLE ABBIAMO LA PRESENZA DI UNA FORZA MOLTO INTENSA PER UN BREVE PERIODO DI TEMPO

•

$v_i = 100\ m/s$
$m = 0,02\ g$
$\Delta x = 1\ cm$

STIMARE IL TEMPO DI ARRESTO E LA FORZA MEDIA

$\Delta q = F_m \Delta t$

HO DUE INCOGNITE, MA SO CHE L'URTO ESSENDO COMPLETAMENTE ANELASTICO L'ENERGIA CINETICA È STATA DISSIPATA SOTTOFORMA DI CALORE

$\cancel{K_f} - K_i = L$ $\quad -\frac{1}{2}mv^2 = \int \vec{F}\,d\vec{r} \simeq -F_m \Delta x$

IN UNA RELAZIONE APPROSSIMATA POSSIAMO DIRE CHE LA FORZA SI OPPONE ALLO SPOSTAMENTO

$$\frac{\cancel{m}\cancel{v}}{\Delta t} = \frac{\cancel{m}v^{\cancel{2}}}{2\Delta x} \qquad \Delta t = \frac{2\Delta x}{v} = 2 \times 10^{-4}\ s$$

$$F_m = \frac{mv}{\Delta t} = 10000\ [N]$$

RIASSUMENDO

PER IL PRINCIPIO DI AZIONE-REAZIONE IN UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI LE RISULTANTI:

$$\vec F^{(I)} = 0 \qquad \vec M_O^{(I)} = 0$$

IL SIGNIFICATO È UNA MISURA DELLA CAPACITÀ DELLA FORZA DI METTERE IN ROTAZIONE IL SISTEMA SOLO DALLE FORZE INTERNE: IMPOSSIBILE

INTRODUCIAMO ORA LE SEGUENTI GRANDEZZE GLOBALI DEL SISTEMA, SCRITTE IN LETTERE MAIUSCOLE

$\vec r_i = \vec{OP}_i$

- $M = \sum m_i$
- $\vec Q = \sum \vec q_i = \sum m_i \cdot \vec v_i$
- $\vec L_O = \sum \vec l_{Oi} = \sum \vec r_i \times m_i \vec v_i$
- $K = \sum k_i = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$
- $\vec F = \sum \vec f_i = \sum (f_i^E + f_i^I)$
- $\vec M_O = \sum \vec m_{Oi} = \sum (m_{Oi}^I + m_{Oi}^E)$
- $U = \sum U_i = \sum (u_i^E + u_i^I)$

m_i MASSA

$\vec m_{Oi}$ MOMENTO DELLE FORZE

$\vec m_O = \vec{OP} \times \vec f_i = \vec r \times \vec f_i$

LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA È DATA DA

$$\vec Q = \sum m_i \cdot \vec v_i = \sum m_i \cdot \frac{d}{dt} \vec x_i = \frac{d}{dt} \sum m_i \vec x_i$$

$$= M \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{1}{M} \sum m_i \vec x_i}_{} = M \frac{d}{dt} \vec r_{cm}$$

FORMULA DEL CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA:

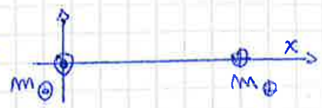
$$\boxed{\vec r_{cm} = \frac{m_1 r_1 + \dots + m_n r_n}{m_1 + \dots + m_n}}$$

MEDIA PESATA DELLE POSIZIONI DEI PUNTI, SE IL CORPO È OMOGENEO IL CENTRO DI MASSA È ANCHE CENTRO GEOMETRICO DEL CORPO

$$\boxed{\vec Q = M \vec v_{cm}}$$

LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA È UGUALE ALLA QDM DI UN IMMAGINARIO PUNTO MATERIALE CHE POTREMMO OTTENERE CONCENTRANDO TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA NEL SUO C.M

ES:



$$x_{cm} = \frac{m_\odot x_\odot + m_\oplus x_\oplus}{m_\odot + m_\oplus} = \frac{m_\oplus}{m_\oplus + m_\odot} x_\oplus =$$

$$\simeq \frac{m_\oplus}{m_\odot} x_\oplus = \frac{1}{300000} 150 \cdot 10^3 = \frac{150}{30} 10^4$$

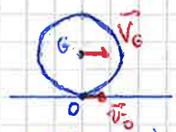
$= 45 \cdot 10^4 = 450$ km INTERNO AL NUCLEO DEL SOLE

PER GIOVE

$x_{cm} \simeq 750\,000$ km POSSIAMO PENSARE AL SOLE CHE RUOTA ATTORNO AL SUO CENTRO DI MASSA

ESEMPI

- MOTO DI PURO ROTOLAMENTO



CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE

IN QUESTO CASO $\vec{V}_O \times \vec{V}_G = 0$

POSSO CONSIDERARE COME EQ. CARDINALE QUELLA SENZA IL FATTORE CORRETTIVO

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M_O^{(E)}$$

IN PARTICOLARE POSSIAMO VEDERE CHE SE

$\vec{F}^E = 0 \Rightarrow \vec{Q} = \text{COST}$ CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$\vec{M}_O = 0 \Rightarrow \vec{L}_O = \text{COST}$ CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

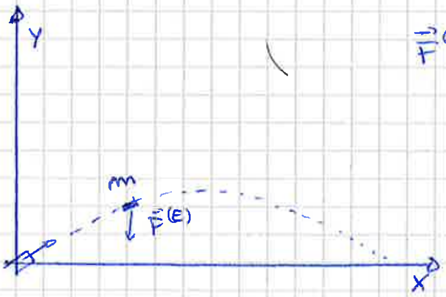
PUÒ SUCCEDERE CHE SIA NULLA SOLO LA COMPONENTE DELLE FORZE O DEI MOMENTI LUNGO UNA DIREZIONE ($\hat{u}$ VERSORE)

$^{\otimes}\vec{F}_{\hat{u}} = \vec{F}^E \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow {}^{\otimes}Q_u = \vec{Q}\,\hat{u} = \text{COST}$

$\vec{M}_{O\hat{u}}^{\otimes} = \vec{M}_O \cdot \hat{u} = 0 \Rightarrow \vec{L}_O^{\otimes} = \vec{L}_O\,\hat{u} = \text{COST}$

$\otimes$ COMPONENTI SCALARI

- MOTO DEL PROIETTILE



$\vec{F}^{(E)} = -mg\,\hat{y}$

$\vec{F}^E \cdot \hat{\imath} = 0$

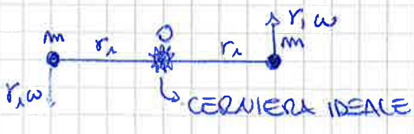
$Q_x = \vec{Q} \cdot \hat{\imath} = \text{COST}$

$mV_x = \text{COST} = mV_{x,0}$

$X(t) = X_0 + V_{x,0}(t)$

ABBIAMO DIMOSTRATO LA CONSERVAZIONE DELLA SOLA COMPONENTE ORIZZONTALE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

- ASTA INCERNIERATA



AL TEMPO INIZIALE LE MASSE PUNTIFORMI DISTANO DA O UNA DISTANZA r_1 E IL SISTEMA ~~SI MUOVE DI~~ RUOTA DI MOTO UNIFORME CON VELOCITÀ ANGOLARE ω_1

ALL'ISTANTE SUCCESSIVO UN MECCANISMO INTERNO FA AVVICINARE LE MASSE AD UNA DISTANZA $r_2 < r_1$, DETERMINARE ω_2

SCELGO O COME POLO

$M_O^{CERNIERA} = 0 \quad M_O^{PESO} = 0$

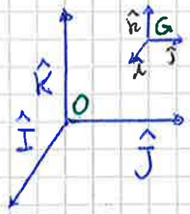
ABBIAMO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$\vec{L}_O = L_O\,\hat{k}$ $\quad L_O$ COMPONENTE SCALARE NON NULLA

$$L_O = r_1 m_1 \overbrace{r_1\omega_1} + r_1 m_1 \overbrace{r_1\omega_1} = 2r_1 mV = \underbrace{2mr_1^2}_{\text{MOMENTO DI INERZIA}}\omega$$

ω → VELOCITÀ ANGOLARE

SISTEMA di RIFERIMENTO del CENTRO di MASSA



$\hat{i} = \hat{I}$
$\hat{j} = \hat{J}$
$\hat{k} = \hat{K}$

NON CI SONO ROTAZIONI

G SISTEMA DI RIFERIMENTO MOBILE:

$\vec{r}_G = 0, \ \vec{V}_G = 0, \ \vec{a}_G = 0 \Rightarrow$ CENTRO DI MASSA COME ORIGINE

COME APPAIONO NEL SR MOBILE LE EQ CARDINALI??

- È PRESENTE UNA FORZA DI TRASCINAMENTO:

$$\vec{F}_G = -M\vec{A}_G$$

↳ ACCELERAZIONE DEL CENTRO DI MASSA MISURATA DAL SR INERZIALE

$$\vec{Q}_G = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_G = 0$$

LA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA MISURATA NEL SR MOBILE È ZERO, LA PRIMA EQ. CARDINALE È BANALE:

$$\boxed{\vec{Q}_G = 0}$$

$$\frac{d\vec{Q}_G}{dt} = \vec{F}^E - M\vec{A}_G = 0 \qquad \vec{F}^E = M\vec{A}_G$$ NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO FISSO

- PER LA II° EQ CARDINALE ABBIAMO:

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^E + \cancel{\vec{M}_G^{APP}}$$

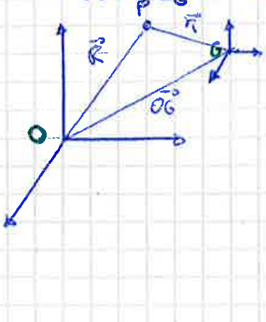
STUDIAMO IL MOMENTO DELLE FORZE APPARENTE RELATIVO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO IN MOVIMENTO:

$$\vec{M}_G^{APP} = \sum \vec{GP}_i \times (-m_i\vec{A}_G) = (-\sum m_i \vec{r}_i) \times \vec{A}_G = -M\vec{r}_G \times \vec{A}_G = \emptyset$$

LA II EQ CARDINALE NEL SR DEL CENTRO DI MASSA HA LA STESSA FORMA CHE NEL SR INERZIALE

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{(e)}$$

MA ESSENDO UN SR NON INERZIALE RICAVIAMO UNA RELAZIONE TRA L_G E L_O



$$\vec{r}_i = \vec{GP}$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum \vec{OP} \times m_i\vec{v}_i = \\ &= \sum(\vec{OG} + \vec{GP}) \times m_i\vec{v}_i = \\ &= \vec{OG} \times \sum(m_i\vec{v}_i) + \vec{GP} \times \sum(m_i\vec{v}_i) = \\ &= \vec{OG} \times M\vec{V}_G + \vec{GP} \times \sum(m_i\vec{v}_i) = \\ &= \vec{OG} \times \vec{Q} + \vec{L}_G\end{aligned}$$