



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2374A**

**ANNO: 2018**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Zarrelli Mattia**

**MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale - Prof.  
Chiandussi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

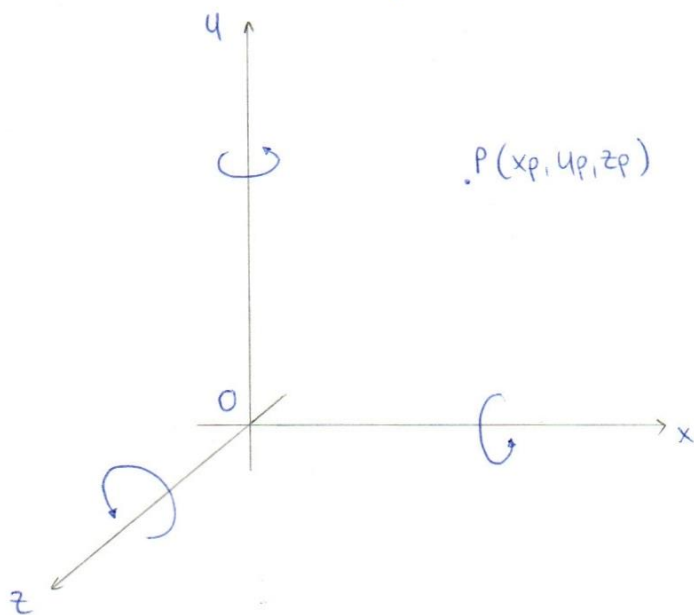
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE

## CORPO RIGIDO

Sistema di riferimento spaziale



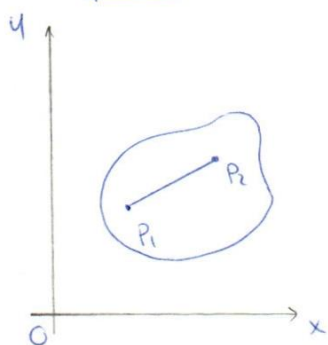
### Versi positivi di Rotazione

- Intorno a x → porta y su z
- Intorno a y → porta z su x
- Intorno a z → porta x su y

Il singolo punto P (xp, yp, zp) ha 3 gradi di libertà (3gde)

Un corpo rigido mantiene sempre inalterate le distanze tra i suoi punti interni.  
Per definire un corpo rigido nel piano ci bastano 2 punti, nello spazio ce ne servono 3.

nel piano...



$$\overline{P_1 P_2} = \text{costante} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

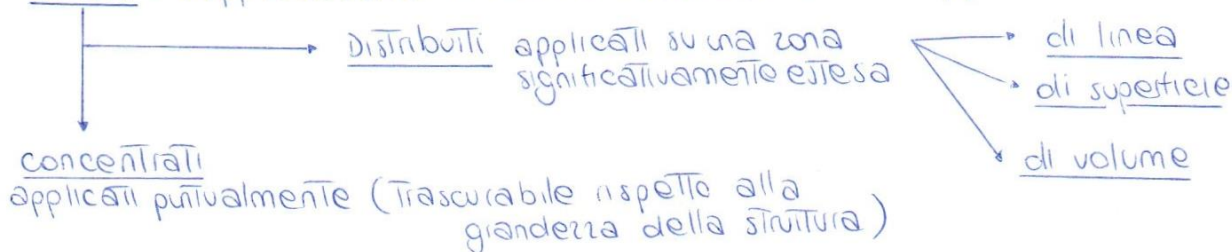
Un corpo rigido nel piano avrà 3 gde

...nello spazio

Ogni punto con 3 gradi di libertà → 9 gde  
 3 equazioni della distanza tra 3 punti (costante) → -3 gde  
 = 6 gde

## CARICHI e VINCOLI

Carichi = rappresentano le forze e i momenti esterni applicate sulla struttura.



vincoli = scopo di collegare gli elementi della struttura ...  
 ... tra di loro = interni  
 ... al telaio = esterni

Descrivere ruolo dei vincoli  
 ↳ punto di vista cinematico  
 ↳ punto di vista statico

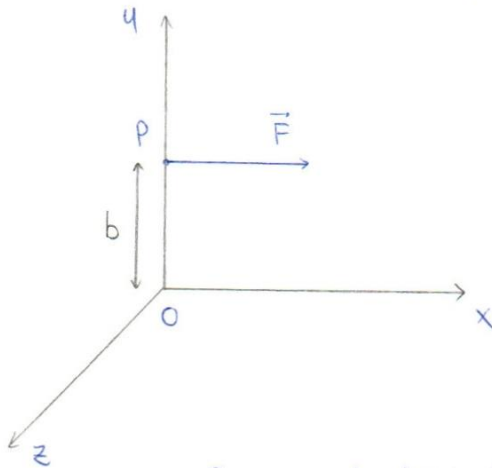
CARICHI

Carichi come FORZE o MOMENTI

(1) FORZE = sempre caratterizzate come un vettore   
 applicate in un punto   
 DISTRIBUITE   
 di tipo VOLUMICO

(2) MOMENTI = sempre dato da prodotto   
 Forza x Braccio (applicata a una certa distanza)   
 CONCENTRATI   
 DISTRIBUITI

Il momento va calcolato rispetto a un polo :



calcoliamo rispetto ad O

$$\vec{M}_O = (\vec{P}-O) \wedge \vec{F} \quad [P-O = b]$$

$$\vec{M}_O = b \vec{j} \wedge \vec{F}_i$$

generato da  $j \wedge i$

$$\boxed{\vec{M}_O} = b \cdot F \cdot (-) = \boxed{-bF}$$

Siamo in quiete quindi possiamo inserire equazioni di equilibrio di  $\vec{F}$  e  $\vec{M}$

Posso calcolare risultanti :  $\vec{R}_F = \sum \vec{F}_i$

$$\vec{R}_{M_O} = \sum [C_i + (\vec{P}-O) \wedge \vec{F}_i]$$

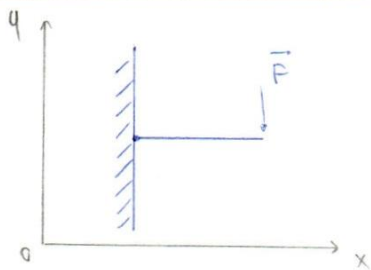
Momenti puri (liberi)

calcolati rispetto al polo

Dal punto di vista del modulo

$$\begin{cases} R_x = \sum F_{ix} \\ R_y = \sum F_{iy} \\ R_z = \sum F_{iz} \end{cases} \quad (\text{stessa cosa per i momenti})$$

Consideriamo esempi di problemi piani

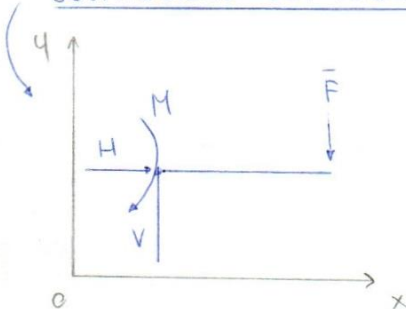


Imposto :   
 • 2 eq. di equilibrio per le forze (x, y)   
 • 1 eq. di equilibrio per momenti (z)

→ Incastro

Impedisce al punto (dal p. di vista cinematico) di spostarsi e ruotare

Sostituzione con reazioni vincolari



→  $H, V$  sono reazioni vincolari di forza   
 $M$  è reazione per momento

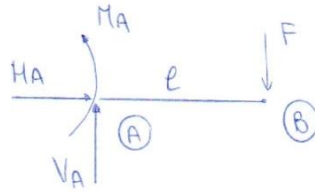
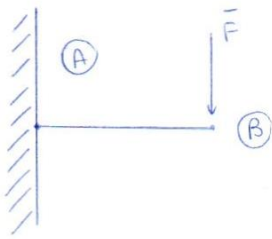
Trovare questi VALORI x equilibrio

(Isostatico : 3 eq. equilibrio e 3 incognite)



esempi di carichi e vincoli

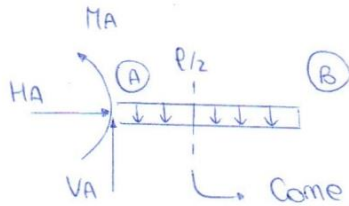
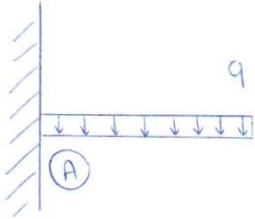
[1] Incastro



$$\begin{cases} \uparrow) V_A - F = 0 \\ \rightarrow) H_A = 0 \\ \curvearrowright) M_A - F \cdot l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A = F \\ H_A = 0 \\ M_A = F \cdot l \end{cases}$$

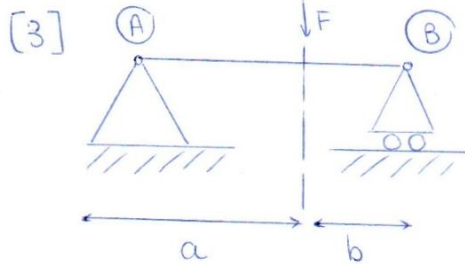
[2] Carico distribuito



↳ Come avere carico applicato in un braccio di  $l/2$ .

$$\begin{cases} \uparrow) V_A - q \cdot l = 0 \\ \rightarrow) H_A = 0 \\ \curvearrowright) M_A - q \cdot l \cdot \frac{l}{2} = 0 \end{cases}$$

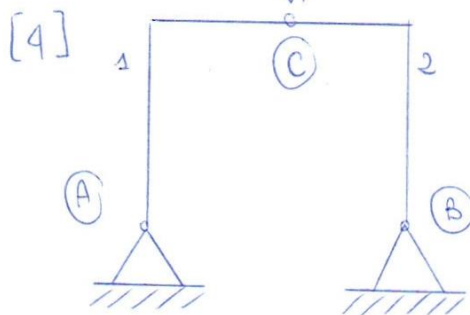
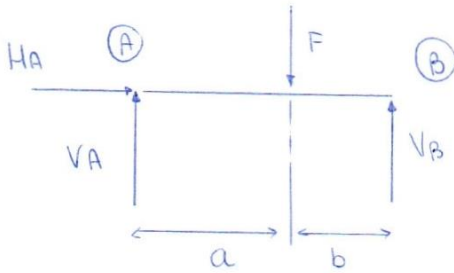
$$\begin{cases} V_A = ql \\ H_A = 0 \\ M_A = ql^2/2 \end{cases}$$



$l = a + b$

$$\begin{cases} \uparrow) V_A + V_B - F = 0 \\ \rightarrow) H_A = 0 \\ \curvearrowright) -F \cdot a + V_B \cdot l = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_A = F \left(1 - \frac{a}{l}\right) = F \frac{b}{l} \\ H_A = 0 \\ V_B = \frac{F \cdot a}{l} \end{cases}$$



Corpo 1 = da A a c  
Corpo 2 = da c a B

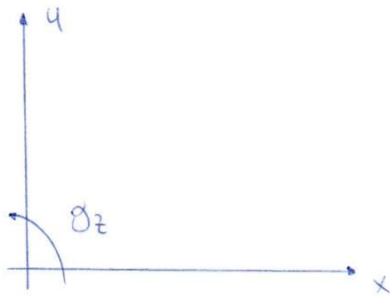
Hanno 6 gde

$$\begin{cases} A = -2gde \\ B = -2gde \\ C = -2gde \end{cases}$$

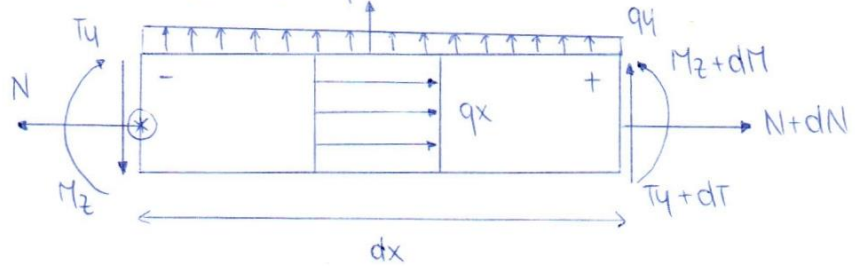
Isostatica

↳ 3 cerniere

Studiamo su piano xy



Dividiamo l'asse in 3 parti e consideriamo interazioni del pezzo centrale.



7

- Faccia sx vede asse x entrare = Faccia negativa → tutto negativo
- Faccia dx vede " " uscire = Faccia positiva → tutto positivo
- $q_x$  = carico distribuito assiale
- $q_y$  = carico distribuito di Taglio

Muovendosi verso destra il carico distribuito influisce →  $+dT$ ,  $+dM$ ,  $+dN$   
eq. di equilibrio

x)  $-N + (N + dN) + q_x dx = 0$

↳  $\frac{dN}{dx} = -q_x$  → Il carico assiale varia linearmente con la lunghezza dx  
 Se  $q_x$  non varia il carico varia linearmente con dx

y)  $-Ty + (Ty + dTy) + q_y dx = 0$

$\frac{dT}{dx} = -q_y$  → se  $q_y$  non varia il Taglio varia linearmente con dx

(\*)  $-Mz + (Mz + dM) + (Ty + dTy) dx + q_y \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = 0$

Rispetto faccia ⊖

$$\begin{cases} dM + Ty dx + dTy dx + q_y \frac{dx^2}{2} = 0 \\ dT = -q_y \cdot dx \end{cases}$$

$dM + Ty dx - q_y \frac{dx^2}{2} + \frac{1}{2} q_y dx^2 = 0$

$dM + Ty dx - \frac{1}{2} q_y dx^2 = 0$

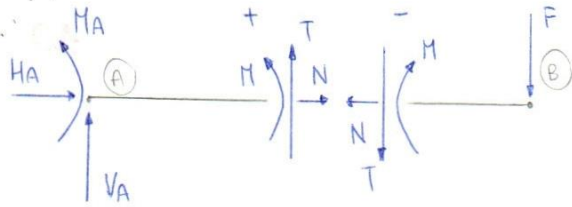
↳ Infinitesimo  $\approx 0$  rispetto a dx

$\frac{dM}{dx} = -Ty$

Se Taglio costante il Momento flettente è lineare. Se è nullo invece il Taglio, il momento è costante.

Legame tra caratteristiche di sollecitazione

$\frac{dT}{dx} = -q_y, \frac{dM}{dx} = -Ty \Rightarrow -q_y = \frac{d^2M}{dx^2}$



(Al centro vedo cosa scambiano)

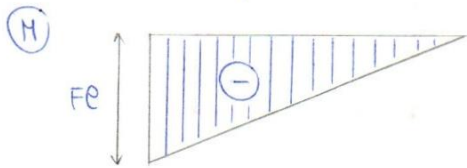
$$S_x = \oplus, D_x = \ominus$$

Scelgo spezzone con calcoli più semplici

$$\begin{aligned} (S_x) \uparrow) VA + T &= 0 \\ \rightarrow) HA + N &= 0 \\ A) MA + M + Tx &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} T = -VA = -F \\ N = -HA = 0 \\ M = -MA - Tx = -Fe + Fx = F(x-e) \end{cases}$$

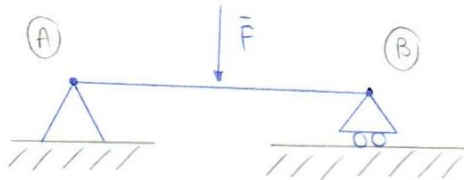
$$\begin{cases} T = -F \\ N = 0 \\ M = F(x-e) \end{cases}$$

• Andamento rispetto a e

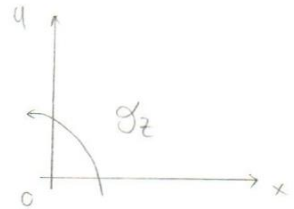


(Non ci sono altri carichi concentrati)

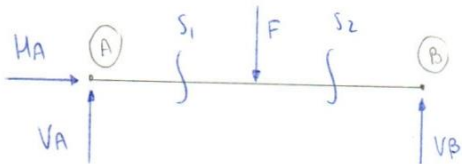
[2]



• Isostatica



• Reazioni vincolari

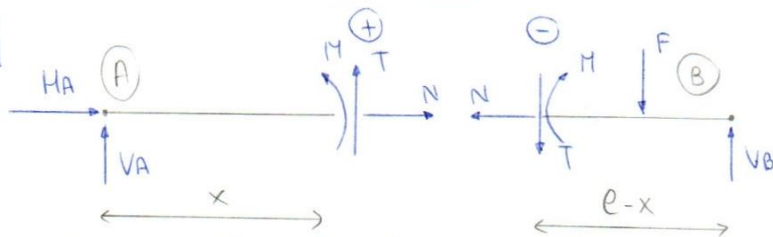


$$\begin{aligned} \uparrow) VA + VB - F &= 0 \\ \rightarrow) HA &= 0 \\ A) VB \cdot e - F \frac{e}{2} &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} VA = F/2 \\ HA = 0 \\ VB = F/2 \end{cases}$$

Devo praticare 2 Tagli S1 e S2

• Caratteristiche di sollecitazione

[S1]



$$\text{con } 0 \leq x \leq e/2$$

(Posso lavorare da entrambe le parti)

$$\begin{aligned} \uparrow) VA + T &= 0 \\ \rightarrow) HA + N &= 0 \\ A) M + Tx &= 0 \end{aligned}$$

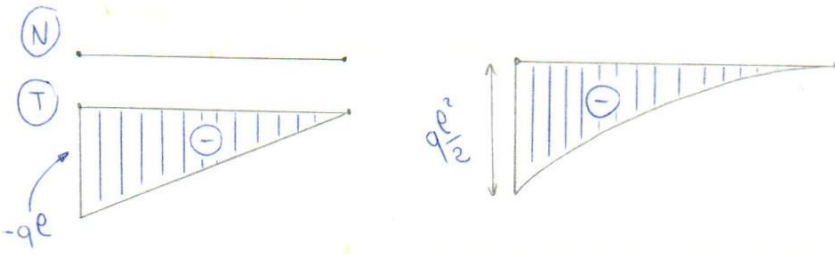
$$\begin{cases} T = -F/2 \\ N = -HA = 0 \\ M = F/2 \cdot x \end{cases}$$

• Andamenti





Andamenti



Taglio T negativo  
 Momento M crescente  
 (da  $-qe^2/2$  a 0)

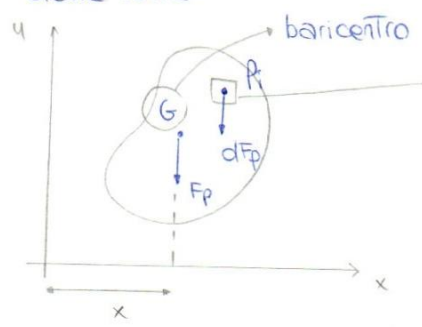
Con carico concentrato  $F = qe$   
 Provo a trarre il grafico con  $M$ : varierà linearmente, non quadraticamente come nel primo caso

Sollecitazioni sulla sezione

- Proprietà della Sezione :
- a) Baricentro (punto notevole a cui far riferimento)
  - b) Momento statico
  - c) Momento di Inerzia (geometrico)

a) Come Trovare il baricentro?

Appendo più volte l'oggetto in modo che raggiunga l'equilibrio e Trovo inerocio delle rette.



Calcoliamo il peso del corpo  
 Area infinitesima con  $dFp$  (Forza peso)

$$Fp = \int_A dFp = \int_A \rho g dA = \rho g A$$

$Fp$  applicata in un punto  $\neq$  da G

$$\text{Momento di } Fp = Fp \cdot x = \int_A \rho g x_i dA_i = \rho g \int_A x_i dA_i$$

$$\rho g A \cdot x = \rho g \int_A x_i dA_i$$

$$Ax = \int_A x dA \rightarrow \boxed{x = \frac{\int_A x dA}{A}}$$

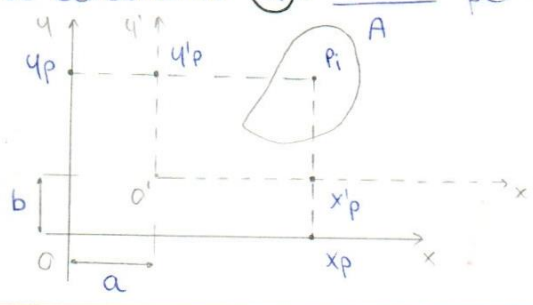
Se  $Fp$  applicata nel baricentro  $\rightarrow x_G = 0 \rightarrow$

$S_y = \int_A x dA$   
 Momento statico rispetto a y

$S_x = \int_A y dA$   
 Momento statico rispetto a x

$$y = \frac{\int_A y dA}{A}$$

(Se calcoliamo  $\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{A}$  per un corpo simmetrico sarà = 0)



$$\begin{cases} x'p = xp - a \\ y'p = yp - b \end{cases}$$

$$I_y' = \int_A x^2 dA = \int_A (x-a)^2 dA = \int_A (x^2 + a^2 - 2ax) dA = I_y + a^2 A - 2a S_y$$

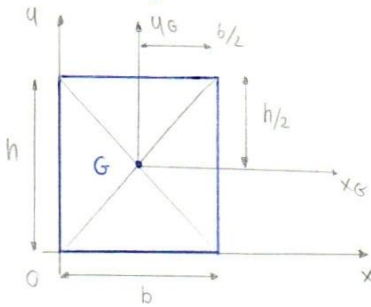
13

$$I_{xy}' = \int_A x'y' dA = \int_A (x-a)(y-b) dA = \int_A (xy - ay - bx + ab) dA = I_{xy} + abA - bS_y - aS_x$$

Se il mio sistema  $xy$  è baricentrico  $\Rightarrow S_x, S_y = 0$

Quando il momento di inerzia misto  $I_{xy} = 0 \Rightarrow$  sistema è un sistema principale

→  Rettangolo



$$S_y = \int_A x dA = \int_0^b x dx \cdot \int_0^h dy = \frac{b^2 h}{2}$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^b dx \cdot \int_0^h y dy = \frac{bh^2}{2}$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^b dx \cdot \int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 dx \cdot \int_0^h dy = \frac{b^3 h}{3}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_0^b x dx \cdot \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}$$

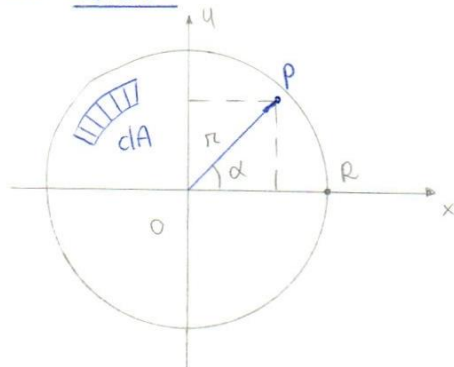
[ Consideriamo sistema  $x_G y_G \rightarrow xy$   
Consideriamo sistema  $xy \rightarrow x'y'$  ]

$$I_x = I_{x_G} + \frac{h^2 A}{4} \rightarrow I_{x_G} = I_x - \frac{h^2 A}{4} = \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_y = I_{y_G} + \frac{b^2 A}{4} \rightarrow I_{y_G} = I_y - \frac{b^2 A}{4} = \frac{b^3 h}{3} - \frac{b^3 h}{4} = \frac{b^3 h}{12}$$

$$I_{xy} = I_{x_G} I_{y_G} + \frac{bh}{4} A \rightarrow I_{x_G} I_{y_G} = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b^2 h^2}{4} = \textcircled{0} \rightarrow \text{NULLO}$$

→  Cerchio



$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \sin \alpha \cdot r dr d\alpha = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \alpha d\alpha = \frac{R^3}{3} [-\cos \alpha]_0^{2\pi} = \textcircled{0}$$

$$S_y = \int_A x dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r \cos \alpha \cdot r dr d\alpha = \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} \cos \alpha d\alpha = \frac{R^3}{3} [\sin \alpha]_0^{2\pi} = \textcircled{0}$$

$S_x = S_y = 0$  poiché origine assi è il baricentro

$$I_{x_G} = \int_A y^2 dA = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin^2 \alpha \cdot r dr d\alpha = \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \sin^2 \alpha d\alpha = \frac{R^4}{4} \pi$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} d\alpha = \left[ \frac{1}{2} (2\pi) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right]_0^{2\pi} = \pi$$



Condizione di stazionarietà :

$$\boxed{\operatorname{Tg} 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Avevamo trovato in precedenza :

$$I_{x'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha - I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

$$I_{y'} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y) \cos 2\alpha + I_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$

Sostituiremo la condizione di stazionarietà per ottenere valori di  $\cos$  e  $\operatorname{sen}$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha}{1}} = \sqrt{\frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha + \operatorname{sen}^2 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{Tg}^2 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4I_{xy}^2}{(I_x - I_y)^2}}} \\ &= \sqrt{\frac{(I_x - I_y)^2}{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{I_x - I_y}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{Tg} 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{(I_x - I_y)}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} \cdot \left( \frac{-2I_{xy}}{(I_x - I_y)} \right) = \frac{-2I_{xy}}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$x' \rightarrow \xi$   
 $y' \rightarrow \eta$  } Diventano i nostri assi principali di inerzia  
Sostituisco valori trovati per  $\cos 2\alpha$  e  $\operatorname{sen} 2\alpha$

$$\boxed{I_\xi = \frac{1}{2}(I_x - I_y) + \frac{1}{2} \frac{(I_x - I_y)^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} + \frac{2I_{xy}^2}{\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}} = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

Per calcolare  $I_\eta$  dobbiamo invertire i valori con segno

$$\boxed{I_\eta = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

Il max e il min del momento di inerzia

$$\boxed{I_\xi > I_\eta}$$

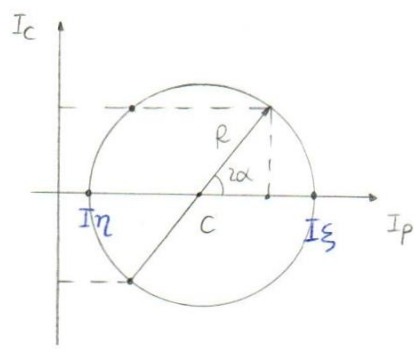
→ Dobbiamo ora conoscere  $\alpha$ , ovvero l'orientamento:

- $I_{x'} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \operatorname{sen}^2 \alpha + 2I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow 0$
- $I_{y'} = I_x \operatorname{sen}^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow 0$
- $I_{x'y'} = I_{xy} (\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha) + (I_x - I_y) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \rightarrow 0$

Se supponiamo che siano gli assi principali di inerzia possiamo eliminare alcuni elementi ( $xy \rightarrow \xi\eta$ )

- $I_{x'} = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) + \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta) \cos 2\alpha$
  - $I_{y'} = \frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta) - \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta) \cos 2\alpha$
  - $I_{x'y'} = \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta) \operatorname{sen} 2\alpha$
- (Utilizzo formule di Prostaterevi)

Rappresentazione di un cerchio con  $C = [\frac{1}{2}(I_\xi + I_\eta), 0]$  e  $R = \frac{1}{2}(I_\xi - I_\eta)$



Cerchio di MOHR per i momenti di inerzia

Con  $\alpha = 0$  identifichiamo MAX e MIN  
Con  $\alpha \neq 0$  identifichiamo valori di inerzia rispetto al sistema di riferimento usato

$$I_\xi > I_\eta$$

Se  $A_p = A_c$

$$\frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} (d_e^2 - d_i^2)$$

$$\frac{I_c}{I_p} = \frac{\frac{\pi}{64} (d_e^4 - d_i^4)}{\frac{\pi}{64} D^4} = \frac{(d_e^2 - d_i^2)(d_e^2 + d_i^2)}{(d_e^2 - d_i^2)(d_e^2 - d_i^2)} = \frac{d_e^2 + d_i^2}{d_e^2 - d_i^2} > 1 \text{ sempre}$$

Se uso una struttura cava ho momento di inerzia maggiore quindi ad esempio una Trave cava a parità di massa resiste di più alle flessioni  
 Allo stesso modo con stessa resistenza ho usato meno massa nella struttura cava con spese minori.

TENSIONI

In un corpo posso avere più sezioni critiche all'interno delle quali ci saranno particolari punti critici (i primi che potrebbero cedere)

Dobbiamo andare a studiare cosa succede nell'intorno infinitesimo di un p. generico.

Applichiamo Forze sulle superfici (carico applicato sul nostro punto)

TENSIONE

$$\lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{P}}{\partial A} = \bar{t}$$

Area infinitesima

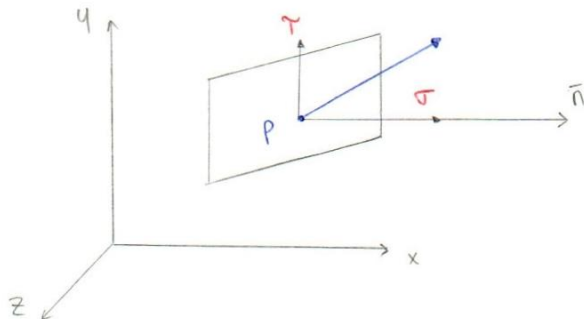
Se A diventa sempre più piccola avrà braccio nullo -> Momenti tendono a sparire

$$\lim_{\partial A \rightarrow 0} \frac{\partial \bar{M}}{\partial A} = 0$$

Principio di CAUCHY

Ragioniamo ora solo in termini di Tensioni (Forze per unità di superficie)

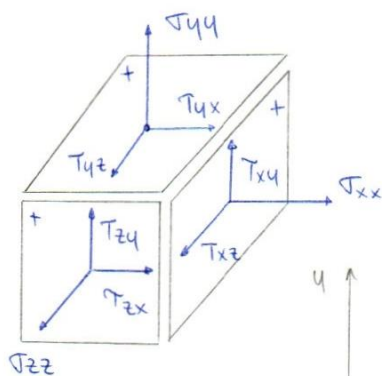
Il vettore Tensione  $\bar{t}$  cambierà in base al punto e all'orientamento nello spazio della superficie.



$\bar{\sigma}$  = componente normale alla superficie (// alla normale)

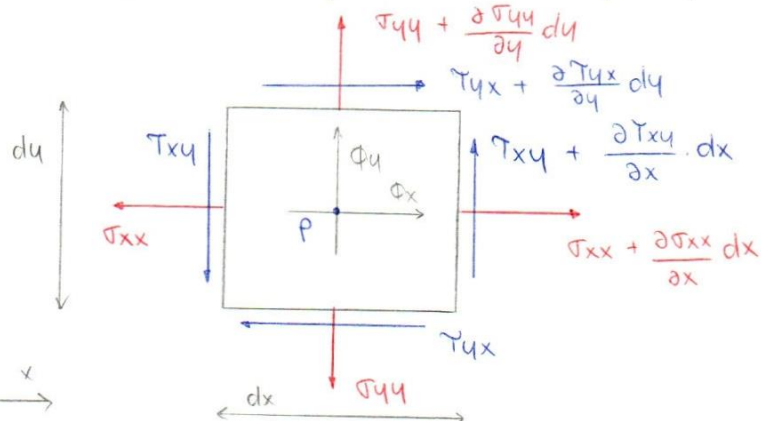
$\bar{\tau}$  = componente tangenziale alla superficie (+ alla normale)

$$\bar{t} = \bar{\sigma} + \bar{\tau}$$



$\left[ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \text{faccia con normale } x \text{ in direzione } x \\ \tau_{xy} = \text{ " " " " " " } y \\ \tau_{xz} = \text{ " " " " " " } z \end{array} \right]$   
 (Stessa cosa per altre facce)

(Facce  $\ominus$  ho stesse quantità con versi opposti)





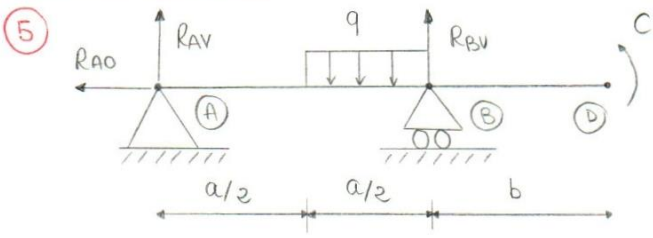
$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} = [\sigma] \vec{n}$$

19

Tensore delle Tensioni

Se conosco i valori delle componenti della matrice posso calcolare Tensione applicata in P qualunque sia l'orientamento del piano che considero. Devo perciò prima definirlo attraverso i 3 piani coordinati e poi su qualunque altro piano della matrice. la matrice è simmetrica in quanto i valori sono uguali due a due. Inoltre se tutte le  $\tau$  vanno a 0 la matrice è diagonale e mi sarà posto sul sistema principale di inerzia. E' sempre possibile determinare un sistema principale.

Esercizio 2



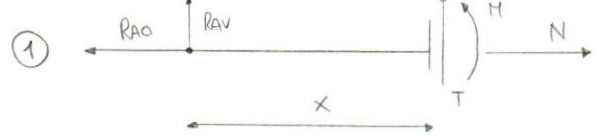
ci aspettiamo già 0 come valore in A e valore = c dove c'è la coppia in D.

equilibrio Reazioni vincolari

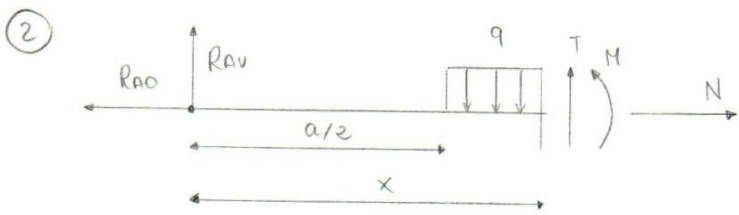
→  $R_{A0} = 0$   
 ↑  $R_{AV} + R_{BV} - q \frac{a}{2} = 0 \rightarrow R_{AV} = 133 \text{ N}$   
 A)  $R_{BV} \cdot a - q \frac{3}{4} a \cdot \frac{a}{2} + c = 0$   
 $R_{BV} = \frac{q \cdot 3/8 a^2 - c}{a} = -101 \text{ N}$

Dividiamo in sezioni la struttura con dei Tagli

- ① Da A al carico q
- ② Da carico q a B
- ③ Da B a D



N)  $N - R_{A0} = 0 \rightarrow N = 0$   
 T)  $T + R_{AV} = 0 \rightarrow T = -133 \text{ N}$   
 M)  $M - R_{AV} \cdot x = 0 \rightarrow M = R_{AV} \cdot x$   
 $\begin{cases} x = 0 \rightarrow M = 0 \\ x = a/2 \rightarrow M = 133 \cdot \frac{a}{2} = 53,2 \text{ Nm} \end{cases}$



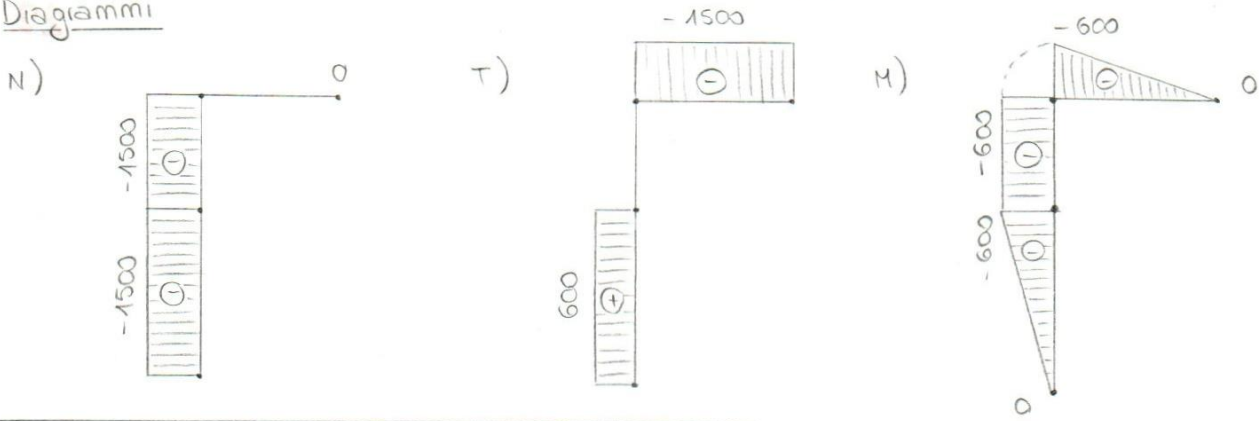
N)  $N - R_{A0} = 0 \rightarrow N = 0$   
 T)  $R_{AV} + T - q(x - \frac{a}{2}) = 0 \rightarrow T = -R_{AV} + q(x - \frac{a}{2})$   
 M)  $-R_{AV} \cdot x + M + q(x - \frac{a}{2})(\frac{1}{2}(x - \frac{a}{2})) = 0$   
 $\begin{cases} x = a/2 \rightarrow T = -133 \text{ N} \\ x = a \rightarrow T = -101 \text{ N} \\ x = a/2 \rightarrow M = 53,2 \text{ Nm} \\ x = a \rightarrow M = 100 \text{ Nm} \end{cases}$

③ Parte destra che è più semplice



N)  $-N = 0 \rightarrow N = 0$   
 T)  $-T = 0 \rightarrow T = 0$   
 M)  $-M + C = 0 \rightarrow M = 100 \text{ Nm}$

Diagrammi



Tensioni

$\vec{\sigma} = [\sigma] \vec{n}$  sempre possibile trovare sistema per cui la matrice è diagonale. In tal modo non esisteranno termini misti.  $\rightarrow$  sistema principale di tensione (solo presenza di tensioni normali)

Come trovarlo?

$$\vec{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{Bmatrix} \quad \begin{aligned} \tau_x &= \vec{\sigma} \cdot n_x \\ \tau_y &= \vec{\sigma} \cdot n_y \\ \tau_z &= \vec{\sigma} \cdot n_z \end{aligned}$$

Trovare sistema per cui  $\vec{\sigma} = \vec{\sigma}' [I] \vec{n}$

$$\vec{\sigma} \vec{n} - \vec{\sigma}' [I] \vec{n} = 0$$

significa risolvere problema di autovalori  $\det([\sigma] - \vec{\sigma}' [I]) = 0$

$$\vec{\sigma}'^3 - I_1 \vec{\sigma}'^2 + I_2 \vec{\sigma}' - I_3 = 0$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}[\sigma] = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_3 &= \det[\sigma] \end{aligned}$$

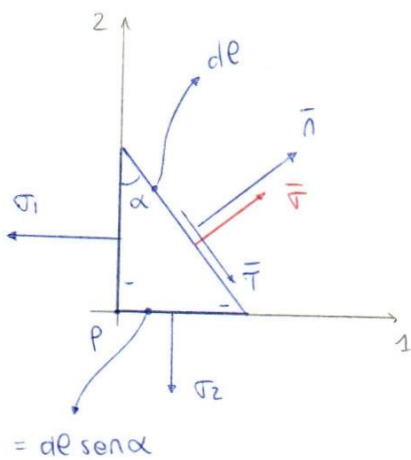
$$I_2 = (\sigma_{xx} \sigma_{yy} - \tau_{xy}^2) + (\sigma_{yy} \sigma_{zz} + \tau_{yz}^2) + (\sigma_{zz} \sigma_{xx} - \tau_{xz}^2)$$

$$\underline{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3}$$

Analizziamo stato di tensione dal punto di vista grafico

Supponiamo sistema principale di tensione  $\rightarrow$  Vedremo solo tensioni normali

[Piano 1-2]



la 3° faccia non è normale né a 1 né a 2.

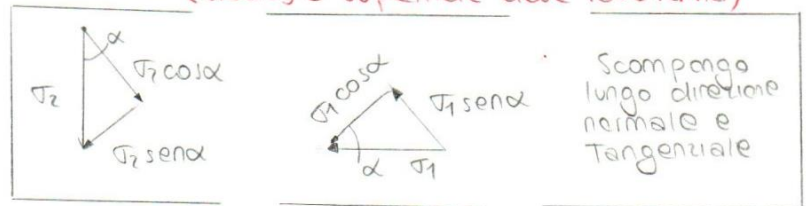
Vedremo una tensione  $\sigma$  e una  $\tau$  che però si sviluppa completamente sul piano che utilizziamo.

equazioni

$\rightarrow$  lunghezza prisma lungo asse 3

$$\vec{n}) \sigma dA_3 \cdot dA - \sigma_1 \cos \alpha dA_3 dA \cos \alpha - \sigma_2 \sin \alpha dA_3 dA \sin \alpha = 0$$

( $dA dA_3$  è superficie dove lavoriamo)



Scompongo lungo direzione normale e tangenziale

$$\vec{\sigma} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha$$

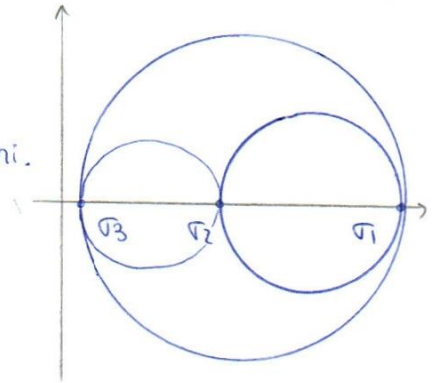
$$\left[ \begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha &= \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{aligned} \right]$$

$$\sigma = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\alpha$$



Le intersezioni dell'asse con il cerchio mi daranno quindi le Tensioni principali  $\sigma_1, \sigma_2$  **23**

$$\sigma_{1,2} = \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}_C \pm \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\tau_{xy}^2}}_R$$



Dopo aver individuato  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  posso costruire gli altri 2 cerchi. Per i cerchi di Mohr occorre:

- Individuare direzione principale di tensione
- Stabilire stato di tensione su 2 piani normali

STATI di DEFORMAZIONE

Consideriamo piccole deformazioni senza considerare le proprietà del materiale, ma solo la LINEARITA'. laddove ci saranno picchi di tensione avrò delle DEFORMAZIONI

- Esistono 2 tipi di deformazione:
- 1) Moto di corpo rigido
  - 2) Deformazione

Dilatazione  
Scorrimento

1) Moto corpo rigido

• Per la Traslazione:

$$\begin{cases} u_i = x_i - x_0 = \bar{u} & \theta_i \\ v_i = y_i - y_0 = \bar{v} & \theta_i \\ w_i = z_i - z_0 = \bar{w} & \theta_i \end{cases}$$

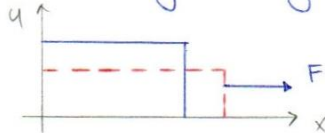
• Per rotazione intorno a z:

$$\begin{cases} u_i = x_i' - x_{i0} = x_i \cos \alpha - y_i \sin \alpha - x_i \\ v_i = y_i' - y_{i0} = -x_i \sin \alpha + y_i \cos \alpha - y_i \end{cases}$$

Ricordando che:  $\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_i = x_i (\cos \alpha - 1) + y_i \sin \alpha \\ v_i = -x_i \sin \alpha + y_i (\cos \alpha - 1) \end{cases}$

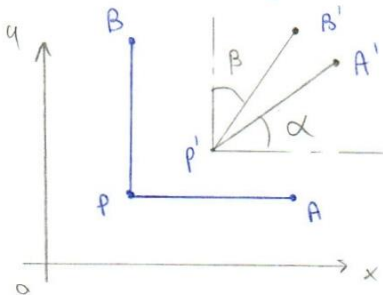
2a) Dilatazione: il corpo tende ad allungarsi lungo direzione di applicazione forza.

Variazione di lunghezza  $\epsilon = \frac{e_f - e_i}{e_i}$



2b) Scorrimento: Tirando il corpo per gli spigoli si deformerà la Topologia dell'elemento. Si preserverà però la lunghezza delle dimensioni.

(Dimostriamo come cambiano le coordinate)



$\overline{PA} = dx, \overline{PB} = dy$

- ipotizziamo delle dilatazioni:  $P'A' \neq PA, P'B' \neq PB$
- ipotizziamo degli scorrimenti:  $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$\begin{cases} u_A = u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ u_B = u_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy \end{cases} \quad \begin{cases} v_A = v_P + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\ v_B = v_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases}$$

Traslazione di A rispetto a P

•  $\epsilon_{xx} = \frac{u_A - u_P}{dx} = \frac{u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u_P}{dx} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$

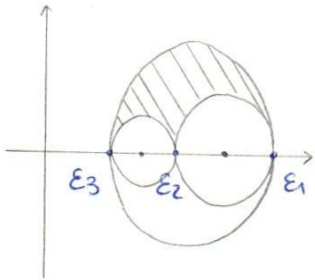
•  $\epsilon_{yy} = \frac{v_B - v_P}{dy} = \frac{v_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy - v_P}{dy} = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)$



Assegnamo nomi di deformazione:

$$\begin{cases} \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \delta_{xy} \\ \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \delta_{yz} \\ \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \delta_{zx} \end{cases}$$

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



La matrice  $[\epsilon]$  è a termini reali e soprattutto è simmetrica. Pertanto è possibile identificare un sistema di riferimento tale per cui i termini misti fuori dalla diagonale si annullano e si ottiene una matrice diagonale. I termini di traslazione quindi scompaiono. Sulla diagonale così rimangono i termini principali di deformazione rappresentati dall'area compresa tra i cerchi di Mohr. Inoltre se materiale è molto elastico sono nel sistema principale di deformazione e si considerano solo le deformazioni.

LEGGE di Hooke

Dilatazioni normali all'asse  $\rightarrow$  proporzionalità diretta (tanto tiro e tanto si allunga su x)

- $E$  = modulo di Young
- $\nu$  = coefficiente di Poisson
- $G$  = Modulo di rigidità tangenziale = rapporto diretto tra tensione e deformazione

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\ \epsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] + \alpha \Delta T \\ \epsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] + \alpha \Delta T \end{aligned}$$

$\rightarrow$  Restringimento

$$\begin{cases} \delta_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \delta_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \delta_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{cases}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

↳ Cerco di portare tutto in un caso bidimensionale che stato di tensione/deformazione avrò sulla mia superficie?

xy: ipotesi di stato di tensione piano  
 $\begin{cases} \sigma_{zz} = 0 \\ \tau_{zx} = 0 \\ \tau_{zy} = 0 \end{cases}$  sostituiamo le nostre ipotesi nelle equazioni precedenti

$$\begin{aligned} E \cdot \epsilon_{xx} &= \sigma_{xx} - \nu \cdot \sigma_{yy} \\ E \cdot \epsilon_{yy} &= \sigma_{yy} - \nu \cdot \sigma_{xx} \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} E \cdot \epsilon_{yy} &= \sigma_{yy} - \nu E \cdot \epsilon_{xx} - \nu^2 \sigma_{yy} \\ E (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) &= \sigma_{yy} (1 - \nu^2) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) \\ \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) \end{cases} = \text{Stato di Tensione della nostra particolare superficie}$$

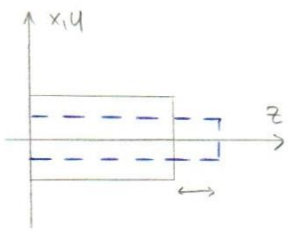
Passaggio a bidimensionale: altra ipotesi = stato di deformazione normale = 0

$$\begin{cases} \epsilon_{zz} = 0 \\ \delta_{zx} = 0 \\ \delta_{xy} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \text{ (Non necessariamente nullo)} \\ E \epsilon_{xx} = \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} - \nu^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \\ E \epsilon_{yy} = \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} - \nu^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \end{cases}$$

estriamo le tensioni:

$$\begin{aligned} E \epsilon_{xx} &= \sigma_{xx} (1 - \nu^2) - \nu \sigma_{yy} (1 - \nu) \cdot (-\nu / 1 - \nu) \\ E \epsilon_{yy} &= \sigma_{yy} (1 - \nu^2) - \nu \sigma_{xx} (1 - \nu) \end{aligned}$$

1) Presenza di carico assiale



(il pezzo si allunga mentre si stringe la sezione)

$$w = w(z) = k \cdot z$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = k$$

$$\sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz} = E \cdot k = \frac{N}{A} = \text{costante}$$

$$N = \int_A \sigma_{zz} dA = E \cdot k \cdot A$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} \cdot y dA = E \cdot k \int_A y dA = 0$$

$$M_y = \int_A \sigma_{zz} \cdot x dA = E \cdot k \int_A x dA = 0$$

Se sistema è baricentrico  $\int y dA = 0, \int x dA = 0$

Con la presenza di un carico assiale avrà distribuzione costante di tensione. Sarà presente  $\sigma_{zz}$  e non  $M_x$  e  $M_y$ .

→ Analizziamo su x e y

$$\epsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} = -\frac{\nu}{E} \cdot \frac{N}{A}$$

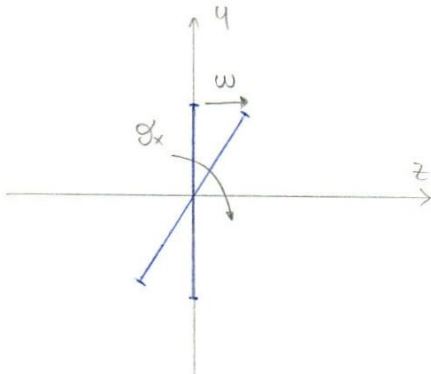
$$\epsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{zz}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} \rightarrow w = \int_0^l \epsilon_{zz} dz = \frac{N}{EA} l$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{du}{dx} \rightarrow u = \int_0^l \epsilon_{xx} dx = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} \cdot dx$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{dv}{dy} \rightarrow v = \int_0^l \epsilon_{yy} dy = -\frac{\nu}{E} \frac{N}{A} dy$$

2) Momento flettente  $M_x$



Ipotesi: ogni sezione della Trave di De Saint Venant continua a essere piana anche dopo una deformazione (ad esempio può ruotare a causa di un momento flettente)

Sezione che ruota → spostamento su z

$$w = \theta_x(z) \cdot y \rightarrow \text{spostamento su z}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial \theta_x(z)}{\partial z} y = \frac{M_x}{EI_x} \cdot y$$

$$\sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz} = E \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \cdot y = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

Sistema baricentrico →  $N = \int_A \sigma_{zz} \cdot dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A y dA = 0$

Sistema principale di inerzia →  $M_x = \int_A \sigma_{zz} y dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A y^2 dA = E \cdot \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \cdot I_x$

$M_x$  è effettivamente presente →  $M_y = -\int_A \sigma_{zz} x dA = E \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \int_A x y dA = 0$

$$\frac{M_x}{EI_x} = \frac{\partial \theta_x}{\partial z} \quad \text{Sostituisco in } \sigma_{zz} \text{ e } \epsilon_{zz}$$

$\sigma_{zz}$  e  $\epsilon_{zz}$  variano linearmente con la lunghezza

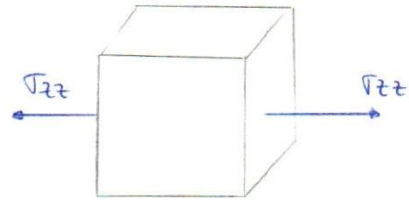
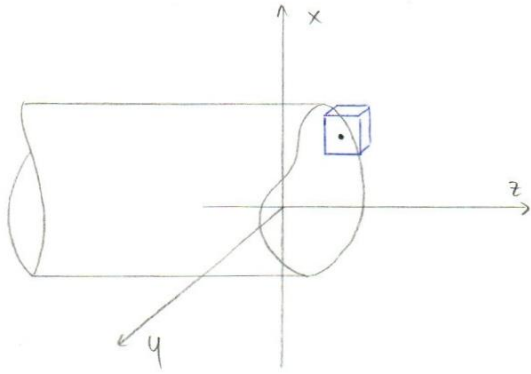
In questo caso i punti con la tensione più alta sono quelli più lontani dall'asse

Se pongo  $\sigma_{zz} = 0$  → Trovo asse neutro di sollecitazione



Cerchi di Mohr per il carico assiale

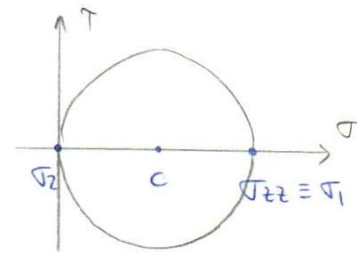
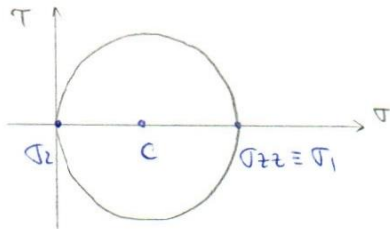
Prendiamo cubetto intorno a P.  
Avremo la presenza di solo  $\sigma_{zz}$



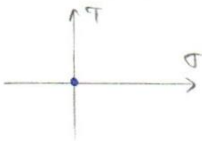
→ y anche sarà direzione principale (facce posteriore e anteriore hanno  $\tau = 0$ )

→ x è direzione principale (facce superiore e inferiore hanno  $\tau = 0$ )

↳ Traccio cerchio di Mohr con x come direzione principale

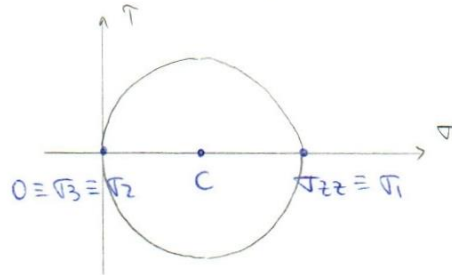


→ Allo stesso modo si comporta z (direzione principale)



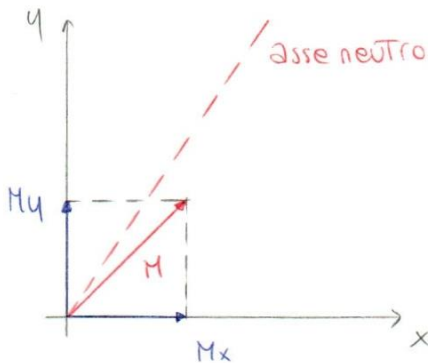
Avrò cerchio degenere poiché non ho  $\tau$  né sulle facce posteriore/anteriore né su quelle inferiore/superiore.

↳ Mettendo tutto insieme →



$$\begin{cases} \sigma_{max} = \sigma_1 = \sigma_z \text{ (max)} \\ \tau_{max} = 1/2 \sigma_1 \end{cases}$$

Con momenti  $M_x$  e  $M_y$



$$\begin{aligned} \text{Tg} \psi &= M_y / M_x \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2} \end{aligned}$$

Per sovrapposizione

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

generato da  $M_x$

generato da  $M_y$

$$\left[ \begin{aligned} \text{Tg} \psi &= \text{Tg} \psi \\ \text{se } I_x &= I_y \end{aligned} \right]$$

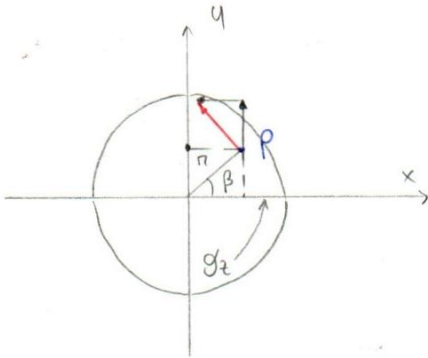
Per trovare asse neutro devo porre  $\sigma_{zz} = 0 \rightarrow y = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y} \cdot x$

Asse neutro non coincide con asse di sollecitazione!

← Diverso da  $\text{Tg} \psi$

$$\text{Tg} \psi = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{I_x}{I_y}$$

1) Sezione circolare



$$P(r, \beta) : \begin{cases} x = r \cos \beta \\ y = r \sin \beta \end{cases}$$

Definiamo  $\theta_z$  indipendente da  $x$  e  $y$  in modo che tutti i punti ruotino senza cambiare la sezione.  
 • Siamo nel campo di piccole rotazioni

spostamento di P

scomposizione: 
$$\begin{cases} u = r \theta_z \cos \beta \\ v = -r \theta_z \sin \beta \\ w = 0 \end{cases}$$

Di conseguenza: 
$$\begin{cases} u = -\theta_z \cdot y & (\text{lungo } x) \\ v = \theta_z \cdot x & (\text{lungo } y) \\ w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\theta_z + \theta_z = 0$$

$$\tau_{zx} = -\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \cdot y \cdot G \iff \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial \theta_z}{\partial z} \cdot y$$

$$\tau_{zy} = \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \cdot x \cdot G \iff \gamma_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \cdot x$$

(T<sub>x</sub>) 
$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA = -G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \int_A y dA = 0$$

(T<sub>y</sub>) 
$$T_y = \int_A \tau_{zy} dA = -G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \int_A x dA = 0$$

← Sistema baricentrico  
(i tagli non vengono chiamati in causa)

(M<sub>z</sub>) 
$$M_z = \int_A (-\tau_{zx} \cdot y + \tau_{zy} \cdot x) dA = \int_A \left( G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} y^2 + G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} x^2 \right) dA =$$
  

$$= G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} \int_A (x^2 + y^2) dA = G \frac{\partial \theta_z}{\partial z} I_p$$
  
 I<sub>p</sub> = momento di inerzia polare

Da cui ottengo

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial z} = \frac{M_z}{G I_p}$$

espressione praticamente uguale a quella per le flessioni. Parliamo ora di scorrimenti.  
Modulo di rigidezza legato alle rotazioni

$$\frac{\partial \theta_z}{\partial z} = \frac{M_z}{G I_p} \rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = -\frac{M_z}{I_p} \cdot y \\ \tau_{zy} = \frac{M_z}{I_p} \cdot x \end{cases}$$

Valore complessivo di Forza

$$dF = \tau \cdot ds \rightarrow F = \int_0^l dF = \int_0^l \tau \cdot ds = \tau \cdot \int_0^l ds = \tau \cdot l \rightarrow \text{profilo chiuso}$$

$$dM_z = \tau \cdot ds \cdot r \rightarrow M_z = \int_0^l \tau \cdot ds \cdot r = \tau \cdot \int_0^l ds \cdot r = \tau \cdot \int_0^l r \cdot ds = \tau \cdot \int_0^l r \cdot dA = \tau \cdot \int_0^l r \cdot dA$$

area rettangolo  $\rightarrow$  area triangolino

Area inserita nella linea media del profilo.

Tutte le  $\tau$  sono uniformemente distribuite nella corda.

$$\tau(s) = \frac{M_z}{2b(s)\Omega} \quad \text{Formula di Bredt}$$

se spessore è costante  $\rightarrow \tau = \frac{M_z}{2b\Omega}$

... energia

$$dE = \frac{1}{2} \int_A \tau \cdot \oint dA dz = \frac{1}{2} \int_A \frac{\tau^2}{G} \cdot dA dz = \frac{1}{2} \frac{dz}{G} \left( \int_0^l \frac{\tau^2}{b^2(s)} \cdot b(s) ds \right)$$

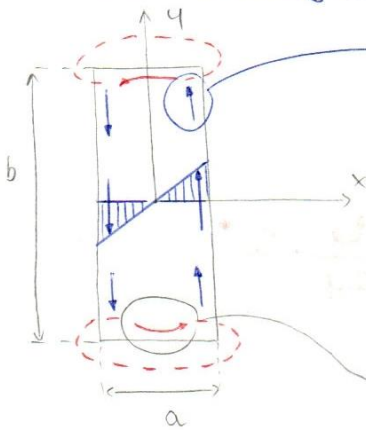
$$= \frac{1}{2} \frac{dz}{G} \tau^2 \int_0^l \frac{ds}{b(s)} = \frac{1}{2} \frac{dz}{G} \frac{M_z^2}{4\Omega^2} \int_0^l \frac{ds}{b(s)}$$

confrontiamo le energie trovate

$$\frac{1}{2} \frac{M_z^2}{G I_p} dz = \frac{1}{2} \frac{dz}{G} \frac{M_z^2}{4\Omega^2} \int_0^l \frac{ds}{b(s)} \rightarrow I_p = \frac{4\Omega^2}{\int_0^l \frac{ds}{b(s)}}$$

Come passare a una sezione cilindrica che abbia  $I_p$  come momento di inerzia. (Da profilo a cilindro)

Profilo sottile con geometria rettangolare ( $b \gg a$ )



Tangenziali che si seguono per generare ciò che voglio.

$$\tau_{z \max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot a \quad \text{in } x = \pm a/2$$

$$I_z = \frac{1}{3} b a^3 \quad \left( \frac{b}{a} \rightarrow \infty \right)$$

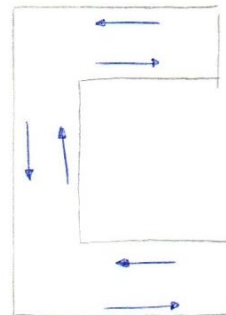
$$\frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = \frac{M_z}{G I_z}$$

le zone di estremità tendono quindi a non contribuire

correzione:  $I_z = \frac{1}{3} (b - 2 \cdot 0,3a) a^3 \quad 1 \leq \frac{b}{a} \leq \infty$

$$M_z = \sum_i M_i = \sum_i \left( \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \cdot G I_{z_i} \right) = \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} \cdot G \sum_i I_{z_i}$$

$\downarrow$  cost       $\downarrow$   $I_{TOT}$





$$\frac{\partial S_x^*}{\partial \xi_1} = b \cdot \frac{h}{2} - b \cdot \xi_1 = 0 \rightarrow \xi_1 = h/2$$

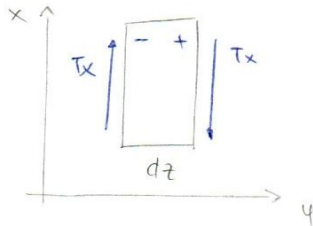
$$\tau_z = \frac{T_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b} \quad S_x^* (\xi_1 = \frac{h}{2}) = \frac{bh}{2} \left( \frac{h}{4} \right) = \frac{bh^2}{8}$$

Andamento Parabolico

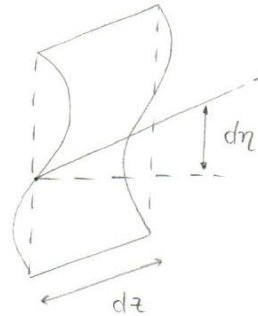
$$\tau_{zmax} = \frac{T_y \cdot bh^2 \cdot \frac{1}{2}}{bh^3 \cdot 8} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{bh} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} \quad \text{per sezione rettangolare}$$

$$\tau_{zmax} = \frac{4}{3} \frac{T_y}{A} \quad \text{per sezione circolare}$$

Consideriamo la sezione:



Ingobbamento

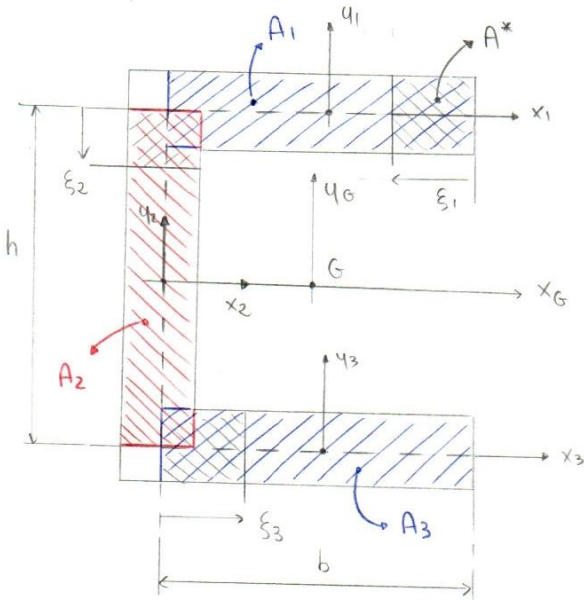


Per tale deformazione definiamo angolo di scorrimento:  $\bar{\gamma} = \frac{dn}{dz}$

Inseriamo indice di correzione  $\rightarrow \bar{\gamma} = \chi \frac{T_x}{GA}$

$$\begin{cases} \chi = 6/5 & \text{sezione circolare} \\ \chi = 32/27 & \text{sezione rettangolare} \end{cases}$$

Sezione **senza 2 assi di simmetria**



Per una porzione:  $\tau_z = \frac{T_x S_y^*}{I_y \cdot s} + \frac{T_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot s}$

( $\xi_1, \xi_2, \xi_3 =$  incognite ausiliarie)

- Spessore = costante
- Consideriamo linea media del profilo e valutiamo tutto n'rispetto a essa.
- Dividiamo sezione in 3 rettangoli.

Dobbiamo definire  $y_G$

$$y_G = \frac{S_y}{A} = \frac{S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{b^2}{2b+h}$$

$$I_{x_0 x_0} = \frac{h^3 s}{12} + \frac{2 s^3 b}{12} + 2 (bs)(h/2)$$

$$I_{y_0 y_0} = \frac{s^3 h}{12} + 2 \left[ \frac{b^3 s}{12} + (bs) \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right]$$

Devo spostarlo per arrivare a quello di  $y_G$

$T_y$   $\tau_z = \frac{T_y \cdot S_x^*}{I_{x_0 x_0} \cdot s}$  (Avanziamo con  $A^*$  fino a ultimo rettangolo)

(A1)  $S_x^* = \xi_1 \cdot s \cdot \frac{h}{2}$  ( $0 \leq \xi_1 \leq b$ )  $\begin{cases} \xi_1 = 0 \rightarrow S_x^* = 0 \\ \xi_1 = b \rightarrow S_x^* = \frac{bhs}{2} \end{cases}$

$$\tau_{max} = \frac{T_y \cdot bhs}{2 I_{x_0} s} = \frac{T_y \cdot bh}{2 I_{x_0}}$$

# CARATTERIZZAZIONE del MATERIALE

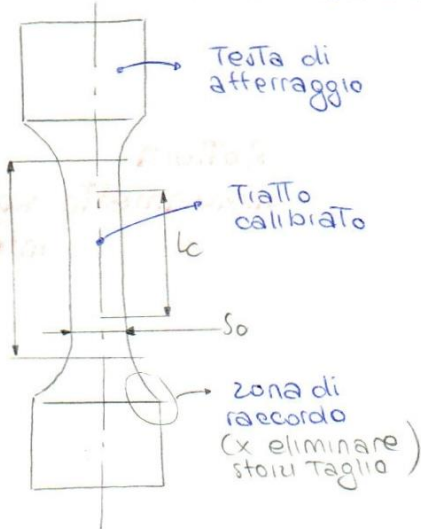
Metodi per valutare caratteristiche meccaniche : Prova di **trazione**

Stato di Tensione monoassiale che posso confrontare direttamente con la prova di laboratorio.

Norma per le prove di Trazione: UNI EN ISO 6892

1. Metalli prova a T ambiente
2. " " " T elevata
3. " " " T bassa

Provinci realizzati con alcune caratteristiche : cilindrici o piatti, estremità adatte a essere montate su un macchinario, zona calibrata in cui ci sono tolleranze strettissime.



DOG BONE (osso di cane)

- $L_c$  = zona calibrata
- $L_0$  = zona a sezione costante

La rottura avviene dove diametro è <  
 (Dove diametro è > atterro e non si deve spaccare.  
 ↳ Rottura lontana dalle estremità

$$L_0 > L_c$$

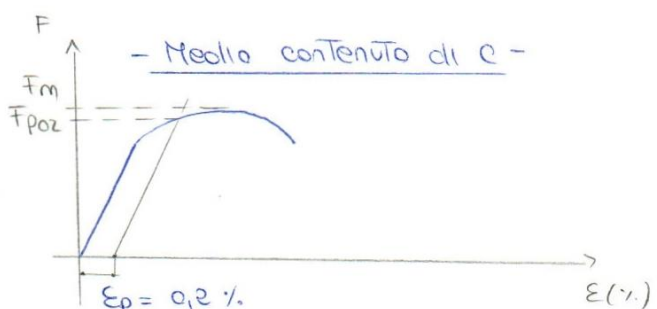
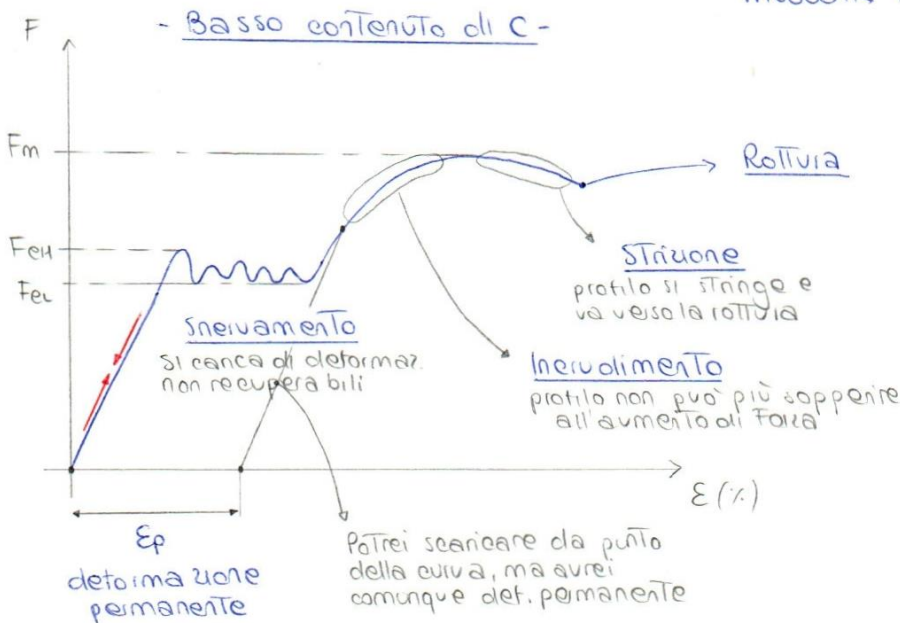
$$L_0 = 5,65 \sqrt{S_0}$$

cilindro :  $L_0 = 5d$

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$

Materiali ↗ basso Tenore di Carbonio  
 ↘ alto " " "  
 ↘ medio " " "

Per calcolare di quanto si sono distanziate le parti metto lamelle a contatto con il provino che si muovono insieme a lui.



$F_{poz}$  = carico che mi genera una deformazione plastica dello 0,2% =  
 = limite del comportamento elastico

NO SNERVAMENTO!




Ipotesi di Cedimento

La Tensione generalmente durante le prove viene applicata in maniera monoassiale, ma nel caso in cui vi sia  $[\sigma]$  (definito come tensore delle Tensioni) in funzione di  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (nel caso in cui si verifichi una Tensione pluriassiale) è necessario individuare una  $\sigma$  equivalente che verifichi se il provino regge oppure no.

Bisogna distinguere i materiali:

a) fragili →  Rottura con sezione normale all'asse della Trave

b) duttili →  Rottura dei piani con sezioni a 45° rispetto all'asse per via dello scorrimento Tra i piani.

Ci sono 3 Teorie principali riguardo la rottura:

1) **Criterio di GALILEO, RANKINE**

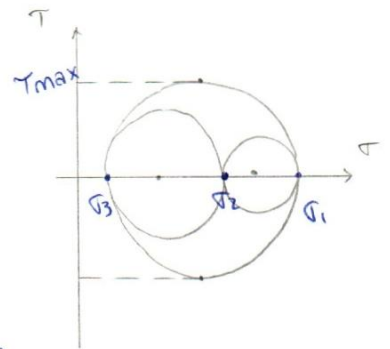
Vale per i materiali fragili. Un provino sottoposto ad una Tensione pluriassiale è come se fosse sottoposto ad una Tensione equivalente che è pari al valore massimo Tra le 3 Tensioni.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{max} &= \max[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3] \\ \sigma_1 \text{ Trazione} &= R_{eH} \end{aligned} \right\} \sigma_{max} = R_{eH}$$

• Questa legge non vale se la pressione è costante su tutte le facce del provino (ad esempio se immerso in acqua)

2) **Criterio di TRESCA**

Applicabile per i materiali duttili. Ci dice che il provino cede nel momento in cui la Tensione Tangenziale è massima. Dunque abbiamo che per giungere ad un caso generale si devono studiare i casi mono e pluri-assiale per vedere ciò che si ottiene



a) Monoassiale:  $\tau_{max}^{Trazione} = 1/2 \sigma^T$  (equivalente al raggio)

b) Multiassiale:  $\tau_{max} = \max \left[ \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| \right]$

Quindi avremo che:  $\frac{1}{2} \sigma^T = \max \left[ \left| \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right|, \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| \right]$

Da cui:  $\sigma_{eq} = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1| \right] \rightarrow \boxed{\sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1}$

3) **Criterio di Von Mises**

Anche questo criterio può essere applicato ai materiali duttili e considera condizioni idrostatiche (cioè a pressione costante) ovvero situazioni in cui la pressione sul corpo è costante e pertanto avvengono solo fenomeni di dilatazione o scorrimento, ma non di rottura. Pertanto considera la variazione di energia potenziale che si verifica nel caso di deformazione pari a:

$$E_{Tot} = \frac{1}{2} (\sigma_1 \epsilon_1 + \sigma_2 \epsilon_2 + \sigma_3 \epsilon_3)$$

Noi sappiamo che:

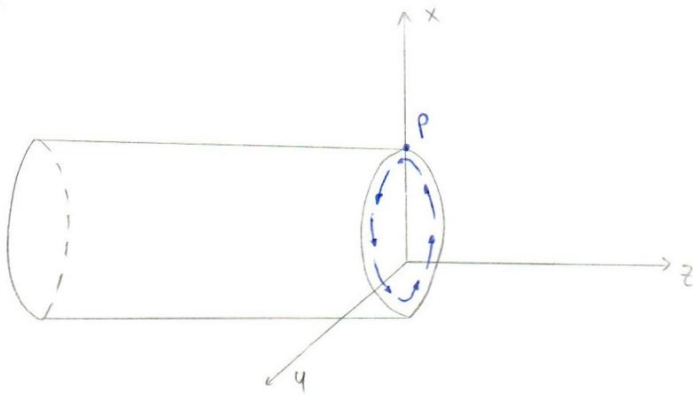
$$\epsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\epsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]$$

$$\epsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]$$

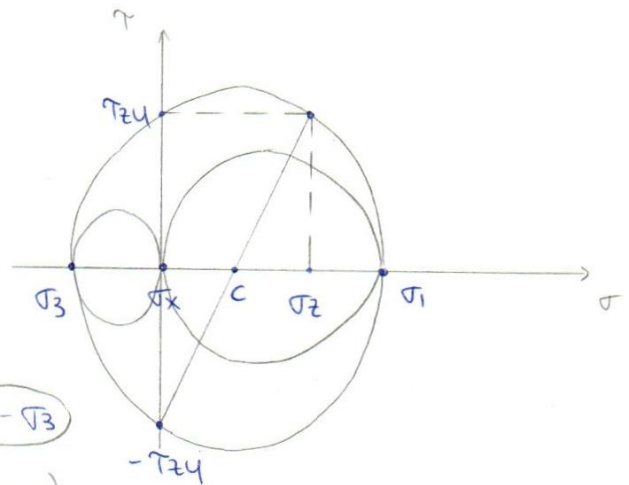
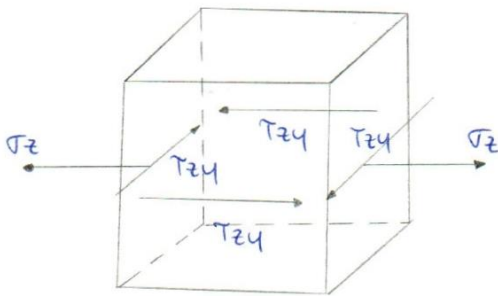
Sostituendo si avrà:

$$\begin{aligned} E_{Tot} &= \frac{1}{2E} \left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \right. \\ &\quad \left. - \nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 + \sigma_3 \sigma_2) \right] = \\ &= \left[ (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - 2\nu (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1) \right] \end{aligned}$$



- N  
- M<sub>z</sub>

x principale ( $\sigma_x = 0$ )  $\sigma_x = \sigma$



$$\sigma_{eq} (\text{Tresca}) = \max (|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|) = \sigma_1 - \sigma_3$$

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2} \quad (\text{centro} \pm \text{Raggio})$$

$$\sigma_{eq} (\text{Tresca}) = \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2} - \frac{\sigma_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{z4}^2}$$

$$\sigma_{eq} (\text{Von Mises}) = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 + (-\sigma_3\sigma_1)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2 + \cancel{\sigma_z \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2}} + \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2 - \sigma_z \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2}}$$

$$- \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{z4}^2 = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{z4}^2}$$

$N: \sigma_{\text{max}}^N \rightarrow \sigma_{\text{max}}^N = k_T^N \sigma_{\text{max}}^N$   
 $M_y: \sigma_{\text{max}, \text{nom}}^{M_y} \rightarrow \sigma_{\text{max}}^{M_y} = k_T^{M_y} \sigma_{\text{max}, \text{nom}}^{M_y}$   
 $M_t: \tau_{\text{max}, \text{nom}}^{M_t} \rightarrow \tau_{\text{max}}^{M_t} = k_T^{M_t} \tau_{\text{max}, \text{nom}}^{M_t}$

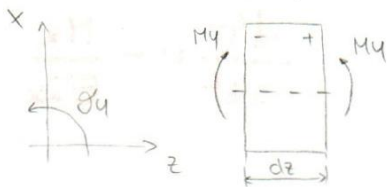
(Von Mises)  
 $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{(\sigma_{\text{max}}^N + \sigma_{\text{max}}^{M_y})^2 + 3\tau_{\text{max}}^{M_t}{}^2} \leq R_{eH}$

Quando non conosco l'origine delle tensioni cioè se sono causate da un  $M_y, M_t, N$  divido per  $k_T$  max per tutte le distribuzioni di tensione.

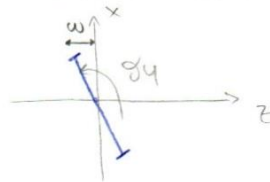
(Von Mises)  
 $\sigma_{\text{eq}} = \sqrt{(\sigma_{\text{max}}^N + \sigma_{\text{max}, \text{nom}}^{M_y})^2 + 3\tau_{\text{max}, \text{nom}}^2} \leq \frac{R_{eH}}{\max(k_T^N, k_T^{M_y}, k_T^{M_t})}$

## Progettazione a rigidità

Entriamo in una prospettiva di deformazione.



consideriamo solo i Momenti  
 ↳ La sezione continua a rimanere piana ruotando

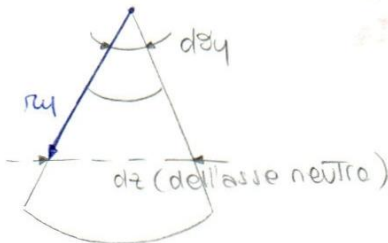


Sapevamo che

$w = \theta_y \cdot x$   
 $\epsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} = \frac{d\theta_y}{dz} \cdot x$

$\sigma_{zz} = E \cdot \epsilon_{zz} = E \cdot \frac{d\theta_y}{dz} \cdot x$

$M_y = - \int_A \sigma_{zz} \cdot x \cdot dA = - E \frac{d\theta_y}{dz} \cdot I_y$



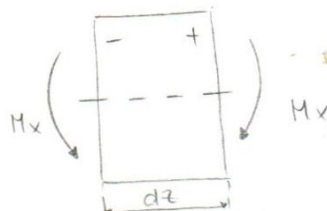
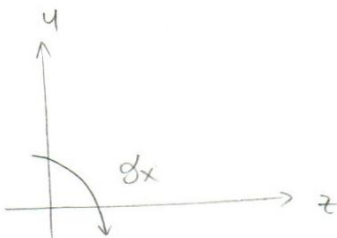
$dz = r_y \cdot d\theta_y \rightarrow \frac{1}{r_y} = \frac{d\theta_y}{dz} \rightarrow \frac{1}{r_y} = \frac{d\theta_y}{dz} = - \frac{M_y}{E \cdot I_y}$

$\theta_y = \frac{du}{dz}$

$\frac{d^2u}{dz^2} = - \frac{M_y}{E I_y}$

equazione di spostamento della linea elastica su  $zx$

## (y-z)





$$v = \frac{cx^2}{2EI} + \cancel{qx} + \cancel{c_2}$$

Condizioni al contorno:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{cx}{EI}$$

$$v = \frac{cx^2}{2EI}$$

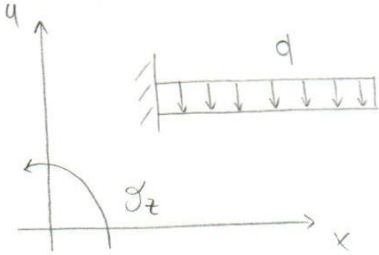
⇒

$$f_{max} = v(x=l) = \frac{ce^2}{2EI}$$

$$g_{max}(x=l) = \frac{ce}{EI}$$

$$k = \frac{c}{g_{max}} = \frac{EI}{e}$$

Applicazione carico distribuito



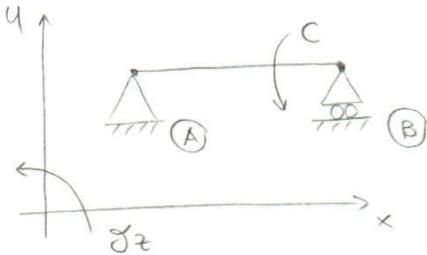
$$M_z = \frac{q(e-x)^2}{2}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{q(e-x)^2}{2EI_z} = \frac{qe^2}{2EI} + \frac{qx^2}{2EI} - \frac{qex}{EI}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{qe^2x}{2EI} + \frac{qx^3}{6EI} - \frac{qex^2}{2EI} + \cancel{c_1} \quad \leftarrow \text{per condizioni contorno}$$

$$v = \frac{qe^2x^2}{4EI} + \frac{qx^4}{24EI} - \frac{qex^3}{6EI} + \cancel{cx} + \cancel{c_2}$$

coppia + appoggio e carrello



con il calcolo delle sollecitazioni otteniamo:

$$M = VA \cdot x = \frac{C}{e} \cdot x$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{C/e \cdot x}{EI}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{Cx^2}{2eEI} + c_1$$

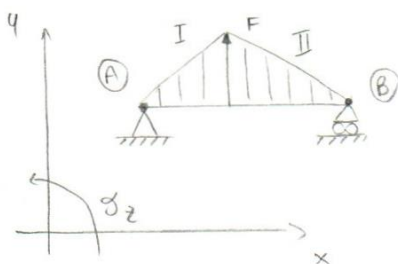
$$v = \frac{Cx^3}{6eEI} + c_1x + c_2 \quad \leftarrow v(x=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0$$

condizioni  
 $v(x=l) = 0$   
 $\hookrightarrow c_1 = -\frac{ce}{6EI}$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{C}{EIe} \frac{x^2}{2} - \frac{ce}{6EI}$$

$$v = \frac{C}{eEI} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{ce}{6EI} x$$

carico F + appoggio e carrello



A:  $v_A = v(x=0) = 0$

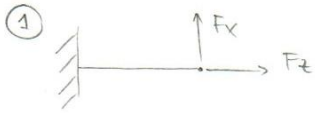
B:  $v_B = v(x=l) = 0$

$$v^I(x=l/2) = v^{II}(x=l/2)$$

$$\frac{dv^I}{dx}(x=l/2) = \frac{dv^{II}}{dx}(x=l/2)$$

Lavoro mutuo  $\neq 0 \rightarrow$  sistemi energeticamente accoppiati  
 Lavoro mutuo  $= 0 \rightarrow$  " " disaccoppiati

esempio di sistema disaccoppiato  $\rightarrow$  Trave di De Saint Venant



Disaccoppiati: Non generano lavoro con la presenza degli altri carichi.



Situazione diversa: My genera un campo di spostamento lungo x che produrrà lavoro con Fx

Teorema di Clapeyron

Se vale la sovrapposizione degli effetti il lavoro fatto da  $F_{ext}$  o  $F_{int}$  compressivo è pari alla somma di ciascuna forza per lo spostamento compressivo del punto di applicazione.

$$L_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n F_i \cdot u_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j \vartheta_j$$

nel nostro caso abbiamo:

$$\begin{aligned} L_{ext} &= \frac{1}{2} F_1 \cdot u_{11} + \frac{1}{2} F_2 u_{22} + F_1 u_{12} + F_2 \cdot u_{21} = \\ &= \frac{1}{2} F_1 (u_{11} + u_{12}) + \frac{1}{2} F_2 (u_{22} + u_{21}) = \\ &= \frac{1}{2} F_1 u_1 + \frac{1}{2} F_2 u_2 \end{aligned}$$

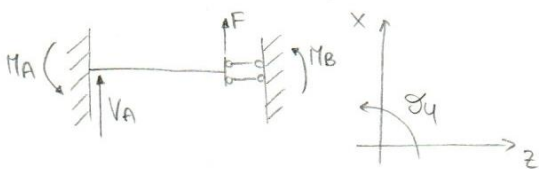
spostamento complessivo di 1
spostamento complessivo di 2

(La Trave di De Saint Venant è sistema disaccoppiato in cui vale il principio di sovrapposizione anche per il campo energetico)

**Strutture iperstatiche**

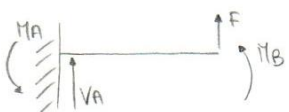
Inserendo la deformazione posso calcolare le reazioni vincolari anche per le strutture iperstatiche.

Prendiamo per esempio:



f)  $V_A + F = 0$   
 A)  $M_A + M_B + F \cdot e = 0$

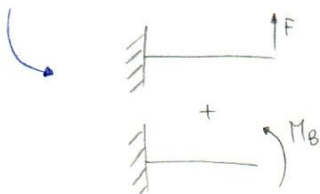
Dobbiamo trasformare la struttura in isostatica (eliminare qualche vincolo)



Abbiamo eliminato il doppio pendolo  $\rightarrow$

Sostituiamo il vincolo con ciò che rappresenta dal punto di vista fisico

$$\frac{du}{dz} (z=e) = 0$$



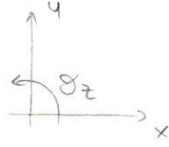
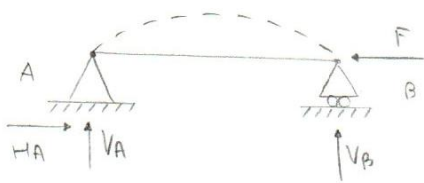
Divisione in 2 parti con F e MB applicati

# Progettazione BUCKLING

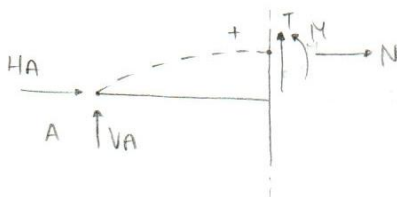
$$F_{CR} \propto \beta \frac{1}{e^{\alpha}} (A, I_{min}) E$$

vincolo

$$F_{CR} = \frac{\rho \cdot E}{e^{\alpha}} \quad [N] = \frac{N}{m^2} \cdot \frac{1}{m^{\alpha}} \cdot m \quad \rightarrow \quad \rho = \sqrt{\frac{I}{A}} = \text{parametro che permette il confronto tra area e momenti di inerzia diversi.}$$



$$\begin{aligned} \rightarrow) & H_A - F = 0 \rightarrow V_A = 0 \\ \uparrow) & V_A + V_B = 0 \rightarrow V_B = 0 \\ \curvearrowright) & V_B \cdot l = 0 \rightarrow H_A = F \end{aligned}$$



$$\begin{cases} H_A + N = 0 \\ V_A + T = 0 \\ M + T \cdot x - N \cdot v(x) = 0 \end{cases}$$

Anche N lavora con momento flettente. (ha braccio)

$$\begin{cases} N = -F \\ T = 0 \\ M = -F \cdot v(x) \end{cases}$$

Freccia elastica

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{-F \cdot v(x)}{EI}$$

condizione di equilibrio

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} + \frac{F}{EI} v(x) = 0$$

$$\omega^2 = \frac{F}{EI} > 0$$

$$v(x) = c_1 \cdot \sin(\omega x) + c_2 \cdot \cos(\omega x)$$

$$\begin{cases} v(x=0) = 0 \rightarrow c_2 = 0 \\ v(x=l) = 0 \rightarrow c_1 (\sin(\omega l)) = 0 \end{cases}$$

$c_1 = 0 \rightarrow v(x) = 0$   
NON CI INTERESSA (sarebbe rettilinea)

$$\omega l = k\pi \rightarrow \omega = \frac{k\pi}{l} \quad (k=1, \dots, n)$$

$$\Rightarrow v(x) = c_1 \sin\left(\frac{k\pi}{l} \cdot x\right)$$

$$\omega = \frac{k\pi}{l} \rightarrow \omega^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \rightarrow \frac{F}{EI} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \rightarrow F = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} EI$$

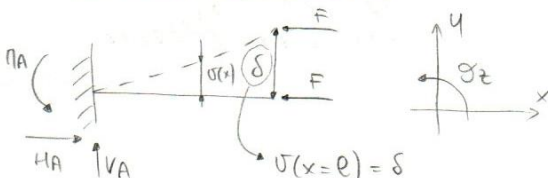
Quando arriviamo al limite dell'equilibrio la struttura crolla

con  $k=1$  otteniamo un tale valore critico per cui la struttura crolla

$$k=1 \Rightarrow F_{CR} = \frac{\pi^2}{l^2} EI \quad \text{Primo carico di collasso di EULERO}$$

APPOGGIATA/APPOGGIATA

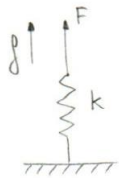
→ Altra Tipo di vincolo



$$\begin{aligned} \uparrow) & V_A = 0 \rightarrow V_A = 0 \\ \rightarrow) & H_A - F = 0 \rightarrow H_A = F \\ \curvearrowright) & H_A + F \cdot \delta = 0 \rightarrow H_A = -F \cdot \delta \end{aligned}$$



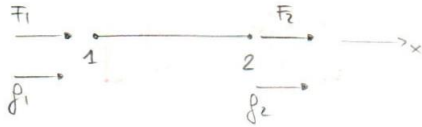
Molla



$F = kf \rightarrow$  posso descriverla anche come :

frecce  $f = \alpha F \rightarrow k = \frac{1}{\alpha} \rightarrow$  Descrizione comunque analitica  
non gestibile da un computer

$\rightarrow$  comportamento ASSIALE



Riferimento alla RIGIDEZZA  $\begin{cases} F_1 = k(f_1 - f_2) \\ F_2 = k(f_2 - f_1) \end{cases}$

Riferimento alla CEDEVOLEZZA  $\begin{cases} (f_1 - f_2) = \alpha F_1 \\ (f_2 - f_1) = \alpha F_2 \end{cases} \rightarrow F_1 = -F_2$

Differenza perché moto di corpo rigido praticamente

Scrittura non utile poiché non può essere generale

Adotto la scrittura con la RIGIDEZZA

Posso calcolare  $f_1$  e  $f_2$  solo se pongo le condizioni al contorno con dei vincoli  
Comportamento dei singoli elementi (Rigidezza)

Comportamento della struttura (Rigidezza)

Condizioni al contorno e condizioni di equilibrio finali

$$\begin{cases} F_1 = k_{11}f_1 + k_{12}f_2 \rightarrow k_{11} = k = k_{22} \\ F_2 = k_{21}f_1 + k_{22}f_2 \rightarrow k_{12} = -k = k_{21} \end{cases}$$

Vettore delle FORZE NODALI

Vettore degli SPOSTAMENTI NODALI

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$

sezione con 2 assi di simmetria  $\rightarrow$  baricentro coincide con il centro di TAGLIO

$$k_{11} = \frac{F_1}{f_1} \quad f_2 = 0 \rightarrow k_{11} = \frac{EA}{l}$$

$$k_{12} = \frac{F_1}{f_2} \quad f_1 = 0 \rightarrow k_{12} = -\frac{F_2}{f_2} = -\frac{EA}{l}$$

$f_2 = 0 \rightarrow$  Trave incastrata  
 $\int dx$   
1 2

$$F = \sigma A = \epsilon \cdot E \cdot A = \frac{\Delta l}{l} \cdot EA = \epsilon_l \cdot \frac{EA}{l}$$

la matrice si Trasforma  $\rightarrow \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & -\frac{EA}{l} \\ -\frac{EA}{l} & \frac{EA}{l} \end{bmatrix}$

subisce

CÁLCOLO delle CONDIZIONI AL CONTORNO

55

$$\{F\} = [k] \{p\}$$

Per trovare le condizioni al contorno o applichiamo condizioni sullo spostamento e abbiamo incognite sui carichi, oppure viceversa, applichiamo condizioni sui carichi, ma abbiamo incognite sugli spostamenti.

$$\{p_s\} \longleftrightarrow \{F_s\}$$

Nodi su cui applichiamo spostamenti

$$\{p_c\} \longleftrightarrow \{F_c\}$$

Nodi su cui applichiamo carichi

$$\begin{Bmatrix} \{F_s\} \\ \{F_c\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [k_{ss}] & [k_{sc}] \\ [k_{cs}] & [k_{cc}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{p_s\} \\ \{p_c\} \end{Bmatrix}$$

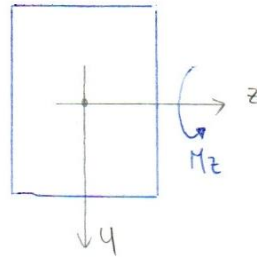
$$\begin{cases} \{F_s\} = [k_{ss}] \{p_s\} + [k_{sc}] \{p_c\} \\ \{F_c\} = [k_{cs}] \{p_s\} + [k_{cc}] \{p_c\} \end{cases}$$

Fingiamo di imporre condizioni qui rendendo  $\{p_s\}$  noto e trovando  $\{p_c\}$

$$\{p_c\} = [k_{cc}]^{-1} (\{F_c\} - [k_{cs}] \{p_s\}) \rightarrow \text{Sostituiamo nella prima e troviamo } \{F_s\}$$

Si può trovare la matrice inversa di  $[k_{cc}]$  solo se il sistema è ipostatico o iperstatico.

$$\sigma_{Mz} = -\frac{Mz}{Iz} \cdot y$$

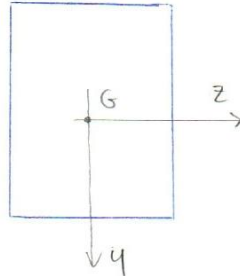


T di momento Torcente

$$\tau = \frac{Mt}{Wt}$$

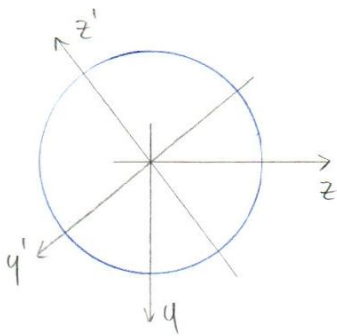
$$Wt = Ip/r$$

sezione con Mz, My, N



$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{My}{Iy} \cdot z - \frac{Mz}{Iz} \cdot y$$

sezione circolare con Mz My



$$M = My^2 + Mz^2$$

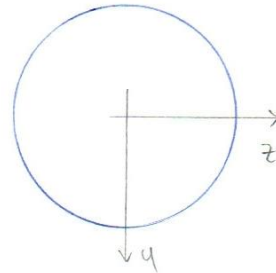
$$\text{Tg}\psi = Mz/My$$

$$\sigma_{xx} = \frac{M}{I} \cdot r$$

+ asse neutro

$$\text{Tg}\psi = \frac{My}{Mz} \cdot \frac{Iz}{Iy}$$

Sezione circolare con Mx



$$\tau_{xc} = \frac{Mx}{Ix} \cdot M$$

Formula di Jourawski  
parete sottile

$$\tau_z = \frac{T_x}{Iy \cdot s} \cdot sy^* + \frac{T_y}{I \cdot s} \cdot sx^*$$

Tensioni principali e sicurezza

coefficiente di sicurezza

$$cs = \frac{R_{eh}}{\sigma_{eq}}$$

$$\sigma_{eq}(\text{Tresca}) = \sigma_3 - \sigma_1$$

σ<sub>eq</sub>

Tresca

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

von Mises

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_{xy}^2}$$

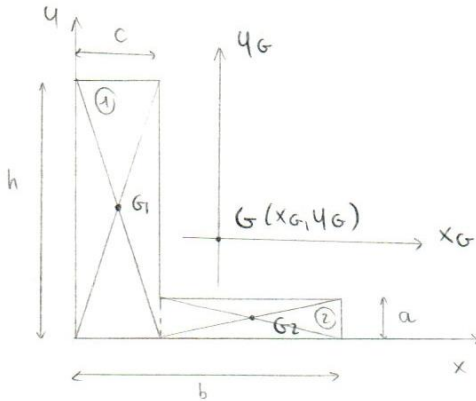


Esercitazione 3

Geometria delle aree

- Figura 1 -

[es.1] Calcolare posizione dei baricentri  $G$ , momenti di inerzia rispetto agli assi baricentrici e orientamento degli assi principali di inerzia nel piano.



Scomponiamo la sezione in pezzi più semplici  
Somma rettangoli ① e ②  
Mettiamo sistema di riferimento e baricentro  $G$

$$x_G = \frac{\sum S y_i}{A_{TOT}} \rightarrow \text{con } S y_i = A_i \cdot x_{G_i}$$

$$y_G = \frac{\sum S x_i}{A_{TOT}} \rightarrow \text{con } S x_i = A_i \cdot y_{G_i}$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= h \cdot c = 500 \cdot 150 = 75000 \text{ mm}^2 \\ A_2 &= a(b-c) = 100(400-150) = 25000 \text{ mm}^2 \end{aligned} \right\} A_{TOT} = A_1 + A_2 = 100000 \text{ mm}^2$$

$$\left\{ \begin{aligned} x_{G_1} &= c/2 = 75 \text{ mm} \\ y_{G_1} &= h/2 = 250 \text{ mm} \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} x_{G_2} &= c + \frac{(b-c)}{2} = 275 \text{ mm} \\ y_{G_2} &= a/2 = 50 \text{ mm} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} S x_1 &= A_1 \cdot y_{G_1} = 75000 \cdot 250 = 18750000 \\ S y_1 &= A_1 \cdot x_{G_1} = 75000 \cdot 75 = 5625000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S x_2 &= A_2 \cdot y_{G_2} = 25000 \cdot 50 = 1250000 \\ S y_2 &= A_2 \cdot x_{G_2} = 25000 \cdot 275 = 6875000 \end{aligned}$$

$$x_G = \frac{S y_1 + S y_2}{A_{TOT}} = \boxed{125 \text{ mm}}$$

$$y_G = \frac{S x_1 + S x_2}{A_{TOT}} = \boxed{200 \text{ mm}}$$

Manteniamo ora gli assi baricentrici e calcoliamo momento di inerzia

Per il rettangolo  $\rightarrow$

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{y_0} = \frac{b^3h}{12}$$

Momento di inerzia baricentrico è il minimo

Teorema del Trasporto  $\rightarrow$  calcolo di  $I$  rispetto a un asse parallelo

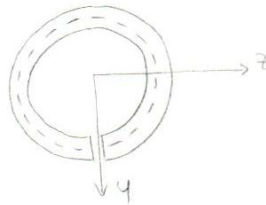
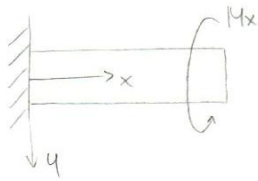
$$\begin{aligned} I_{x'} &= I_{x_0} + A \cdot d^2 \\ I_{x'} &= \frac{bh^3}{12} + (bh) \left(\frac{h}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Voglio ottenere momento di inerzia Totale baricentrico come somma delle sezioni

$$I_{x_G} = I_{x_{G_1}} + I_{x_{G_2}} \quad (\text{calcolati rispetto al baricentro!})$$

Esercizio 4

- (7) Sezione circolare cava ( $D=70\text{ mm}$ ,  $d=50\text{ mm}$ ) con momento torcente  $M_x = 5000\text{ Nm}$  :
- Tensione tangenziale massima?
  - " " su circonferenza di diametro =  $55\text{ mm}$ ?
  - " " massima in presenza di un taglio che interrompe la continuità?



- Sezione Tagliata -

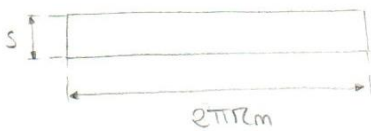
Avremo le  $\tau$  che agiscono anche sul bordo del Taglio.

Non possiamo utilizzare  $I_p$  della sezione cava normale.  $\rightarrow$  Sezione SOTTILE

per sezione circolare era  $\tau_{max} = \frac{M_t \cdot R}{I_p}$   
 ora dobbiamo srotolare la sezione ( $\rightarrow$  Rettangolo)

$$\tau_{max} = \alpha \frac{M_t}{ab^2}$$

coefficiente tabellato in base al rapporto  $\frac{a}{b}$   
 $\frac{a}{b} \sim \infty \rightarrow \alpha = 3$  in questo caso

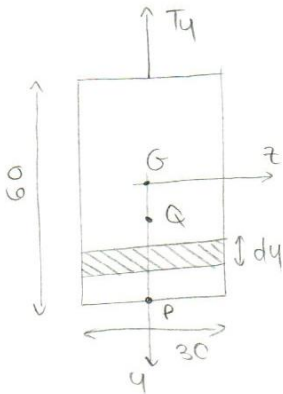


$$\begin{cases} s = \frac{D-d}{2} \\ \alpha = 3 \\ r_m = \frac{D+d}{4} \text{ (raggio medio)} \end{cases}$$

$$\tau_{max} = 3 \cdot \frac{M_t}{2\pi r_m \cdot s^2} = 3 \cdot \frac{5000 \cdot 10^3}{2\pi \cdot 30 \cdot 10^2} = 795,8\text{ MPa}$$

$\tau_{max}$  (sezione circolare) =  $100\text{ MPa}$   $\rightarrow$  + adatta a sforzi torcenti

- (13) Sezione rettangolare ( $b=30\text{ mm}$ ,  $h=60\text{ mm}$ ) con  $T_y = 1,5 \cdot 10^9\text{ N}$  nella direzione del lato maggiore. Tensioni tangenziali in  $G(0,0)$ ,  $Q(0,10)$ ,  $P(0,30)$ ? con  $T_z = 1,3 \cdot 10^9\text{ N}$  nella direzione del lato minore: Tensioni tangenziali in  $G(0,0)$ ,  $Q'(15,0)$ ,  $P'(15,0)$ ?



$$\tau = \frac{T}{I_z \cdot c} \int c \cdot y \, dy$$

corda = lunghezza del materiale perpendicolare a T

$$\tau = \frac{T_y}{I_z \cdot b} \int_0^{h/2} b \cdot y \, dy = \frac{T_y}{I_z \cdot b} \left[ b \cdot \frac{y^2}{2} \right]_0^{h/2} = \frac{T_y}{I_z} \left[ \frac{h^2}{8} - \frac{y^2}{2} \right]$$

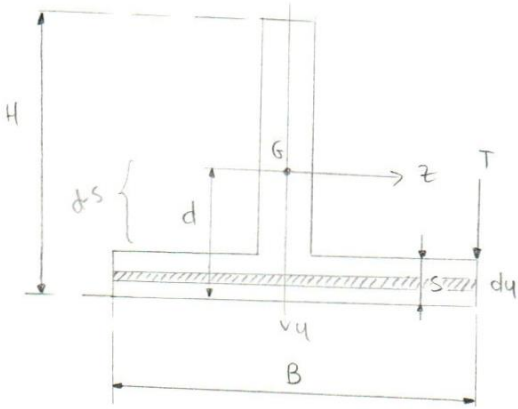
$$\begin{cases} \tau(0,0) = 12,5\text{ MPa} \\ \tau(0,10) = 11\text{ MPa} \\ \tau(0,30) = 0\text{ MPa} \end{cases}$$

sostituzione delle coordinate

$T_z$ : scarico sulle spallette quindi per essere in sicurezza non considero rettangolo centrale.

$$\tau_{amm} = \frac{3}{2} \frac{T_z}{b \cdot z_{s1}} \implies T_z = \frac{\tau_{amm} \cdot b \cdot s_1 \cdot 4}{3}$$

(16) Trave con sezione a T ( $H = 120 \text{ mm}$ ,  $s = 13 \text{ mm}$ ): calcolare sollecitazione a taglio massimo in presenza di un carico  $T = 40 \text{ kN}$  all'estremità.



$$d = 39,8$$

$$I_z = 400 \text{ cm}^4$$

$$I_y = 189 \text{ cm}^4$$

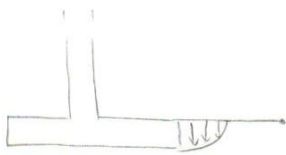
Materiale sollecitato è quello al di sotto di T

$$\tau = \frac{T}{I_z \cdot b} \int_{d-s}^d B \cdot y \, dy =$$

$$= \frac{40'000}{4'000'000 \cdot 120} \left[ B \frac{y^2}{2} \right]_y^{39,8}$$

$$\tau_{max} (y = 21,8) = 3,68 \text{ MPa}$$

Andamento



$$\tau = \frac{T}{I_z \cdot s} \left[ \int_{d-s}^d B y \, dy + \int_y^{d-s} s \cdot y \, dy \right] = 36,39 \text{ MPa}$$

↳ Dove si restringe la corda (inizia della parte verticale)

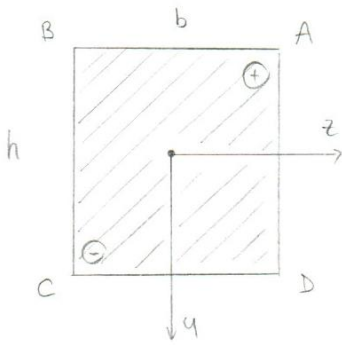
Per sezioni che posso dividere in più rettangoli

$$\tau_{max} = \frac{M \tau \cdot s_{max}}{I_T}$$

↳ Momento di inerzia equivalente  $I_T = \frac{1}{3} \sum a_i s_i^3$   
 elungo (↑) e corto (↓)



- (3) Sezione rettangolare in figura ( $b = 40 \text{ mm}$ ,  $h = 80 \text{ mm}$ ) calcolare le Tensioni nei quattro spigoli, dovute alla presenza contemporanea dei momenti flettenti  $M_z = 10'000 \text{ Nm}$ ,  $M_y = 4000 \text{ Nm}$  e di uno sforzo normale  $N = 69'000 \text{ N}$ .



$$\sigma_{xx} = \frac{N}{A} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} - \frac{M_z \cdot y}{I_z}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{69000}{40 \cdot 80} + \frac{4000 \cdot 1000}{\frac{b^3 h}{12}} - \frac{10'000 \cdot 1000}{\frac{b h^3}{12}} y =$$

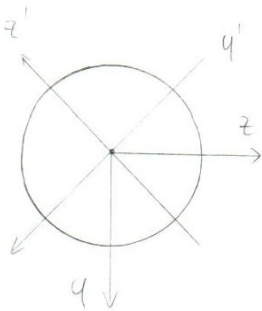
$$= 20 + 9,3 z - 5,94 y = 0$$

$$\begin{cases} z = 0 & y = \frac{20}{5,9} = 3,4 \\ y = 0 & z = \frac{-20}{9,3} = -2,2 \end{cases}$$

A (-40, 20) → = 442  
 B (-40, -20) → = 70  
 C (40, -20) → = -402  
 D (40, 20) → = -30

Tensioni sugli spigoli

- (4) Calcolare la Tensione massima e minima nella sezione circolare ( $d = 50 \text{ mm}$ ) soggetta ai momenti flettenti  $M_z = -5000 \text{ Nm}$  e  $M_y = -3000 \text{ Nm}$

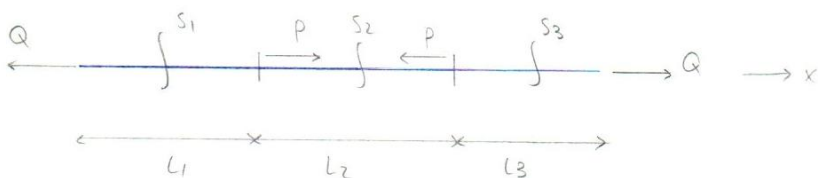


$$M = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$\text{Tg} \varphi = \frac{M_z}{M_y} \rightarrow \varphi = 59^\circ$$

$$\sigma_{xx} = \pm \frac{M}{I} \cdot \frac{d}{2}$$

- (5) Asta di acciaio rappresentata in figura ha sezione circolare di raggio  $r$ . Si chiede di calcolare la massima Tensione  $\sigma_x$  e allungamento massimo  $\Delta \ell$  dell'intera asta ( $r = 25 \text{ mm}$ ,  $L_1 = 400 \text{ mm}$ ,  $L_2 = 800 \text{ mm}$ ,  $Q = 30'000 \text{ N}$ ,  $P = 10'000 \text{ N}$ )



Divido in sezioni

(S1) ← Q → N → N = Q  
 (S2) ← Q → P → N → N + P - Q = 0 → N = Q - P  
 (S3) dx ← N → Q → N = Q



Esercitazione 5

- Resistenza statica -

- (es.1) 1. Calcolare gli invarianti  $I_1, I_2, I_3$  dello stato delle tensioni  
 2. Calcolare Tensioni principali, radici dell'eq. caratteristica  $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$   
 3. Tracciare cerchi di Mohr

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 100 & 30 & 0 \\ 30 & -150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \sigma_y\sigma_x - \tau_{xy}^2 + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xz}^2 + \sigma_y\sigma_z - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}$$

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$$

$$I_1 = 100 - 150 = -50 \text{ MPa}$$

$$I_2 = -15900 \text{ MPa}$$

$$I_3 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma^3 + 50\sigma^2 - 15900\sigma = 0$$

$$\sigma(\sigma^2 + 50\sigma - 15900) = 0$$

$$\sigma_a = 0$$

$$\sigma_{b,c} = \frac{-50 \pm \sqrt{50^2 + 4 \cdot 15900}}{2} = \begin{cases} 103,5 \text{ MPa} \\ -153,5 \text{ MPa} \end{cases}$$

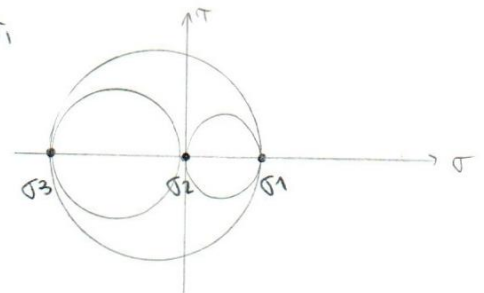
Sappiamo convenzionalmente che poniamo  $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$

Di conseguenza

$$\sigma_1 = 103,5 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = -153,5 \text{ MPa}$$



- (es.2) 1. Tracciare cerchi di Mohr  
 2. Determinare Tensioni principali  
 3. Per un materiale DUTILE, calcolare la Tensione minima di snervamento che garantisce un coefficiente di sicurezza  $CS=2$ .

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 80 & 0 \\ 80 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 500 \end{bmatrix}$$

Non ci sono Tensioni lungo z  
 Di conseguenza so già che è una Tensione principale  
 $\sigma_a = 500 \text{ MPa}$

Matrice 2x2 rimasta va trattata come stato di Tensione piano

In tal modo: centro  $C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{250 + 150}{2} = 200 \text{ MPa}$

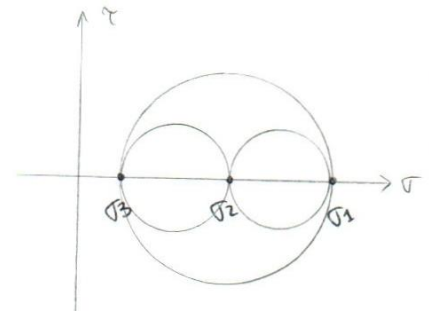
raggio  $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} = \sqrt{50^2 + 80^2} = 94,3 \text{ MPa}$

$$\sigma_{b,c} = C \pm R = \begin{cases} 105,7 \text{ MPa} \\ 294,3 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 500 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = 294,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = 105,7 \text{ MPa}$$



Coefficiente di sicurezza

$$CS = \frac{R_{eq}}{\sigma_{eq}} \rightarrow \text{Tensione di snervamento}$$

$\sigma_{eq} \text{ (Tresca)} = \sigma_1 - \sigma_3 = 500 - 106 = 394 \text{ MPa}$

$\sigma_{eq} \text{ (v. Mises)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} = 391,3 \text{ MPa}$

$R_{eq} \text{ (Tresca)} = \sigma_{eq} \cdot CS = 394 \cdot 2 = 788 \text{ MPa}$

$R_{eq} \text{ (v. Mises)} = \sigma_{eq} \cdot CS = 391,3 \cdot 2 = 683 \text{ MPa}$

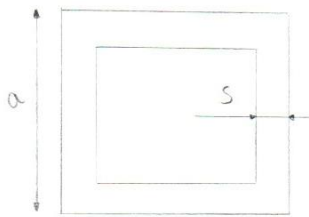
$$\tau_{eq} \text{ (Tresca)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 2\tau \rightarrow \tau_{max} = \frac{\tau_{eq}}{2} = \frac{\tau_{amm}}{2} = \frac{126}{2} = 63 \text{ MPa}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} \rightarrow M_t = \tau_{max} \cdot W_t = 63 \cdot 12566 = 792'000 \text{ Nmm} = \boxed{792 \text{ Nm}}$$

↳ massimo che posso applicare

(es. 5) Una barra a sezione quadrata cava di lato  $a = 40 \text{ mm}$  e spessore  $s = 4 \text{ mm}$  è sollecitata da una forza di trazione  $N = 6 \cdot 10^4 \text{ N}$  e da un momento flettente  $M = 6 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$ . Il materiale ha tensione di rottura  $R_m = 520 \text{ MPa}$  e snervamento  $R_{eH} = 355 \text{ MPa}$ . Calcolate il coefficiente di sicurezza secondo le ipotesi appropriate.

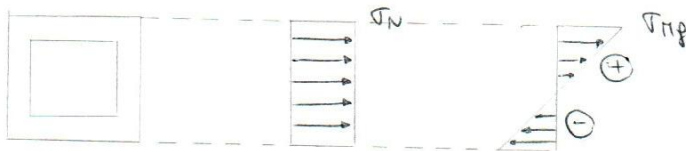
Quale spessore della sezione si deve adottare per garantire un  $cs = 3$ ?



$$\sigma_A = \frac{N}{A} = \frac{60'000}{a^2 - (a-2s)^2} = \frac{60'000}{576} = 104 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{Mf \text{ max}} = \frac{M_f}{W_f} = \frac{600'000}{6297} = 95,3 \text{ MPa}$$

$$W_f = \frac{I}{d_{max}} = \left[ \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2s)^4}{12} \right] \frac{2}{a}$$



calcolo del coefficiente di sicurezza

$$\tau_{eq} \text{ (Tresca)} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = 199,5 \text{ MPa}$$

$$cs = \frac{R_{eH}}{\tau_{eq}} = \frac{355}{199,5} = \boxed{1,78}$$

Vogliamo ora che  $\frac{R_{eH}}{\tau_{eq}} = 3$

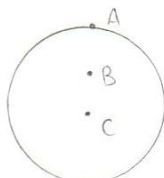
Sappiamo che  $\tau_{eq} = \sigma_N + \sigma_{Mf}$   
quindi riserviamo  $\tau_{eq}$  tenendo  $s$  come incognita

$$\tau_{eq} = \frac{N}{a^2 - (a-2s)^2} + \frac{M_f}{\left[ \frac{a^4}{12} - \frac{(a-2s)^4}{12} \right] \frac{2}{a}} = \frac{R_{eH}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{s = 8,6 \text{ mm}}$$

(es. 7) Una barra in ghisa ( $R_m = 240 \text{ MPa}$ ) a sezione circolare piena di diametro  $d = 35 \text{ mm}$  è sollecitata da momento torcente  $M_t = 500 \text{ Nm}$  e carico  $N = 100 \text{ kN}$

1. Tracciare cerchi di Mohr relativi al centro ( $r=0$ ), alla sezione intermedia ( $r=d/4$ ) e al bordo esterno ( $r=d/2$ )
2. Calcolare  $cs$  nel punto più sollecitato della sezione adottando ipotesi di rottura appropriate.



$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{100}{\pi r^2} = 104 \text{ MPa}$$

$$\tau_{M_t} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \begin{cases} r = d/2 \rightarrow \tau_A = 59,9 \text{ MPa} \\ r = d/4 \rightarrow \tau_B = 29,7 \text{ MPa} \\ r = 0 \rightarrow \tau_C = 0 \end{cases}$$



$$\textcircled{B} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{HGB} = 80 \text{ MPa} \\ \sigma_{NB} = 24 \text{ MPa} \end{array} \right\} \sigma_B = \sigma_{HG} + \sigma_N = 104 \text{ MPa}$$

$$\tau_{HCB} = 48 \text{ MPa}$$

$$[\sigma]_B = \begin{bmatrix} 104 & 48 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma_1 = 122 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -19 \text{ MPa} \end{array}$$

$$\textcircled{C} \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_{HGC} = 0 \\ \sigma_{NC} = 24 \text{ MPa} \\ \tau_{HCc} = 0 \end{array} \right\} \sigma_C = 24 \text{ MPa}$$

$$[\sigma]_C = \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma_1 = 24 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \text{ MPa} \end{array}$$

DE  
Stato di tensione uguale

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{ND} = 24 \text{ MPa} \\ \sigma_{HGD} = 0 \text{ (ai lati)} \\ \tau_{HCD} = 48 \text{ MPa} \end{array} \right\} \sigma_D = 24 \text{ MPa}$$

$$[\sigma]_{D,E} = \begin{bmatrix} 24 & 48 & 0 \\ 48 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \sigma_1 = 61,4 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = -37,5 \text{ MPa} \end{array}$$

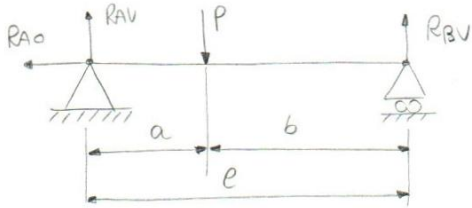
Dobbiamo ora calcolare  $R_{eq}$  considerando il punto

$$c_s = 2,5$$

$$\sigma_{eq} = \sigma_3 - \sigma_1 = 122 - (-19) = 141 \text{ MPa}$$

$$R_{eq} = c_s \cdot \sigma_{eq} = 141 \cdot 2,5 = 353 \text{ MPa}$$

- (1) Trave su due appoggi (acciaio, sezione quadrato lato  $h$ ) caricata da  $P = 500 \text{ N}$ .  $l = 1,5 \text{ m}$   
 $a = 0,6 \text{ m}$ ,  $h = 0,1 \text{ m}$ ,  $q = 0,765 \text{ N/mm}$ .
- Diagrammi di Taglio e Momento flettente?
  - Andamento delle tensioni  $\tau$  tenendo conto sia di  $P$  che del peso della trave?
  - Tensione di flessione massima  $\sigma_{\text{max}}$ ?
  - Freccia massima tenendo conto di  $P$  e  $q$ ?



Reazioni

$\rightarrow) R_{A0} = 0$   
 $\uparrow) R_{BV} + R_{AV} - P = 0 \rightarrow R_{AV} = 300 \text{ N}$   
 $\rightarrow) -P \cdot a + R_{BV} \cdot l = 0 \rightarrow R_{BV} = 200 \text{ N}$

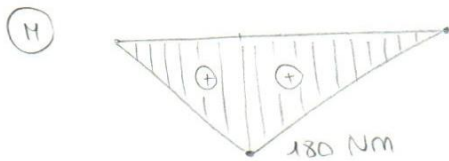
Sollecitazioni

$\textcircled{I}$ 
 $\textcircled{T}$   $T + R_{AV} = 0 \rightarrow T = -300 \text{ N}$   
 $\textcircled{M}$   $M - R_{AV} \cdot x = 0 \rightarrow M = R_{AV} \cdot x$

$\rightarrow x = 0 \rightarrow M_g = 0$   
 $\rightarrow x = a \rightarrow M_g = 180 \text{ Nm}$

$\textcircled{II}$ 
 $\textcircled{T}$   $T = P - R_{AV} = 200 \text{ N}$   
 $\textcircled{M}$   $M_g = R_{AV} \cdot x - P(x - a)$

$\rightarrow x = a \rightarrow M_g = 180 \text{ Nm}$   
 $\rightarrow x = l \rightarrow M_g = 0$



Freccia massima

Dove c'è  $M_g$  massimo

$\textcircled{I}$   $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = \frac{Pb}{eEI}$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( \frac{Pb}{e} \frac{x^2}{2} \right) + A$   
 $y = \frac{1}{EI} \left( \frac{Pb}{e} \frac{x^3}{6} \right) + Ax + B$

$\textcircled{II}$   $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Pax}{e} + Pa \right)$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Pa}{e} \frac{x^2}{2} + Pa x \right) + A$   
 $y = \frac{1}{EI} \left( -\frac{Pa}{e} \frac{x^3}{6} + \frac{Pa x^2}{2} \right) + Ax + B$

per  $x = 0 \rightarrow y_I = 0$   
 $x = l \rightarrow y_{II} = 0$   
 $x = a \rightarrow y_I = y_{II}$   
 $x = a \rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_I = \frac{dy}{dx} \Big|_{II}$

} 4 condizioni

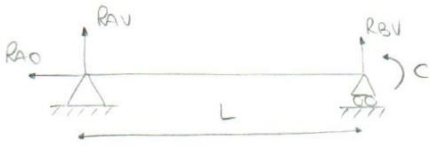
$A_I = \frac{1}{EI} \left( \frac{Pba^2}{2e} \right)$   
 $B_I = 0$   
 $A_{II} = \frac{1}{EI} \left( Pa^2 - \frac{Pa^3}{2e} \right)$   
 $B_{II} = \frac{1}{EI} \left( \frac{Pal^3}{3} - Pa^2l - \frac{Pa^3}{2} \right)$

$\Rightarrow y_I \text{ max} = 0,0123 \text{ mm}$

$$y_{\max} = y(x=l) = \left( \frac{pe^3}{6} - \frac{pe^2}{2} - \frac{qe^2}{2q} - \frac{qe^4}{q} \right) \cdot \frac{1}{EI} = 0,155 \text{ m}$$

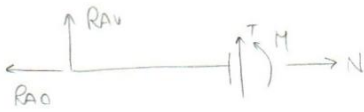
(4) Determinare le rotazioni agli estremi e la freccia massima della struttura schematizzata.

$C = 5000 \text{ Nmm}$   
 $L = 1500 \text{ mm}$   
 $I_z = 0,8 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$   
 $E = 2,06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$



$$\begin{cases} R_{AO} = 0 \\ R_{BV} = -3,3 \text{ N} \\ R_{AV} = 3,3 \text{ N} \end{cases}$$

Sollecitazioni



$$M = R_{AV} \cdot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{R_{AV} \cdot x}{EI}$$

$$\begin{aligned} y(x=0) = 0 &\rightarrow B = 0 \\ y(x=L) = 0 &\rightarrow A = -\frac{R_{AV} \cdot L^2}{6EI} \end{aligned}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{R_{AV} \cdot x^2}{2EI} + A$$

$$y = \frac{R_{AV} \cdot x^3}{6EI} + Ax + B$$

Freccia massima

$$\rightarrow y = \frac{R_{AV} \cdot x^3}{6EI} - \frac{R_{AV} \cdot L^2 \cdot x}{6EI}$$

Per trovare  $x_{\max}$  dobbiamo calcolare  $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x_{\max} = \frac{L}{\sqrt{3}} = 866 \text{ mm}$

↳ Di conseguenza posso trovare

$$y_{\max} = y(x = 0,866) = -0,049 \text{ mm}$$

Rotazioni agli estremi

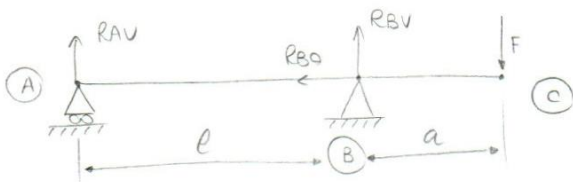
$$\alpha_A = \frac{dy}{dx}(x=0) = -7,58 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$$

$$\alpha_B = \frac{dy}{dx}(x=L) = 1,52 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

(5) Trave di Tetlon ( $E = 0,55 \text{ GPa}$ ) a sezione rettangolare cava e sollecitata da  $F = 80 \text{ N}$ .

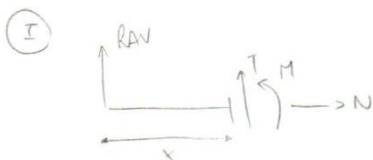
$B = 40 \text{ mm}$ ,  $b = 34 \text{ mm}$ ,  $H = 50 \text{ mm}$ ,  $h = 44 \text{ mm}$ ,  $e = 0,5 \text{ m}$ ,  $a = 0,2 \text{ m}$ .

- Rotazione delle sezioni in A, B, C
- Freccia nel punto C nella configurazione deformata
- Ripetere calcoli utilizzando sovrapposizione degli effetti



$$\begin{cases} R_{AV} = -F \cdot \frac{a}{e} \\ R_{BV} = F + F \cdot \frac{a}{e} \end{cases}$$

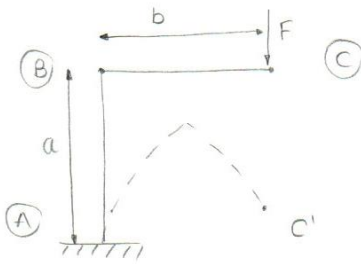
Sollecitazioni



$$\begin{cases} N = 0 \\ T = -R_{AV} \\ M = R_{AV} \cdot x \end{cases} \begin{aligned} &\rightarrow x=0 \rightarrow M=0 \\ &\rightarrow x=e \rightarrow M=-Fa \end{aligned}$$



- (6) Sezione circolare cava a diametri variabili ( $D_1, d_1, d_2, D_2$ ). I Tubolari hanno lunghezza  $a = 3\text{ m}$ ,  $b = 1\text{ m}$ . Il materiale è una lega di alluminio ( $E = 70\text{ GPa}$ ). Carico  $F = 10\text{ N}$ .
- Rotazione delle sezioni in B e C
  - spostamento orizzontale e verticale in C nella configurazione deformata.



Tratto BC



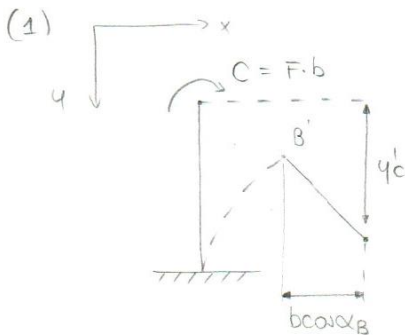
Tratto AB



$$D_1 = 36\text{ mm}, d_1 = 30\text{ mm}$$

$$D_2 = 22\text{ mm}, d_2 = 18\text{ mm}$$

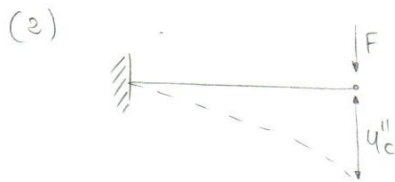
consideriamo le due deformazioni separate :



Considero BC che rimane rigido

$$y'_C = b \cdot \alpha_B$$

$$x'_B = ?$$



$\alpha''_C$

Mettiamo insieme alla fine :

$$y_C = y'_C + y''_C$$

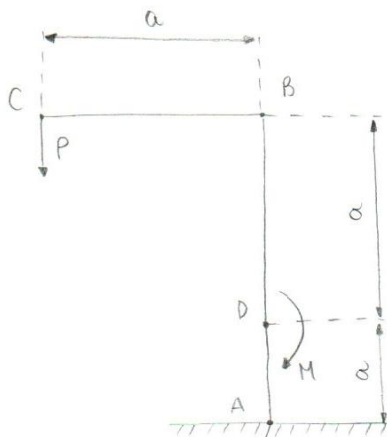
$$\alpha_C = \alpha_B + \alpha''_C$$

$$x_C = x'_B + b - b \cos \alpha_B$$

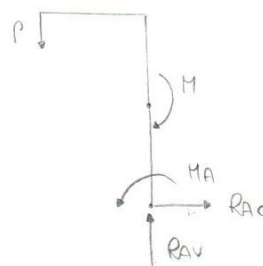
## Tema d'esame

- (1) Struttura in acciaio : determinare espressioni degli sforzi in ciascuna campata e disegnare i diagrammi, individuare il punto più sollecitato e calcolare CS utilizzando idonea ipotesi di cedimento. Calcolare spostamento orizzontale di C nell'ipotesi di piccoli spostam.

$a = 4\text{ m}$ ,  $P = 500\text{ N}$ ,  $M = 250\text{ Nm}$ , sezione quadrata  $c = 50\text{ mm}$ , materiale S235 ( $R_{p0.2} = 235\text{ MPa}$ )



Reazioni vincolari



$$\rightarrow) R_{A0} = 0$$

$$\uparrow) R_{AV} - P = 0 \rightarrow R_{AV} = 500\text{ N}$$

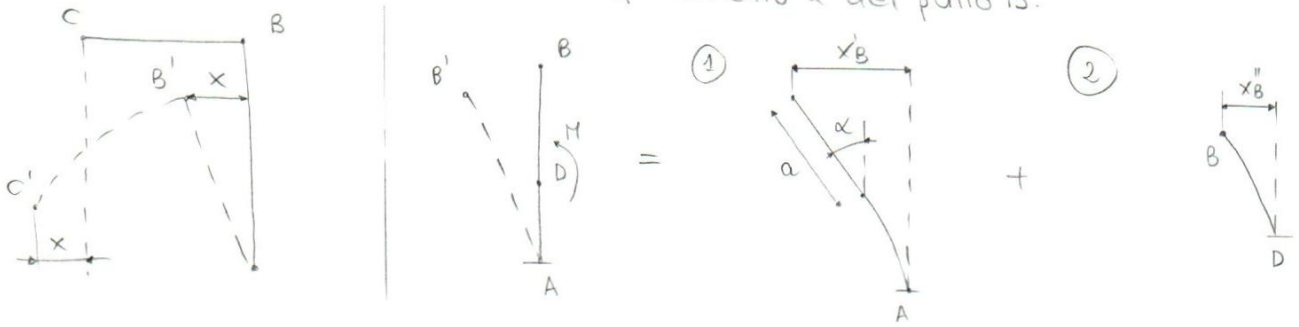
$$\curvearrowright) F_a + M_A - M = 0$$

$$\rightarrow M_A = -250\text{ Nm}$$

Spostamento orizzontale del punto C

Utilizziamo sovrapposizione degli effetti:

Considerando piccoli spostamenti → Possiamo calcolare in egual modo lo spostamento  $x$  del punto B.



- ① Considero bloccato BD e deformato AD
- ② Applico deformazione su BD tenendolo bloccato D

$$x_B = x'_B + x''_B$$

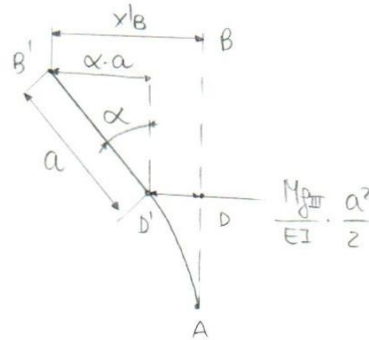
①

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{M}{EI}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{M}{EI}y + \alpha$$

← incastro A, B = 0

$$x = \frac{My^2}{2EI} + \alpha y + \beta$$



$$x'_B = \frac{M_DIII}{EI} \cdot \frac{a^2}{2} + \alpha a =$$

$$= \frac{M_DIII}{EI} \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{M_DIII}{EI} \cdot a \cdot a = \frac{250}{210000 \cdot I} \cdot \frac{1000^2}{2} + \frac{250}{EI} \cdot 1000^2 = 3,6 \text{ mm}$$

②

$$x''_B = \frac{M_DII}{EI} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{500}{EI} \cdot \frac{1000^2}{2} = 2,4 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow x_B = x'_B + x''_B = 6 \text{ mm}$$

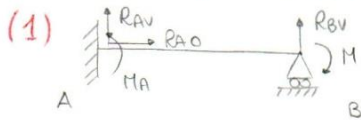
(2) Sezione di un profilato rettangolare cavo di spessore costante ( $B = 100 \text{ mm}$ ,  $b = 80 \text{ mm}$ ,  $H = 60 \text{ mm}$ ,  $h = 40 \text{ mm}$ ). Nella sezione sono presenti un momento flettente  $M_z = 120 \text{ Nm}$  e uno sforzo di taglio  $T_y = 2000 \text{ N}$ .

coordinate del baricentro della figura e momento inerzia utile alla soluzione di punti a), b) e rispetto al sistema baricentrico.

- Determinare:
- (a) espressione analitica dell'andamento della tensione  $\tau_{xy}$  dovuta a  $T_y$  al variare di  $y$  e i valori di  $\tau$  nei punti importanti.
  - (b) espressione analitica dell'andamento di  $\sigma_x$  dovuta a  $M_z$  al variare di  $y$  e i valori di  $\sigma$  nei punti importanti.
  - (c) punto più sollecitato della sezione.

## ESERCITAZIONE 8

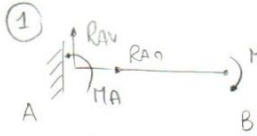
### - Strutture iperstatiche -



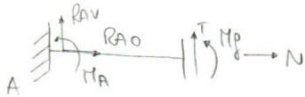
Reazioni vincolari

$$\begin{aligned} \rightarrow) RA0 &= 0 \\ \uparrow) RAV + RBV &= 0 \\ \curvearrowright) MA - M + RBV \cdot L &= 0 \end{aligned}$$

Scomponiamo in due sistemi (Ridotto, Supplementare)



$$\begin{aligned} \rightarrow) RA0 &= 0 \\ \uparrow) RAV &= 0 \\ \curvearrowright) MA - M &= 0 \rightarrow MA = M \end{aligned}$$



$$M_p = -MA$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{MA}{EI}$$

condizioni

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{MA \cdot x}{EI} + A$$

$$\frac{dy}{dx}(x=0) = 0 \rightarrow A = 0$$

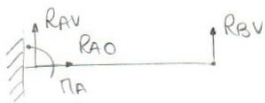
$$y = -\frac{MA \cdot x^2}{2EI} + B$$

$$y(x=0) = 0 \rightarrow B = 0$$

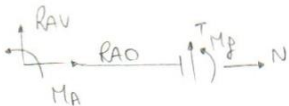
$$y_1(x=L) = -\frac{MA \cdot L^2}{2EI} = -\frac{ML^2}{2EI}$$

② Nel sistema supplementare

MA carichi esterni  
Inseriamo la reazione RBV del carrello come carico ext



$$\begin{aligned} \rightarrow) RA0 &= 0 \\ \uparrow) RAV - RBV &= 0 \\ \curvearrowright) MA + RBV \cdot L &= 0 \rightarrow MA = -RBV \cdot L \end{aligned}$$



$$M_p = -MA + RAV \cdot x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{MA + RAV \cdot x}{EI}$$

condizioni

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{MA \cdot x}{EI} + \frac{RAV \cdot x^2}{2EI} + A$$

$$\frac{dy}{dx}(x=0) = 0 \rightarrow A = 0$$

$$y = \frac{MA \cdot x^2}{2EI} + \frac{RAV \cdot x^3}{6EI} + B$$

$\rightarrow RBV \cdot L$

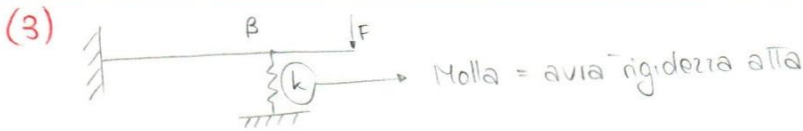
$$y(x=0) = 0 \rightarrow B = 0$$

$$y_2(x=L) = \frac{RBV \cdot L^3}{3EI}$$

$y_{Tot} = y_1 + y_2 = 0$  Nel sistema completo  
 $y = 0$  per la presenza del carrello

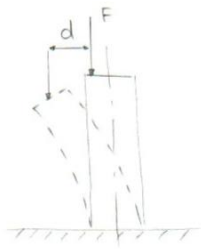
$$\Rightarrow -\frac{ML^2}{2EI} + \frac{RBV \cdot L^3}{3EI} = 0 \Rightarrow RBV = \frac{3M}{2L} \Rightarrow \begin{aligned} RBV &= -\frac{3}{2} \frac{M}{L} \\ MA &= -\frac{1}{2} M \end{aligned}$$





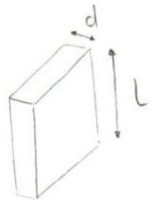
$$\rightarrow R_{Bv} = y(x=2l) \cdot k$$

$F = kx \rightarrow$  alla fine quindi avvia piccolo spostamento in B  $\rightarrow y_B = \frac{R_{Bv}}{k}$



Si genera  $M_p = F \cdot d$

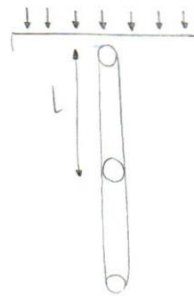
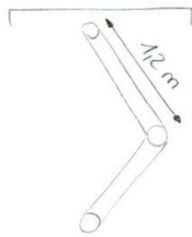
Devo usare Travi snelle  $\rightarrow L/d_{min} \geq 10$



$$\rightarrow L/b \geq 10$$

(11) Si dimensioni la biella di una pompa a stantuffo alternativa sapendo che la pressione del gas è pari a 3 bar. Il diametro dello stantuffo è di 400 mm e l'asta, di sezione circolare, è lunga 1,2 m. Si utilizzi l'acciaio da bonifica C35 UNI EN 10083 ( $R_{eH} = 380$  MPa)

$P = 3 \text{ bar} = 0,3 \text{ MPa}$   
 $D = 400 \text{ mm}$   
 $L = 1,2 \text{ m}$   
 $R_{eH} = 380 \text{ MPa}$



$$F = P \cdot A$$

$$F = 0,3 \cdot \frac{\pi \cdot 400^2}{4} = 37700 \text{ N}$$

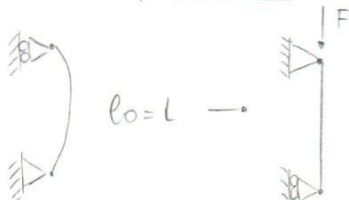
Area della biella?

$$A_B = \frac{F}{\sigma_N} = \frac{F}{R_{eH}} = \frac{37700}{380} = 99,2 \text{ mm}^2$$

$$d = \sqrt{\frac{4A_B}{\pi}} = 11,22 \text{ mm} \rightarrow \text{Rapporto con lunghezza} \geq 10$$

$$P_{ce} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{l_0^2} \rightarrow \text{carico critico}$$

Sistema equivalente



$$I_{min} = \frac{\pi \cdot 11,2^4}{64} = 772,4 \text{ mm}^4$$

$$P_{ce} = \frac{\pi \cdot 210'000 \cdot 772,4}{1200^2} = 353,8 \text{ N}$$

Impostiamo ora il carico  $P_{ce}$  come  $F$  applicata

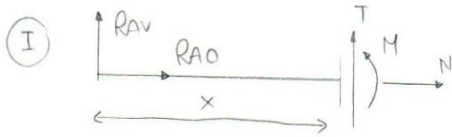
$$P_{ce} = 37700 \text{ N}$$

$$I_{min} = \frac{P_{ce} \cdot l_0^2}{\pi E} = \frac{37700 \cdot 1200^2}{\pi \cdot 210'000} = 26493 \text{ mm}^4$$

calcolo diametro  $\rightarrow d = \sqrt[4]{\frac{I_{min} \cdot 64}{\pi}} = 28 \text{ mm}$

Devo avere almeno 28 mm di diametro

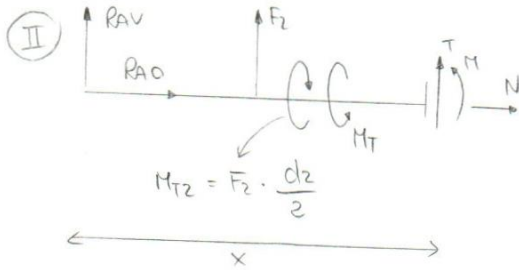
Sollecitazioni



$N) N + RAO = 0 \rightarrow N = 0$   
 $T) RAV + T = 0 \rightarrow T = 1150 \text{ N}$   
 $M) M - RAV \cdot x = 0 \rightarrow M = RAV \cdot x$

$\rightarrow x=0, M=0$   
 $\rightarrow x=a/2, M = -718,75 \text{ Nm}$

+M<sub>T</sub>) M<sub>T</sub> = 0

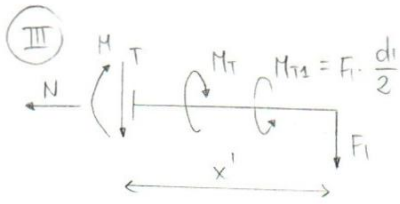


$N) N = 0$   
 $T) T + RAV + F_2 = 0 \rightarrow T = 650 \text{ N}$   
 $M) M - RAV \cdot x - F_2 \cdot (x - \frac{a}{2}) = 0$

$\rightarrow M$

$\rightarrow x = a/2, M = -718,75 \text{ Nm}$   
 $\rightarrow x = a, M = -1125 \text{ Nm}$

+M<sub>T</sub>) M<sub>T</sub> = F<sub>2</sub> ·  $\frac{d_2}{2}$  = 60 Nm



$N) N = 0$   
 $T) -T - F_1 = 0 \rightarrow T = -1500 \text{ N}$   
 $M) M + F_1 \cdot x' = 0$

$\rightarrow x' = 0, M = 0$   
 $\rightarrow x' = (e - a), M = -1125 \text{ Nm}$

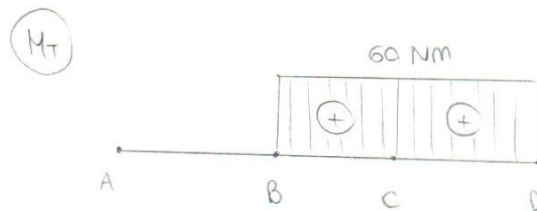
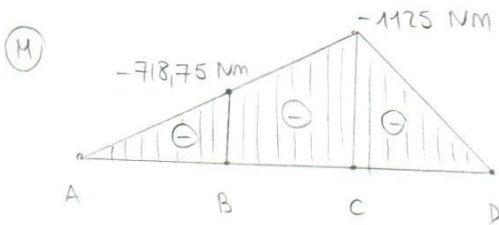
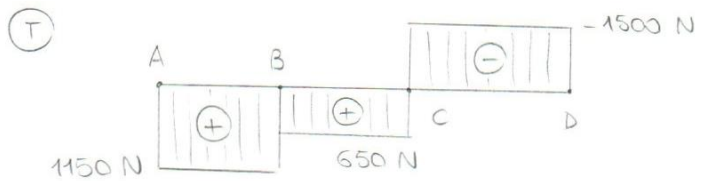
+M<sub>T</sub>) M<sub>T</sub> = F<sub>1</sub> ·  $\frac{d_1}{2}$  = 60 Nm

→ Dal punto di vista del solo momento torcente

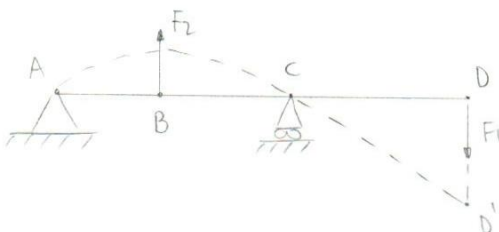
Le forze nelle pulegge creano una coppia torcente che entra in B ed esce in D dove c'è la seconda puleggia. Di conseguenza il tratto AB = scarico e il tratto BC = carico.

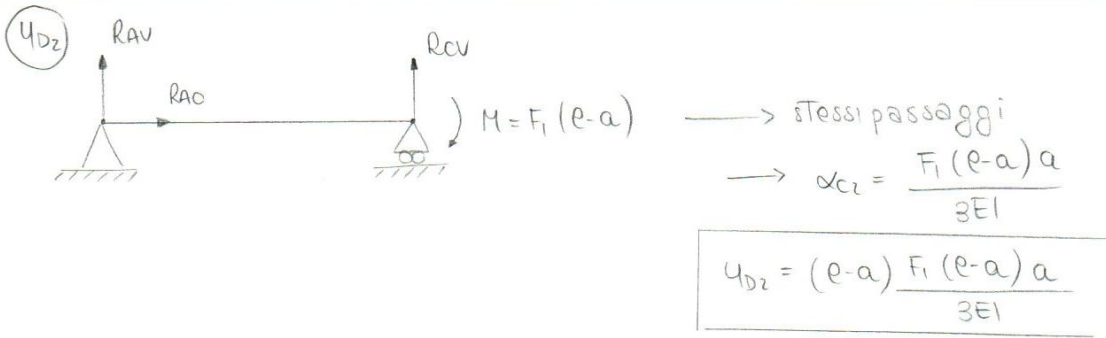
Aggiungo M<sub>T</sub> nelle sollecitazioni

Diagrammi



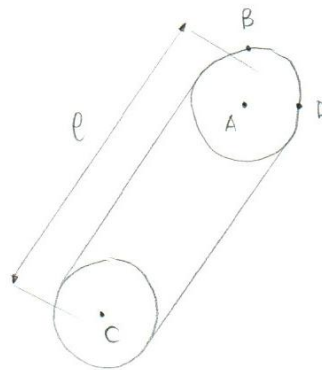
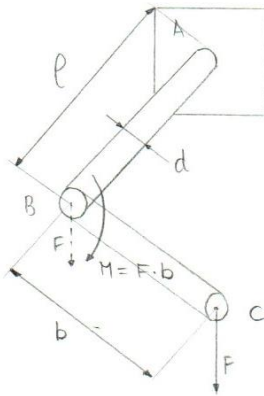
Spostamento del punto D



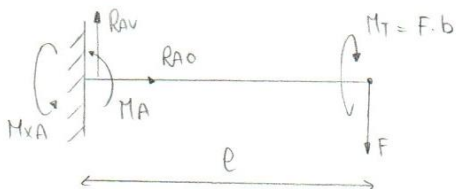


$u_D = u_{D1} + u_{D2} + u_{D3} = 40,37 \text{ mm}$

- (2) Componente in figura è costituito da una Trave a sbalzo a sezione circolare incastrata ad un estremo (acciaio S235:  $E = 210'000 \text{ MPa}$ ,  $G = 78'000 \text{ MPa}$ ) e da un braccio rigido collegato alla Trave alla cui estremità libera è applicato carico trasversale di valore  $F = 500 \text{ N}$ .
- Disegnare e commentare caratteristiche di sollecitazione
  - Dimensionare il diametro  $D$  minimo della Trave affinché sia garantito  $CS = 4$  rispetto allo snervamento.
  - Disegnare lo stato di sollecitazione sul cubetto infinitesimo di materiale in due punti a scelta tra A, C, B, D adottando il sistema di riferimento più opportuno e scrivere il relativo tensore delle sollecitazioni.
  - calcolare infine la traccia nel punto di applicazione del carico  $F$  supponendo che il braccio sia rigido e accettando ipotesi di piccole deformazioni.



Reazioni



→)  $RA0 = 0$   
 ↑)  $RA0 - F = 0 \rightarrow RA0 = 500 \text{ N}$   
 A)  $MA - Fe = 0 \rightarrow MA = 500 \text{ Nm}$   
 + aggiungiamo Torcente e la sua reazione  
 $M_t$ )  $M_{xA} = M_T = Fb$

Sollecitazioni



N)  $N = 0$   
 T)  $T + RA0 = 0 \rightarrow T = -500 \text{ N}$   
 M)  $M - RA0 \cdot x + MA = 0$   
     ↙  $x = 0 \rightarrow M = -500 \text{ Nm}$   
     ↘  $x = e \rightarrow M = 0 \text{ Nm}$   
 $M_t$ )  $M_t = -M_{xA} = 150'000 \text{ Nm}$



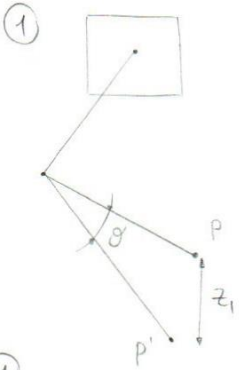
• Punto C

→ Si trova all'altra estremità del braccio considerando la sezione si trova nella stessa posizione di A

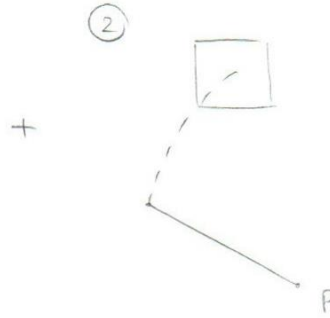
$$\begin{cases} \sigma = 0 \\ \tau_{xz} = 0,42 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,42 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,42 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Supponiamo tratto B che non si deforma



Tratto B ruota di un certo angolo  $\vartheta$



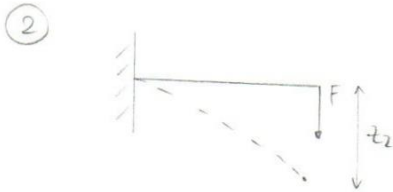
Il tratto B si flette a causa di F

①

$$z_1 = b \cdot \vartheta$$

$$\vartheta = \frac{M_T \cdot b}{G I_p} \rightarrow [I_p = 3,919 \cdot 10^5 \text{ mm}^4] \rightarrow = \frac{150'000 \cdot 1000}{78000 \cdot 3,919 \cdot 10^5} = 4,91 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\rightarrow z_1 = 300 \cdot 4,91 \cdot 10^{-3} = 1,47 \text{ mm}$$



$$z_2 = \frac{F l^3}{3EI} = 4,05 \text{ mm}$$

$$z_{\text{Tot}} = z_1 + z_2 = 1,47 + 4,05 = 5,52 \text{ mm}$$