centro appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2388A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Tamburi Cesare

MATERIA: Geometria - Prof. Gatto

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 92

VETTORI

RICORDIAMO CHE $\mathbb{R}$ DENOTA L'INSIEME DEI NUMERI REALI E CHE ESSO É UN CAMPO RISPETTO A SOMMA E PRODOTTO.

DEF. UN CAMPO

UN CAMPO K É UN INSIEME DOTATO DI DUE OPERAZIONI BINARIE INTERNE, LA SOMMA E IL PRODOTTO CHE VERIFICANO LE SEG. PROPRIETÁ:

- SOMMA: ASSOCIATIVA, COMMUTATIVA, ELEMENTO NEUTRO ed OPPOSTO
- PRODOTTO: ASSOCIATIVO, COMMUTATIVO, ELEMENTO NEUTRO E UN INVERSO MOLTIPLICATIVO, INOLTRE GODE DELLE PROPRIETÁ DISTRIBUTIVE

GLI ELEMENTI DI UN CAMPO SI DIRANNO SCALARI

L'INSIEME

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} \mid m_i \in \mathbb{R} \right\}$$

É DEFINITO INSIEME DELLE COLONNE

SE $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ SI INDICHERÁ CON $\vec{u}(i) \in \mathbb{R}$ LA i-ESIMA ENTRATA O COMPONENTE DELL'INSIEME.

ES:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \qquad \vec{u}(3) = 4 \qquad \vec{u}(4) = -2$$

NELLA SCRITTURA INIZIALE $\vec{m}(i) := \vec{u}(i)$

DEF UGUAGLIANZA COLONNE

DUE COLONNE $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ SI DICONO UGUALI $\vec{u} = \vec{v}$ SE E SOLO SE OGNI COMPONENTE É UGUALE:

$$\forall i \mid 1 \leq i \leq n \qquad \vec{u}(i) = \vec{v}(i)$$

$\mathbb{R}^n$ É PIÚ DI UN INSIEME, ESSO É UNO SPAZIO VETTORIALE, LE COPPIE ORDINATE DI NUMERI VENGONO DETTE VETTORI E LE SUE ENTRATE COMPONENTI. NELLO SPAZIO VETTORIALE É DEFINITA LA NOZIONE DI COMBINAZIONE LINEARE A COEFF. SCALARI

DEF SOMMA

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda, \overset{mi}{\mu} \in \mathbb{R} \qquad \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

É L'UNICA COLONNA TALE CHE:

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})(i) = \lambda\vec{u}(i) + \mu\vec{v}(i)$$

ES:

$$3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 2 + 5\cdot(-2) \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 5 \\ 3\cdot 4 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ 17 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 92

SPAZIO, PIANO e i SUOI PUNTI

SIA $\{O\}$ UN INSIEME CON UN SOLO ELEMENTO DEFINISCO

$$\mathcal{E}^3 = \{O + \vec{u} \mid \vec{u} \in \mathbb{R}^3\} \qquad O + \begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad O + \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

É UN SIMBOLO

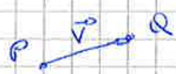
PER DEFINIZIONE GLI ELEMENTI DI $\mathcal{E}^3$ SI DIRANNO PUNTI E SI INDICANO CON LETTERE LATINE MAIUSCOLE (P, Q, R)

INOLTRE SE $P = O + \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathcal{E}^3$ SI DIRÁ CHE P HA COORDINATE (x, y, z) E SI SCRIVE $P(x, y, z)$

VEDIAMO CHE $\mathbb{R}^3$ AGISCE PER TRASLAZIONE SU $\mathcal{E}^3$ OSSIA:

$\forall P \in \mathcal{E}^3$ e $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ SI PUÓ DEFINIRE IL TRASLATO DI P PER MEZZO DI $\vec{v}$: $P + \vec{v}$

DEF



SIA $P \in \mathcal{E}^3$ OSSIA $P = O + \vec{u}$

e $Q := P + \vec{v} = (O + \vec{u}) + \vec{v} = O + (\vec{u} + \vec{v}) \in \mathcal{E}^3$

QUINDI POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$$Q = P + \vec{v} = O + (\vec{u} + \vec{v}) \longrightarrow \begin{pmatrix}x_Q\\y_Q\\z_Q\end{pmatrix}$$

$$Q(x_Q, y_Q, z_Q)$$

$$P(x_P, y_P, z_P) \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix}x_P\\y_P\\z_P\end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix}x_Q - x_P\\y_Q - y_P\\z_Q - z_P\end{pmatrix}$$

$\vec{v}$ É IL VETTORE CHE SPOSTA P in Q E VERRÁ INDICATO COME $\overrightarrow{PQ}$

SE $P_1(x_1, y_1, z_1)$ E $P_2(x_2, y_2, z_2)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}x_2 - x_1\\y_2 - y_1\\z_2 - z_1\end{pmatrix}$$

LE COORDINATE SONO DATE DALLE COMPONENTI DEI VETTORI

$\mathcal{E}^3$ SI DICE SPAZIO AFFINE (EUCLIDEO) MODELLATO SU $\mathbb{R}^3$

ES: $P(3, 1, -2) \quad Q(5, 1, 7) \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}5-3\\1-1\\7+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\9\end{pmatrix}$ VETTORE GEOMETRICO O APPLICATO

$$\forall P \in \mathcal{E}^3 \quad P + \vec{0} = (O + \vec{v}) + \vec{0} = O + (\vec{v} + \vec{0}) = O + \vec{v} = P$$

$$O + \vec{0} = \vec{O} \qquad O(0, 0, 0) \text{ COORDINATE ORIGINE}$$

3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 92

DEF VERSORE

SE $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ E $|\vec{u}| = 1$ ALLORA $\vec{u}$ SI DICE VERSORE

ES: $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ -\sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$ É VERSORE DI $\mathbb{R}^3$

L'INSIEME DEI VERSORI DI $\mathbb{R}^n$ É UNA SFERA

$$S^{n-1} = \{ \vec{u} \in \mathbb{R}^n \mid |\vec{u}| = 1 \}$$

OSSERVIAMO CHE OGNI VETTORE DI $\mathbb{R}^2$ SI PUÓ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI FONDAMENTALI:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PER CONVENZIONE

$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

$$|\vec{i}| = \sqrt{1} = 1 = |\vec{j}|$$

DEF ORTOGONALI

$\vec{u}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ $2 \leq n \leq 3$ SI DICONO ORTOGONALI SE

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \qquad \vec{i} \perp \vec{j}$$

ESEMPIO

$$\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle = 3 + 5 - 8 = 0$$

SI AFFERMA CHE $\vec{i}$ e $\vec{j}$ FORMANO LA BASE ORTONORMALE DI $\mathbb{R}^2$

ANALOGAMENTE AVREMO IN $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ SONO VERSORI

E SONO ORTOGONALI DUE A DUE

$$\langle \vec{i}, \vec{j} \rangle = \langle \vec{j}, \vec{k} \rangle = \langle \vec{i}, \vec{k} \rangle = 0$$

PERTANTO OGNI $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ SI PUÓ SCRIVERE COME

$$v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

OSSERVAZIONE; SIA $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ QUALSIASI

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle \vec{i} + \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle \vec{j} + \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle \vec{k} = \begin{pmatrix} \langle \vec{v}, \vec{i} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{j} \rangle \\ \langle \vec{v}, \vec{k} \rangle \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 92

ESSA SI CALCOLA:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = u_1 \begin{vmatrix} v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_3 & w_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}$$

GEOMETRICAMENTE OTTERREMO IL VOLUME DI UN PARALLELEPIPEDO FORMATO DAI TRE VETTORI

DETERMINARE LA FORMULA DI $\vec{u}\wedge\vec{v}$ $\quad \vec{u} := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$$(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \wedge (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) = u_1v_1\,\vec{i}\wedge\vec{i} + u_1v_2\,\vec{i}\wedge\vec{j} + u_2v_1\,\vec{j}\wedge\vec{i} + u_2v_2\,\vec{j}\wedge\vec{j}$$

PER L'ANTISIMMETRIA $\vec{i}\wedge\vec{i} = \vec{j}\wedge\vec{j} = 0$

ED INOLTRE $\vec{i}\wedge\vec{j} = -\vec{j}\wedge\vec{i}$ SOSTITUENDO

$$u_1v_2\,\vec{i}\wedge\vec{j} - u_2v_1\,\vec{i}\wedge\vec{j} = (u_1v_2 - u_2v_1)\,\vec{i}\wedge\vec{j}$$

$$= \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \quad \blacksquare$$

DEF PRODOTTO VETTORE

SIANO $\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^3$, IL PRODOTTO VETTORE DI $\vec{u}\times\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ É L'UNICA FUNZIONE ~~VETTORE TALE CHE IL PRODOTTO~~

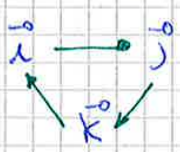
$$\begin{cases} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (\vec{u},\vec{v}) \mapsto \vec{u}\times\vec{v} \end{cases}$$

LINEARE RISPETTO AL PRIMO ARGOMENTO, ANTISIMMETRICA E TALE CHE:

$\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$



IN SENSO INVERSO SI OTTERRÀ UN RISULTATO CON SEGNO OPPOSTO

OSSERVAZIONI

- LA LINEARITÀ RISPETTO AL PRIMO ARGOMENTO SIGNIFICA L'UGUAGLIANZA
  $$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v})\times\vec{w} = \lambda\,\vec{u}\times\vec{w} + \mu\,\vec{v}\times\vec{w} \qquad \forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in \mathbb{R}^3 \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$
- L'ANTISIMMETRIA
  $$\vec{u}\times\vec{v} = \cancel{-\vec{u}\times\vec{v}} \; -\vec{v}\times\vec{u}$$
- IN PARTICOLARE PER LA COPPIA $(\vec{u},\vec{u})$
  $$\vec{u}\times\vec{u} = 0 \qquad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3$$

IL PRODOTTO VETTORE PUÒ CALCOLARSI MEDIANTE LO SVILUPPO DI UN DETERMINANTE FORMALE, IN PARTICOLARE IL PRODOTTO MISTO:

$$\langle \vec{u}\times\vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u}\wedge\vec{v}\wedge\vec{w}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 92

PROPRIETÀ

a) $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ SE $\vec{u}, \vec{v}$ SONO TRA LORO PARALLELI

b) VALE L'UGUAGLIANZA

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \times \vec{w} \rangle$$

c) VALE LA FORMULA

$$(\vec{u}, \vec{v}) \times \vec{w} = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{v} - \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{u}$$

d) $\vec{u} \times \vec{v}$ É UN VETTORE ORTOGONALE SIA AD $\vec{u}$ CHE A $\vec{v}$

$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ $\quad \vec{w} \perp \vec{u} \quad \vec{w} \perp \vec{v}$

$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = 0 \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

e) $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ É UNA FORMULA BILINEARE ANTISIMMETRICA PERCHÉ:

$$(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u}_1 \times \vec{v}) + \mu(\vec{u}_2 \times \vec{v})$$

DIM

$$\langle (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \wedge \vec{v} \wedge \vec{w} =$$

$$= \lambda(\vec{u}_1 \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}) + \mu(\vec{u}_2 \wedge \vec{v} \wedge \vec{w}) = \lambda \langle \vec{u}_1 \times \vec{v}, \vec{w} \rangle + \mu \langle \vec{u}_2 \times \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

f) É UN OPERAZIONE NON ASSOCIATIVA

$$(\vec{i} \times \vec{j}) \times \vec{j} \neq \vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{j})$$

$$\vec{k} \times \vec{j} \qquad \vec{i} \times 0$$

$$-\vec{i} \neq \vec{0}$$

IN SOSTITUZIONE ALLA SUA NON ASSOCIATIVITÀ VALE L'IDENTITÀ DI JACOBI:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} + (\vec{v} \times \vec{w}) \times \vec{u} + (\vec{w} \times \vec{u}) \times \vec{v} = \vec{0}$$ (ALGEBRA DI LIE)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 92

SISTEMI LINEARI A 2 INCOGNITE

DATI $\vec{u} := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{v} := \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w} := \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ TROVARE $x, y \in \mathbb{R} \mid x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$

POSSO ANDARE A SCRIVERLO COME SISTEMA DI DUE EQUAZIONI

$$\begin{cases} 3x + 7y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3x + 7y \\ 5x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow x\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$$

PER TROVARE UNA VARIABILE POSSO ANNULLARE L'ALTRA SAPENDO CHE $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0 \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

ANNULLO LA y PER DETERMINARE LA x

$$(x\vec{u} + y\vec{v}) \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{v}$$

$$x\,\vec{u} \wedge \vec{v} + y\,\vec{v} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{v}$$

$$x\,\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \wedge \vec{v} \qquad x = \frac{\vec{w} \wedge \vec{v}}{\vec{u} \wedge \vec{v}} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-53}{-32} = \frac{53}{32}$$

ALLO STESSO MODO POSSO ANNULLARE LA x PER TROVARE LA y

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}}{-32} = \frac{9}{-32} = -\frac{9}{32}$$

VETTORI ORTOGONALI

DATI $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \vec{j} - 2\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^3$

DETERMINARE IL LUOGO DEI VETTORI $\vec{x} = x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k}$ ORTOGONALI A $\vec{u}, \vec{v}$ E AD ENTRAMBI

$\langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ LA SOLUZIONE HA DUE GRADI DI LIBERTÀ

$\langle \vec{x}, \vec{v} \rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \qquad x_2 + 2x_3 = 0$

PER ESSERE ORTOGONALE AD ENTRAMBI POSSO RISOLVERLO IN DUE MODI:

- $\langle \vec{u} \times \vec{v}, x \rangle = 0$
- ATTRAVERSO IL SISTEMA

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 92

PIANO

DEF SOTTOSPAZIO VETTORIALE

SIANO $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ VETTORI ARBITRARI, L'INSIEME DELLE COMBINAZIONI LINEARI DI $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

SI DICE SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{R}^3$ GENERATO DA $\vec{u}, \vec{v}$

ES $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $[\vec{u}, \vec{v}] = \{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

I DUE VETTORI HANNO LA STESSA DIREZIONE

$$[\vec{u}, \vec{v}] = \{ \lambda \vec{u} + 2\mu \vec{u} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = \{ (\lambda + 2\mu) \vec{u} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \} = [\vec{u}]$$

SE I DUE VETTORI SONO COLLINEARI SI HA:

$$[\vec{u}, \vec{v}] = [\vec{u}] = [\vec{v}]$$

SE INVECE $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ e $[\vec{u}] \neq [\vec{v}] \neq 0$

$\Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}]$ SI DICE PIANO VETTORIALE GENERATO DA $\vec{u}$ e $\vec{v}$

DEF PIANO AFFINE

SIA $P_0 \in \mathcal{E}^3$ $P_0(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$

IL PIANO AFFINE ~~GENE~~ PASSANTE PER P_0 GENERATO DAL PIANO VETTORIALE $[\vec{u}, \vec{v}]$ É L'INSIEME:

$$\boxed{\pi_{P_0, \vec{u}, \vec{v}} = P_0 + [\vec{u}, \vec{v}]}$$

LA DEFINIZIONE CI DICE CHE

$$P \in \pi_{P_0, \vec{v}, \vec{u}} \Leftrightarrow P \in P_0 + [\vec{u}, \vec{v}]$$

CIOÉ SE E SOLO SE

$$\overrightarrow{P_0P} \in [\vec{u}, \vec{v}] \Leftrightarrow \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \mid \overrightarrow{P_0P} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$$

DEF PIANI PARALLELI

SIANO $P_1 + [\vec{u}_1, \vec{v}_1]$ e $P_2 + [\vec{u}_2, \vec{v}_2]$ DUE PIANI AFFINI, ESSI SI DICONO PARALLELI SE

$$[\vec{u}_1, \vec{v}_1] = [\vec{u}_2, \vec{v}_2]$$

OSSERVIAMO CHE L'UGUAGLIANZA É VERIFICATA SE I VETTORI ORTOGONALI AD ENTRAMBI HANNO LA STESSA DIREZIONE

$$[\vec{u}_1 \times \vec{v}_1] = [\vec{u}_2 \times \vec{v}_2]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 92

VADO A SOSTITUIRE NELLA TERZA EQ, PORTO TUTTO A PRIMO MEMBRO

$$z-7 = 5(x-y-2) + 3(2y-x+1)$$

$$\boxed{2x+y-z=0} \quad \text{EQUAZIONE CARATTERISTICA}$$

OSSERVAZIONE

SI CONSIDERI IL LUOGO DEI PUNTI $P(x,y,z) \in \mathcal{E}^3$ TALI CHE

$$ax+by+cz+d=0$$

DOVE $(a,b,c) \neq \vec{0}$ SUPPONIAMO CHE $c \neq 0$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -\frac{a}{c}\lambda - \frac{b}{c}\mu - \frac{d}{c} \end{cases} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z+\frac{d}{c} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{a}{c} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b}{c} \end{pmatrix}$$

IL PIANO AFFINE PASSANTE PER $\left(0,0,-\frac{d}{c}\right)$ GENERATO DA:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a/c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -b/c \end{pmatrix}\right]$$

SIA $P_0(1,3,2)$, TROVARE UN EQUAZIONE PER LA FAMIGLIA DI TUTTI I PIANI CHE PASSANO PER P_0:

ESSA É UNA STELLA DI PIANI CON CENTRO $P_0(1,3,2)$:

$$a(x-1) + b(x-3) + c(z-2) = 0 \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$$

IN GENERALE:

SE $P(x_0,y_0,z_0) \in ax+by+cz+d=0$

$$\Rightarrow ax_0+by_0+cz_0+d=0$$

$$\Rightarrow d = -ax_0-by_0-cz_0$$

SOSTITUENDO

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$$

$$\boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$$

STELLA DI PIANI PASSANTI PER $P_0(x_0,y_0,z_0)$

POSSO RISCRIVERLO COME

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

QUINDI IL VETTORE $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ É ORTOGONALE AL PIANO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 92

RETTE

DEF RETTA AFFINE

SIANO $P_0, P_1, P_2 \in \mathcal{E}^3$ e $[\vec{u}] \in \mathbb{P}^2 \rightarrow$ INSIEME DELLE DIREZIONI

LA RETTA AFFINE PASSANTE PER P_0 PARALLELA A $[\vec{u}]$ È L'INSIEME

$$r_{P_0,u} = P_0 + [\vec{u}] = \{P_0 + \vec{u}t \mid t \in \mathbb{R}\}$$

LA RETTA AFFINE PASSANTE PER P_1 e P_2 È

$$r_{P_1,P_2} = P_1 + [\overrightarrow{P_1P_2}]$$

GRAFICAMENTE AVREMO

EQUAZIONI RETTE

SUPPONIAMO CHE $P(x,y,z) \in P_0 + [\vec{u}] \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \in [\vec{u}] \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = \vec{u}t$

$$\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} t \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$$ EQUAZIONI PARAMETRICHE

TROVARE LE EQ. DELLA RETTA AFFINE PER $P_1(2,1,5)$ e $P_2(3,2,-4)$:

$$P \in P_1 + [\overrightarrow{P_1P_2}] \Rightarrow \overrightarrow{P_1P} \in [\overrightarrow{P_1P_2}] \Rightarrow \overrightarrow{P_1P} = t\,[\overrightarrow{P_1P_2}]$$

$$\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 2-1 \\ -4-5 \end{pmatrix} t \Rightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} t \qquad \begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+t \\ z = 5-9t \end{cases}$$

RICAVIAMO IL t DALLA SECONDA EQUAZIONE : $t = y-1$ E SOSTITUIAMO

$$\begin{cases} x = 2+y-1 \\ z = 5-9(y-1) \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-1 = 0 \\ 9y+z-14 = 0 \end{cases}$$

L'EQUAZIONE CARTESIANA DELLA RETTA È SCRITTA MEDIANTE L'INTERSEZIONE DI DUE PIANI.

I PUNTI NELLO SPAZIO DIPENDONO DA 3 GRADI DI LIBERTÀ

ESISTONO INFINITI MODI PER SCRIVERE LA RETTA COME INTERSEZIONE DI DUE PIANI

OSSERVAZIONE

SE $\pi: ax+by+cz+d=0 \quad \pi': a'x+b'y+c'z+d'=0$

$\pi \wedge \pi' = \emptyset$ I DUE PIANI SONO PARALLELI

SUPPONIAMO CHE $\pi \wedge \pi' \neq \emptyset \Rightarrow \exists P_0(x_0,y_0,z_0) \in \pi \wedge \pi'$

ALLORA $\pi \wedge \pi' = \{P \mid \overrightarrow{P_0P} = (\vec{n}_\pi \times \vec{n}_{\pi'}) \cdot t\}$

$$P \in \pi \wedge P \in \pi' \Rightarrow \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_\pi \rangle = \langle \overrightarrow{P_0P}, \vec{n}_{\pi'} \rangle = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 92

ES

$$r_1 = \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3+t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

NON SONO RETTE PARALLELE
DEVO TROVARE IL PUNTO
DI INTERSEZIONE

$$\begin{aligned} 1-2t &= -1+3t \\ 2+\cancel{t} &= 3+\cancel{t} \qquad 2 \neq 3 \\ 1+2t &= 3-2t \end{aligned}$$

NON POSSO CONCLUDERE
LE t HANNO VALORE DIVERSO
DIVERSO SIGNIFICATO

$$r_1 = \begin{cases} x = 1-2s \\ y = 2+s \\ z = 1+2s \end{cases} \qquad r_2 = \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3+t \\ z = 3-2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1-2s = -1+3t \\ 2+s = 3+t \\ 1+2s = 3-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s-t=1 \\ s+t=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} s=1 \\ t=0 \end{matrix}$$

$$r_1 \wedge r_2 = (-1, 3, 3)$$

ATTRAVERSO IL METODO DEI
TRE PUNTI POSSO RICAVARE
L'EQUAZIONE DEL PIANO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 92

$$\tilde{\pi}_{[\vec{r}]}\,\overrightarrow{Q_0P_0} = \frac{\langle \overrightarrow{Q_0P_0}, \vec{r} \rangle}{|\vec{r}|^2}\,\vec{r} = \frac{-\cancel{6}^{3}}{\cancel{14}_{7}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ -3/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

ABBIAMO DETERMINATO UN VETTORE CHE SPOSTA Q_0 NEL PUNTO Q RICHIESTO DALL'ESERCIZIO

$$Q = Q_0 + \overrightarrow{Q_0P_0}\,\pi = Q_0 + \begin{pmatrix} 6/7 \\ -3/7 \\ 9/7 \end{pmatrix} = (1, 2, 1) + \begin{pmatrix} 6/7 \\ -3/7 \\ 9/7 \end{pmatrix}$$

SPOSTO UN PUNTO PER MEZZO DI UN VETTORE

$$Q = \left(1 + \frac{6}{7}, 2 - \frac{3}{7}, 1 + \frac{9}{7}\right) = \left(13/7, 11/7, 16/7\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 92

ESEMPIO

$$3\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&4&5\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&7&2\\4&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6&-3\\9&12&15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&14&4\\8&2&-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-8&-7\\1&10&25\end{pmatrix}$$

DEF MAT. QUADRATA

SIA $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ SE $m=n$ LA MATRICE SI DICE QUADRATA

ES $\alpha \in \mathbb{R}$ $R_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ É UNA MATRICE QUADRATA

PRODOTTO TRA MATRICI

OSSERVAZIONE OGNI MATRICE $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ SI PUÒ SCRIVERE COME UNA COLONNA DI RIGHE O UNA RIGA DI COLONNE

$$A=\begin{pmatrix}R_1A\\R_2A\\R_mA\end{pmatrix} \qquad A=(C_1A, C_2A, C_3A, \dots C_nA)$$

$$A=\begin{pmatrix}1&2&5&1+i\\2&1&3&7\\2&1&4&3\\1&1&5&0\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{4\times4} \qquad R_2(A)=(1,1,3,7)$$

$$C_3(A)=\begin{pmatrix}5\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

NOTAZIONE

LE MATRICI $R \in \mathbb{K}^{1\times n}$ SI DICONO RIGHE

LO SPAZIO DELLE RIGHE É $(\mathbb{K}^n)^\vee$ MENTRE QUELLO DELLE COLONNE É $(\mathbb{K}^n)$

SI DEFINISCE UNA FORMA BILINEARE (BILINEARE) DETTA PRODOTTO DI RIGHE PER COLONNE:

$$(\mathbb{K}^n)^\vee \times \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$\alpha=(a_1, a_2, \dots a_n) \qquad \vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_n\end{pmatrix}$$

$$\alpha\times\vec{u} = a_1u_1+a_2u_2 \dots + a_nu_n = (u_1, u_2, \dots u_n)\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_n\end{pmatrix}$$

É UNA FORMA BILINEARE

DEF TRASPOSTO

LA TRASPOSTA DI A É L'UNICA MATRICE A^T TALE CHE

$$C_i(A^T)=R_i(A)^T$$
$$R_i(A^T)=C_i(A)^T$$

LA TRASPOSTA DI UNA RIGA É UNA COLONNA E VICEVERSA:

$$T: \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^\vee$$
$$\vec{u} \longmapsto \vec{u}^T = (u_1, u_2, \dots u_n)$$
$$T: (\mathbb{K}^n)^\vee \to \mathbb{K}^n$$
$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n) \longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_n\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\4\\5\end{pmatrix}^T=(3,1,4,5)$$

$$(1,-2,5)^T=\begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 92

ATTENZIONE

$$(2,1,5)\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix} = 2\cdot3+1\cdot7+5\cdot1 = 18$$

$$\begin{pmatrix}3\\1\\7\end{pmatrix}(2,1,5) = \begin{pmatrix}6&3&15\\2&1&5\\14&7&35\end{pmatrix}$$

TUTTE LE RIGHE SONO PROPORZIONALI
TUTTE LE COLONNE SONO PROPORZIONALI

$A \in K^{m\times m}$ HA RANGO 1 SE TUTTE LE RIGHE SONO PROPORZIONALI

$$\begin{cases}2x-5y+z=0\\4x-10y+2z=0\\6x-15y+3z=0\end{cases} \qquad \begin{pmatrix}2&-5&1\\4&-10&2\\6&-15&3\end{pmatrix}$$

IL RANGO È IL NUMERO DI RIGHE LINEARMENTE INDIPENDENTI

ESEMPIO

$$A = (C_1(A), C_2(A) \dots C_m(A)) \circ \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_m\end{pmatrix}$$

IN QUESTO CASO LA PRIMA COLONNA VIENE MOLTIPLICATA PER u_1 E COSÌ VIA...

$$\begin{pmatrix}3&2&5\\1&1&9\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14\\7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}27\\26\end{pmatrix}$$

$2\times3 \circ 3\times1 \to 2\times1$

OSSERVAZIONE

$$A\circ B = A\circ(C_1(B), C_2(B), \dots C_m(B))$$

$$A\circ B = \begin{pmatrix}R_1(A)\\R_2(A)\\R_m(A)\end{pmatrix}\circ B$$

DUE MODI DIVERSI DI SCRIVERE IL PRODOTTO TRA MATRICI

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1&1\\4&1&-1&1\\5&7&-7&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14&11&-8&6\\-6&6&-3&0\end{pmatrix}$$

$2\times3 \circ 3\times4 \to 2\times4$

DEF COLONNE/RIGHE elementari

SONO $\vec{e}_i$, COLONNE ELEMENTARI TALI CHE $\vec{e}_i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

E ε_i $(1,0,0)$ DETTA RIGA ELEMENTARE

SONO FORMATE DA TUTTI ZERO TRANNE UN UNO

$$A\circ\vec{e}_j = A\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\,C_1(A)+1\,C_2(A)+0\,C_3(A)+0\,C_4(A) = C_j(A)$$

$$A\cdot\varepsilon_i = R_1(A)$$

IN CONCLUSIONE QUANDO HO UNA MATRICE

$$A(i,j) = A\cdot\vec{e}_j\cdot\varepsilon_i$$

25

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 92

DETERMINANTI

DEF
IL DETERMINANTE DI COLONNE È L'UNICA FORMA MULTILINEARE ANTISIMMETRICA

$$\det : \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m \times \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}$$

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2 \ldots \vec{u}_m) \mapsto \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \wedge \ldots \wedge \vec{u}_m$$

TALE CHE: $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \ldots \wedge \vec{e}_m = 1$

IL DETERMINANTE DI $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ È $\det(A) = |A| = C_1(A) \wedge C_2(A) \wedge \ldots \wedge C_m(A)$

CERCHIAMO ORA DI RICAVARE LA FORMULA PER CALCOLARE IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \wedge (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \wedge (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3)$$

$$= (\cancel{a_1 b_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1} + a_1 b_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + a_1 b_3 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + a_2 b_1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + \cancel{a_2 b_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2} + a_2 b_3 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 +$$
$$+ a_3 b_1 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + a_3 b_2 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 + \cancel{a_3 b_3 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3}) \wedge (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3)$$

- PER L'ANTISIMMETRIA $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$
- SCAMBIANDO L'ORDINE DEI FATTORI DEVO RICORDARMI DI INVERTIRE IL SEGNO $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 = -\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1$

$$= \left[(a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3\right] \wedge (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3)$$

$$= c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + c_2(a_1 b_3 - a_3 b_1)\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 +$$
$$+ c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 =$$

CAMBIO L'ORDINE DEL PRODOTTO, RICORDO DI METTERE IL MENO E SO CHE $\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 = 1$

$$= c_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) - c_2(a_1 b_3 - a_3 b_1) + c_1(a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

QUINDI IL DETERMINANTE SI PUÒ CALCOLARE RISPETTO A QUALSIASI COLONNA, RICORDANDO CHE PER LA PRIMA E DISPARI IL SECONDO TERMINE È NEGATIVO, VICEVERSA PER LE PARI

CALCOLO DEL DETERMINANTE DI MATRICI A $M\times M$ (4×4)

VISTO CHE POSSIAMO USARE QUALSIASI COLONNA SEGUE LA REGOLA CHE L'ELEMENTO IN POSIZIONE $(1,1)$ HA SEGNO POSITIVO, AD OGNI SPOSTAMENTO SI CAMBIA SEGNO FINO AL VALORE CONSIDERATO.
ESSENDO UNA MATRICE QUADRATA IL DETERMINANTE SI PUÒ ANCHE CALCOLARE UTILIZZANDO LE RIGHE

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \overset{+}{a_{31}} & \overset{-}{a_{32}} & \overset{+}{a_{33}} & \overset{-}{a_{34}} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

UTILIZZANDO LA TERZA RIGA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 92

MATRICE INVERSA

SIA $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, SUPPONIAMO A INVERTIBILE, SIA B L'INVERSA ALLORA

$$A \cdot B = \mathbb{1}_m$$

$$A(C_1(B), C_2(B), \dots C_m(B)) = (AC_1(B), AC_2(B), \dots AC_m(B)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2 \dots \vec{e}_m)$$

SIA $AC_j(B)$ LA j-ESIMA EQUAZIONE POSSO DIRE CHE:

$$\vec{e}_j = A \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{mj} \end{pmatrix} = b_{1j} C_1(A) + b_{2j} C_2(A) + \dots + b_{mj} C_m(A)$$

QUINDI AVREMO

$$b_{1j} = \frac{e_j \wedge C_2(A) \wedge \dots \wedge C_m(A)}{\underbrace{C_1(A) \wedge \dots \wedge C_m(A)}_{\det A}}$$

RIVEDERE LA REGOLA DI KRAMER pp 72

$$b_{2j} = \frac{C_1(A) \wedge e_j \wedge C_3(A) \wedge \dots \wedge C_m(A)}{\underbrace{C_1(A) \wedge \dots \wedge C_m(A)}_{\det A}}$$

RICORDIAMO

- $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$ É INVERTIBILE $\Leftrightarrow \exists B \in \mathbb{K}^{m \times m} \mid A \cdot B = B \cdot A = \mathbb{1}_m$
- B SI INDICA COME A^{-1}
- A É INVERTIBILE $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

DAL RAGIONAMENTO FATTO NELLE SCORSE LEZIONI POSSIAMO DIRE CHE:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$$

IN CUI A^* É DETTO AGGIUNTA CLASSICA DI A, $A^* \in \mathbb{K}^{m \times m}$ E VERIFICA L'UGUAGLIANZA

$$A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot \mathbb{1}_m$$

CON POCHI PASSAGGI É POSSIBILE VERIFICARE CHE $A^* = (A_{ij})^T$ IN CUI A_{ij} É IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE QUADRATA OTTENUTA DA A CANCELLANDO LA i-ESIMA RIGA E LA j-ESIMA COLONNA MOLTIPLICATO PER $(-1)^{i+j}$

ESEMPIO

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad |A| = 4$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad (A_{ij})^T = A^* = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} A^* = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 92

SISTEMI LINEARI

SIA $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ ESSA INDUCE UNA FUNZIONE LINEARE

$$A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$$
$$\vec{u} \longmapsto A\vec{u} = \vec{u}(1)C_1(A) + \dots + \vec{u}(n)C_n(A)$$

DATO $\vec{b} \in \mathbb{K}^m$ $\quad (\vec{b}(i) = b_i \in \mathbb{K})$

$$A^{-1}\vec{b} = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot \vec{u} = \vec{b}\}$$

SONO TUTTI GLI ELEMENTI DELL'INSIEME DI PARTENZA CHE VENGONO MANDATI IN B

DETERMINARE $A^{-1}\vec{b}$ È EQUIVALENTE A RISOLVERE L'EQUAZIONE MATRICIALE:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{DOVE} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_n \end{pmatrix}$$

SIA $A(i,j) = a_{ij}$ POSSIAMO RISCRIVERE L'ULTIMA EQ. COME:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

ESSO VIENE CHIAMATO SISTEMA LINEARE A M EQUAZIONI E N INCOGNITE

OSSERVIAMO CHE IL SISTEMA È UNIVOCAMENTE DETERMINATO DALLA MATRICE DETTA MATRICE COMPLETA

$$(A \mid \vec{b}) \in \mathbb{K}^{m \times (n+1)}$$

$$\begin{cases} 2x - y + 5z = 1 \\ 3x - 2y + 7z = 2 \end{cases} \qquad \left(\underbrace{\begin{matrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{matrix}}_{\substack{\text{COEFF. DELLE} \\ \text{VARIABILI} \\ \text{MATRICE } A}} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}}_{\substack{\text{TERMINI NOTI E COSTANTI} \\ \text{VETTORE } \vec{b}}}\right)$$

RISOLVERE IL SISTEMA SIGNIFICA DETERMINARE LE IMMAGINI

DEF NUCLEO

VIENE CHIAMATO NUCLEO DELL'APPLICAZIONE LINEARE f L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI CHE ANNULLANO LA f LA CUI IMMAGINE È IL VETTORE NULLO: INSIEME DI VALORI

$$\mathrm{Ker}(A) = A^{-1}(\vec{0}) = \{\vec{u} \in \mathbb{K}^n \mid A\vec{u} = \vec{0}\}$$

$A^{-1}(\vec{0}) \subseteq \mathbb{K}^n$ È UN SOTTOINSIEME DI $\mathbb{K}^n$ MA ANCHE UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI $\mathbb{K}^n$. IN CUI OGNI COMBINAZIONE LINEARE È UNA SOLUZIONE APPARTENENTE AL SOTTOINSIEME:

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in \mathrm{Ker}(A) \Rightarrow \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in \mathrm{Ker}(A)$$

INFATTI

$$A(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda \underbrace{A\vec{u}}_{} + \mu \underbrace{A\vec{v}}_{} = \vec{0}$$

VETTORI NULLI PER DEFINIZIONE $A\vec{u} = A\vec{v} = \vec{0}$

IL NUCLEO È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI CHE ANNULLANO LA f

31

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 92

DEF MAT. FORTEMENTE RIDOTTA

UNA MATRICE A SI DICE "FORTEMENTE RIDOTTA" SE OGNI RIGA NON NULLA POSSIEDE UN 1 CHE È L'UNICO ELEMENTO NON NULLO DELLA SUA COLONNA

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMI CON MATRICI FORTEMENTE RIDOTTE SONO FACILMENTE RISOLVIBILI

CONSIDERIAMO $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = b_1 \\ 4x_1 + x_3 + x_4 = b_2 \\ 5x_1 - 3x_3 + x_5 = b_3 \end{cases}$$

POSSIAMO VEDERE CHE LE SOLUZIONI SONO IN FUNZIONE DI x_1 E x_3

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = b_1 - 2\lambda + 3\mu \\ x_3 = \mu \\ x_4 = b_2 - 4\lambda - \mu \\ x_5 = b_3 - 5\lambda + 3\mu \end{cases} \qquad A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ b_1 - 2\lambda + 3\mu \\ \mu \\ b_2 - 4\lambda - \mu \\ b_3 - 5\lambda + 3\mu \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \middle| \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ b_1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]$$

ABBIAMO SCRITTO L'INSIEME DELLE INFINITE SOLUZIONI COME UN PIANO VETTORIALE, ESSO SONO LA SOMMA DI UNA SOLUZIONE PARTICOLARE PIÙ UNA GENERALE DATA DAL NUCLEO DELLA MATRICE

LINEARE DIPENDENZA e INDIPENDENZA

RICORDIAMO CHE SE $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \dots \vec{u}_k \in K^n$ LA SIMBOLOGIA

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_k] = \{\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \dots + \lambda_k\vec{u}_k \mid \lambda \in K\} =: A$$

E SE $\forall \vec{u}, \vec{v}$ ∈ ALL'INSIEME $(\forall \lambda, \mu \in K)$ DI PRIMA ALLORA $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in A$

PERTANTO A È UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI K^n GENERATO DA $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k$ I QUALI SI DICONO GENERATORI

DEF COLONNE L.I

$\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k \in K^n$ SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE E SOLO SE L'UNICA COMBINAZIONE LINEARE NULLA

$$\lambda\vec{u}_1 + \dots + \lambda_k\vec{u}_k = \vec{0}$$

È QUELLA A COEFFICIENTI TUTTI NULLI:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \iff \lambda_i = 0 \quad 1 \le i \le k$$

CONTRARIAMENTE I VETTORI SI DICONO LINEARMENTE DIPENDENTI

DUE VETTORI CON COMPONENTI NON PROPORZIONALI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 92

ESEMPIO DI TRASFORMAZIONE ELEMENTARE DI RIGA
SIA $m = 3$ $[R_1(A), R_2(A), R_3(A)]$

$= [R_1(A), R_2(A), R_3(A) + \lambda R_1(A) + \mu R_2(A)]$

$\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 R_3 = \lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 + \lambda_3 (R_3 + \lambda R_1 + \mu R_2) - \lambda_3 \lambda R_1 - \lambda_3 \mu R_2 =$

$= (\lambda_1 - \lambda_3 \lambda) R_1 + (\lambda_2 - \lambda_3 \mu) R_2 + \lambda_3 [R_3(A) + \lambda R_1 + \mu (R_2]$

DEF RANGO

SIA $A \in K^{m \times n}$ IL RANGO RIGA DI A È IL MASSIMO NUMERO DI RIGHE DI A LINEARMENTE INDIPENDENTI

IL RANGO COLONNA È IL MASSIMO NUMERO DI COLONNE LINEARMENTE INDIPENDENTI

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & -2 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & -3 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \end{array} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$$

RANGO ALMENO 1: NON CI SONO RIGHE NULLE
ALMENO 2: a, b SONO INDIPENDENTI

RANGO 2 $\Rightarrow$ $c = a + b$

IL RANGO COLONNA È 2, 3 RIGHE SONO DIPENDENTI SE IL DETERMINANTE TRA DI LORO È ZERO, SI TROVANO QUINDI IN UN SOLIDO CON VOLUME NULLO, SULLO STESSO PIANO

TEOREMA $\forall A^{m \times n} \in K^{m \times n}$ RANGO RIGA = RANGO COLONNA

DEF

SI DICE RANGO DI UNA MATRICE IL RANGO RIGA O COLONNA;

$rk(A) = \text{RANGO}(A)$

IL RANGO DI UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE È IL NUMERO DELLE RIGHE NON NULLE

DEF

UNA MATRICE $A \in K^{m \times n}$ SI DICE RIDOTTA PER RIGHE SE SOLO SE OGNI RIGA NON NULLA POSSIEDE ALMENO UN ELEMENTO NON NULLO DETTO PIVOT AL DI SOTTO DEL QUALE VI SONO AL PIÙ SOLO ZERI

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE A È RIDOTTA PER RIGHE

$rk(A) = 4$ OGNI RIGA È COMBINAZIONE LINEARE UNICA

UNA MATRICE SI DICE RIDOTTA PER COLONNE SE LA TRASPOSTA È RIDOTTA PER RIGHE

AFFERMO CHE UNA MATRICE RIDOTTA PER RIGHE HA LE STESSE (RIGHE) LINEARMENTE INDIPENDENTI

ES. $\cdot\ \lambda_1 R_1(A_2) + \lambda_2 R_2(A_2) + \lambda_3 R_3(A_2) + \lambda_4 R_4(A_2) = 0$

$2\lambda_1 + 0\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \quad 2\lambda_1 = 0 \quad \lambda_1 = 0$

$\cdot\ \lambda_2 R_2(A_3) + \lambda_3 R_3(A_3) + \lambda_4 R_4(A_3) = 0$

$3\lambda_2 + 0\lambda_3 + 0\lambda_4 = 0 \quad 3\lambda_2 = 0 \quad \lambda_2 = 0$ ECC.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 92

PROPRIETÀ

$$(A|\vec{d}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\, r \\ \\ \}\, s \\ \end{array}$$

SE IL RANGO DI $(A|\vec{d}) = 4$ LE EQUAZIONI SONO INDIPENDENTI E $r \cap s = \phi$, LE DUE RETTE SONO SGHEMBE

SE IL RANGO DI $(A|\vec{d}) = 3$ UNA DELLE QUATTRO EQ È DIPENDENTE DALLE ALTRE TRE, AVREMO:

SE $rk(A) = 3$ IL SISTEMA HA UNA SOLA SOLUZIONE

SE $rk(A) = 2$ IL SISTEMA $r \cap s = \phi$ QUINDI LE DUE RETTE SONO PARALLELE

SE IL RANGO DI $(A|\vec{d}) = 2$ LE DUE RETTE SONO COINCIDENTI LE ULTIME DUE EQ SONO DIPENDENTI DALLE PRIME DUE

DEF SURIETTIVA

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ È SURIETTIVA

$\Leftrightarrow \forall \vec{b} \in \mathbb{R}^3, f^{-1}(\vec{b}) \neq 0$

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \mathbb{1}\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \Leftrightarrow A^{-1}\vec{b} \neq 0$

RICORDIAMO CHE IL NUCLEO DI UNA FUNZIONE O MATRICE È L'INSIEME DI TUTTI I VETTORI CHE ANNULLANO DATA FUNZIONE. POSSO DIRE CHE SONO TUTTE LE CONTROIMMAGINI DI ZERO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 92

DEF SPAZIO VETTORIALE

SIA $V \neq \emptyset$ UN INSIEME DOTATO DI UN'OPERAZIONE BINARIA INTERNA OSSIA UNA FUNZIONE CHE OPERA SU COPPIE ORDINATE

$$V \times V \xrightarrow{S} V$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto S(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} + \vec{v}$$

E DI UN AZIONE DI UN CAMPO $\mathbb{K}$ TALE CHE $(V, +)$ SIA UN GRUPPO COMMUTATIVO E VALGANO TUTTE LE PROPRIETÀ ELENCATE SI DICE SPAZIO VETTORIALE

ESEMPI

- $\mathbb{Q}[x]$ $\quad 3(2 + \frac{1}{2}x^2) + 5(7 + \frac{4}{3}x^3)$ É UN $\mathbb{Q}$-SPAZIO VETTORIALE
  INFATTI: $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{Q}[x] \quad \lambda P_1 + \mu P_2 \in \mathbb{Q}[x]$
- $\mathbb{Q}[x]$ É UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE? $x \in \mathbb{Q}[x] \Rightarrow \sqrt{2}[x] \notin \mathbb{Q}[x]$
  FALSO
- $\mathbb{R}[x]$ É UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE, INFATTI PER DUE POLINOMI QUALSIASI A COEFF. REALI:
  $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}[x], \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda P_1 + \mu P_2 \in \mathbb{R}[x]$
- $\mathbb{R}[x], \mathbb{R}^2[x, y] \ldots \mathbb{R}^n[x_1, x_2 \ldots x_n]$ SONO ANCHE $\mathbb{Q}$-SPAZI VETTORIALI MA NON POSSO DIRE CHE SONO $\mathbb{C}$-SPAZI VETTORIALI PERCHÉ:
  $i(1,1,1) = (i,i,i) \notin \mathbb{R}^3$
- PER DARE UNA COLONNA DI 3 NUMERI REALI DEVO SCEGLIERE 3 NUMERI REALI
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$ ESSA É LA DIMENSIONE DI $\mathbb{R}^3$ SUI REALI O MEGLIO DETTA LA CARDINALITÀ
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 1$
- É $\mathbb{C}$ UN $\mathbb{C}$-SPAZIO VETTORIALE? $\Rightarrow (\mathbb{C}, +)$ SÍ
  É $\mathbb{C}$ UN $\mathbb{R}$-SPAZIO VETTORIALE? $\lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda \cdot z \in \mathbb{C}$
- UN INSIEME NUMERICO É SPAZIO VETTORIALE DI SE STESSO E DEGLI INSIEMI NUMERICI CONTENUTI AL SUO INTERNO
- $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2 \quad a + bi$
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C}^2 = 4$ HO DUE NUMERI COMPLESSI $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$
  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[x] = +\infty$ PERCHÉ $\mathbb{R}[x]$ É LA DIMENSIONE DEI POLINOMI I QUALI POSSONO AVERE DIM. INFINITA
- SE NON SPECIFICO IL CAMPO NON HO UNO SPAZIO VETTORIALE
- $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ PER DARE UN NUMERO $\mathbb{R}$ MI SERVONO INFINITI NUMERI $\mathbb{Q}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 92

NOTAZIONE - PROPOSIZIONI

- SE V È $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE, $G[V] = \{ W \mid W$ È $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE DI $V \}$

  $G[V] \neq \emptyset$, INOLTRE IL SOTTOINSIEME DI V CHE HA SOLO IL VETTORE NULLO È SOTTOSPAZIO VETTORIALE

  $\{\vec{0}_V\} \in G[V] \quad V \in G[V]$

  QUESTI DUE INSIEMI SI DICONO SOTTOSPAZI VETTORIALI BANALI

- TUTTE LE COMBINAZIONI DI DUE VETTORI APPARTENENTI AD UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE È A SUA VOLTA UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE

  $[A] \in G(V)$, $V = \mathbb{K}[x] \quad \underline{x} = \{1, x, x^2 \ldots\} \in \mathbb{K}[x]$

  ALLORA $[\underline{x}] = \mathbb{K}[x]$ UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE POTENZE DI X È UN POLINOMIO

- COMBINAZIONE LINEARE DI COMBINAZIONI LINEARI FINITE DI COMPONENTI DI A È UNA COMBINAZIONE LINEARE FINITA DI ELEMENTI DI A

  SIANO $\vec{u}, \vec{v} \in [A] \Rightarrow \vec{u} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{u}_i \quad \vec{u}_i \in A$

  $\vec{v} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \vec{u}_i$

  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} = \sum_{i=1}^{m} (\lambda \lambda_i \vec{u}_i + \mu \mu_i \vec{u}_i)$ QUESTO PROVA CHE:

  $[A] \in G(V)$

- IN PARTICOLARE $[\vec{0}] = \{\lambda \vec{0} \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \{\vec{0}\}$ SOTTOSPAZIO VETTORIALE

  SE $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow [\vec{u}] = \{\lambda \vec{u} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ È LA DIREZIONE DI $\vec{u}$, MENTRE

  SE $[\vec{u}] \neq [\vec{v}] \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}]$ È UN PIANO VETTORIALE GENERATO DA $\vec{u}$ E $\vec{v}$

- IN GENERALE $[A]$ SI DICE SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALL'INSIEME A, ED ESSO SI CHIAMA INSIEME DEI GENERATORI.
  SE $W \in G(V)$ SI DICE GENERATO DA $A \Leftrightarrow W = [A]$

DEF SPAZIO FINITAMENTE GENERATO

$W \in G(V)$ SI DICE FINITAMENTE GENERATO SE

$W = [\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_h] \qquad h < \infty \quad \dim_{\mathbb{K}} W = h$

SE W NON È FINITAMENTE GENERATO SI DICE CHE LA DIMENSIONE DI W È INFINITA

$\dim_{\mathbb{K}} W = \infty$

RICORDIAMO CHE $\vec{u}_1 \ldots \vec{u}_h \in V$ SI DICONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE

$\lambda \vec{u}_1 + \ldots \lambda_h \vec{u}_h \Leftrightarrow \lambda = 0$

SE ESSI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI ALMENO UNO SI PUÒ SCRIVERE COME COMBINAZIONE LINEARE DEI RIMANENTI

DEF

SIA $W \in G(V)$ E SIA $\mathcal{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_h) \in W \times W \times \ldots \times W$ $\mathbb{K}$ VOLTE

$\mathcal{B}$ SI DICE BASE DI $W \Leftrightarrow W = [\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_h]$

E I VETTORI GENERATORI $\vec{b}_1, \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_h$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 92

ES

$\mathbb{K}[x]_{\leq 2} = V \qquad \mathbb{K}[x]_{\leq 2} = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_i \in \mathbb{K} \}$

UNA BASE DI V SARÀ $[1, x, x^2]$

OSSERVAZIONE

SUPPONIAMO CHE $\dim_{\mathbb{K}} W = n$ E CHE $(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$ SIA UNA BASE.

ALLORA SE $(\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI ESSA È ANCHE UNA BASE

INFATTI SE NON FOSSE UNA BASE ESISTEREBBE $\vec{w} \in W$ TALE CHE $\vec{w}$ NON APPARTIENE ALLA BASE

$w \notin [\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n] \Rightarrow (\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n, \vec{w})$ SONO LIN. INDIPENDENTI

CONTRADDIZIONE PERCHÉ $\dim_{\mathbb{K}} W = n$

ES $A \in GL_2(\mathbb{R}) \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$|A| = ad - cb \Rightarrow C_1(A), C_2(A)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI ESSE SONO BASE

PROPOSIZIONE

SIANO $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_h \in W \in G(V)$ ESSI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI SE SOLO SE ~~ALLORA~~ $\forall \vec{u} \in [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_h]$ SI SCRIVE IN MODO UNICO COME COMBINAZIONE LINEARE DI $\vec{u}_1 \dots \vec{u}_h$

dim

$\Rightarrow \quad \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h$ LIN. INDIP.

INFATTI SE: $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_h \vec{u}_h = \mu_1 \vec{u}_1 + \dots + \mu_h \vec{u}_h$

ESSENDO IN UNO SPAZIO VETTORIALE POSSO SCRIVERE

$(\lambda_1 - \mu_1)\vec{u}_1 + \dots + (\lambda_h - \mu_h)\vec{u}_h = \vec{0}$

IMPLICA CHE TUTTI I COEFF. SIANO ZERO $\rightarrow$ L.I ■

$\Leftarrow$ SUPPONIAMO CHE $\vec{u} \in [\vec{u}_1, \dots \vec{u}_h]$

$\vec{u} = \sum_{i=1}^{h} \lambda_i \vec{u}_i$ PER λ_i UNICI E LINEARMENTE INDIPENDENTI

INFATTI: $\vec{0} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots \lambda_h \vec{u}_h = 0\vec{u}_1 + \dots 0\vec{u}_h$ ■

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 92

HO SOLUZIONI DEL SEG. SISTEMA?

$$x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}$$

1 2 3 4

SO CHE LA MATRICE A RANGO 2 $\Rightarrow$ 2 ~~RIGHE~~ COLONNE SONO INDIPENDENTI 1 2 INDIP

LA COLONNA DEI TERMINI NOTI DIPENDERÁ SOLO DALLE PRIME DUE COLONNE

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}\lambda=0\\ \mu=1\end{cases}$$ HO SOLUZIONE

MA SE AVESSI AVUTO

$$\lambda\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\7\end{pmatrix}$$ IL SISTEMA NON AVREBBE AVUTO SOLUZIONI

TEOREMA ROUCHÉ-CAPELLI

SIA DATO IL SISTEMA $A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow (A|\vec{b})$

$$(A|\vec{b})=(C_1(A),\dots C_n(A)|\vec{b})$$

IL SISTEMA SI RISOLVE SE LA COLONNA DEI TERMINI NOTI É COMBINAZIONE LINEARE DELLE COLONNE DEI COEFF.

$$rk(A)=\dim(C_1(A)\dots C_n(A))=rk(A|\vec{b})$$

IN QUESTO CASO IL SISTEMA HA SOLUZIONI

RICORDIAMO CHE SE V É UN K-SPAZIO VETTORIALE, $G(V)$ DENOTA L'INSIEME DI TUTTI I SOTTOSPAZI DI V

SE W É FINITAMENTE GENERATO:

$$W=[\vec{b}_1,\dots \vec{b}_n]$$

RICORDIAMO CHE $(\vec{b}_1\dots\vec{b}_n)$ SI DICE BASE DI W SE I VETTORI $\vec{b}_1\dots\vec{b}_n$ GENERANO W E SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI NEL SENSO CHE:

$$\lambda_1\vec{b}_1+\dots\lambda_h\vec{b}_h=\vec{0} \Rightarrow \lambda_i=0 \quad 1\le i\le h$$

IN TAL CASO SI DICE CHE:

$$\dim_K W=h$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 92

DEF SOMMA

SIA $V \mid \dim V < \infty$

$\mathcal{U} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2 \dots \vec{u}_h] \quad W = [\vec{w}_1 \dots \vec{w}_k]$

$\mathcal{U} + W$ È IL SOTTOSPAZIO VETTORIALE GENERATO DALL'UNIONE DELLE BASI

$\mathcal{U} + W = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_h, \vec{w}_1 \dots \vec{w}_k] \quad \dim_K (\mathcal{U} + W) \leq h + k$

NON È DETTO CHE L'UNIONE DI UNA BASE SIA A SUA VOLTA UNA BASE

ESEMPIO

$\mathbb{R}^3 \quad \mathcal{U} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad V \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$

$\mathcal{U} + V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$ MAX DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI IN $\mathbb{R}^3$ È 3, UN VETTORE È DIPENDENTE

$\dim_{\mathbb{R}} (\mathcal{U} + V) \leq 3$

$\mathbb{R}^4 \quad \mathcal{U} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad V \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right]$

$\mathcal{U} + V = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right] = \mathbb{R}^4$ I VETTORI SONO LIN. INDIPENDENTI

$\dim (\mathcal{U} + V) = 4$

PROP

SIANO $\mathcal{U} = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_h] \quad V = [\vec{c}_1 \dots \vec{c}_k]$ SOTTOSPAZI VETTORIALI

BASE $(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_h, \vec{c}_1 \dots \vec{c}_k)$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$\Longleftrightarrow$

$\mathcal{U} \cap V = \{\vec{0}\}$

DIM

$\Rightarrow$ SE $(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_h, \vec{c}_1 \dots \vec{c}_k)$ SONO L.I. $\Rightarrow$ SE $\vec{u} \in \mathcal{U} \cap V$

$\vec{u} = \lambda_1 \vec{b}_1 \dots + \lambda_h \vec{b}_h = \mu_1 \vec{c}_1 \dots \mu_k \vec{c}_k$

$= \lambda_1 \vec{b}_1 \quad + \lambda_h \vec{b}_h - \mu_1 \vec{c}_1 \quad - \mu_k \vec{c}_k = 0$

L.I. $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_h = \mu_1 = \mu_k = 0 \quad \vec{u} = 0$

$\Leftarrow$ VICEVERSA SE $U \cap V = \{\vec{0}\}$

$\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_h \vec{b}_h + \mu_1 \vec{c}_1 \dots + \mu_k \vec{c}_k = \vec{0}$

$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_h b_h = -\mu_1 \vec{c}_1 \dots - \mu_k \vec{c}_k$

$= \vec{0} \in \mathcal{U} \qquad = \vec{0} \in V$ TUTTI I COEFF DEVONO ESSERE NULLI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 92

APPLICAZIONI LINEARI

DEF

SIANO U, V $\mathbb{K}$-SPAZI VETTORIALI, VIENE DEFINITA UN'APPLICAZIONE LINEARE UNA FUNZIONE $f \in V^U = \{ f : U \mapsto V \}$ TALE CHE:

$$f(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda f(\vec{u}_1) + \mu f(\vec{u}_2)$$

IN PARTICOLARE f É ADDITIVA E OMOGENEA, ESSA RISPETTA LE COMBINAZIONI LINEARI

ESEMPIO

- $U = V = \mathbb{R}$ $\quad q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto q(x) = x^2 \qquad q \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \text{ MA } q \text{ NON É LINEARE}$$

$$q(x+y) \neq q(x) + q(y)$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2$$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 + xy \log y \\ 2xy - y^2 \\ x + y - 3 \end{pmatrix} \quad \text{NON É LINEARE}$$

SI INDICHERÁ CON $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$ L'INSIEME DI TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI DA U IN V; ESSE SI DICONO ANCHE OMOMORFISMI

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) := \{ f : U \to V \mid f \text{ é LINEARE} \}$$

OSSIA

$$f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) \Rightarrow f(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda f(\vec{u}) + \mu f(\vec{v})$$

PROPRIETÀ SE $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V)$:

- $f(\vec{0}_U) = \vec{0}_V$

  DIM $f(\vec{0}_U) = f(0 \cdot \vec{u}) = 0 \cdot f(u) = 0 \cdot v$

- $f(-\vec{u}) = -f(\vec{u})$

  DIM $f(-\vec{u}) = f(-1 \cdot \vec{u}) = -f(\vec{u})$

- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U,V) \in G(V^U)$

- OGNI COMBINAZIONE DI APPLICAZIONI LINEARI É UN APPLICAZIONE LINEARE

  SIANO $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(U,V)$ $\quad \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U$

$$(\lambda f_1 + \mu f_2)(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \lambda f_1(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) + \mu f_2(a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) =$$

$$= \lambda a f_1(\vec{u}_1) + \lambda b f_1(\vec{u}_2) + \mu a f_2(\vec{u}_1) + \mu b f_2(\vec{u}_2) =$$

$$= a(\lambda f_1 + \mu f_2)(\vec{u}_1) + b(\lambda f_1 + \mu f_2)(\vec{u}_2)$$

- OGNI MATRICE PUÓ ESSERE VISTA COME UNA COMBINAZIONE LINEARE

$$A \in \mathbb{K}^{m \times n} \qquad \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m \quad \vec{u} \mapsto A\vec{u}$$

$$A(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = \lambda A\vec{u} + \mu A\vec{v} \qquad A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 92

$g = 5e^x + 7e^{2x}$ È SOLUZIONE PERCHÉ COMBINAZIONE DELLO SPAZIO VETTORIALE

$g\,(e^x, e^{2x}) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$g = 5(e^x + e^{2x}) + 2e^{2x}$ $\qquad \mathcal{C} = (e^x + e^{2x}, e^{2x})$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

$g_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ HO CAMBIATO LA BASE, LE COMPONENTI DI UN VETTORE DIPENDONO DALLA BASE CHE SCEGLIAMO

POSTA β BASE DI U e C BASE DI V e $f \in Hom_K(U,V)$

$\forall \vec{u} \in U \quad f(\vec{u})_C \in V$

$$\begin{aligned} f(\vec{u})_C &= [f(\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n)]_C = \\ &= [\lambda_1 f(\vec{b}_1) + \dots + \lambda_n f(\vec{b}_n)]_C = \\ &= \lambda_1 f(\vec{b}_1)_C + \dots + \lambda_n f(\vec{b}_n)_C = \\ &= \underbrace{(f(\vec{b}_1)_C, f(\vec{b}_2)_C \dots f(b_n)_C)}_{M_f^{C,\beta} \in K^{m \times n}} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}}_{(\vec{u})_\beta} \end{aligned}$$

$$f(\vec{u})_C = M_f^{C,\beta} \cdot (\vec{u})_\beta$$

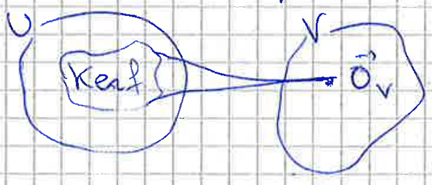
DEF SURIETTIVA

SIA $f \in Hom_K(U,V) \qquad Im\, f \subseteq V$

$Im(f) = \{ f(\vec{u}) \mid \vec{u} \in U \}$

f È SURIETTIVA $\Leftrightarrow Im(f) = V$

$Ker\, f \subseteq U \qquad Ker\, f = \{ \vec{u} \in U \mid f(\vec{u}) = \vec{0}_V \}$



PROPOSIZIONE

$Im\, f \in G(V) \qquad Ker\, f \in G(U)$

$dim_K\, Im f \leq dim_K V$ LA DIMENSIONE DELL'IMMAGINE È $\leq$ ALL'INSIEME DI ARRIVO, È CONTENUTA IN ESSO

DIM

SIANO $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in Im\, f \Rightarrow \exists\, \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \mid f(\vec{u}_i) = \vec{v}_i \quad i = 1,2$

$\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2 = \lambda f(\vec{u}_1) + \mu f(\vec{u}_2) = f(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) \Rightarrow Im(f) \in G(V)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 92

PROPOSIZIONE INIETTIVA

$f \in Hom_{\mathbb{K}}(U,V)$, f È INIETTIVA $\iff \ker f = \{\vec{0}_V\}$

DIM

$\Leftarrow$ $\ker f = \{\vec{0}_V\}$ E SIANO $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in U \mid f(\vec{u}_1) = f(\vec{u}_2)$

$$\Rightarrow f(\vec{u}_1) - f(\vec{u}_2) = \vec{0}_V$$

$$f(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \vec{0}_V \Rightarrow \vec{u}_1 - \vec{u}_2 \in \ker f = \{\vec{0}\}$$

$$\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{u}_2 \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ SE f È INIETTIVA $\Rightarrow \ker f = \{\vec{0}_V\}$

SIA $\vec{u} \in \ker f$

$$f(\vec{u}) = \vec{0}_V = f(\vec{0}_V) \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}_V \quad \blacksquare$$

PER VERIFICARE L'INIETTIVITÀ DI UNA FUNZIONE BASTA CALCOLARE LA DIMENSIONE DEL NUCLEO, SE È ZERO È INIETTIVA

PROPOSIZIONE

UN'APPLICAZIONE LINEARE $f: V \to V$ È INIETTIVA SE E SOLO SE L'IMMAGINE DI UN QUALSIASI SOTTINSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI U È UN SOTTINSIEME DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI DI V

DIM

$\Leftarrow$ SIA f INIETTIVA E $\vec{b}_1 \dots \vec{b}_m$ L.I.

$f(\vec{b}_1) \dots f(\vec{b}_m)$ SONO L.I

INFATTI $\lambda_1 f(\vec{b}_1) + \dots + \lambda_k f(\vec{b}_k) = \vec{0}_V$

$$f(\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k) = \vec{0}_V$$

$\Rightarrow \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots \lambda_k \vec{b}_k \in \ker f = \{\vec{0}_V\}$ CONDIZIONE DI FUNZIONE INIETTIVA

$$\lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_k \vec{b}_k = \vec{0}$$

$\lambda_1 = \ = \lambda_k = 0$ PERCHÉ $\vec{b}_1 \dots \vec{b}_k$ L.I.

$\Rightarrow$ VICEVERSA SUPPONIAMO CHE IMMAGINI DI LI SIANO LI:

SIA $\vec{u} \in \ker f \Rightarrow \vec{u} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots \lambda_m \vec{b}_m$ DOVE

$\beta = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_m)$ È UNA BASE DI U

$$f(\vec{u}) = f\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{b}_i\right) = \lambda_1 f(\vec{b}_1) + \dots \lambda_m f(\vec{b}_m) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 92

DEF ISOMORFI = INIETTIVA E SURIETTIVA

DUE SPAZI VETTORIALI SI DICONO ISOMORFI SE E SOLO SE ESISTE UN APPLICAZIONE LINEARE CHE SIA INIETTIVA E SURIETTIVA, IN QUESTO CASO f SI DICE ESSERE UN $\boxed{\text{ISOMORFISMO}}$

ES

$f: \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

NON È DETTO CHE TUTTE LE APPLICAZIONI LINEARI SIANO INIETTIVE

$f(2+3x+5x^2) = f(2-7x+12x^2)$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ NON SONO INIETTIVE

TEOREMA ISOMORFO

SE $\dim_{\mathbb{K}} V = n$ ALLORA V È ISOMORFO A $\mathbb{K}^n$

$\dim_{\mathbb{K}} U = \dim_{\mathbb{K}} V$

INFATTI:

$\dim_{\mathbb{K}} V = n \iff \exists \beta = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$

$V \to \mathbb{K}^n, \quad \vec{v} \longmapsto (\vec{v})_\beta \qquad \vec{v}_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \iff \vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 \dots \lambda_n \vec{b}_n$

È UNA COMBINAZIONE LINEARE?

$(\lambda \vec{v} + \mu \vec{w})_\beta \qquad \lambda \vec{v} + \mu \vec{w} = \lambda \sum \lambda_i \vec{b}_i + \mu \sum \mu_i \vec{b}_i$

$= \sum (\lambda \lambda_i + \mu \mu_i) \vec{b}_i =$

$\begin{pmatrix} \lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 \\ \\ \lambda\lambda_n + \mu\mu_n \end{pmatrix}_\beta = \lambda \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \\ \lambda_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \\ \mu_n \end{pmatrix} = \qquad = (\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1)\vec{b}_1 + \dots (\lambda\lambda_n + \mu\mu_n)\vec{b}_n$

$= \lambda (\vec{v})_\beta + \mu (\vec{w})_\beta$ È UNA COMBINAZIONE LINEARE ☒

SIA $\vec{u} \mid (\vec{u})_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u} = 0\vec{b}_1 + \dots + 0\vec{b}_n = \vec{0}$ È INIETTIVA

$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(f) = n$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 92

LA COMBINAZIONE LINEARE DI UNA DERIVATA E UNA MATRICE IDENTICA, SAPPIAMO CHE È ANCORA UNA FUNZIONE LINEARE

$$D - 3id_V \qquad C^\infty \to C^\infty$$
$$f \mapsto f' - 3f$$

$$Ker(D - 3id_V) = \{f \mid f' - 3f = 0\}$$

$$Ker(D - 3id_V) = [e^{3x}] \qquad f = e^{3x} \qquad D - 3id_V = 3e^{3x} - 3e^{3x} = 0$$

$$P(D) = D^m - e_1 D^{m-1} + e_2 D^{m-2} + \dots + (-1)^m id_V \in End(C^\infty(\mathbb{R}))$$

POSSIAMO DIRE CHE IL NUCLEO DI $P(D)$ RAPPRESENTA LE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE OMOGENEA

$$Ker(D^2 - 3D + 2) = \{y \mid y'' - 3y' - 2y = 0\} = [e^x, e^{2x}]$$

$$A\vec{x} = \vec{0} \qquad Ker A = [\dots]$$

$P(D)$ È LINEARE PERCHÉ COMBINAZIONE DI FUNZIONI LINEARI

$$P(D)y = f$$

SIA g SOLUZIONE PARTICOLARE $\Rightarrow P(D)^{-1}(f) = g + Ker(P(D)) =$

$$= \{g + h \mid h \in Ker P(D)\}$$

RICORDIAMO CHE LA SOLUZIONE ~~PARTICOLARE~~ DI UNA ~~SOL~~ EQ. DIFF SI OTTIENE SOMMANDO ALL'INTEGRALE GENERALE DELL'EQ. OMOGENEA UN INTEGRALE PARTICOLARE

$$P(D)(g+h) = P(D)g + P(D)h = f \qquad P(D)h \in Ker(P(D))$$

TEOREMA

SIA $f: U \to V$ LINEARE $\quad dim\, U = m < \infty$

$$\underline{dim\, U = dim\, Ker(f) + dim\, Im(f)}$$

DIM IDEA

$A: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \qquad Ker A = \{$SOLUZIONI DEL SISTEMA DI m EQUAZIONI IN m INCOGNITE$\}$ $A\vec{x} = \vec{0}$

$$dim\, Ker A = dim\, A^{-1}\vec{0} = m - r$$ RANGO: NUMERO DELLE RIGHE INDIPENDENTI

$$r = dim\, Im(A) = [C_1(A) \dots C_m(A)]$$

SE $Ker f = \{\vec{0}\} \Rightarrow f$ È INIETTIVA $\quad dim\, U = 0 + dim(Im f) = [f(\vec{b_1}) \dots f(\vec{b_m})]$

SIA $dim\, Ker f = m - r$, SCELGO UNA BASE DEL NUCLEO $(\vec{u_1} \dots \vec{u}_{m-r})$ E LA COMPLETO CON LA BASE DI U.

$$\beta = (\vec{u_1} \dots \vec{u}_{m-r}, \vec{u}_{m-r+1} \dots \vec{u}_m)$$

LA DIMOSTRAZIONE SI CONCLUDE MOSTRANDO CHE L'IMMAGINE È GENERATA DAI VETTORI AGGIUNTI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 92

APPLICANDO LA f AD ~~UN AUTOV~~ QUEL VETTORE OTTENIAMO MULTIPLI DEL VETTORE, ESSÌ APPARTENGONO TUTTI ALLA STESSA DIREZIONE DETTA AUTODIREZIONE:

$$\vec{w} \in [\vec{v}] \Rightarrow \vec{w} = \mu\vec{v} \mid f(\vec{w}) = f(\mu\vec{v}) = \mu f(\vec{v}) = \mu\lambda\vec{v} \in [\vec{v}]$$

IL VETTORE $\vec{v}$ VIENE DETTO AUTOVETTORE

SE TROVO UN AUTOVETTORE TUTTI I SUOI MULTIPLI SONO AUTOVETTORI

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5 AUTOVALORE $\qquad 5 \in \operatorname{spec} f$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ AUTOVETTORE

RICORDIAMO CHE

$id_V : V \to V$ È LINEARE, $End_{\mathbb{K}} V$ È UNO SPAZIO VETTORIALE
$\vec{v} \mapsto \vec{v}$

$$\lambda \in \operatorname{Spec} f \Leftrightarrow \exists \vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\} : f(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \Leftrightarrow f(\vec{v}) - \lambda id_V \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (f - \lambda id_V)(\vec{v}) = 0 \Leftrightarrow Ker(f - \lambda id_V) \neq \{\vec{0}\}$$

IL NUCLEO DI f DEVE CONTENERE ALMENO UN VETTORE NON NULLO, POSSO CONSIDERARE LA FUNZIONE COME UNA MATRICE:

$A \in \mathbb{K}^{n \times n}$

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \Leftrightarrow Ker[A - \lambda\mathbb{1}] \neq \{\vec{0}\}$$

$\Leftrightarrow$ IL SISTEMA $(A - \lambda\mathbb{1})\vec{x} = \vec{0}$ AMMETTE SOLUZIONI NON BANALI

$\Leftrightarrow$ $A - \lambda\mathbb{1}$ NON È INVERTIBILE

$$\Leftrightarrow \boxed{\det(A - \lambda\mathbb{1}) = 0}$$

GLI AUTOVALORI SONO QUELLI CHE SOTTRATTI ALLA DIAGONALE PRINCIPALE DI UNA MATRICE LA RENDONO NON INVERTIBILE

GLI AUTOVALORI λ SONO DI NUMERO FINITO:

$$\lambda \in \operatorname{Spec}(A) \text{ FINITO} \Leftrightarrow Ker(A - \lambda\mathbb{1}) \neq \{\vec{0}\}$$

$$\Leftrightarrow |A - \lambda\mathbb{1}| = 0 \qquad p(\lambda) = |A - \lambda\mathbb{1}|$$

RICORDIAMO CHE IL SEGNO DEL TERMINE DEL POLINOMIO A GRADO MAGGIORE DEVE ESSERE POSITIVO

$p(\lambda)$ SI DICE POLINOMIO CARATTERISTICO DI GRADO n

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 92

MATRICI ASSOCIATE

SIA V UN $\mathbb{K}$-SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE m e $\beta := (\vec{b_1} \dots \vec{b_m})$ UNA SUA BASE, SE $\vec{u} = u_1\vec{b_1} + u_2\vec{b_2} + \dots u_m\vec{b_m}$, SI SCRIVE CON $(\vec{u})_\beta$ LA COLONNA DELLE COMPONENTI DI $\vec{u}$ RISPETTO ALLA BASE β:

$$(u)_\beta = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_m \end{pmatrix} \qquad \text{IN PARTICOLARE: } (\vec{b_j})_\beta = \vec{e_j}$$

DATA LA FUNZIONE f:

$$\begin{cases} f: V \to \mathbb{K}^m \\ \vec{v} \longmapsto (\vec{v})_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \vec{v} = \lambda_1\vec{b_1} + \dots \lambda_m\vec{b_m}$$

CHE ASSOCIA AD OGNI VALORE $\vec{v} \in V$ LA COLONNA DELLE PROPRIE COMPONENTI RISPETTO ALLA BASE β È UN ISOMORFISMO

INFATTI:

$\vec{v} \in V \quad f(\vec{v}) \in V \qquad f \in End_{\mathbb{K}}(V)$

$$f(\vec{v})_\beta = (f(\lambda_1\vec{b_1}, \dots \lambda_m\vec{b_m}))_\beta = (\lambda_1 f(\vec{b_1}) + \dots \lambda_m f(\vec{b_m}))_\beta =$$
$$= \lambda_1 f(\vec{b_1})_\beta + \dots + \lambda_m f(\vec{b_m})_\beta =$$
$$= (f(\vec{b_1})_\beta, \dots, f(\vec{b_m})_\beta) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = M_f^\beta \cdot (\vec{v})_\beta$$

CON M_f^β LA MATRICE DI f NELLA BASE β. POSSIAMO PARLARE ALLO STESSO MODO DI MATRICI O ENDOMORFISMI.

DEF
SIANO $\beta = (\vec{b_1} \dots \vec{b_m})$ e $C = (\vec{c_1} \dots \vec{c_m})$ DUE BASI DI V e $f \in End_{\mathbb{K}} V$ POSSIAMO DIRE CHE ESISTE UNA RELAZIONE TRA M_f^β e M_f^C:

$$(\vec{v})_C = (\lambda_1\vec{b_1} + \dots \lambda_m\vec{b_m}) = \lambda_1(\vec{b_1})_C + \dots + \lambda_m(\vec{b_m})_C =$$
$$= ((\vec{b_1})_C, \dots (\vec{b_m})_C) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = P^{C,\beta}(\vec{v})_\beta$$

$P^{C,\beta}$ È LA MATRICE AVENTE COME COLONNE LE COMPONENTI DELLA BASE β RISPETTO ALLA BASE C

PROPRIETÀ

- $P^{\beta,\beta} = ((\vec{b_1})_\beta, \dots, (\vec{b_m})_\beta) = (\vec{e_1}, \dots \vec{e_m}) = \mathbb{1}$ MATRICE IDENTITÀ id_V
- $\vec{v}_C = P^{C,\beta}\,\vec{v}_\beta \Rightarrow P^{C\beta} \cdot P^{\beta C} \cdot \vec{v}_C = \vec{v}_C \Rightarrow P^{C\beta} = (P^{\beta C})^{-1}$

$$P^{C\beta} \cdot P^{\beta C} = \mathbb{1}$$

- $P^{C\beta} \cdot P^{\beta\alpha} = P^{C\alpha}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 92

SUPPONIAMO CHE V POSSEGGA UNA BASE $\mathcal{B}(\vec{b_1} \dots \vec{b_m})$ FORMATA DA AUTOVETTORI DI f OSSIA:

$$f(\vec{b_i}) = \lambda_i \vec{b_i} \qquad \lambda_1 \in Spec(V)$$

TROVARE LA MATRICE $M_f^{\mathcal{B}}$:

$$M_f^{\mathcal{B}} = (f(\vec{b_1})_{\mathcal{B}}, \dots f(\vec{b_m})_{\mathcal{B}}) = [\lambda_1 (\vec{b_1})_{\mathcal{B}}, \dots \lambda_m (\vec{b_m})_{\mathcal{B}}] =$$

$$= [\lambda \vec{e_1}, \dots \lambda_m \vec{e_m}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & O \\ 0 & & & \\ & O & 0 & \lambda_m^0 \end{bmatrix}$$

- IL DETERMINANTE DI UNA MATRICE DIAGONALE È IL PRODOTTO DEGLI ELEMENTI SULLA DIAGONALE

PROVIAMO A CALCOLARCI GLI AUTOVALORI DI $M_f^{\mathcal{B}}$

$$|M_f^{\mathcal{B}} - \lambda \mathbb{1}| = 0 = |P^{\mathcal{B}C} M_f^C P^{C\mathcal{B}} - \lambda \mathbb{1}| =$$

RICORDIAMO CHE $P^{\mathcal{B}C}$ e $P^{C\mathcal{B}}$ SONO DUE MATRICI INVERSE, FORMANO COME PRODOTTO L'IDENTITÀ

$$= |P^{\mathcal{B}C} M_f^C P^{C\mathcal{B}} - \lambda P^{\mathcal{B}C} P^{C\mathcal{B}}| =$$

$$= |P^{\mathcal{B}C} (M_f^C - \lambda \mathbb{1}) P^{C\mathcal{B}}| = \cancel{|P^{\mathcal{B}C}|}\,|M_f^C - \lambda \mathbb{1}|\,\cancel{|P^{C\mathcal{B}}|}$$

GLI AUTOVETTORI DI DUE ~~BASI~~ MATRICI SIMILI SONO COINCIDENTI,

SE DUE MATRICI SONO SIMILI HANNO LO STESSO POLINOMIO CARATTERISTICO, NON È VERO IL CONTRARIO

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T^2 = T^2$ MA A, B NON SONO SIMILI

DEF DIAGONALIZZABILE

SIA $A \in \mathbb{K}^{m \times m}$, A SI DICE DIAGONALIZZABILE $\Leftrightarrow$ È SIMILE A UNA MATRICE DIAGONALE OSSIA A UNA MATRICE DELLA FORMA:

$$(\lambda_1 \vec{e_1}, \dots \lambda_m \vec{e_m}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_m \end{pmatrix} = B$$

$$B = P^{-1} A P \Leftrightarrow \exists P \in Gl_m(\mathbb{K}) \mid P^{-1} A P = B$$

$Gl_m(\mathbb{K})$ È L'INSIEME DELLE MATRICI INVERTIBILI

$\lambda_1 \dots \lambda_m$ SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 92

$$A(P\vec{e_i}) = \lambda_i P\vec{e_i}$$
$$A\vec{b_i} = \lambda_i \vec{b_i}$$

SICCOME P É INVERTIBILE PER DEFINIZIONE POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$$(P\vec{e_1}, \dots P\vec{e_m}) \text{ É BASE DI } \mathbb{K}^m$$

SUPPONIAMO CHE $(\vec{b_1}, \dots \vec{b_m})$ SIA BASE DI AUTOVETTORI

$$A\vec{b_i} = \lambda_i \vec{b_i}$$

$P = (\vec{b_1} \dots \vec{b_m})$ DIAGONALIZZA A

INFATTI:

$$P^{-1}AP = P^{-1}A(\vec{b_1} \dots \vec{b_m}) = P^{-1}(A\vec{b_1} \dots A\vec{b_m}) =$$
$$= P^{-1}(\lambda_1\vec{b_1} \dots \lambda_m\vec{b_m}) = [\lambda_1 P^{-1}(\vec{b_1}) \dots \lambda_m P^{-1}(\vec{b_m})]$$
$$B = (\lambda_1\vec{e_1} \dots \lambda_m\vec{e_m}) \quad \blacksquare$$

DEF MOLTEPLICITÁ

SIA $\lambda \in \operatorname{spec}(A)$, $ma(\lambda)$ É DETTA MOLTEPLICITÁ ALGEBRICA. ESSA É LA MOLTEPLICITÁ CON CUI λ ANNULLA IL POLINOMIO CARATTERISTICO OSSIA:

$$ma(\lambda) = k \iff (T-\lambda)^k \text{ DIVIDE } P_A(T)$$

$e\ (T-\lambda)^{k+1}$ NON LO DIVIDE

$mg(\lambda)$ É DETTA MOLTEPLICITÁ GEOMETRICA É UGUALE PER DEFINIZIONE ALLA DIMENSIONE DELL'AUTOSPAZIO

$$mg(\lambda) = \dim(\operatorname{Ker}(A-\lambda\mathbb{1})) = m - rk(A-\lambda\mathbb{1})$$

ma e mg SONO DEI VALORI SCALARI

m É LA DIMENSIONE DELLA MATRICE DI PARTENZA

PROPRIETÁ

- $\forall \lambda \in \operatorname{spec}(A) \qquad 1 \le mg(\lambda) \le ma(\lambda)$
- $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ É DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{K} \iff \forall \lambda \in \operatorname{spec}(A)$
$$ma(\lambda) = mg(\lambda)$$

ES: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = t^2+1 \qquad \operatorname{Spec}(A) \cap \mathbb{R} = \{\emptyset\}$

LA MATRICE A NON É DIAGONALIZZABILE SUI REALI MA SOLO SUI COMPLESSI, INFATT

$\lambda = \pm i \qquad ma(\pm i) = 1 \Rightarrow 1 \le mg(\lambda) \le 1$

$$mg(\pm i) = 1$$

- UNA MATRICE QUADRATA CON m AUTOVALORI DISTINTI É DIAGONALIZZABILE
- UNA MATRICE SIMMETRICA É DIAGONALIZZABILE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 92

DEF MATRICE ORTOGONALE

SIA $O(n) = \{ P \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid P^T P = P P^T = \mathbb{1} \}$. O SI DICE MATRICE ORTOGONALE SE LA SUA INVERSA COINCIDE CON LA TRASPOSTA.

OSSIA SE $[C_1(P) \dots C_n(P)]$ É BASE ORTOGONALE DI $\mathbb{R}^n$ E $[R_1(P) \dots R_n(P)]$ É BASE ORTOGONALE DELLE RIGHE.

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ É ORTOGONALE $\Leftrightarrow \langle A\vec{v}, A\vec{u} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

APPLICAZIONI

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

GLI AUTOVALORI SONO REALI SE

$$P_A(T) = T^2 - (a+c)T + ac - b^2 = 0$$

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 + 2ac - 4ac + 4b^2 = (a-c)^2 - 4b^2$$

OTTENGO λ_1, λ_2 REALI

SE $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow (a-c)^2 + 4b^2 = 0$ $\quad a = c$, $b = 0$

AVRÓ LA MATRICE DIAGONALIZZATA NELLA FORMA

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

PROPOSIZIONE DIAGONALIZZABILE

A É DIAGONALIZZABILE SU $\mathbb{K} \Leftrightarrow \mathbb{K}^n$ POSSIEDE UNA BASE FORMATA DA AUTOVETTORI DI A $\Leftrightarrow$ LA SOMMA DELLE MOLTEPLICITÁ ALGEBRICHE É UGUALE ALLA DIMENSIONE DELLA MATRICE

$$\Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}\, A \quad ma(\lambda) = mg(\lambda) \qquad \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(A)} ma(\lambda) = n$$

A SI DICE DIAGONALIZZABILE

$\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \mid P^{-1}AP$ SIA DIAGONALE

IN TAL CASO P SI COSTRUISCE UTILIZZANDO LA BASE $\mathcal{B}$ DI AUTOVETTORI

$$\mathcal{B} = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n) \subseteq \mathbb{K}^n \qquad P = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$$

NEL CASO DI $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ SI DICE CHE f É SEMPLICE SE V POSSIEDE BASE DI AUTOVETTORI OSSIA:

$$M_f^{\mathcal{B}} = (f(\vec{b}_1)_{\mathcal{B}}, \dots f(\vec{b}_n)_{\mathcal{B}}) = (\lambda_1 \vec{e}_1 \dots \lambda_n \vec{e}_n)$$

LA MATRICE ASSOCIATA É DIAGONALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 92

ESERCIZIO

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZZARE LA MATRICE A PER MEZZO DI P ORTONORMALE

a) Spec(A) $P_A(t) = 0$

$$P_A(t) = (3-t)[(3-t)^2-1] - 1[3-t-1] + 1[1-3+t] =$$
$$= (3-t)^3 + 3t - 7 =$$
$$= -t^3 + 9t^2 - 24t + 20 =$$
$$= t^3 - 9t^2 + 24t - 20 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & -9 & 24 & -20 \\ 2 & & 2 & -14 & 20 \\ \hline & 1 & -7 & 10 & 0 \end{array}$$

$$P_A(t) = (t-2)(t^2-7t+10) = (t-2)^2(t-5)$$

$\lambda_1 = 2$ $ma(2) = 2$ $mg(2) = 2$

$\lambda_2 = 5$ $ma(5) = 1$ $mg(5) = 1$

MATRICE DIAGONALIZZABILE

b) ~~L'AUTOVETTO~~
PER TROVARE LA MATRICE ORTOGONALE P DEVO RISOLVERE DEI SISTEMI PER OGNI AUTOVETTORE

- $Ker(A - 5\mathbb{1})$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

POSSO DIRE CHE IL RANGO DELLA MATRICE È DUE PERCHÉ

$$mg = n - rk$$
$$1 = 3 - rk \quad rk = 2$$

SISTEMA LINEARE A DUE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y = -z \\ x + y = 2z \end{cases}$$
$$\ominus \quad 3y = 3z \qquad \begin{cases} y = z \\ x = z \end{cases}$$

$$Ker(A - 5\mathbb{1}) = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \middle| z \in \mathbb{R} \right\} = \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b_3}\Bigg]$$

DIREZIONE ~~DI~~ UN VETTORE ~~DELLA BASE~~ DI P
AUTOSPAZIO RELATIVO ALL'AUTOVALORE 5

- $Ker(A - 2\mathbb{1})$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x + y + z = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x + y = -z \\ x + z = -y \end{matrix}$$

HO DIVERSE SOLUZIONI NE PRENDO SOLO DUE

$ma = 2$

$$Ker(A - 2\mathbb{1}) = \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{b_1}\Bigg]$$

c) RICORDIAMO CHE LA MATRICE DIAGONALE È FORMATA COLS

$$D(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

TUTTE LE FORME DIAGONALI SI OTTENGONO SCAMBIANDO L'ORDINE DEGLI AUTOVETTORI SOLO STESSO AUTOVALORE SE SIMILI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 92

DEF GRUPPI

- $O(m) = \{ A \in Gl_m(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = \mathbb{1} \}$

È UN SOTTOGRUPPO DEL GRUPPO LINEARE DELLE MATRICI INVERTIBILI $m \times m$, VIENE DETTO GRUPPO ORTOGONALE

$$\mathbb{1}_m \in O(m) \qquad \mathbb{1}_m \cdot \mathbb{1}_m^T = \mathbb{1}_m$$

SE $A \in O(m) \Rightarrow A^{-1} \in O(m)$

- $SO(m) = \{ A \in O(m) \mid \det(A) = 1 \}$

È UN SOTTOGRUPPO DI $O(m)$ E VIENE DETTO GRUPPO ORTOGONALE SPECIALE

$$AA^T = \mathbb{1} \Rightarrow |AA^T| = 1 \Rightarrow |A||A^T| = |A|^2 = 1$$

ESEMPIO

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I \in O(2) \qquad |I| = 1 \qquad I \in SO(2)$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J \in O(2) \qquad |J| = -1 \qquad J \notin SO(2)$$

IL $\det(A) = -1$ INDICA UNA RIFLESSIONE COME ALLO SPECCHIO DELLA MATRICE INVERSA VEDI APPUNTI

TEOREMA di CAYLEY e HAMILTON

DATA $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ AVREMO

$$\boxed{P_A(t) = t^2 - tr(A)\,t + \det(A)}$$

IN CUI tr È LA SOMMA DEI VALORI SULLA DIAGONALE, AVREMO QUINDI

$$P_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$$

IL TEOREMA AFFERMA CHE OGNI MATRICE $A \in K^{m \times m}$ È RADICE DEL PROPRIO POLINOMIO CARATTERISTICO OSSIA:

$$P_A(A) = 0$$

AVREMO QUINDI

$$P_A(A) = A^2 - (a+d)A + (ad-bc)\mathbb{1}$$

ESEMPIO

- $P_I(I) = I^2 + 1\,\mathbb{1} = \ldots$
- $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = t^2 - 4t + 3$

$$P_A(A) = A^2 - 4A + 3\mathbb{1}$$
$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 92

- TROVARE LE MATRICI SIMILI A

$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = (3-t)^2$

PER TROVARE MATRICI SIMILI AD A DEVO

$$\mathcal{T} = \{ P^{-1}AP \mid P \in GL_n(\mathbb{R}) \} = P^{-1} 3 \mathbb{1} P = 3 P^{-1} P = 3 \mathbb{1}$$

UNICA MATRICE SIMILE AD UNA CON AUTOVALORI UGUALI È SE STESSA

- PROVARE CHE

$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -6 & -6 & -6 \end{pmatrix} \qquad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

UNA MATRICE A SI DICE NILPOTENTE SE ~~QUALUNQUE~~ QUALCHE SUA POTENZA VALE ZERO

LA MATRICE NON È DI RANGO MASSIMO; ZERO È AUTOVALORE

$0 \in \mathrm{Spec}(A)$

$mg(0) = 3 - rk(A) = 2 \qquad 1 \leq mg \leq ma \Rightarrow ma \geq 2$

LA SOMMA DEGLI AUTOVALORI DEVE ESSERE UGUALE ALLA SOMMA DELLA DIAGONALE

$P_A(t) = t^2 (t - \lambda)$

$3 + 3 - 6 = 0 + 0 + \lambda \Rightarrow \lambda = 0$

$P_A(t) = t^3$

PER IL TEOREMA DI CAYLEY e HAMILTON POSSO AFFERMARE CHE

$P_A(A) = A^3 = 0$ ∎

RICORDIAMO CHE

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ TALE CHE $A = A^T$ PUÒ ESSERE DIAGONALIZZATA PER MEZZO DI:

$P \in O(n) \qquad PP^T = \mathbb{1}$

SE $\lambda \neq \mu$, $\lambda, \mu \in \mathrm{Spec}(A)$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda \mathbb{1}) \perp \mathrm{Ker}(A - \mu \mathbb{1})$

POTREBBE CAPITARE DI AVER A CHE FARE CON BASE DI AUTOVETTORI RELATIVI A UN AUTOVALORE NON ~~MA~~ MUTUAMENTE ORTOGONALI

$$P = (\underbrace{\vec{u}_1, \dots \vec{u}_k}_{\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathbb{1})}, \underbrace{\vec{v}_1 \dots \vec{v}_n}_{\mathrm{Ker}(A-\mu\mathbb{1})})$$

IL PROBLEMA DI TROVARE UNA MATRICE ORTOGONALE IMPONE LO STUDIO DI UN ALGORITMO DETTO ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM SCHMIDT CHE PERMETTE DI TROVARE UNA BASE ORTONORMALE:

$W \in G(V)$ DOVE V EUCLIDEO CON PRODOTTO SCALARE $W = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_k]$

TROVO BASE DI W TALE CHE

$(b_i, b_j) = \delta_{i,j} \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases} \quad e \quad [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n] = [\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n]$

PASSI ALGORITMO SUGLI APPUNTI

73

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 92

e $D = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2$

DALL'EQUAZIONE DELLA SFERA POSSIAMO RICAVARCI LE COORDINATE DEL CENTRO E DEL RAGGIO:

$$x_0 = -\frac{A}{2}$$
$$y_0 = -\frac{B}{2}$$
$$z_0 = -\frac{C}{2}$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - D$$

ESEMPI

- SCRIVERE L'EQ DELLA SFERA DI CENTRO $C(3,-2,1)$ $R=2$

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 4$$

- DETERMINARE CENTRO E RAGGIO DELLA SFERA:

$$x^2+y^2+z^2-3x+7y+8z-10=0$$

$$x_0 = \frac{3}{2} \quad y_0 = -\frac{7}{2} \quad z_0 = \frac{-8}{2} = -4 \qquad C = \left(\tfrac{3}{2}, -\tfrac{7}{2}, -4\right)$$

$$R^2 = \frac{9}{4} + \frac{49}{4} + 4 - (-10) =$$

DEF CIRCONFERENZA

UNA CIRCONFERENZA DI CENTRO P_0 E RAGGIO R DI $\mathcal{E}^3$ È IL LUOGO DEI PUNTI DI UN PIANO π CHE DISTANO R DA UN PUNTO $P_0 \in \pi$

LA DEFINIZIONE IMPLICA CHE UNA CIRCONFERENZA IN $\mathcal{E}^3$ È INTERSEZIONE DI UN PIANO E UNA SFERA

ES

DATI I PUNTI $P(1,1,0)$ $Q(0,1,1)$ $R(1,0,1)$ TROVARE L'EQ DELLA CIRCONFERENZA PASSANTE PER P,Q,R

- DETERMINO L'EQ. DEL PIANO PASSANTE PER I TRE PUNTI:
  - DUE VETTORI
  - PRODOTTO VETTORIALE
  - IMPONGO IL PASSAGGIO PER UN PUNTO $P=(a,b,c)$
    $(ax+by+cz=D$
  - OTTENGO D, COEFF. DEL PIANO
- $x+y+z=2$, I TRE PUNTI APPARTENGONO AL PRECEDENTE PIANO
- ~~$x^2+y^2+z^2-2=0$ SFERA DI RAGGIO $\sqrt{2}$~~

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 92

DET. L'EQ. DELLA RETTA S PERPENDICOLARE AL PIANO PASSANTE PER P_0

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - t \\ z = 4 + t \end{cases}$$

P_0 COEFF. DEL PIANO

IL PUNTO P SI TROVA NELL'INTERSEZIONE TRA IL PIANO E LA RETTA

$$\pi \wedge S = (2+t) - (3-t) + (4+t) - 2 = 0 \qquad 3t = -1 \qquad t = -1/3$$

$$P = \left(\frac{5}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

CON IL Th. DI PITAGORA POSSIAMO TROVARCI LA MISURA DEL RAGGIO MINORE:

$$r = \sqrt{R^2 - \overline{PP_0}^2} = \sqrt{30 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{89}{3}}$$

INTERSEZIONE

SIANO S_1 E S_2 DUE SFERE DI $\mathcal{E}^3$ DI EQUAZIONI:

$$S_1: \ x^2 + y^2 + z^2 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$
$$S_2: \ x^2 + y^2 + z^2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 = 0$$

L'INTERSEZIONE È ZERO, UN PUNTO O UNA CURVA, DETTI P_1, P_2 I CENTRI DI S_1, S_2 E R_1, R_2 I RISPETTIVI RAGGI DIREMO CHE SONO SFERE:

- ESTERNE $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \emptyset \quad d(P_1, P_2) > R_1 + R_2$
- TANGENTI $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = P \quad d(P_1, P_2) = R_1 + R_2$
- INCIDENTI $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2 = \text{CURVA} \quad d(P_1, P_2) < R_1 + R_2$

LE EQ. CARTESIANE DELLE SFERE:

$$S_1(x, y, z) = 0 \qquad S_2(x, y, z) = 0$$

UN QUALSIASI PUNTO APPARTIENE ALLA SFERA SE VALGONO:

$$P_0(x_0, y_0, z_0) \in S_i \Leftrightarrow S_i(x_0, y_0, z_0) = 0$$

CONSIDERO $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ NON ENTRAMBI NULLI

$$S_{(\lambda:\mu)}(x, y, z) = \lambda S_1(x, y, z) + \mu S_2(x, y, z) = 0$$

$$S_1 \cap S_2 \subseteq S_{(\lambda:\mu)}$$

INFATTI SE $(x_0, y_0, z_0) \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow$

$$S_{(\lambda:\mu)}(x_0, y_0, z_0) = \lambda \underbrace{S_1(x_0, y_0, z_0)}_{=0} + \mu \underbrace{S_2(x_0, y_0, z_0)}_{=0} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 92

$$= \frac{|\langle \vec{P_0P}, \vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{P_0P}) \rangle|}{|\vec{v} \times \vec{P_0P}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\langle \vec{P_0P} \times \vec{v}, \vec{v} \times \vec{P_0P} \rangle|}{|\vec{v} \times \vec{P_0P}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|\vec{P_0P} \times \vec{v}|^2}{|\vec{v} \times \vec{P_0P}| \cdot |\vec{v}|}$$

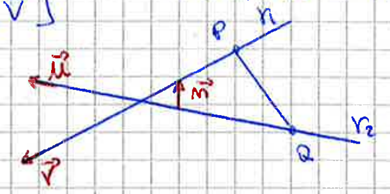
$$= \boxed{d(P_0, R) = \frac{|\vec{P_0P} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}}$$

DEF DISTANZA RETTA-RETTA

$r_1 : P_1 + [\vec{u}]$

$r_2 : P_2 + [\vec{v}]$

$$d(r_1, r_2) = \min \{ d(P,Q) \mid P \in r_1, Q \in r_2 \}$$



$\vec{u} \times \vec{v}$ VETTORE ORTOGONALE AD ENTRAMBE LE RETTE

$$\vec{m} = \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \qquad d(r_1, r_2) = |\langle \vec{PQ}, \vec{m} \rangle|$$

$$d(r_1, r_2) = \left| \left\langle \vec{PQ}, \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right\rangle \right| = \left| \frac{\langle \vec{PQ}, \vec{u} \times \vec{v} \rangle}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \right| = \frac{|\det(\vec{PQ}, \vec{u}, \vec{v})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

ESERCIZIO

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = 1 + 5t \end{cases} \qquad P_0 \, (3, 1, 4) \qquad d(P_0, r) = ?$$

$$\vec{P_0P} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 3-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{33}$$

STESSA COSA CON $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\vec{P_0P} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\vec{P_0P} \times \vec{v}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$d(P_0, r) = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{33}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 92

CONICHE AFFINI

SI CONSIDERI IL GENERICO CONO QUADRATICO

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0$$

CON VERTICE L'ORIGINE

OGNI FORMA QUADRATICA IN 3 INDETERMINATE (x,y,z) SI SCRIVE COSÌ:

$$(x,y,z)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

ESEMPIO

$$x^2 + 3xy - 2xz + 5yz - 3z^2 = 0$$

$$(x,y,z)\begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1 \\ 3/2 & 0 & 5/2 \\ -1 & 5/2 & -3 \end{pmatrix} \end{array}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

DEF CONICA AFFINE

UNA CONICA AFFINE È L'INTERSEZIONE DI UN PIANO CON UN CONO QUADRICO

ES
$$\begin{cases} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

OGNI CONICA SI SCRIVE NELLA FORMA es: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}^T \cdot B \cdot \vec{x} = 0$$

DOVE B È LA MATRICE

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B = B^T \qquad B = \begin{pmatrix} A & \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_{13} & a_{23} \end{matrix} & a_{33} \end{pmatrix}$$

IN CUI

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

ES

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ INDIVIDUO LA CONICA $(x,y,1)B\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$(2x+y+3z,\ x+y,\ 3x+z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (2x+y+3)x + (x+y)y + (3x+1) = 0$$

$$2x^2 + y^2 + 2xy + 6x + 1 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 92

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \underbrace{(\vec{b}_1, \vec{b}_2)}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

È UNA BASE ORTONORMALE, POSSIAMO SCRIVERLA COME:

$$P_- = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$ MATRICE di ROTAZIONE

IL SISTEMA DI EQ CHE OTTENIAMO SARÀ:

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = y_0 + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \\ 1 = 1 \end{cases}$$

SIAMO NELLE 3 DIMENSIONI MA NON ABBIAMO ROTAZIONI NELL'ASSE Z

IN FORMA VETTORIALE AVREMO

$$(1)\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

LA MATRICE È DEFINITA R

POSSIAMO SCRIVERE ANCHE

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

DEF FORMA CANONICA

UNA CONICA A CENTRO SI DICE IN FORMA CANONICA SE SOLO SE È NELLA FORMA

$$\alpha x^2 + \beta y^2 - \gamma = 0 \qquad \alpha\beta \neq 0$$

SUPPONIAMO $\alpha > 0$ ALTRIMENTI CAMBIO SEGNO, LA CONICA È UN:

- ELLISSE $\alpha\beta > 0$
- IPERBOLE $\alpha\beta < 0$

INOLTRE SE $\alpha\beta > 0$ e $\gamma < 0$ SI DICE ELLISSE A PUNTI NON REALI

DALL'EQUAZIONE DELLA CONICA

$$(x, y, 1)\, B_q \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ VOGLIAMO APPLICARE UNA ROTOTRASLAZIONE

TRASPONENDO LA MATRICE R OTTENIAMO, TRASPONGO TUTTO (1)

$$(x, y, 1) = (x', y', 1)\begin{pmatrix} \cos & +\sin & 0 \\ -\sin & \cos & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(x', y', 1)\, R^T B_q R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$ SO CHE $(R^T B_q R) = \det(B_q)$

$$\det(B_q) = \lambda_1 \lambda_2 (-\gamma)$$

IN CUI λ_1, λ_2 SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE A_q

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 92

RICORDIAMO CHE

UNA CONICA A CENTRO SI DICE IN FORMA CANONICA SE É NELLA FORMA

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - \gamma = 0 \qquad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

INOLTRE POSSIAMO DIRE CHE SE

$\lambda_1 \lambda_2 < 0$ IPERBOLE

$\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ELLISSE

DATA DA

$$q(x,y) = (x, y, 1)\, B_q \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B_q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

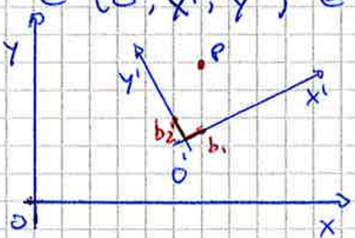
B_q É SIMMETRICA $B_q = B_q^T$

INOLTRE λ_1, λ_2 SONO GLI AUTOVALORI DELLA MATRICE 2x2 A

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

RICORDIAMO ANCORA CHE $\quad -\gamma = \dfrac{|B_q|}{\lambda_1 \lambda_2}$

SE (O, x, y) É UN RIFERIMENTO CARTESIANO STANDARD E (O', x', y') É UN SUO ROTOTRASLATO



$P(x,y)$ NEL SISTEMA S

$P(x',y')$ NEL SISTEMA S'

$$(\vec{OP})_E = (\vec{OO'})_E + (\vec{O'P})_E$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (\vec{b_1}, \vec{b_2}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$(\vec{b_1}, \vec{b_2})$ → MATRICE CHE MI PORTA I VALORI IN BASE (b_1, b_2) IN VALORI DELLA BASE CANONICA DEL PIANO

$$R = (\vec{b_1}, \vec{b_2}) \in SO(2)$$

MATRICE ORTOGONALE SPECIALE, VETTORI DI MODULO 1

FACENDO IL SISTEMA

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (\vec{b_1}, \vec{b_2}) \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \\ 1 = 1 \end{cases}$$

POSSO SCRIVERE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 92

ESERCIZIO

$$q(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 - 2x - 3y - 1$$

a) TIPO DI CONICA
b) TROVARE UNA FORMA CANONICA
c) COORDINATE DEL CENTRO
d) EQ. NELLA NUOVA FORMA DI RIFERIMENTO
e) EQ. ASSI

$$B_q = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 1 & -3/2 \\ -1 & -3/2 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B_q| = -\frac{13}{2} \neq 0$$

a) $$A_q = \begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A_q| = -\frac{5}{2}$$ IPERBOLE

$<$ IPERBOLE
$=$ PARABOLA
$>$ ELLISSE

b) CALCOLIAMO LA FORMA CANONICA:

- TROVIAMO GLI AUTOVALORI DI A_q

$$t^2 - 2t - \frac{5}{4} = 0 \qquad 4t^2 - 8t - 5 = 0 \qquad P(A_q) = T^2 - Tr(A) + det(A)$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64+80}}{8} = \frac{2 \pm 3}{8} \begin{cases} 5/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

AUTOVALORI DISTINTI DELLA MATRICE A

- DETERMINO γ

$$\lambda_1 \lambda_2 (-\gamma) = det(B) \qquad -\gamma = \frac{+\frac{13}{2}}{+\frac{5}{4}} = \frac{26}{5}$$

L'EQ. CANONICA DELLA CONICA È:

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{26}{5} = 0$$

c) COORDINATE DEL CENTRO

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y - 1 = 0 \\ -\frac{3}{2}x + y - \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ -3x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/5 \\ -12/5 \end{pmatrix} \qquad C = \left(-\frac{13}{5}, -\frac{12}{5}\right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 92

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 92

DEF Q. A CENTRO

LA QUADRICA SI DICE **A CENTRO** SE $|A_q| \neq 0$

LE COORDINATE DEL CENTRO SONO L'UNICA SOLUZIONE DEL SISTEMA

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} = 0 \\ a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0 \end{cases}$$

SIA $q(x,y,z) = 0$ UNA QUADRICA A CENTRO

- ELLISSOIDE SE I 3 AUTOVALORI DI A SONO CONCORDI IN SEGNO
- IPERBOLOIDE SE GLI AUTOVALORI SONO DISCORDI

UNA QUADRICA CON $|A_q| = 0$ SI DICE PARABOLOIDE

DEF ELLISSOIDE

UN ELLISSOIDE SI DICE IN FORMA CANONICA SE È NELLA FORMA

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 - \gamma = 0 \qquad \lambda_i > 0$$

INOLTRE SE

$\gamma < 0$ NON HA PUNTI REALI

$\gamma > 0$ HA PUNTI REALI

SAPPIAMO ANCHE CHE $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 (-\gamma) = \det(B_q)$

SE IL CENTRO È $C(x_0, y_0, z_0)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

IN CUI R È LA MATRICE ORTOGONALE DI ROTAZIONE

$$R^T A R = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

DATO UN POLINOMIO POSSIAMO CAPIRE SE GLI AUTOVALORI, LE RADICI DEL POLINOMIO CARATTERISTICO SONO CONCORDI OPPURE DISCORDI

$$T^3 - 8T^2 - 7T - 7 = 0$$

INIZIANDO DAL TERMINE A GRADO MAGGIORE VEDIAMO SE C'È UNA PERMANENZA O VARIAZIONE DI SEGNO NEL TERMINE SUCCESSIVO

$V \to P \to P$

DOVE ABBIAMO LA VARIAZIONE AVREMO AUTOVALORI ~~NEGATIVI~~ POSITIVI CON LA PERMANENZA VALORI NEGATIVI.

1 POSITIVO 2 NEGATIVI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 92