NUMERO: 2389A

ANNO: 2018

# A P P U N T I

STUDENTE: Tamburi Cesare

MATERIA: Analisi I - Prof. Berchio

**TEOREMA** IRRAZIONALITÀ $\sqrt{2}$

$$\nexists\, x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$$

**DIM**

PER ASSURDO, SUPPONIAMO $\exists\, x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ CON $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}_+$ PRIMI TRA LORO CON UNICO DIVISORE L'UNITÀ, TALE CHE:

$$x^2 = 2 \iff \frac{m^2}{n^2} = 2 \iff m^2 = 2n^2$$

$$m^2 = 2n^2 \iff m^2 \text{ PARI} \iff m \text{ PARI}$$

PER ASSURDO $m$ DISPARI

$$m = 2h + 1 \quad \text{con } h \in \mathbb{Z}$$

$$m^2 = 4h^2 + 4h + 1 = 2(2h^2 + 2h) + 1 = 2q + 1 \quad \text{ASSURDO} \blacksquare$$

QUINDI $m$ PARI

$$m = 2k \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$4k^2 = 2n^2 \implies 2k^2 = n^2$$

MA SE $n^2 = 2k^2$ IMPLICA CHE $n$ PARI

$m$ e $n$ PARI ASSURDO PERCHÉ NON PRIMI TRA DI LORO

**DEFINIZIONE** MAGGIORANTI, MINORANTI, SUP. e INF.

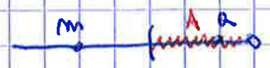
$A \subseteq \mathbb{R}$ SI DICE LIMITATO SUPERIORMENTE (INFERIORMENTE) SE $\exists\, M \in \mathbb{R}$ $(m \in \mathbb{R})$ TALE CHE:

$$a \leq M \quad \forall a \in A$$

$$(a \geq m \quad \forall a \in A)$$

E SI CHIAMA

$M$ MAGGIORANTE 

$m$ MINORANTE 

SE $\exists\, M \in A$ ESSO SARÀ UN INSIEME SUPERIORMENTE LIMITATO

SE $\exists\, m \in A$, A SARÀ UN INSIEME INFERIORMENTE LIMITATO

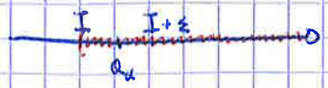
SE $\nexists\, M \in \mathbb{R} : a \leq M \quad \forall a \in A$ ALLORA L'INSIEME È SUP. ILLIMITATO

$a \geq m \quad \forall a \in A$ ALLORA L'INSIEME È INF ILLIMITATO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 120

**DIM** $\inf A$ in $\mathbb{R}$

1. $I \leq a \quad \forall a \in A$
2. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : \quad I + \varepsilon > a_\varepsilon$



ES $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_+\}$

LIMITATO $\quad \sup A = \max A = 1 \quad (1 \in A)$

DEVO DIMOSTRARE CHE $\inf A = 0$

I $\quad 0 \leq a \quad \forall a \in A \implies \frac{1}{n} \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$ VERO ■

II $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in A : \quad 0 + \varepsilon > x$

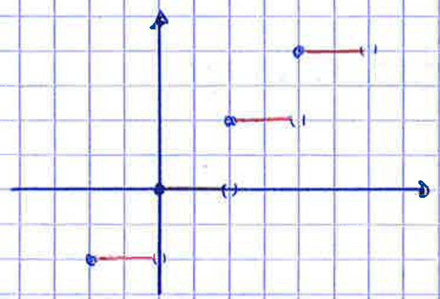
$$\varepsilon > \frac{1}{n_\varepsilon} \iff n_\varepsilon > \frac{1}{\varepsilon}$$

- $\varepsilon > 1$ VERIFICATA $\forall n$
- $\varepsilon = 1 \quad n_\varepsilon = 2$
- $0 < \varepsilon < 1 \quad n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ VALORE MAGGIORE ■

## DEFINIZIONE FUNZIONE PARTE INTERA

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n < x\}$$

SE $n \in \mathbb{Z} \quad [n] = n$



## DEFINIZIONE RADICE N-ESIMA

$n \geq 2$, LA RADICE N-ESIMA DI $a \in \mathbb{R}$ È QUEL NUMERO $x \in \mathbb{R}$ (SE ESISTE) TALE CHE $x^n = a$ E SCRIVO $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

$a^b$ ESSO ESISTE SE

$a > 0 \longrightarrow \forall b$

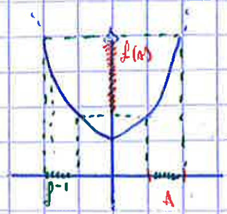
$a = 0 \longrightarrow b > 0$

$a < 0 \longrightarrow$ SOLO PER $b = 2k+1$ CON $k \in \mathbb{Z}$

## DEFINIZIONE CONTROIMMAGINE

DATO $B \subseteq Y$ LA CONTROIMMAGINE DI $B$ ATTRAVERSO $f$ É L'INSIEME

$$f^{-1}(B) = \{x \in \operatorname{dom} f : f(x) \in B\}$$




PROPRIETÀ

- $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \quad \forall A \subseteq \operatorname{dom} f$
  ESSA PUÒ ESSERE IL DOPPIO

- $f(f^{-1}(B)) = B \cap \operatorname{Im} f \subseteq B \quad \forall B \subseteq Y$
  FALSA SE PRENDO UN $B$ FUORI DALL'IMMAGINE

## DEFINIZIONE LIMITAZIONE $f$

$A \subseteq \operatorname{dom} f$ SI DEFINISCE ESTREMO SUPERIORE DI $f$ IN $A$

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{f(x) : x \in A\}$$

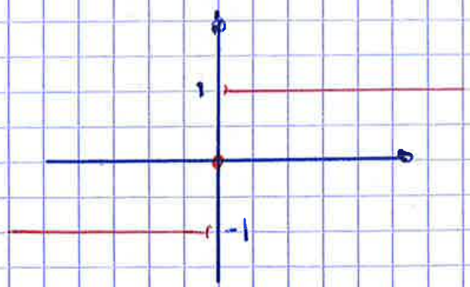
DIRÓ CHE $f$ É SUPERIORMENTE LIMITATA SU $A$ SE $\sup f < +\infty$

INOLTRE SE $\sup f \in f(A)$ ESSO É IL MASSIMO DELLA FUNZIONE SU $A$ E SCRIVO $\max f(x)$

ANALOGAMENTE DEFINISCO $\inf$ E $\min$, $f$ SI DICE LIMITATA SU $A$ SE $f(A)$ É LIMITATO

## DEFINIZIONE FUNZIONE SEGNO

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



**DEFINIZIONE** RESTRIZIONE DI $f$

$f: \text{dom} f \to Y$ e $I \subseteq \text{dom} f$, DICIAMO RESTRIZIONE DI $f$ ad $I$ LA FUNZIONE

$$f_{|I}: I \to Y : f_{|I}(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

VICEVERSA SE $g: \text{dom} g \to Y$ e $\text{dom} f \subseteq \text{dom} g$, $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \text{dom} f$, DICIAMO CHE $g$ È UN'ESTENSIONE DI $f$ a $\text{dom} g$

**DEFINIZIONE** FUNZIONE INVERSA

$f: \text{dom} f \to Y$ INIETTIVA, DEFINISCO FUNZIONE INVERSA DI $f$:

$$f^{-1}: \text{Im} f \to \text{dom} f$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = x$$

dove $x \in \text{dom} f$ È L'UNICO ELEMENTO DEL DOMINIO DI $f$ CHE SODDISFA $f(x) = y$

UNA FUNZIONE È INVERTIBILE SE È INIETTIVA

$$\Gamma(f) = \{(x; f(x)) : x \in \text{dom} f\}$$

$$\Gamma(f^{-1}) = \{(y; f^{-1}(y)) : y \in \text{Im} f = \text{dom} f^{-1}\}$$

$$\{(f(x); f^{-1}(f(x))) : x \in \text{dom} f\}$$

$$\{(f(x); x) : x \in \text{dom} f\}$$

ASCISSA E ORDINATA SONO INVERTITE, C'È UNA SIMMETRIA RISPETTO A $x = y$

## DEFINIZIONE FUNZIONI COMPOSTE

$X, Y, Z$ INSIEMI $\neq 0$, $f: \mathrm{dom} f \subseteq X \to Y$ e $g: \mathrm{dom} g \subseteq Y \to Z$

SE $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{dom} g \neq \emptyset$ DEFINISCO FUNZIONE COMPOSTA DI $f$ e $g$:

$$g \circ f : \mathrm{dom}(g \circ f) \subseteq X \to Z$$

$$x \longmapsto (g \circ f)x := g(f(x))$$

OSSERVAZIONI

- $f$ É BIEZIONE: $(f^{-1} \circ f)\, x = x \quad \forall x \in \mathrm{dom} f$

  $(f \circ f^{-1})\, x = x \quad \forall x \in \mathrm{Im} f$

- $f$ e $g$ INIETTIVA: $(f \circ g)$ e $(g \circ f)$ SONO FUNZIONI INIETTIVE

- $f$ e $g$ MONOTONE CRESCENTI/DECRESCENTI:

  $f \circ g$ É MONOTONA CRE/DECRE

DIM

IPOTESI $f \nearrow$ $g \nearrow$

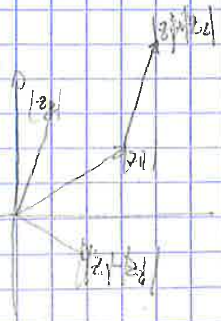
TESI $x_2 > x_1 \Rightarrow (g \circ f)\, x_2 > (g \circ f)\, x_1$

$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ APPLICO LA $g$ $\quad g(f(x_2)) > g(f(x_1))$ ∎

$\leq$ CON $f \searrow$ e $g \searrow$

## TEOREMA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\big||z_1|-|z_2|\big| \le |z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$$



$|z_1| = x$ LA DIFF TRA |z| È MINORE DELLA SOMMA

$|z_2| = y$

IL VALORE ASSOLUTO DELLA SOMMA È MINORE O UGUALE ALLA SOMMA DEI VALORI ASSOLUTI

**DIM** $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

$$-(|z_1|+|z_2|) \le z_1+z_2 \le |z_1|+|z_2|$$

$$|x-y| \le |x+y| \le x+y$$

$$|x-y| \le x+y$$

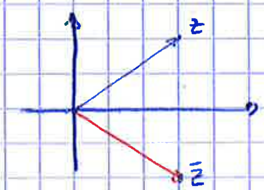
$$-(x+y) \le x-y \le x+y$$

$$-x-y \le x-y \le x+y$$

$-$ $\quad -,+$ $\quad +$

## DEFINIZIONE COMPLESSO CONIUGATO

DATO $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$ DEFINISCO **COMPLESSO CONIUGATO** DI $z$ IL NUMERO: $\bar{z} = x-iy$



SIMMETRICO A $z$ RISPETTO AD $y=0$

**PROPRIETÀ**

- $\bar{\bar{z}} = z$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2}$$

# TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

OGNI EQUAZIONE ALGEBRICA DI GRADO $n>0$ AMMETTE ALMENO UNA SOLUZIONE COMPLESSA:

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0$$

$a_0, a_1 \dots$ SONO NUMERI ~~COMPLESSI~~ REALI $a_n \neq 0$ $n \geq 1$

DA CUI FATTORIZZANDO OTTENIAMO

$$p(z) = (z-z_1)\, q(z) \qquad q(z) \text{ POLINOMIO DI GRADO } n-1$$

$$= a_n (z-z_1)^{\mu_1}(z-z_2)^{\mu_2} \dots (z-z_m)^{\mu_m}$$

$\mu_1 + \mu_2 + \mu_m = n \in \mathbb{N}_+$ ESSE SONO LE SOLUZIONI DEL POLINOMIO

$z_1 \dots z_m \in \mathbb{C}$

OGNI EQUAZIONE ALGEBRICA DI GRADO $n$ HA IN $\mathbb{C}$ ESATTAMENTE $n$ SOLUZIONI NON NECESSARIAMENTE DISTINTE

PROPOSIZIONE

SE I COEFFICIENTI DI $p(z)$ SONO REALI ALLORA SE $z_0$ É SOLUZIONE ANCHE $\overline{z_0}$ LO É

DIM

IPOTESI $a_n \dots a_0 \in \mathbb{R}$ $\quad p(z_0) = 0$

TESI $p(\overline{z_0}) = 0$

$$0 = p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \dots + a_0$$

FACCIO LA CONIUGATA $\overline{0} = \overline{p(z_0)}$

$$0 = \overline{a_n z_0^n} + \overline{a_{n-1} z_0^{n-1}} + \dots + \overline{a_0} =$$

IL CONIUGATO DI UN NUMERO REALE É UN NUMERO

$$= a_n \overline{z_0}^n + a_{n-1} \overline{z_0}^{n-1} + \dots + a_0 = p(\overline{z_0})$$

$\blacksquare$

ESEMPIO $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ VERIFICARE

$\forall \varepsilon > 0, \exists B \geq 0 : \forall x \in dom f, x > B \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \ell\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \quad \forall x > 0$

$x > 0$ PER DEFINIZIONE DI $B$:

$\frac{1}{x} < \varepsilon \iff x > \frac{1}{\varepsilon}$

VALE LA DEF. DI LIMITE:

$B = \frac{1}{\varepsilon}$ SE $\varepsilon \to 0$ $B \to +\infty$ ■

## DEFINIZIONE LIMITE INFINITO $x \to +\infty$

SI DICE CHE $f$ TENDE A $+\infty$ $(-\infty)$ PER $x$ CHE TENDE A $+\infty$ E SI SCRIVE:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$$

SE $\forall A > 0, \exists B > 0 : \forall x \in dom f, x > B \Rightarrow f(x) > A$ SE $\to +\infty$

$\Rightarrow f(x) < -A$ SE $\to -\infty$

## DEFINIZIONE LIMITE FINITO

SIA $x_0$ PUNTO DI ACCUMULAZIONE PER $dom f$, SI DICE CHE $f$ HA LIMITE $\ell \in \mathbb{R}$ PER $x$ CHE TENDE A $x_0$ E SI SCRIVE

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ SE

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in dom f, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

NOTE

- $x_0$ DI ACC. PER $dom f$ SIGNIFICA CHE $x_0$ POTREBBE NON APPARTENERE AL $dom f$:

  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ $\quad dom f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$

- $|x - x_0| > 0$ PERCHÉ NON SIAMO INTERESSATI A CONFRONTARE $f(x_0)$ CON $\ell$

IL LIMITE PER $x \to x_0$ PUÒ TENDERE A $\pm$ INFINITO

# CONTINUITÀ

## DEFINIZIONE

$x_0 \in \text{dom} f$, $f$ si dice continua in $x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in \text{dom} f, \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

NOTA

Confrontando con la definizione di limite abbiamo le seg. differenze:

- $x_0 \in \text{dom} f$
- $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x = x_0$ è incluso, voglio confrontare $f(x)$ con $f(x_0)$
- $x_0$ non deve necessariamente essere un punto di accumulazione per $\text{dom} f$

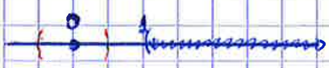
## DEFINIZIONE punto isolato

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto isolato di $A$ se esiste un intorno di $x_0$ tale che

$$A \cap I_r(x_0) = \{x_0\}$$

ESEMPIO

$A := \{0\} \cup (1; +\infty)$



$\exists \ I_{\frac{1}{2}}(0) : \ A \cap I_{\frac{1}{2}}(0) = 0$ $\quad x_0 = 0$ è punto isolato di $A$

## DEFINIZIONE continuità

$x_0 \in \text{dom} f$, $f$ è continua in $x_0$ se vale una delle due:

- $x_0$ è un punto isolato di $\text{dom} f$
- $x_0$ è un punto di accumulazione per $\text{dom} f$ e

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$I \subseteq \text{dom} f$, $f$ si dice continua in $I$ se è continua $\forall x \in I$

**TUTTE LE FUNZIONI ELEMENTARI SONO CONTINUE NEL LORO DOMINIO DI DEFINIZIONE**

# TEOREMI SUI LIMITI

## ESISTENZA e NON ESISTENZA DEI LIMITI

SE $x_0$ É DI ACC. PER IL $\mathrm{dom} f$ E SE

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

## TEOREMA LIMITE DI RESTRIZIONE

SIA $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ DI ACC PER $\mathrm{dom} f$ E SIA $I \subseteq \mathrm{dom} f$ tale che $x_0$ SIA DI ACC anche per $I$. Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} f_{|I}(x) = \ell$$

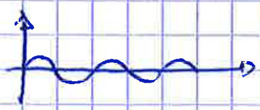
CONSEGUENZA

SE $\exists$ $I_1$ e $I_2$ tali che:

$$\lim_{x\to x_0} f_{|I_1}(x) \neq \lim_{x\to x_0} f_{|I_2} \Rightarrow \nexists \lim_{x\to x_0} f(x)$$

ESEMPIO

$\nexists \lim_{x\to +\infty} \sin x$



AD INFINITO CONTINUA AD OSCILLARE

$I_1 := \{2n\pi : n \in \mathbb{N}\}$

$I_2 := \{\frac{\pi}{2} + 2n\pi : n \in \mathbb{N}\}$

$+\infty$ É DI ACC. PER ENTRAMBI

$f_{|I_1}(x) = 0$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} f_{|I_1}(x) = 0$

$f_{|I_2}(x) = 1$ $\qquad \lim_{x\to +\infty} f_{|I_2}(x) = 1$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x\to +\infty} \sin x$ ■

IN SEGUITO LE IPOTESI SONO ANCHE $\ell, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $x_0$ ACC PER dom f

## TEOREMA UNICITÁ DEL LIMITE

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ TALE LIMITE É UNICO

## TEOREMA PERMANENZA DI SEGNO

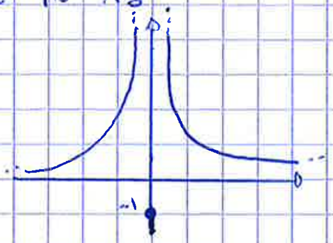
Se $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell > 0$ incluso $+\infty$ ALLORA

$$\exists\, r > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$$

NOTE

- RISULTATO ANALOGO PER $\ell < 0 \Rightarrow f(x) < 0$
- IL TEOREMA VALE ANCHE PER IL LIMITE DESTRO O SINISTRO SOSTITUENDO $I_r(x_0)$ CON $I_r^+(x_0)$ O $I_r^-(x_0)$
- NON HO CONTROLLO DEL SEGNO IN $x_0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$




$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty > 0$

$\exists\, r > 0 : f(x) > 0$ in $I_r(0) \setminus \{0\}$ PERCHÉ IN $x = 0$ $f(x) = -1 < 0$

## DIM:

- $\ell > 0$ FINITO, PER IPOTESI $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ OVVERO:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 : x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(\ell)$$

$$f(x) \in I_\varepsilon(\ell) \iff \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

FISSO $\varepsilon = \frac{\ell}{2} \Rightarrow \exists\, \bar{\delta} = \delta\left(\frac{\ell}{2}\right)$

se $x \in I_{\bar{\delta}}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow 0 < \ell - \frac{\ell}{2} < f(x) < \ell + \frac{\ell}{2}$

$$\Rightarrow \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell \Rightarrow f(x) > \frac{\ell}{2} > 0 \quad \blacksquare$$

VALE LA TESI PER $r = \bar{\delta}$

# TEOREMA DEL CONFRONTO finito

SIANO $f, g$ e $h$ tre funzioni DEFINITE in $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ CON $r>0$ e $x_0$ FINITO o INFINITO, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e TALI CHE:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \quad \forall x \in I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$$

ALLORA SE

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R} \text{ si HA}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

**DIM:**

IPOTESI $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$: e $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

$$\forall x \in \text{dom} f \quad x \in I_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_\varepsilon(l)$$

$$\forall x \in \text{dom} h \quad x \in I_{\delta_2}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow h(x) \in I_\varepsilon(l)$$

SIA $\overline{\delta} = \min\{\varepsilon, \delta_1, \delta_2\}$

SE $x \in I_{\overline{\delta}}(x_0) \setminus \{x_0\}$: $f(x) \in I_\varepsilon(l) \iff l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$

$h(x) \in I_\varepsilon(l) \iff l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon$

$$\Rightarrow \quad \underset{\swarrow\, l-\varepsilon}{f(x)} \leq g(x) \leq \underset{\searrow\, l+\varepsilon}{h(x)}$$

$$l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon \Rightarrow g(x) \in I_\varepsilon(l) \ \blacksquare$$

ESEMPIO DIMOSTRARE CHE $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$ PARTENDO DA $\sin x < x < \operatorname{tg} x$

$x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$ $\qquad \frac{\sin x}{\sin x} < \frac{x}{\sin x} < \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x}$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\underset{\downarrow\, 1}{\cos x} < \underset{\downarrow}{\frac{\sin x}{x}} < \underset{\downarrow\, 1}{1}$$

PER TEO CONFRONTO $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

# ALGEBRA dei LIMITI

ESTENSIONE DELLE OPERAZIONI ARITMETICHE IN $\overline{\mathbb{R}}$

$+\infty + \ell = +\infty \quad \forall \ell \neq -\infty$

$-\infty + \ell = -\infty \quad \forall \ell \neq +\infty$

$\left.\begin{array}{l} \ell \cdot \infty = \infty \\ \dfrac{\ell}{0} = \infty \end{array}\right\} \forall \ell \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\infty}{\ell} = \infty \\ \dfrac{\ell}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \forall \ell \neq \pm\infty$

NON SONO DEFINITE LE SEGUENTI FORME INDETERMINATE

$+\infty - \infty \; ; \; 0 \cdot \infty \; ; \; \dfrac{0}{0} \; ; \; \dfrac{\infty}{\infty} \; ; \; 0^0 \; ; \; \infty^0 \; ; \; 1^\infty$

**TEOREMA** Algebra dei limiti

Supponiamo $f$ e $g$ definite in $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$ e che

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$ $\quad \ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$

OGNI QUAL VOLTA L'ESPRESSIONE A SECONDO MEMBRO HA SENSO, SI HA:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \ell \pm m$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \ell \cdot m$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m} \qquad (g(x) \neq 0 \text{ in } I_r(x_0) \setminus \{x_0\})$$

NON SONO DEFINITE LE FORME INDETERMINATE

**DIM**

SOLO PER $\ell, m$ FINITI

$|f(x) - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1, \delta_2 > 0 : \forall x \in \text{dom} f,\ x \in I_{\delta_1}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(\ell)$

$\forall x \in \text{dom} g,\ x \in I_{\delta_2}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(x) \in I_{\frac{\varepsilon}{2}}(m)$

$|g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2}$

+ DEFINISCO $\delta = \min\{2, \delta_1, \delta_2\}$, $\forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$:

$|f(x) + g(x) - (\ell + m)| = |f(x) - \ell + g(x) - m|$

$\Rightarrow \leq |f(x) - \ell| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ ■

PER DISUG. TRIANGOLARE

## COROLLARIO

Sia $f$ CONTINUA IN $x_0$ e sia $y_0 = f(x_0)$

Sia $g$ CONTINUA IN $x_0$, allora $g \circ f$ è CONTINUA in $x_0$

ESEMPIO

$h(x) = \sin x^2$ $\quad f(x) = x^2 = y \to$ continua $\quad g \circ f = \sin y$ CONTINUA

$g(x) = \sin x \to$ continua

# LIMITI NOTEVOLI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}$
- $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$
- $\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$$\pm\infty \begin{cases} \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha \end{cases}$$

se $x \to \pm\infty$ E HO UN RAPPORTO

$$\boxed{\begin{array}{c} n \quad \log x \quad x^\alpha \quad a^x \quad x! \quad x^x \\ N \longrightarrow D \quad 0 \\ \pm\infty \quad D \longleftarrow M \end{array}}$$

## DEFINIZIONE DIVERGENTE

SI DICE CHE LA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ TENDE A $+\infty$ O DIVERGE A $+\infty$ E SI SCRIVE

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \quad \text{SE}$$

$$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, n > n_A \Rightarrow a_n > A$$

ESEMPIO

$a_n = e^n, n \geq 0 \in \mathbb{N}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} e^n = +\infty$

$\forall A > 0, \exists n_A \in \mathbb{N} : \forall n > n_A \Rightarrow a_n > A$

$e^n > A \Rightarrow n > \ln A$

vale la definizione con:

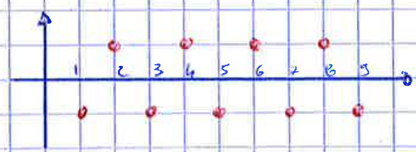
- $0 < A < 1 \quad n_A = 0$
- $A > 1 \quad n_A = [\ln A] \rightarrow$ parte intera

## DEFINIZIONE INDETERMINATA

SE LA SUCCESSIONE NON È NÉ CONVERGENTE NÉ DIVERGENTE SI DICE INDETERMINATA

ESEMPIO

$a_n = (-1)^n$




$a_{2n} = 1 \quad \forall n \geq 0$

$a_{2n+1} = -1 \quad \forall n \geq 0$

UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE CHE PERMETTE DI ESCLUDERE IL COMPORTAMENTO INDETERMINATO DI UNA SUCCESSIONE È LA MONOTONIA

## DEFINIZIONE CRESCENTE O DECRESCENTE

LA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ È MONOTONA CRESCENTE/DECRESCENTE SE:

$$\forall n \geq n_0 \quad a_{n+1} \geq a_n \qquad a_{n+1} \leq a_n$$

NOTA PER VERIFICARE LA MONOTONIA DI UNA SUCCESSIONE SI PUÒ UTILIZZARE UNA FUNZIONE CON LE STESSE CARATTERISTICHE DI $a_n$

$$a_n = n^2 = f(n) \text{ con } f(x) = x^2 \quad f(x) \nearrow \Rightarrow a_n \nearrow \text{ per } x \geq 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 120

# TEOREMI limiti di successioni

Valgono come per i limiti di funzione i seguenti

- **Teo** UNICITÁ DEL LIMITE
- **Teo** ALGEBRA DEI LIMITI
- **Teo** LIMITATEZZA $\Rightarrow$ SE UNA SUCCESSIONE CONVERGE ALLORA É LIMITATA
- **Teo** CONFRONTO
  - se $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \leq \lim_{n\to+\infty} b_n$

    se $a_n \leq b_n \leq c_n$ e $\lim_{n\to x_0} a_n = \lim_{n\to x_0} c_n = l \Rightarrow \lim_{n\to x_0} b_n = l$

- **TEOREMA**

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$$ la successione é INFINITESIMA

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad |a_n| = \frac{1}{n} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

**DIM** $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0 : n > n_\varepsilon \quad |a_n - 0| < \varepsilon$

$\Updownarrow$

$|a_n| < \varepsilon \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$

- **TEOREMA**

Se $\lim_{n\to x_0} a_n = 0$ e $\{b_n\}$ limitata

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = 0$

- **TEOREMA** sostituzione

Sia $\{a_n\} : \lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $g$ UNA FUNZIONE DEFINITA IN UN INTORNO DI $l$, ALLORA:

(i) se $l \in \mathbb{R}$ e $g$ é CONTINUA IN $l \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = g(l)$

(ii) se $l \notin \mathbb{R}$ ed $\exists \lim_{x\to l} g(x) = m \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} g(a_n) = m$

SE $g$ non é continua ✗

# INFINITI, INFINITESIMI e SIMBOLI di LANDAU

## DEFINIZIONE

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ DI ACCUMULAZIONE PER dom$f$, $f$ si dice

INFINITESIMA per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

INFINITA per $x \to x_0$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$

## DEFINIZIONE INFINITESIMI e "O"

$x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $g$ e $f$ definite in $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ e ESISTE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{con } \ell \in \mathbb{R} \text{ FINITO}$$

DICO CHE

$f$ è un "O GRANDE" di $g$ per $x \to x_0$ e scrivo $f = O(g)$ $x \to x_0$

INOLTRE DISTINGUO I SEGUENTI CASI

$\ell = 0$, scrivo $f = o(g)$ per $x \to x_0$

$f$ è un "o piccolo" di $g$ per $x \to x_0$

$\ell = 1$, scrivo $f \sim g$ per $x \to x_0$

$f$ è ASINTOTICAMENTE o EQUIVALENTE A $g$ per $x \to x_0$

$\ell \neq 0$, scrivo $f \asymp g$ per $x \to x_0$

$f$ ha LO STESSO ORDINE DI GRANDEZZA di $g$ per $x \to x_0$

$\ell = \infty$, VUOL DIRE CHE SE FACCIO IL RECIPROCO VA A $\emptyset$, QUINDI AVRÒ

$g = o(f)$ per $x \to x_0$

ATTENZIONE SPECIFICARE SEMPRE IL PUNTO RISPETTO A CUI FACCIO IL LIMITE

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \sin x \sim x \quad x \to 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \iff \sin x = o(x) \quad x \to +\infty$

$x^n = o(x^m)$ PER $x \to 0 \iff n > m$

$x^n = o(x^m)$ PER $x \to \infty \iff m > n$

# LIMITI NOTEVOLI CON SIMBOLI DI LANDAU

## $x \to 0$

- $\sin x = x + o(x)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $a^x = 1 + (\log a)x + o(x)$
- $\log(x+1) = x + o(x)$
- $\log_a(x+1) = (\log_a e)x + o(x)$
- $(x+1)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$
- $tg\, x = x + o(x)$
- $arctg\, x = x + o(x)$
- $arcsin\, x = x + o(x)$

## $x \to 0^+$

- $\log x = o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \quad \forall \alpha > 0$

## $x \to +\infty$

- $x^\alpha = o(e^x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\log x = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

## $x \to -\infty$

- $e^x = o(|x^\alpha|) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

## VALE IL TEOREMA DI SOSTITUZIONE

- $\cos(\sin x)$ PER $x \to 0$

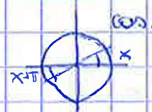
$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$

$\sin t = t + o(t)$

$\Rightarrow 1 - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin x)^2$

$\Rightarrow 1 - \frac{(t + o(t))^2}{2} + o(t + o(t))^2 \Rightarrow 1 - \frac{x^2 + 2x\,o(x) + o(x^2)}{2} + o(x^2) =$

$= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$




$\cos x = -\cos(x+\pi)$

- $\cos x$ PER $x \to \pi$

$\cos x = \cos(x + \pi - \pi)$

$\Rightarrow -\cos(x-\pi) \quad t = x - \pi \quad x \to \pi \; t \to 0 \quad \Rightarrow -\cos t$

$\Rightarrow -1 + \frac{t^2}{2} + o(t^2) = -1 + \frac{(x-\pi)^2}{2} + o(x-\pi)^2$

# CONFRONTO tra INFINITI e INFINITESIMI

## DEFINIZIONE ordine di infinito/infinitesimo

Siano $f$ e $g$ due INFINITESIMI per $x \to x_0$:

- SE $f \asymp g$ per $x \to x_0$, $f$ e $g$ si dicono INFINITESIMI DELLO STESSO ORDINE
  $\sim$ $\frac{f}{g} \neq 0$
- se $f = o(g)$ per $x \to x_0$, $f$ si dice INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a $g$
- SE $g = o(f)$ per $x \to x_0$, $f$ si dice INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $g$
- SE nessuna delle condizioni sopra sono verificate $f$ e $g$ NON SONO CONFRONTABILI per $x \to x_0$

se $f$ e $g$ sono degli INFINITI vale la terminologia analoga con "SUPERIORE" e "INFERIORE" SCAMBIATI

esempio

$\frac{\sin x}{x^3} \to +\infty$ PER $x \to 0$

$\sin x$ è UN INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $x^3$
$x^3$ è UN INFINITESIMO DI ORDINE SUP a $\sin x$

## DEFINIZIONE parte principale e ORDINE

Sia $\varphi(x)$ INFINITO (infinitesimo) PER $x \to x_0$, con $\varphi \neq 0$ PER $x \neq x_0$
DICIAMO CHE $f$ è UN INFINITO (infinitesimo) DI ORDINE $\alpha \in \mathbb{R}_+$ RISPETTO ALL'INFINITO (infinitesimo) CAMPIONE $\varphi(x)$ SE:

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi^\alpha(x)} = \ell \text{ finito e } \neq 0$$

LA $\varphi$ È LA $x$ AD ESPONENTE MINORE

$$\Leftrightarrow f(x) \sim \ell\, \varphi^\alpha(x) \Leftrightarrow f(x) = \ell\, \varphi^\alpha(x) + o(\varphi^\alpha(x)) \text{ per } x \to x_0$$

$\ell\, \varphi^\alpha(x)$ SI DICE PARTE PRINCIPALE DELL'INFINITO (infinitesimo)

GLI INFINITI / INFINITESIMI CAMPIONE PIÙ USATI SONO:

| | $x \to 0^+$ | $x \to +\infty$ | $x \to x_0$ |
|---|---|---|---|
| INFINITI | $\frac{1}{x}$ | $x$ | $\frac{1}{x-x_0}$ |
| INFINITESIMI | $x$ | $\frac{1}{x}$ | $x-x_0$ |

si può usare il VALORE ASSOLUTO se occorre

# ASINTOTI

**DEFINIZIONE** A. VERTICALE

$x_0 \in \mathbb{R}$, $f$ definita in un intorno di $x_0$, SE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$$

ALLORA $x = x_0$ SI DICE ASINTOTO VERTICALE

Se la CONDIZIONE È VERIFICATA SOLO PER $x \to x_0^+$ $(x_0^-)$ SI PARLA DI ASINTOTO VERTICALE DESTRO (SINISTRO).

**DEFINIZIONE** funzioni ASINTOTICHE

DUE FUNZIONI SI DICONO ASINTOTICHE SE:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x \to x_0} f(x) - g(x) = 0$$

È UN CONCETTO PIÙ FORTE DI ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI (HANNO LO STESSO COMPORTAMENTO) INFATTI:

$g(x) = x+1$ $\quad f(x) = x$ $\quad f \sim g$ $x \to +\infty$ $\quad f - g \neq 0$ $x \to \pm\infty$

DOMANDA: $f \sim g$ $x \to x_0 \Rightarrow e^f \underset{x \to x_0}{\sim} e^g$?

$e^f \sim e^g \Leftrightarrow \frac{e^f}{e^g} = 1 \Rightarrow e^{f-g} \to 1$ FALSO

VERO SE $f - g \to 0 \Rightarrow e^f \sim e^g$

**DEFINIZIONE** A OBLIQUO, ORIZZONTALE

$f$ definita per $x \to \pm\infty$, SE $\exists\, m, q \in \mathbb{R}$ TALI CHE:

$$(1) \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left[ f(x) - (mx + q) \right] = 0$$

DICIAMO CHE $y = mx + q$ È UN ASINTOTO OBLIQUO (DX o SX)

SE $m = 0$ DICIAMO CHE $y = q$ È UN ASINTOTO ORIZZONTALE

DETERMINARE $m$ e $q$

- DIVIDO (1) PER $x \Rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x) - mx + q}{x} \Leftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} - m - \frac{q}{x} = 0$ $\quad o(1)$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

- Se $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ SOSTITUISCO (1) $m$ e OTTENGO $q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} p(x) = \mp\infty\end{array}\right\}$$ SEGNO DISCORDE

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in \mathbb{R} : p(x_0) = 0$ PER COROLLARIO ■

OSSERVAZIONE

IL TEO. ESISTENZA DEGLI ZERI PUÒ ESSERE APPLICATO PER DETERMINARE LE INTERSEZIONI TRA IL GRAFICO DI $f(x)$ e $g(x)$, $x \in I$. DEFINIAMO $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in I$

$$h(x_0) = 0 \iff f(x_0) = g(x_0)$$

TEOREMA VALORI INTERMEDI

SIA $f$ CONTINUA IN $[a, b]$, ALLORA ESSA ASSUME TUTTI I VALORI COMPRESI TRA $f(a)$ e $f(b)$

DIM.

- se $f(a) = f(b) \Rightarrow$ OVVIO
- se $f(a) < f(b)$, sia $c \in (f(a); f(b))$
  - VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\exists\, x_0 \in [a, b] : f(x_0) = c$
  - DEFINISCO $h(x) := f(x) - c$, $x \in [a, b]$:
    a) $h$ è CONTINUA PER COMPOSIZIONE
    b) $h(a) = f(a) - c < 0$
    $h(b) = f(b) + c > 0$
  - a + b PER TEO ZERI $\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a, b] : h(x_0) = 0$
    $\Rightarrow f(x_0) - c = 0 \Rightarrow f(x_0) = c$ ■
- se $f(a) > f(b)$ RAGIONAMENTO ANALOGO ■

COROLLARIO

$f$ CONTINUA SU $I$ INTERVALLO $\Rightarrow f(I)$ INTERVALLO DI ESTREMI $\inf\limits_I f$ e $\sup\limits_I f$

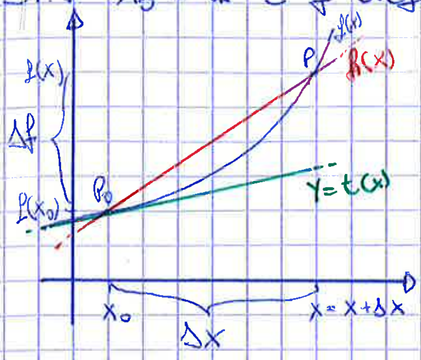
SE APPARTENGONO A $f(I)$ la $f$ AMMETTE MASSIMO e MINIMO

NOTA SE $I$ NON È CHIUSO, $f(I)$ è UN INTERVALLO MA PUÒ ESSERE SIA CHIUSO CHE APERTO.

ES
$f(x) = \sin x$ $\quad f\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) = (-1, 1)$ $\quad f(0, 2\pi) = [-1; 1]$

# CALCOLO DIFFERENZIALE

SIA $x_0 \in \mathbb{R}$ e $f$ definita in $I_r(x_0)$. DATO $x \in I_r(x_0)$ DEFINISCO:




$\Delta x = x - x_0$ INCREMENTO VARIABILE INDIPENDENTE

$\Delta f = f(x) - f(x_0)$ INCREMENTO VARIABILE DIPENDENTE

$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ RAPPORTO INCREMENTALE

R è LA RETTA SECANTE A $f$ PASSANTE PER $P_0(x_0; f(x_0))$ e $P(x_0+\Delta x; f(x_0+\Delta x))$

$$\frac{y - f(x_0)}{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)} = \frac{x - x_0}{x_0 + \Delta x - x_0}$$

$$\Rightarrow \quad y = f(x_0) + \frac{\Delta f}{\Delta x}(x - x_0)$$

$\frac{\Delta f}{\Delta x}$ → COEFFICIENTE ANGOLARE RETTA SECANTE R

SE TENDO $\Delta x$ A ZERO:

$R(x)$ $\Delta x \to 0$ "SI AVVICINA" ALLA RETTA TANGENTE A $f$ IN $P_0$, $t(x)$

## DEFINIZIONE DERIVATA

$f$ DEFINITA IN $I(x_0) \in \mathbb{R}$ SI DICE DERIVABILE IN $x_0$ SE ESISTE FINITO IL LIMITE:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

TALE LIMITE SI DICE DERIVATA DI $f$ IN $x_0$ E SI DENOTA CON

$f'(x_0)$ o $Df(x_0)$

IN PARTICOLARE

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \iff f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

I° FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{x \to x_0} + o(x - x_0)$$

$$f(x) = t(x) + o(x - x_0)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 120

# DERIVATE FONDAMENTALI

- $f(x) = k \qquad f'(x) = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{R}$
- $f(x) = x^\alpha \qquad f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$
- $f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$
- $f(x) = a^x \qquad f'(x) = a^x \log a \qquad a > 0$
- $f(x) = \log x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$
- $f(x) = \log_a x \qquad f'(x) = \frac{1}{x \log a} \qquad a > 0, a \neq 1$
- $f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x$
- $f(x) = \cos x \qquad f'(x) = -\sin x$
- $f(x) = \operatorname{tg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
- $f(x) = \operatorname{cotg} x \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{cotg}^2 x$
- $f(x) = \operatorname{arctg} x \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- $f(x) = \operatorname{arccotg} x \qquad f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$
- $f(x) = \arcsin x \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \arccos x \qquad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x) = \sinh x \qquad f'(x) = \cosh(x)$
- $f(x) = \cosh x \qquad f'(x) = \sinh(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 120

# TEOREMA DERIVATA FUNZIONE COMPOSTA

SIA $f$ DERIVABILE IN $x_0 \in \mathbb{R}$ e $g$ DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ ALLORA $g \circ f$ è DERIVABILE IN $x_0$ e VALE:

$g \circ f = g(f(x))$

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

# TEOREMA DERIVATA FUNZIONE INVERSA

SIA $f$ CONTINUA E INVERTIBILE IN UN INTORNO DI $x_0 \in \mathbb{R}$ E SIA $f$ DERIVABILE IN $x_0$ CON $f'(x_0) \neq 0$.

Allora $f^{-1}(y)$ è DERIVABILE IN $y_0 = f(x_0)$ e VALE:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{con } y_0 = f(x_0)$$

**DIM**

$$g(f(x)) = x \implies g(y) = f^{-1}(x)$$

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \implies [f^{-1}(f(x))]' = x'$$

$$((f^{-1})' f(x)) \cdot f'(x) = 1 \qquad ((f^{-1})' f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \blacksquare$$

# PROPRIETÀ

SE $f$ è PARI (DISPARI) DERIVABILE nel dom $f$, ALLORA $f'$ è DISPARI (PARI)

**DIM**

$f(-x) = f(x) \iff f$ PARI

$f'(-x)(-1) = f'(x) \iff -f'(-x) = f'(x) \iff f'$ DISPARI $\blacksquare$

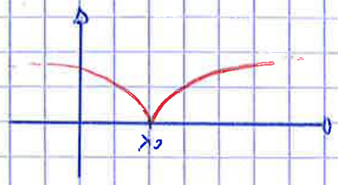
ES

$f = \sin x$ DISPARI $\quad f' = \cos x$ PARI $\to$ ASSE $y$

$f = x^2$ PARI $\quad f' = 2x$ DISPARI $\to$ ORIGINE

- UN PUNTO DI CUSPIDE SE $f$ É CONTINUA IN $x_0$ É UNO DEI DUE LIMITI DEL RAPPORTO INCREMENTALE VALE $+\infty$ MENTRE L'ALTRO $-\infty$ (SEGNI DISCORDI)

$f(x) = \sqrt{|x|}$



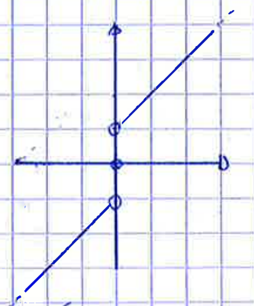
# TEOREMA

SIA $f$ CONTINUA e DERIVABILE IN $I(x_0) \setminus \{x_0\}$. SE $\exists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \ell$ ED É FINITO, ALLORA

$$f'(x_0) = \ell$$

ESEMPIO

$$f(x) = x + \operatorname{sign}(x) \begin{cases} x+1 & \text{se } x>0 \\ 0 & \text{se } x=0 \\ x-1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



IN $x_0 = 0$ $f(x)$ NON É CONTINUA QUINDI NON DERIVABILE

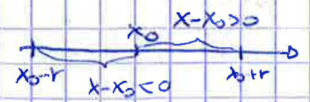
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^+} f'(x) = 1 = \lim_{x \to 0^-}$$

MA NON É APPLICABILE IL TEOREMA PER $f'(0) = 1$

OSSERVAZIONI

- Se $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x) = \pm\infty$ OPPURE $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x)$ finiti ma $\neq$ $x_0$ É UN PUNTO DI NON DERIVABILITÁ
- Se $\nexists \lim_{x \to x_0^{\pm}} f'(x)$ NON POSSO APPLICARE IL TEOREMA: PER CALCOLARE $\ell$ DEVO USARE IL RAPPORTO INCREMENTALE

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x-x_0>0 \\ \geq 0 & \text{se } x-x_0<0 \end{cases}$$




PASSANDO AL LIMITE, PER IL TEOREMA DI PERMANENZA DI SEGNO:

$$f'_+(x_0) \leq 0 \quad e \quad f'_-(x_0) \geq 0$$

MA $f$ È DERIVABILE $\Rightarrow$ $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0 = f'(x_0)$ ∎

## NOTE

- $x_0$ PUNTO DI ESTREMO INTERNO AL $\mathrm{dom} f$ e
  $f$ DERIVABILE IN $x_0$ $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$
- $f'(x_0) = 0 \not\Rightarrow$ $x_0$ DI ESTREMO
  ESEMPIO $f(x) = x^3$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(0) = 0$ MA NON MAX O MINIMO
- ESISTONO PUNTI DI ESTREMO IN CUI $f$ NON È DERIVABILE
  OPPURE $f'(x) \neq 0$
  ESEMPIO $f(x) = |x|$ $[-1;1]$
  $m = \min f(x) = 0$ ma $f$ NON DERIVABILE IN $0$
  $M = \max f(x) = 1 = f(\pm 1)$ ma $f'(\pm 1) \neq 0$

## CONCLUSIONE

I PUNTI DI ESTREMO VANNO CERCATI TRA:

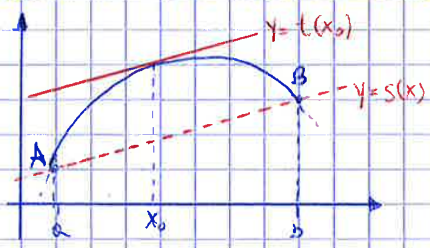
- PUNTI CRITICI INTERNI: $f'(x_0) = 0$
- PUNTI DI NON DERIVABILITÀ
- ESTREMI DEL DOMINIO SE CHIUSO:
  $\mathrm{dom} f = [a, b]$ CERCARE IN $a$ e $b$

# TEOREMA di LAGRANGE (VALOR MEDIO)

SIA $f$ DEFINITA E CONTINUA IN $[a,b]$ E DERIVABILE IN ALMENO $(a,b)$. ALLORA:

$$\exists\, x_0 \in (a,b) : \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(x_0)$$

OGNI PUNTO CHE SODDISFA LA RELAZIONE È DETTO PUNTO DI LAGRANGE.




COEFF. ANGOLARE SECANTE $f$ IN A, B $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

COEFF. ANGOLARE TANGENTE $f$ IN $x_0 = f'(x_0)$

GEOMETRICAMENTE NEI PUNTI DI LAGRANGE LA RETTA TANGENTE AL GRAFICO DI $f$ È PARALLELA ALLA RETTA SECANTE PER A, B

## DIM

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \quad \text{FUNZIONE AUSILIARIA} \quad x \in [a,b]$$

- $g$ È DEFINITA E CONTINUA IN $[a,b]$, DERIVABILE IN $(a,b)$ PERCHÉ SOMMA DI FUNZIONI CHE SODDISFANO TALI IPOTESI:

$$f(x) \quad \text{e la retta} \quad -\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

- $g(a) = f(a)$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)} = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$$

$$g(a) = g(b) \Rightarrow \text{APPLICO TEOREMA DI ROLLE} \quad \exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$$

- $g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$g'(x_0) = 0 \iff f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \blacksquare$$

### OSSERVAZIONE

IL TEOREMA DI ROLLE IMPLICA IL TEOREMA DI LAGRANGE, IN MODO INVERSO VALE SOLO SE $f(a)=f(b)$ NELLE IPOTESI DI LAGRANGE: IN QUESTO CASO I DUE TEOREMI SONO EQUIVALENTI

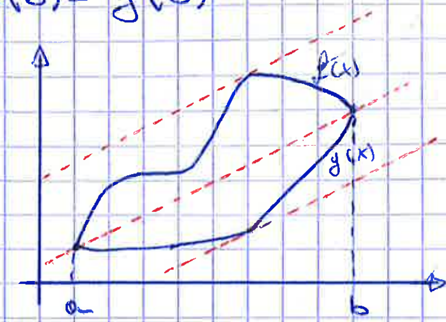
## COROLLARIO

CON LE STESSE IPOTESI DEL TEO CAUCHY E INOLTRE SE

$$f(a) = g(a) \quad e \quad f(b) = g(b)$$

ALLORA $\exists\, x_0 \in (a,b)$ :

$$f'(x_0) = g'(x_0)$$




## DIM

DEFINISCO UNA FUNZIONE $h(x) = f(x) - g(x) \quad x \in [a,b]$

$h$ CONTINUA e DERIVABILE IN $[a,b]$

$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) - g(a) = 0 \\ h(b) = f(b) - g(b) = 0 \end{array}\right\} \text{APPLICO IL TEOREMA DI ROLLE}$$

$$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a,b) : \quad h'(x_0) = 0$$

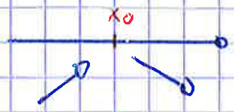
$$f'(x_0) = g'(x_0) \quad \blacksquare$$

## COROLLARIO

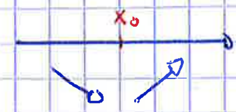
$f$ DERIVABILE IN $I$ e $x_0$ PUNTO CRITICO IN $I$.

SE $f'(x) \geq 0$ $(\leq 0)$ A SINISTRA DI $x_0$ e $f'(x) \leq 0$ $(\geq 0)$ A DESTRA DI $x_0$

ALLORA IN $x_0$ HO




PUNTO DI MASSIMO




PUNTO DI MINIMO

## DEFINIZIONE DERIVATE ORDINE SUPERIORE

SE $f'$ È DERIVABILE IN $x_0$, SI DICE CHE $f$ È DERIVABILE DUE VOLTE IN $x_0$ E SI PONE:

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$ DERIVATA II DI $f$ IN $x_0$

IL PROCEDIMENTO PUÒ ESSERE ITERATO

$$f^k(x_0) = (f^{k-1})'(x_0)$$ DERIVATA K-ESIMA DI $f$ IN $x_0$ $\quad k \in \mathbb{N}_+$

POSSIAMO DEFINIRE DEGLI INSIEMI DI DERIVAZIONE, DEFINITE CLASSI.

$C^0(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ continue}\}$

$C^k(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f^{(j)} \in C^0(I)\ \forall\, 0 \leq j \leq k\}$ funzioni di classe $k$

$C^\infty(I) = \{f : I \to \mathbb{R},\ f^{(j)} \in C^0(I)\ \forall\, j \geq 0\} \Rightarrow e^x, \sin x, \cos x$

# TEOREMA

$f$ DERIVABILE DUE VOLTE IN $I$, VALGONO LE SEGUENTI:

1. $f$ CONVESSA SU $I \iff f''(x) \geq 0$ SU $I$
2. $f''(x) > 0 \ \forall x \in I \Rightarrow f$ STRETTAMENTE CONVESSA SU $I$
   $\not\Leftarrow$
   ↳ CONTROESEMPIO $f(x) = x^4$ STRETT. CONVESSA MA $f''(0) = 0$

ENUNCIATO ANALOGO $f$ CONCAVE $(f''(x) \leq 0)$

## COROLLARIO

$f$ DERIVABILE DUE VOLTE IN $I_2(x_0)$: VALGONO

1. SE $x_0$ É UN PUNTO DI FLESSO ALLORA $f''(x_0) = 0$
2. SE $f''(x_0) = 0$ e $f''$ CAMBIA SEGNO IN $I_2(x_0)$, ALLORA $x_0$ É UN PUNTO DI FLESSO

# TEOREMA DE L'HOPITAL

SIA $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e SIANO $f$ e $g$ DEFINITE E DERIVABILI IN $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ CON $g'(x) \neq 0$ IN $I_r(x_0) \setminus \{x_0\}$ TALI CHE

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0, \pm\infty$$

SE $\exists \lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ALLORA

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

OSSERVAZIONE $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim \frac{(f(x) - f(x_0))'}{(x - x_0)'} = \lim_{x \to x_0} f'(x_0)$

SOLO SE ESISTONO I LIMITI

QUINDI DA CONSIDERARE UNA DERIVATA IN PIÙ, L'ESISTENZA DI $\bar{x}$ È DATA DAL TEOREMA DI LAGRANGE:

$f$ CONTINUA $[x_0, x]$, DERIVABILE $(x_0; x)$ $\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (x_0, x)$

## TEOREMA resto di LAGRANGE

SIA $n \geq 0$ e $f$ DERIVABILE $n$-VOLTE CON DERIVATA $n$-ESIMA CONTINUA IN $x_0$, INOLTRE SIA $f$ DERIVABILE $(n+1)$-VOLTE IN UN INTORNO $I_2(x_0) \setminus \{x_0\}$.

$\forall x \in I_2(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\exists\, \bar{x} \in (x_0, x)$ o $(x, x_0)$ TALE CHE VALE:

$$f(x) = P_n(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{n+1}(\bar{x})(x - x_0)^{n+1}$$

DEFINITO COME RESTO DI LAGRANGE

SE $x_0 = 0$ LO SVILUPPO DI TAYLOR PRENDE IL NOME DI SVILUPPO DI Mc LAURIN

## TEOREMA

IL POLINOMIO DI Mc LAURIN DI UNA FUNZIONE PARI (DISPARI) CONTIENE SOLO POTENZE PARI (DISPARI) DI $x$

**DIM**

$x_0 = 0$ $\qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{k}(0) x^k$

SUPPONGO $f$ PARI $\Rightarrow f'$ DISPARI $\Rightarrow f''$ PARI ... PER TEOREMA FUNZIONI DERIVABILI

$\Rightarrow f^{2k}$ PARI, $f^{2k+1}$ DISPARI

$f$ DISPARI $\Rightarrow$, PASSA PER $(0,0)$

$\hookrightarrow f$ DISPARI $(0,0)$ $\qquad f^{2k+1}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- $f(x) = \log(x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{1-x}$ , $f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$ ; $f^{III}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$

$f^k(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ $\qquad \frac{f^k(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}\cancel{(k-1)!}}{k\cdot\cancel{(k-1)!}} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$\hookrightarrow k(k-1)!$

$$\log(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + x^n\frac{(-1)^n}{n} + o(x^n)$$

POSSO PARTIRE DA $k=1$, IN $0 = 0$

- $f(x) = (1+x)^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

COEFF. BINOMIALE

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n) \qquad \text{dove } \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

- $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $\qquad f$ DISPARI

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + o(x^{2m+2})$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{2m+1} + o(x^{2m+2})$$

# APPLICAZIONI FORMULA DI TAYLOR

- CALCOLO PARTE PRINCIPALE e ORDINE DI INFINITESIMO
- CALCOLO LIMITI
- STUDIO LOCALE DI UNA FUNZIONE
- CALCOLO DI $f^{k}(x_0)$ $(k \in \mathbb{N}^+)$ A PARTIRE DALLO SVILUPPO DI $f(x)$ IN $x_0$

ESEMPI

- $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

PROVANDO A SVILUPPARE $\sin x$ AL PRIMO O AL SECONDO ORDINE AVREI:

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x + o(x) - x}{x^3} = \frac{o(x)}{x^3} = ?$$

IN CUI $o(x)$ POTREBBE ESSERE $x^2, x^3 \dots x^n$ $n>1$

PROVO A SVILUPPARE $\sin x$ AD UN ORDINE SUCCESSIVO

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)}{x^3} = \lim_{x \to 0} -\frac{1}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$$

POSSO CALCOLARE LA PARTE PRINCIPALE E L'ORDINE DI INFINITESIMO DI $\sin x - x$, LA FUNZIONE INFATTI PER $x \to 0$ È SIMILE A:

$$-\frac{x^3}{6} + o(x^3) \qquad PP = -\frac{x^3}{6} \qquad \text{ORDINE } 3$$

- $f(x) = x + x e^{\sin x} + \sin^2 x$ CALCOLARE LO SVILUPPO DI McLAURIN ARRESTATO AL TERZO ORDINE E DEDURNE $f^{III}(0)$

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + o(t)$$

$$= x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

MA DEVO ARRESTARMI AL TERZO ORDINE $o(x^3)$ QUINDI $\Rightarrow x^2 + o(x^3)$

$x e^{\sin x}$ $\Rightarrow$ È SUFF. FERMARMI AL SECONDO ORDINE PERCHÉ È MOLTIPLICATO PER $x$, QUINDI AVANZO DI UNO

# TEOREMA STUDIO DI UN PUNTO CRITICO

SIA $f$ DERIVABILE $m$-VOLTE $(m \geq 2)$ IN $x_0$ E SI ABBIA:

$$f'(x_0) = 0 = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0 \quad , \quad f^m(x_0) \neq 0$$

ALLORA

(i) SE $m$ È PARI, $x_0$ È UN PUNTO DI ESTREMO PER $f$

AVRÒ UN MASSIMO SE $f^m(x_0) < 0$, MINIMO SE $f^m(x_0) > 0$

(ii) SE $m$ È DISPARI, $x_0$ È UN PUNTO DI FLESSO A TANGENTE ORIZZONTALE PER $f$: DISCENDENTE SE $f^m(x_0) < 0$

ASCENDENTE SE $f^m(x_0) > 0$

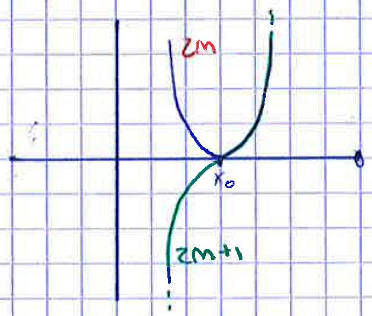
## DIM

SVILUPPO DI TAYLOR ALL'ORDINE $m$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^m(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o(x-x_0)^m$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^m(x_0)}{m!}(x-x_0)^m + o(x-x_0)^m$$

$$(x-x_0)^m \left[ \frac{f^m(x_0)}{m!} + o(1) \right] \to \text{PUÒ AVERE SEGNO } +, -$$




(i) $m$ PARI

$$\underbrace{(x-x_0)^m}_{\geq 0} \left[ \frac{f^m(x_0)}{m!} + o(1) \right] = \begin{cases} >0 \to x_0 \text{ MIN} \\ <0 \to x_0 \text{ MAX} \end{cases}$$

HA SEGNO DI $f^m(x_0)$

(ii) $m$ DISPARI

$$\underbrace{(x-x_0)^m}_{\text{CAMBIA SEGNO}} \underbrace{\left[ \frac{f^m(x_0)}{m!} + o(1) \right]}_{\pm \text{ DIPENDE DA } f^m(x_0)} = \begin{cases} >0 \text{ PER } x > x_0 & \text{F. ASCENDENTE} \\ <0 \text{ PER } x > x_0 & \text{F. DISCENDENTE} \end{cases}$$

ESEMPIO

$$f(x) = 2 - 6(x-3)^5 + o(x-3)^5 \qquad x \to 3 \qquad f(3) = 2$$

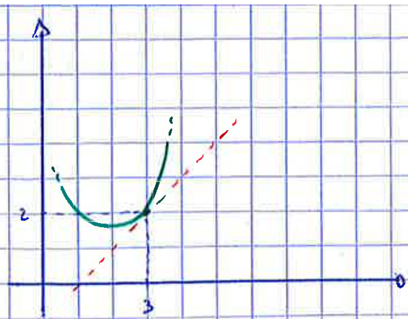
$$f' = f'' = f''' = f^{IV}(3) = 0 \qquad f^{5}(3) = -6 \qquad \frac{f^5(3)}{5!} = -6 \qquad f^5(3) \neq 0 \; < 0$$

FLESSO DISCENDENTE

2) $f(x) = 2 + (x-3) + 2(x-3)^6 + o(x-3)^6 \quad x \to 3$

$f''(3) = 0 \Rightarrow$ APPLICO IL TEO PREC

MA $n = 6$ PARI IL TEOREMA NON DICE NULLA DI SPECIFICO



$t_3(x) = x - 1 = 2 + (x-3)$

$f(x) - t_3(x) = \underbrace{2(x-3)^6}_{} + o(x-3)^6$

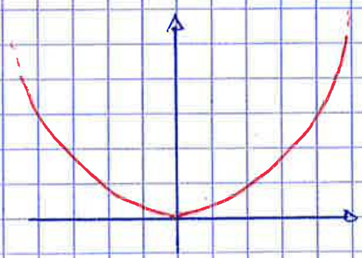
SARÀ SICURAMENTE POSITIVA $\Rightarrow$ $f$ È LOCALMENTE CONVESSA

OSSERVAZIONE

ESISTONO FUNZIONI NON NULLE IN UN INTORNO DI $x_0$ CON DERIVATE TUTTE NULLE IN $x_0$, PER QUESTE FUNZIONI I TEOREMI PRECEDENTI NON SONO APPLICABILI

$$f(x) \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f^k(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_+$



$$f'(x) \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} tgh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = 1$$

LA FUNZIONE È DISPARI $\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} tgh(x) = -1$

- DERIVABILITÀ e MONOTONIA

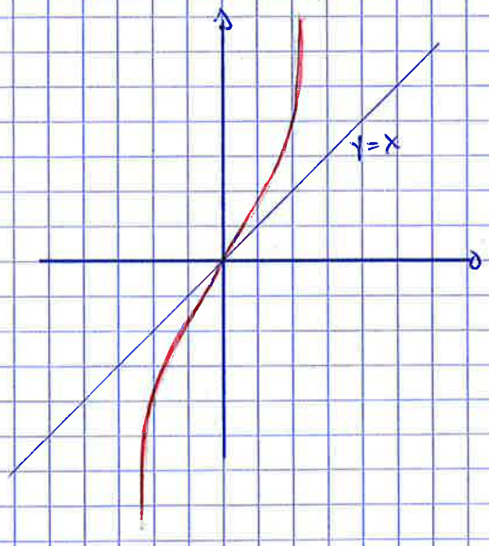
$$D(\sinh x) = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$D(\cosh x) = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

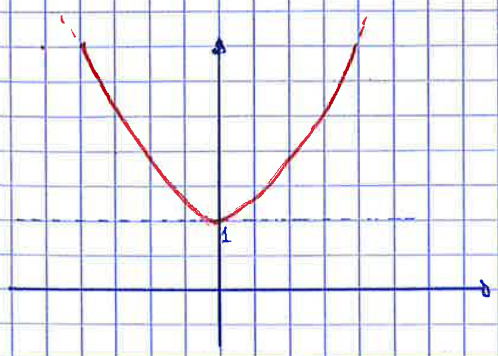
$$D(tgh\, x) = D\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{(\sinh)' \cosh x - \sinh x (\cosh)'}{\cosh^2 x} =$$

$$= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - tgh^2(x)$$

- GRAFICO QUALITATIVO




$y = \sinh(x) \qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




$y = \cosh(x) \qquad \mathbb{R} \to [1, +\infty)$

LA CATENARIA

# PRIMITIVE E INTEGRALI

## DEFINIZIONE

SIANO $f$ e $F$ DUE FUNZIONI DEFINITE IN $I$ INTERVALLO, $F$ SI DICE UNA PRIMITIVA DI $f$ IN $I$ SE $F$ È DERIVABILE E:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

$F$ CONTINUA PERCHÉ DERIVABILE

ESEMPI

$f(x) = x \qquad F(x) = \frac{x^2}{2} \qquad x \in \mathbb{R}$ PRIMITIVA

$F_2(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \qquad F_3(x) = \frac{x^2}{2} + 5$ SONO PRIMITIVE

## TEOREMA

SIA $F$ UNA PRIMITIVA DI $f$ IN $I$ INTERVALLO:

$G$ È UNA PRIMITIVA di $f$ in $I$ $\iff$ $G = F + c$ in $I$, con $c \in \mathbb{R}$.

## DIM

$\Rightarrow$ IP
- $F'(x) = f(x)$
- $G'(x) = f(x)$ d in $I$

TESI
- $G = F + c$

$(G-F)' = G'(x) - F'(x) = 0 \quad I$

PER IL COROLLARIO DI LAGRANGE

$F(x)$ e $G(x)$ CONTINUE COSTANTI

$\Rightarrow G(x) - F(x) = c$ ∎

$\Leftarrow$ IP $F'(x) = f(x)$ e $G = F(x) + c$

TESI $G'(x) = f(x)$

$$(G)' = (F+c)' = f'(x) + \underbrace{c'}_{\text{zero}} = f'(x)$$ ∎

# INTEGRALI FONDAMENTALI

OSSERVANDO CHE $\int f'(x)\,dx = f(x)+c$ "ANTIDERIVO" e OTTENGO

- $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
- $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c$
- $\int e^x\,dx = e^x + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c$ $\int \frac{1}{a^2+f(x)^2}\,dx = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{f(x)}{a}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$
- $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$
- $\int \sinh x\,dx = \cosh x + c$
- $\int \cosh(x)\,dx = \sinh x + c$

# REGOLE INTEGRAZIONE DEFINITA

## TEOREMA LINEARITÁ

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e $\forall f, g$ INTEGRABILI IN I INTERVALLO VALE:

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

PER CONSEGUENZA LINEARITÁ DERIVATE

TUTTI I POLINOMI SONO INTEGRABILI

$$\int (x - 3x^3) dx = \int x \, dx - 3 \int x^3 dx = \frac{x^2}{2} - 3\frac{x^4}{4} + c$$

## TEOREMA INTEGRAZIONE PER PARTI

SIANO $f$ e $g$ DERIVABILI IN I INTERVALLO, se $f' \cdot g'$ É INTEGRABILE ALLORA VALE:

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

IN PARTICOLARE $f g'$ É INTEGRABILE

**DIM**

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

INTEGRANDO TUTTI I TERMINI

$$\int (f(x)g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

$\downarrow$

$f(x)g(x) + c$ IN CUI $c$ POSSO INTEGRARLO NEGLI INTEGRALI A SECONDO MEMBRO

$$\Rightarrow \underset{a}{\int f'(x) g(x)} = f(x)g(x) - \underset{b}{\int f(x) g'(x) dx} \quad \blacksquare$$

a e b SONO INVERTIBILI

# TEOREMA INTEGRALE PER SOSTITUZIONE

$f$ INTEGRABILE IN $J$ INTERVALLO CON $F$ PRIMITIVA E SIA $\varphi$ DERIVABILE IN $I$ INTERVALLO TALE CHE $\varphi(I) \subseteq J$. Allora

$f(\varphi) \cdot \varphi'$ è INTEGRABILE IN $I$ e

$$\int f(\varphi) \cdot \varphi' \, dx = F(\varphi(x)) + c$$

**DIM**

$$F'(x) = f(x)$$

$$[F(\varphi(x))]' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

INTEGRO

$$= \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \, dx \quad \blacksquare$$

IN PARTICOLARE

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int f(y) \, dy \qquad y = \varphi(x) \qquad dy = \varphi'(x) \, dx$$

- SE HO $\Delta < 0$ DEVO CERCARE DI RICONDURMI AD AVERE UN LOGARITMO + UN ARCOTANGENTE CERCANDO DI SEPARARE IN DUE INTEGRALI

$$\int \frac{-x-14}{x^2+2x+5}\,dx \qquad x^2+2x+5 \quad \Delta<0$$

$$-\int \frac{x+14}{x^2+2x+5}\,dx$$

CERCO DI PORTARE A NUMERATORE LA DERIVATA DEL DENOMINATORE

$$-\frac{1}{2}\int \frac{2x+2+26}{x^2+2x+5}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx - 13\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx$$

IL PRIMO INTEGRALE POSSO CALCOLARLO:

$$= -\frac{1}{2}\log|x^2+2x+5|$$

PER IL SECONDO DEVO TROVARE UN ARCOTANGENTE, QUINDI CERCO DI CREARE UN QUADRATO PERFETTO IN MODO DA AVERE $1+(f(x))^2$ A DENOMINATORE:

$$x^2+2x+5 \Rightarrow x^2+2x+1+4 = (x+1)^2+4 = 1+\frac{(x+1)^2}{4} = 1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2$$

A NUMERATORE DEVO AVERE LA DERIVATA DELLA $x$: $\frac{1}{2}$

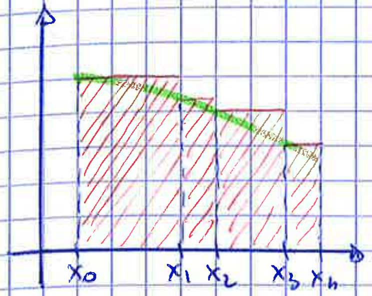
$$-13\cdot\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}\,dx = -\frac{13}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

HO OTTENUTO I VARI ADDENDI DELL'INTEGRALE DI PARTENZA

$$-\int \frac{x+14}{x^2+2x+5}\,dx = -\frac{1}{2}\log|x^2+2x+5| - \frac{13}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

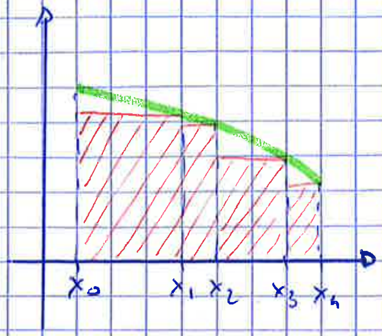
SOMMA INTEGRALE SUPERIORE

$$S_\sigma := \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$




SOMMA INTEGRALE INFERIORE

$$s_\sigma := \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$




$$S_\sigma \geq s_\sigma$$

$\forall \sigma$ anche con partizioni diverse

AUMENTANDO LE PARTIZIONI $s_\sigma$ CRESCE e $S_\sigma$ DECRESCE

PER QUANTO DETTO POSSIAMO AFFERMARE CHE

$$\sup_\sigma s_\sigma \leq \inf_\sigma S_\sigma$$

**DEFINISCO**

INTEGRALE INFERIORE di $f$ su $[a,b]$ $\quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup_\sigma s_\sigma$

INTEGRALE SUPERIORE di $f$ su $[a,b]$ $\quad \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf_\sigma S_\sigma$

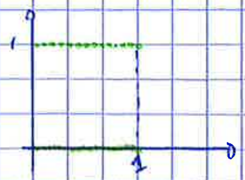
ESSI SONO LE MIGLIORI APPROSSIMAZIONI PER DIFETTO E PER ECCESSO DELL'AREA DI $T_{f,a,b}$ $(f \geq 0)$.

IN GENERALE:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

- FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f_D : [0,1] \to \mathbb{R}$$



$$f_D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$\forall \sigma$ PARTIZIONE di $[0,1]$, PER LA DENSITÀ DI $\mathbb{Q}$ IN $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$$m_i = 0 \qquad M_i = 1 \quad \forall i$$

DA CUI

$$s_\sigma = 0 < S_\sigma = 1(b-a) = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\int_0^1} f(x)\,dx = 0 \neq \overline{\int_0^1} f(x)\,dx = 1$$

LA FUNZIONE NON È INTEGRABILE NEL SENSO DI RIEMANN

$$f_D \notin \mathcal{R}[0,1]$$

## TEOREMA

SU UN INTERVALLO $[a,b]$ SONO INTEGRABILI:

- le funzioni CONTINUE
- le funzioni CONTINUE A TRATTI (OSSIA CON UN ~~PUNTO~~ NUMERO FINITO DI PUNTI DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILI O DI I SPECIE)
- le funzioni MONOTONE

## PROPRIETÀ

- $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

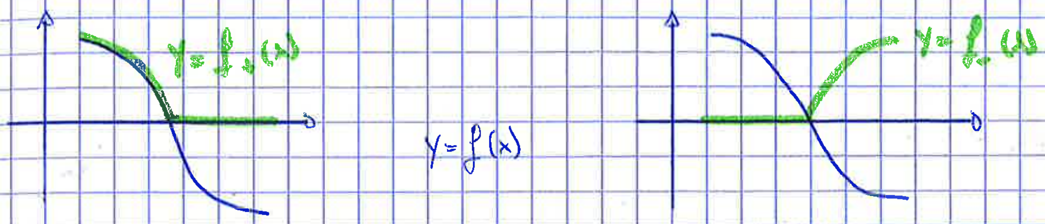
## DIM 4

DEFINISCO

FUNZIONE PARTE POSITIVA $\quad f_+(x) = \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$

SONO FUNZIONI POSITIVE.

FUNZIONE PARTE NEGATIVA $\quad f_-(x) = \min(f(x), 0) = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$




CHIARAMENTE

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x)$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x)$$

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| = \left| \int_a^b f_+(x)\,dx - \int_a^b f_-(x)\,dx \right|$$

PER LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\leq \left| \int_a^b f_+(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b f_-(x)\,dx \right|$$

SAPENDO CHE LE DUE FUNZIONI SONO POSITIVE

$$= \int_a^b f_+(x)\,dx + \int_a^b f_-(x)\,dx = \int_a^b f_+(x) + f_-(x)\,dx$$

$$= \int_a^b |f(x)|\,dx \quad \blacksquare$$

DA PRIMA

$$m = m(f; a, b) \in [i, s] = f([a, b])$$

PER LA DEFINIZIONE DI IMMAGINE

$$\exists\, z \in [a, b] : f(z) = m \quad \blacksquare$$

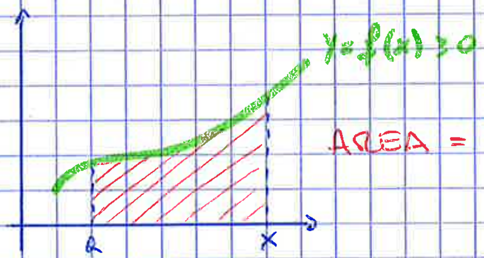
## TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

$f \in C^0(I)$ CONTINUA IN $I$ INTERVALLO, $a \in I$ fissato e sia

$$F(x) = \int_a^x f(s)\,ds \quad \text{FUNZIONE INTEGRALE DI } f$$

ALLORA $F$ É DERIVABILE IN $I$ e INOLTRE $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$

CIOÉ $F$ É PRIMITIVA DI $f$.




AREA = $F(x)$

$F(a) = 0$

Se $x < a \Rightarrow F(x) = -\int_a^x f(s)\,ds$

### DIM

IPOTESI $f$ CONTINUA IN $I$

$$\forall x_0 \in I \text{ e } \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$x \in (x_0 - \delta ; x_0 + \delta)$$

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$$


TESI

$F$ é DERIVABILE $\forall x_0 \in I$ e $F'(x_0) = f(x_0)$

OVVERO

$$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{\int_a^x f(s)\,ds - \int_a^{x_0} f(s)\,ds}{x - x_0} = \frac{-\int_x^{x_0} f(s)\,ds}{x - x_0} \cdot \frac{\int_{x_0}^x f(s)\,ds}{x - x_0} = m$$

$$\frac{\int_{x_0}^x f(s)\,ds}{x - x_0}$$ é il valor medio di $f(s)$ in $(x, x_0)$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) = G(b) - G(a) \quad \blacksquare$$

ESEMPIO

$$\int_0^1 \frac{8}{4-x^2}\,dx = G(1) - G(0) \quad \text{con} \quad G'(x) = \frac{8}{4-x^2} = \frac{8}{(2-x)(2+x)}$$

$N < D$

$$\frac{A}{2-x} + \frac{B}{2+x} = \frac{2A + Ax + 2B - Bx}{4-x^2}$$

$$\begin{cases} 2A + 2B = 8 & 4A = 8 \quad A = B = 2 \\ A - B = 0 & A = B \end{cases}$$

$$-\int \frac{-2}{2-x}\,dx + \int \frac{2}{2+x}\,dx = -2\log|2-x| + 2\log|2+x| + c$$

$$= \log\left(\left|\frac{2+x}{2-x}\right|\right)^2 + c \qquad G(x) = \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{8}{4-x^2}\,dx = \log\left(\frac{2+1}{2-1}\right)^2 - \log\left(\frac{2+0}{2-0}\right)^2 = \log 9 - \log 1 = \log 9 \quad \blacksquare$$

COROLLARIO

$f$ DERIVABILE IN $I$ CON DERIVATA CONTINUA $\forall x \in I$ $[f \in C^1(I)]$

VALE:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(s)\,ds \qquad \forall x \in I$$

DIM

$$\int_{x_0}^x f'(s)\,dx = f(x) - f(x_0) \qquad f \text{ è UNA PRIMITIVA DI } f'$$

$$\Rightarrow f(x) = \cancel{f(x_0)} + f(x) - \cancel{f(x_0)} \quad \blacksquare$$

ESEMPIO $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = ?$

$f(x) = e^{-x}$ $\quad f(x) > 0 \quad \forall x \Rightarrow$ CONVERGE o DIVERGE $\quad G'(x) = f(x)$

$\int e^{-x}\,dx = -\int -e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c \qquad G(x) = -e^{-x}$

$\int_0^{+\infty} e^{-x} = G(+\infty) - G(0) = -e^{-\infty} + e^{0} = 0 + 1 = 1$

## ESEMPIO NOTEVOLE

SIA $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ CON $\alpha \in \mathbb{R}$, STUDIARE L'INTEGRALE IN SENSO IMPROPRIO IN $[1; +\infty)$

$f_\alpha(x) \in R_{loc}[1, +\infty)$, $f_\alpha(x) > 0$ PER $x \geq 1 \Rightarrow$ L'INTEGRALE IMPROPRIO O CONVERGE O DIVERGE

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_1^c \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \begin{cases} [\log x]_1^c & \text{se } \alpha = 1 \\ \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^c & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log c & \text{se } \alpha = 1 \\ \frac{c^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1} & \text{se } \alpha \neq 1 \end{cases} \qquad \lim_{c \to +\infty} c^{-\alpha+1} = 0$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha = 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha - 1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

IN DEFINITIVA POSSIAMO DIRE CHE L'INTEGRALE

$$\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \begin{cases} \text{CONVERGE se } \alpha > 1 & \frac{1}{\alpha - 1} \\ \text{DIVERGE A } +\infty \text{ SE } \alpha \leq 1 \end{cases}}$$

NOTA

$\frac{1}{x}$ e $\frac{1}{x^2}$ TENDONO A 0 PER $x \to +\infty$ MA

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1$

$f(x) \to 0 \not\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$f(x) \to \ell > 0 \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$ DIVERGE

ES: $e^{-x} + 1$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx$

- INTEGRALE É $\geq 0$
- POTREI USARE LA SOSTITUZIONE DI PRIMA MA OTTERREI CHE L'INTEGRALE É $\leq +\infty \Rightarrow$ NON POSSO APPLICARE IL TEOREMA DI CONVERGENZA
- IMPONGO $\geq$ A QUALCOSA

$$\operatorname{arctg}(x) \geq \operatorname{arctg}(1) \qquad \forall x \in [1, +\infty)$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx \geq \operatorname{arctg}(1) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$$

$\Rightarrow$ L'INTEGRALE DIVERGE A $+\infty$

SE L'INTEGRANDA É $\geq 0$ $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ E NON É OSCILLANTE

**TEOREMA** CRITERI DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$f \in R_{loc}[a, +\infty)$ TALE CHE $|f| \in R_{loc}[a, +\infty)$ ALLORA $f \in R[a, +\infty)$ e

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

OVVERO SE

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ CONVERGE } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ CONVERGE}$$

$$\not\Leftarrow$$

ESEMPI

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx$ STUDIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

STIMO $|\cos x| \leq 1$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\right| dx = \int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\underset{x>1}{x\sqrt{x}}}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad \frac{3}{2} > 1 \text{ CONVERGE A } 2$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x\sqrt{x}}\,dx \text{ CONVERGE}$$

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx \to +\infty$ NON POSSO CONCLUDERE NULLA PERCHÉ NON APPLICO IL TEOREMA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA