NUMERO: 2373A ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Zarrelli Mattia

MATERIA: Zarrelli Mattia - Fisica II - Prof. Barbero

CAMPI

12/10/2017

1) **Campo SCALARE** $V = V(x, y, z)$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{z} \cdot dz$$

definito $\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \bar{u}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \bar{u}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \bar{u}_z$ = gradiente di V

e tenendo conto che $d\bar{r} = dx \cdot \bar{u}_x + dy \cdot \bar{u}_y + dz \cdot \bar{u}_z$

si ha $\boxed{dV = \bar{\nabla} V \cdot d\bar{r}}$ $(\bar{u}_x \cdot \bar{u}_x = 1)$

$$\downarrow$$

$$V(B) - V(A) = \int_A^B \bar{\nabla} V \cdot d\bar{r}$$

2) **Campo vettoriale** $\bar{G} = \bar{G}(x, y, z) = G_x \cdot \bar{u}_x + G_y \cdot \bar{u}_y + G_z \cdot \bar{u}_z$

Per un campo vettoriale $\bar{G}$ si definisce:

- la divergenza (scalare)

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$$

applico questo senza versori

- il rotore (vettore)

$$\bar{\nabla} \times \bar{G} = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{u}_x \left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z} \right) + \bar{u}_y \left(\frac{\partial G_x}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial x} \right) + \bar{u}_z \left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y} \right)$$

- **Esempio 1** Se $\vec{G} = \vec{\nabla} V$ quanto vale $\bar{\nabla} \cdot \bar{G}$?

$$G_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad G_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad G_z = \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{G} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V$$

∇^2 = operatore di Laplace (o laplaciano)

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 242

12/10/2017

quindi $\boxed{\bar\nabla(f\bar G) = \bar\nabla f \cdot \bar G + f \cdot \bar\nabla \cdot \bar G}$

Problema 1 $\bar G = \bar r = x\,\bar u_x + y \cdot \bar u_y + z \cdot \bar u_z$

$$\begin{cases} \bar\nabla \cdot \bar r = 3 \\ \bar\nabla \times \bar r = 0 \end{cases}$$

Problema 2 $\bar G = \dfrac{\vec r}{r^3}$ con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $\rightarrow$ quanto vale $\bar\nabla \cdot \bar G$?

$$G_x = \frac{x}{r^3}, \quad G_y = \frac{y}{r^3}, \quad G_z = \frac{z}{r^3}$$

NB x, y, z giocano lo stesso ruolo e sono equivalenti.

$$\frac{\partial G_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{1}{r^3} - 3\frac{x}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}$$

si ha $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \dfrac{1}{\cancel{2}r}\cdot\cancel{2}x = \dfrac{x}{r}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial G_x}{\partial x} = \dfrac{1}{r^3} - 3\dfrac{x^2}{r^5} \\ \dfrac{\partial G_y}{\partial y} = \dfrac{1}{r^3} - 3\dfrac{y^2}{r^5} \\ \dfrac{\partial G_z}{\partial z} = \dfrac{1}{r^3} - 3\dfrac{z^2}{r^5} \end{cases}$$

quindi $\bar\nabla \cdot \bar G = \bar\nabla \cdot \left(\dfrac{\vec r}{r^3}\right) = 0$

il vettore $\bar G = \dfrac{\vec r}{r^3}$ è solenoidale in tutti i punti in cui è definito

VETTORE RAGGIO

Problema 3 $\vec G = \dfrac{\vec r}{r^3}$, quanto vale $\underbrace{\bar\nabla \times \bar G}_{\bar R}$?

$R_x = \dfrac{\partial G_z}{\partial y} - \dfrac{\partial G_y}{\partial z}$ e simili

$\hookrightarrow R_x = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{z}{r^3}\right) - \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{y}{r^3}\right) =$

Si annulla già ogni componente

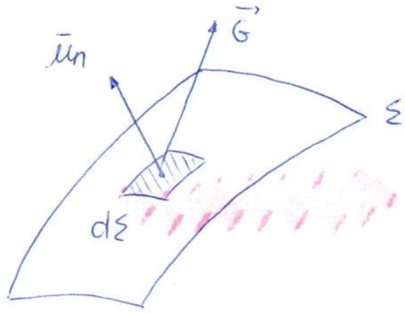
$$= -3\frac{z}{r^4}\frac{\partial r}{\partial y} + 3\frac{y}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = -3\cancel{\frac{yz}{r^5}} + 3\cancel{\frac{zy}{r^5}} = 0$$

$\hookrightarrow$ Analogamente per le altre componenti

il vettore $\vec G = \dfrac{\vec r}{r^3}$ è IRROTAZIONALE

B) Flusso di $\vec{G}$

12/10/2017

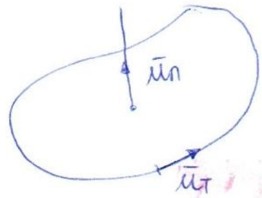


"Φ" di Flusso

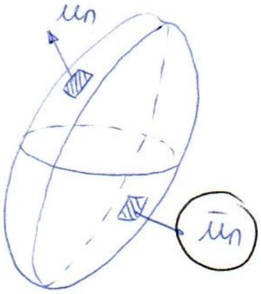
$$\Phi_\Sigma = \iint_\Sigma \bar{G}\cdot\bar{u}_n \, d\Sigma$$

Come si prende $\bar{u}_n$?

Preso $\bar{u}_T$ si definisce $\bar{u}_n$ con la mano destra



Se Σ è chiusa



$$\Phi_\Sigma = \oiint_\Sigma \bar{G}\cdot\bar{u}_n \, d\Sigma$$

$\bar{u}_n$ diretto sempre all'esterno

Teorema della Divergenza

$$\oiint_\Sigma \bar{G}\cdot\bar{u}_n \, d\Sigma = \iiint_\tau \bar{\nabla}\cdot\bar{G} \, d\tau$$

dove τ è il volume limitato e chiuso dalla superficie Σ

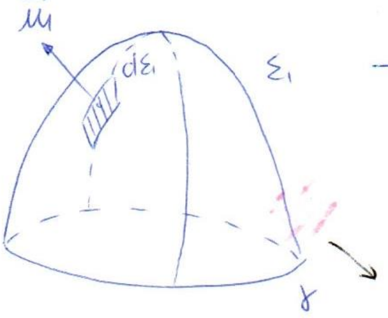
(a) Se $\bar{\nabla}\cdot\bar{G} = 0$, $\forall P \in \tau$ $\quad \oiint_\Sigma \bar{G}\cdot\bar{u}_n \, d\Sigma = 0$ FLUSSO NULLO

$\Longrightarrow$ $\bar{G}$ si dice solenoidale in τ

(b) Se $\bar{\nabla}\cdot\bar{G} = 0$ e Σ è una superficie di Bordo γ

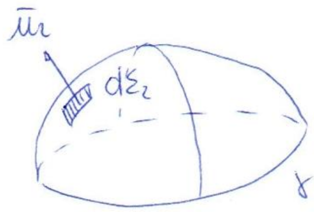
$\Longrightarrow$ Φ_Σ dipende solo da γ (vale qualunque superficie con bordo γ)

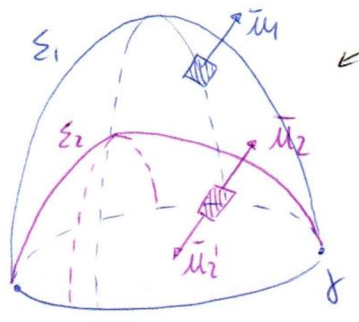
FLUSSO DIPENDE DAL CONTORNO



$$\Phi_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1(\gamma)} \bar{G}\cdot\bar{u}_1 \, d\Sigma_1$$

$$\Phi_{\Sigma_2} = \iint_{\Sigma_2(\gamma)} \bar{G}\cdot\bar{u}_2 \, d\Sigma_2$$





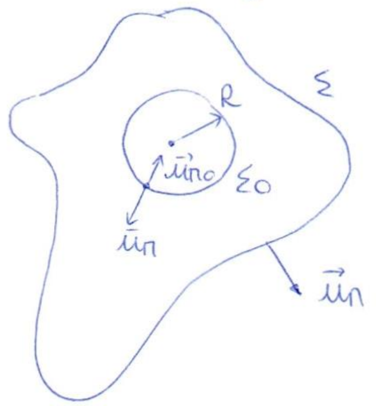
$\forall P \in$ regione limitata da Σ_1 e Σ_2, $\bar{\nabla}\cdot\bar{G} = 0$

Problema 3 12/10/2017

Determinare il flusso di $\vec{G} = \frac{\vec{r}}{r^3}$ attraverso una superficie chiusa generica che contiene il punto $\vec{r} = 0$

Soluzione

Dato che Σ contiene $\vec{r} = 0$, $\bar{\nabla} \cdot \bar{G}$ non è identicamente nulla in $\tau(\Sigma)$ e non possiamo applicare il Teorema di Gauss. Isoliamo l'origine in una sfera Σ_0 di raggio R. $\forall P \in \tau(\Sigma, \Sigma_0)$ si ha $\bar{\nabla} \cdot \bar{G} = 0$



Quindi:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma + \Sigma_0} \bar{G}\, \bar{u}_n \, d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma, \Sigma_0)} \bar{\nabla} \cdot \bar{G} \, d\tau = 0$$

Ne segue che:

$$\cancel{\oint\!\!\!\oint_{\Sigma + \Sigma_0} \vec{G}\, \bar{u}_n \, d\Sigma} = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \vec{G}\, \bar{u}_n \, d\Sigma + \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_0} \vec{G}\, \bar{u}_{n_0} \, d\Sigma$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \bar{G} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = -\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_0} \bar{G}\, \bar{u}_{n_0} \, d\Sigma = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma_0} \vec{G} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma = 4\pi$$

Dato che $\bar{u}_{n_0} = -\bar{u}_n$. Quindi se Σ contiene $\vec{r} = 0$ $\Phi = 4\pi$ ovunque sia $\vec{r} = 0$.

Teorema di STOKES

$$\oint_{\gamma} \vec{G} \cdot d\vec{r} = \iint_{\Sigma(\gamma)} (\bar{\nabla} \times \bar{G}) \, \bar{u}_n \, d\Sigma$$

Dove $\Sigma(\gamma)$ è una qualsiasi superficie che ha per bordo γ. È strana la relazione scritta? NO perché il vettore $\bar{R} = \bar{\nabla} \times \bar{G}$ è solenoidale e quindi il flusso di $\vec{G}$ dipende solo da γ. Solenoidale $\rightarrow \bar{\nabla} \cdot \bar{G} = 0$
$\rightarrow$ dipendenza da γ

Se $\bar{\nabla} \times \bar{G} = 0$ $\quad \oint_{\gamma} \vec{G}\, d\bar{r} = 0$

$$\int_{A,\gamma_1}^{B} \vec{G} \cdot d\bar{r} = \int_{A,\gamma_2}^{B} \bar{G}\, d\bar{r} \Longrightarrow \int_A^B \vec{G}\, d\bar{r} = f(A,B)$$

Non dipende dal percorso. Che tipo di funzione è $f(A,B)$?

A. . B

O .

$$\int_O^B \bar{G}\, d\bar{r} = \int_O^A \bar{G}\, d\bar{r} + \int_A^B \bar{G}\, d\bar{r}$$

$$f(O,B) = f(O,A) + f(A,B)$$

$$f(A,B) = f(O,B) - f(O,A)$$

$$\Longrightarrow f(A,B) = U(A) - U(B)$$

Forza di COULOMB

09/10/2017

Scoprì che la forza era inversamente proporzionale al raggio (distanza)

$$F \propto 1/r^2$$

Carica elettrica responsabile dell'interazione elettrica.
Corpo con dimensioni puntiformi con carica q_1 e una con q_2.

In regime statico si esercita una forza tra le due cariche. Proporzionale alle cariche e inversamente al quadrato della distanza e radiale.

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \bar{u}_{r_2}$$

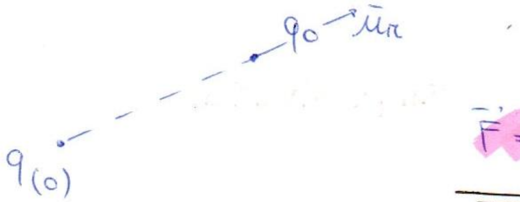
la forza esercitata sulla particella 1 sarà la medesima di senso opposto

$$\vec{F}_1 = k \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \bar{u}_{r_1}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \simeq 9 \cdot 10^9 \frac{Nm^2}{C^2}$$

ε_0 = permeabilità dielettrica nel vuoto = $= 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{C^2}{Nm^2}$

Utile spesso definire la CARICA DI PROVA che chiamiamo q_0.



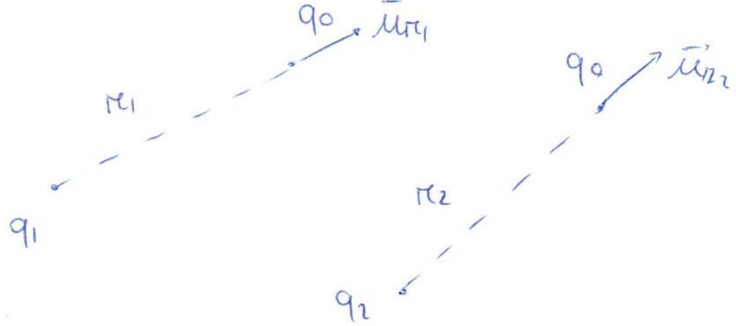
$$\vec{F} = k \frac{q \cdot q_0}{r^2} \cdot \bar{u}_r$$

↳ supponiamo la carica q sia in (0,0) di un diagramma. sappiamo dunque che $\bar{u}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ possiamo scrivere di nuovo la formula:

$$\vec{F} = k \cdot q q_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

con il vettore $\frac{\vec{r}}{r^3}$ che avevamo definito.

Dobbiamo analizzare il caso con più di una particella.



$$\vec{F}_1 = k \cdot \frac{q_0 \cdot q_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_{r_1}$$

$$\vec{F}_2 = k \cdot \frac{q_0 q_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_{r_2}$$

quando agiscono separatamente

Analizziamo quindi diversi casi 09/10/2017

Campo generato da una carica puntiforme

$$\vec{F} = q_0 \cdot \vec{E} \quad \text{quindi} \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

come definizione operativo

$\vec{E}$ = forza elettrica per unità di carica.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u} \quad \text{con 1 sola carica}$$

Se prendiamo un po' di cariche vicine rispetto a un punto molto lontano rispetto al quale dobbiamo calcolare il campo è come se le cariche fossero tutte nello stesso punto.

$\hookrightarrow$ se $|\vec{R}| \gg |\vec{R}_i| \longrightarrow \vec{r}_i \simeq \vec{R}$

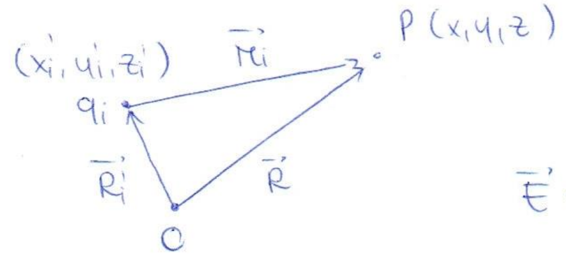
e la formula (*) diventa

$$\vec{E}(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{N} k \cdot q_i \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{\vec{u}_R}{R^2} \cdot \sum_{i=1}^{N} k \cdot q_i$$

$$\text{con } Q = \sum_{i=1}^{N} q_i \Longrightarrow \vec{E} = k \cdot Q \frac{\vec{u}_R}{R^2}$$

$\Longrightarrow$ Se la distanza dalle cariche a dove vogliamo calcolare il campo è molto grande possiamo considerarla come una carica puntiforme.

$$\begin{cases} \vec{R} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z \\ \vec{R}_i = x_i' \cdot \vec{u}_x + y_i' \cdot \vec{u}_y + z_i' \cdot \vec{u}_z \end{cases}$$



$$|\vec{R} - \vec{R}_i| = \sqrt{(x-x_i')^2 + (y-y_i')^2 + (z-z_i')^2} = r_i$$

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{N} k \cdot q_i \frac{(x-x_i')\vec{u}_x + (y-y_i')\cdot\vec{u}_y + (z-z_i')\cdot\vec{u}_z}{r_i^3}$$

da cui possiamo prendere le componenti

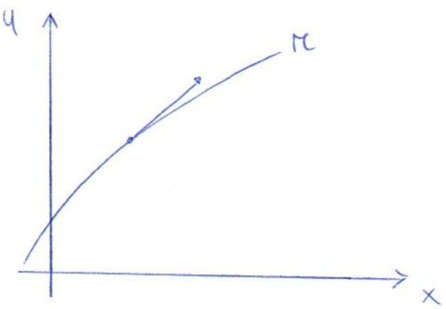
$$\begin{cases} E_x(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k\, q_i \frac{x-x_i'}{r_i^3} \\ E_y(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k \cdot q_i \frac{y-y_i'}{r_i^3} \\ E_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^{N} k \cdot q_i \frac{z-z_i'}{r_i^3} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ da cui potrei calcolare la divergenza

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

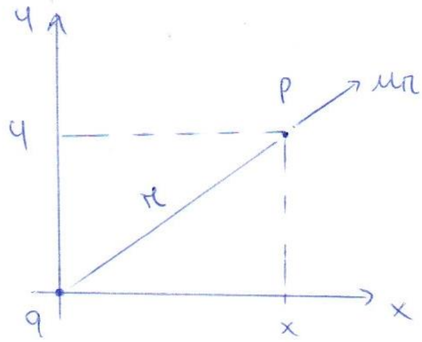
Linee di Forza

09/10/2017



Piano $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{E_y}{E_x}$

Possiamo calcolare le linee di Forza per una carica posta al centro del grafico



$$\begin{cases} \bar{E} = k \cdot q/r^2 \cdot \bar{u}_r \\ \bar{E} = k \cdot q \cdot \dfrac{\vec{r}}{r^3} \end{cases}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y$$
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} E_x = k \cdot \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}} \cdot q \\ E_y = k \cdot \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}^{\,2}} \cdot q \end{cases}$$

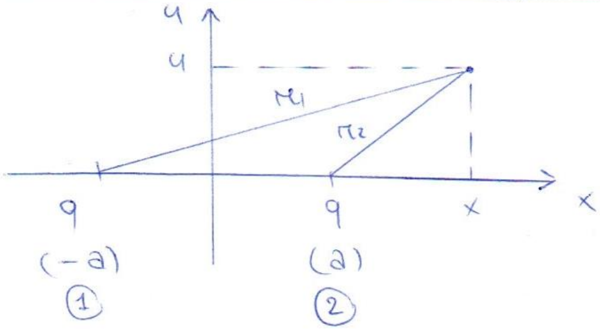
LETTA

Sappiamo che

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{k} y \cancel{q}}{(\cancel{x^2+y^2})} \cdot \frac{(\cancel{x^2+y^2})}{x \cdot \cancel{k} \cdot \cancel{q}} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \longrightarrow y = \frac{y_0}{x_0} \cdot x \implies$$ le linee di Forza devono essere tutte in qualche modo uscenti dalla mia carica.

Trovare le linee della forza equivale a risolvere $\dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{dy}{dx}$ nel piano



$$\bar{E}(P) = \bar{E}_1(P) + \bar{E}_2(P)$$

$$\vec{R} = x\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y$$

LETTA

$$\begin{cases} \bar{r}_1 = (x+a)\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y \\ r_2 = (x-a)\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y \end{cases}$$

$$\implies \bar{E}(P) = kq\frac{\bar{r}_1}{r_1^3} + kq\frac{\bar{r}_2}{r_2^3} =$$

$$= kq\left\{ \frac{(x+a)\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{(x-a)\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \right\}$$

↳ da cui possiamo definire le due componenti E_x e E_y
→ calcolo delle linee di Forza diventa complicato

09/10/2017

→ modifica delle equazioni

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{q}{m} E t \\ v_0 = \dfrac{dy}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \, q/m \, E t^2 \\ y(t) = v_0 \cdot t \end{cases}$$

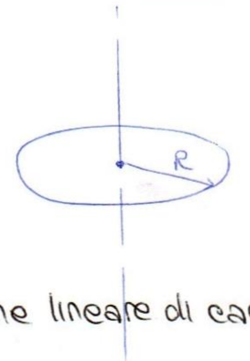
$$t = y / v_0 \longrightarrow x = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E \cdot \frac{y^2}{v_0^2}$$

la particella ha un moto parabolico e NON segue nessuna linea di forza.

Corpi CONTINUI

Calcoliamo come si crea il campo con distribuzioni di carica

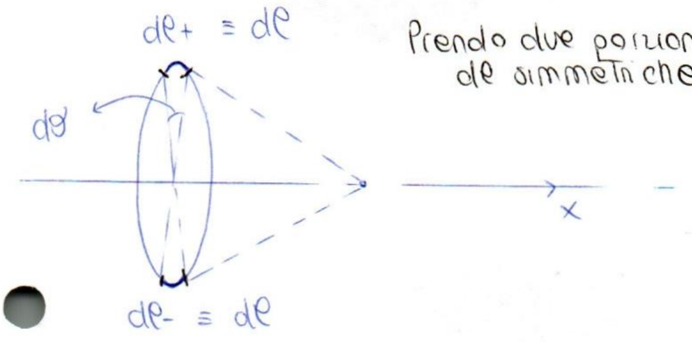
1) Campo sull'asse
2) Anello uniforme
3) R = raggio anello
4) Q = carica anello



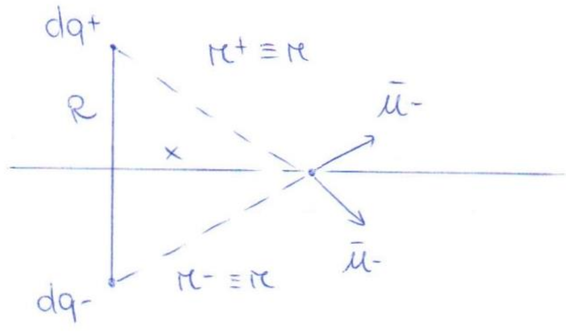
↓ densità di carica

$$\lambda = \frac{Q}{2\pi r}$$ (distribuzione lineare di carica)

anello uniforme circolare



Prendo due porzioni dl simmetriche

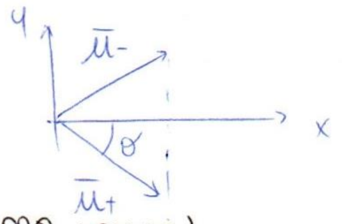


$$\begin{cases} dq_+ = \lambda \, dl_+ = \lambda \, dl \\ dq_- = \lambda \, dl_- = \lambda \, dl \end{cases}$$

quanto vale il campo?

$$\begin{cases} d\bar{E}_+ = k \dfrac{dq_+}{r_+^2} \cdot \bar{u}_+ \\ d\bar{E}_- = k \dfrac{dq_-}{r_-^2} \cdot \bar{u}_- \end{cases}$$

cambiano solo i versori $\bar{u}_+$ e $\bar{u}_-$

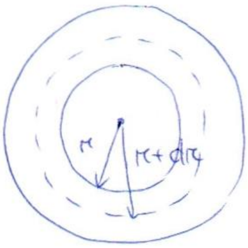


$$d\bar{E} = d\bar{E}_+ + d\bar{E}_- = k \cdot \frac{dq}{r^2} (\bar{u}_- + \bar{u}_+)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_- = \bar{u}_x \cos\vartheta + \cancel{\bar{u}_y \operatorname{sen}\vartheta} \\ \bar{u}_+ = \bar{u}_x \cos\vartheta - \cancel{\bar{u}_y \cdot \operatorname{sen}\vartheta} \end{cases}$$ (scomposizione versori) (annullo componente y)

$$d\bar{E} = k \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot 2\cos\vartheta \cdot \bar{u}_x \longleftarrow$$

09/10/2017



Disco = successione di anelli

la carica dell'areola che abbiamo preso vale

$dq = \sigma \cdot d\Sigma$

dove $d\Sigma = 2\pi r \cdot dr$ Area corona circolare

di conseguenza $dq = \sigma \cdot 2\pi r\, dr$

quindi possiamo scrivere

$$d\bar{E}(x) = k \cdot dq \cdot \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \cdot \bar{u}_x$$

$$d\bar{E} = k \cdot \sigma \cdot 2\pi r\, dr \cdot \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} \, \bar{u}_x$$

↳ per il campo totale dovremo integrare $0 < r < R$

$$\bar{E}(x) = 2\pi k \sigma \cdot x \cdot \bar{u}_x \underbrace{\int_0^R \frac{r\,dr}{(x^2+r^2)^{3/2}}}_{\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}}}$$

funzione pari quindi il nostro campo $\bar{E}$ sarà

$$\bar{E}(x) = 2\pi k \sigma x \left\{ \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right\} \bar{u}_x$$

⟸ FORMULA GENERALE

- Se $x > 0$ Metto x dentro le parentesi

$$\bar{E}(x) = 2\pi k \sigma \left\{ 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}} \right\} \bar{u}_x$$

- Se $x < 0$ cambia segno

A seconda di dove si trova il punto

⟹ possiamo scrivere $\bar{E}(x) = \pm 2\pi k \sigma \left\{ 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right\} \bar{u}_x$

- se il punto è molto vicino al disco $x \ll R$

$$E(x \ll R) = 2\pi k \sigma \left(1 - \underbrace{\frac{x}{R}}_{\to 0}\right) u_x \approx 2\pi k \sigma \cdot \bar{u}_x$$

↳ Tende a un valore COSTANTE

↳ $\lim_{x \to 0^+} = 2\pi k \sigma \cdot \bar{u}_x$ (da sopra)

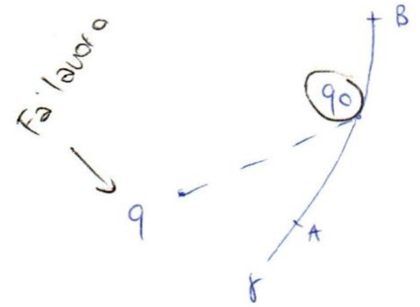
$\lim_{x \to 0^-} = -2\pi k \sigma \cdot \bar{u}_x$ (da sotto)

⟹ campo ha una discontinuità

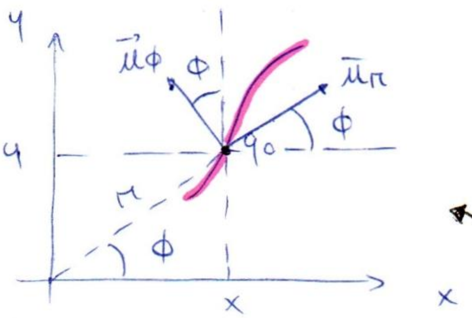
⇒ Cambiamento di segno

16/01/2017

Calcoliamo **lavoro di carica q su una q_0 su una curva $d\gamma$**



Consideriamo carica che si muove su un piano



$$\Longrightarrow d\bar{r} = \bar{u}_x\, dr \cos\phi - \bar{u}_x\, r \,\text{sen}\phi\, d\phi + \bar{u}_y\, dr\, \text{sen}\phi + \bar{u}_y \cos\phi\, d\phi\, r =$$

$$= (\bar{u}_x \cos\phi + \bar{u}_y\, \text{sen}\phi)\, dr + (-\bar{u}_x\, \text{sen}\phi + \bar{u}_y \cos\phi)\, r\, d\phi$$

$$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\,\text{sen}\phi \end{cases}$$

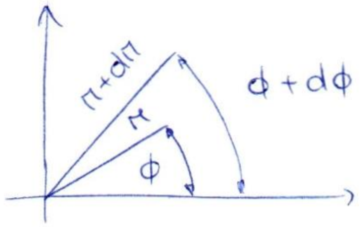
$$d\bar{r} = \bar{u}_x\, dx + \bar{u}_y\, dy$$

- $dx = d(r\cos\phi) = dr\cos\phi - \text{sen}\phi\, d\phi \cdot r$
- $dy = d(r\,\text{sen}\phi) = dr\,\text{sen}\phi + \cos\phi\, d\phi \cdot r$

$$\begin{cases} \bar{u}_r = \bar{u}_x \cos\phi + \bar{u}_y\,\text{sen}\phi \\ \bar{u}_\phi = -\bar{u}_x\,\text{sen}\phi + u_y \cos\phi \end{cases}$$

$$|\bar{u}_r| = 1 \quad ; \quad |\bar{u}_\phi| = 1$$

$$u_r \cdot u_\phi = -\text{sen}\phi\, d\phi + \text{sen}\phi\cos\phi = 0$$



(Ripeto nel primo grafico)

$\bar{u}_r$ e $\bar{u}_\phi$ sono perpendicolari!

$$\longrightarrow d\gamma = \bar{u}_r\, dr + \bar{u}_\phi\, r\, d\phi$$

$$T_{AB}^{(\gamma)} = \int_{A,\gamma}^{B} \bar{E}\, d\bar{\gamma}$$

carica puntiforme

$$\bar{E} = k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot u \qquad \left(k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)$$

sostituisco $\bar{E}$ e $d\bar{\gamma}$

$$T_{AB}^{(\gamma)} = \int_{A,\gamma}^{B} \left(k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \bar{u}_r\right) \cdot \left(\bar{u}_r\, dr + \bar{u}_\phi\, r\, d\phi\right)$$

Prodotto scalare

$$= \int_{A,\cancel{\gamma}}^{B} kq \cdot \frac{dr}{r^2} = -kq\left[\frac{1}{r}\right]_{r_A}^{r_B}$$

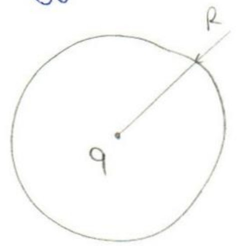
Non più percorso

dipendenza solo da punto iniziale e finale

16/10/2017

NB: $\forall P \in$ sfera di raggio R

$$V = k\frac{q}{R}$$



$\Rightarrow$ sfera con centro in q è sup. equipotenziale

↳ Se ci sono più cariche?

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{N} \bar{E}_i$$

Sovrapposizione vale anche per la somma dei potenziali

⇓

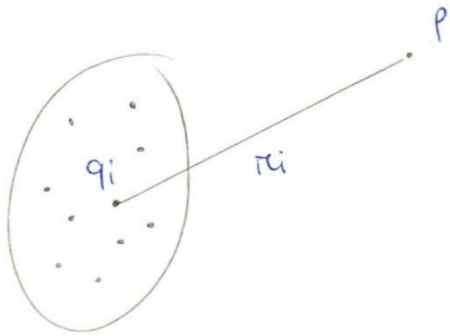
$$T_{AB}^{c} = \int_{A\,c}^{B} \bar{E}\, d\bar{r} = \int_{A\,c}^{B} \left(\sum_{i=1}^{N} \bar{E}_i\right) d\bar{r} =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{A\,c}^{B} \bar{E}_i\, d\bar{r} = \sum_{i=1}^{N} \left[V_i(A) - V_i(B)\right] = V_A - V_B$$

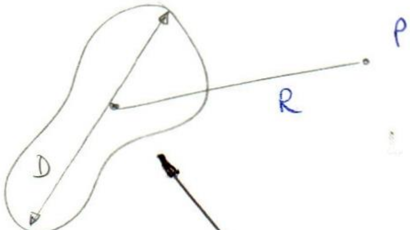
dove
$$\left.\begin{aligned} V(A) &= \sum_{i=1}^{N} V_i(A) \\ V(B) &= \sum_{i=1}^{N} V_i(B) \end{aligned}\right\} \text{quindi} \quad V = \sum_{i=1}^{N} V_i$$

sovrapposizione $\bar{E}$ $\Rightarrow$ sovrapposizione V

$$V = \sum_{i=1}^{N} k\frac{q_i}{r_i}$$



Se il corpo è continuo



$$V(P) = \int_{\text{CORPO}} k\frac{dq}{r}$$

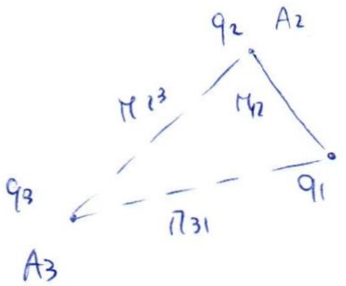
Quando il corpo ha dimensioni trascurabili rispetto alle distanze in gioco $(D \ll r)$

$$\longrightarrow \quad V = k\frac{Q}{R}$$

con R = distanza da P al baricentro

16/10/2017

Energia propria = energia da spendere per creare un certo sistema



→ creare un sistema: mettere più cariche a interagire in uno spazio

Spazio vuoto, nessuna opposizione

Metto carica q_1 → $W_1 = 0$

Prendo carica q_2 che voglio posizionare e devo fare un lavoro per l'opposizione che dà la prima carica. Parto da ∞ e metto la carica dove mi serve → $W_2 = \int_{\infty}^{A_2} \vec{F}_{ext}^{(1)} \, d\vec{r} = \int_{\infty}^{A_2} -\vec{F}_1^{(1)} \cdot d\vec{r}$

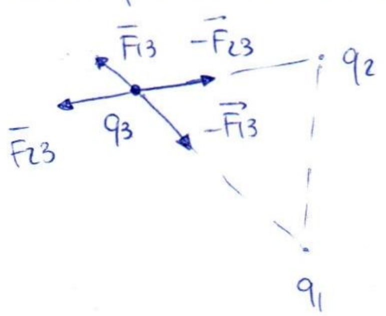
quella che imprimo

quella che respinge

$$= -\int_{\infty}^{A_2} q_2 \cdot \underbrace{\vec{E}_1}_{\text{potenziale}} \cdot d\vec{r} = -q_2 \cdot \{ \underbrace{\cancel{V(\infty)}}_{=0 \text{ se siamo a } \infty} - V_1(A_2) \}$$

$$W_2 = q_2 \cdot V_1(A_2) = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}$$

Portiamo poi la terza carica



devo equilibrare nuovamente

$$W_3 = \int_{\infty}^{A_3} F_{ext}^{(1)} \, d\vec{r} = \int_{\infty}^{A_3} -\vec{F}_3^{(1)} \, d\vec{r} =$$

$$= -\int_{\infty}^{A_3} q_3 \left(\vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right) d\vec{r} = -q_3 \left\{ V_{12}(\infty) - V_{12}(A_3) \right\} =$$

$$= q_3 \cdot V_{12} \cdot (A_3)$$

$$W_3 = k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}$$

Due cariche già presenti che si oppongono

⟹ **Energia propria** $= \sum_i W_i = \underbrace{0}_{1} + \underbrace{k\frac{q_1 q_2}{r_{12}}}_{2} + \underbrace{k\frac{q_1 q_3}{r_{13}} + k\frac{q_2 q_3}{r_{23}}}_{3}$

↳ corrisponde energia potenziale del sistema

Somma di TUTTI i lavori necessari

16/10/2017

Per $x = x^*$ $\quad v(x^*) = 0$ $\quad x^*$ punto dove mi fermo

$$\longrightarrow \quad 0 + k\frac{qQ}{x^*} = \frac{1}{2} m v_0^{*} \quad \Longrightarrow \quad x^* = 2\frac{kqQ}{m v_0^2}$$

Teorema Stokes $\quad \oint_\gamma \bar{G}\, d\bar{r} = \oiint_{\Sigma(\gamma)} (\bar{\nabla} \times \bar{G})\, \bar{u}_n \, d\Sigma$

$$\bar{\nabla} \times \bar{G} = 0$$

$$\oint_\gamma \bar{G} \cdot d\bar{r} = 0$$

$$\hookrightarrow \int_A^B \bar{G}\, d\bar{r} = \rho(A,B) = V(A) - V(B)$$

$$\int_A^B \bar{G}\, d\bar{r} = -\int_A^B dV$$

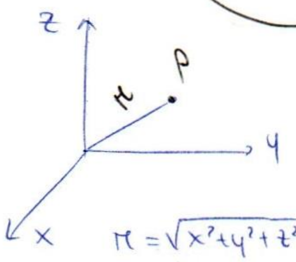
$\Leftrightarrow$ campo conservativo $\quad \bar{\nabla} \times \bar{G} = 0 \qquad \bar{G} \cdot d\bar{r} = -dV$

Per il campo elettrico dovranno valere le considerazioni fatte per il campo vettoriale $\vec{G}$

sapevamo inoltre che $\vec{G} = -\vec{\nabla} V$
che nel caso elettrico diventa $\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla} V}$

Se $V = k\frac{Q}{r}$ $\quad \Longrightarrow \quad E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{Q}{r}\right)$

$$E_x = k \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} \longleftarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

$$\begin{cases} E_x = k\frac{Q}{r^3} \cdot x \\ E_y = kQ \cdot \frac{y}{r^3} \\ E_z = kQ \cdot \frac{z}{r^3} \end{cases}$$

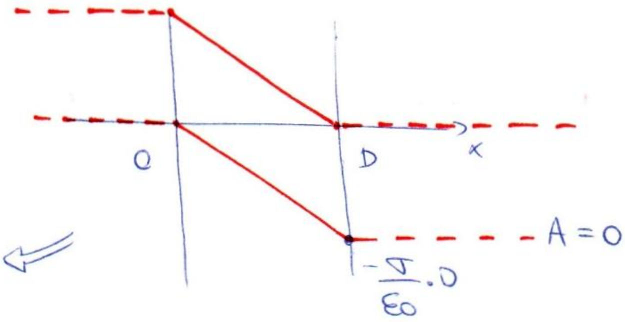
Tornare al campo partendo dal potenziale

$$\Longrightarrow \vec{E} = k\frac{Q}{r^3}\left(x\bar{u}_x + y \cdot \bar{u}_y + z\bar{u}_z\right) = kQ\frac{\vec{r}}{r^3} = k\frac{Q}{r^2} \cdot \bar{u}_r$$

16/01/2017

Prendiamo in modo arbitrario $A = 0$

$$\Rightarrow B = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot D$$



Prendendo altro punto = 0 avrei avuto altra curva la cui derivata sarebbe però stata la medesima. Quindi va bene $A = 0$

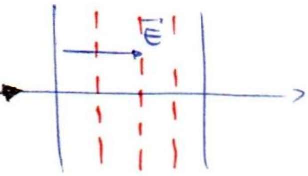
$$\Rightarrow V(x) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot x + c$$

(lavoriamo sulla costante)

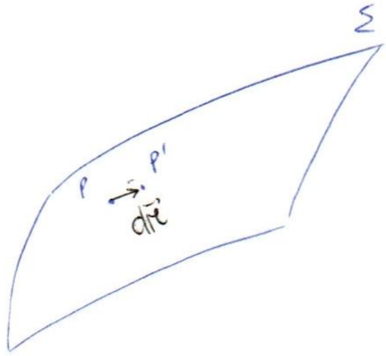
→ che giochiamo come vogliamo in base a dove vogliamo prendere il potenziale 0.

Superfici equipotenziali

→ luogo dei punti dove V sarà uguale sono le superfici equipotenziali (superfici perpendicolari al campo in qto caso)



Possiamo dimostrare che in generale vale che il campo $\vec{E}$ è ⊥ alle superfici equipotenziali.



Σ = sup. equipotenziale

$V(P) = V(P')$

$dV = V(P') - V(P)$

$$\begin{cases} dV = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r} \\ \vec{E} = -\vec{\nabla} V \\ dV = -\vec{E}(P) \cdot \overline{PP'} = 0 \end{cases}$$

$d\vec{r}$ → vettore $\overline{PP'} \in \Sigma$

poiché P e P' sono sulla stessa sup. definita equipotenziale.

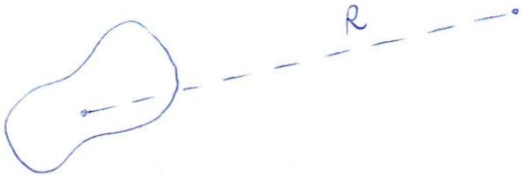
di conseguenza devo essere prodotto tra elementi perpendicolari per dare = 0

$$\Rightarrow \forall P, P' \in \Sigma \Rightarrow \vec{E}(P) \perp \overline{PP'}$$

16/10/2017

$$\begin{cases} (\bar{\nabla} V)_r = \dfrac{\partial V}{\partial r} \\ (\bar{\nabla} V)_\vartheta = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta}\right) \\ (\bar{\nabla} V)_\phi = \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta}\left(\dfrac{\partial V}{\partial \phi}\right) \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\bar{\nabla} V = \bar{u}_r \frac{\partial V}{\partial r} + \bar{u}_\vartheta \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \phi}}$$

DIPOLO



$$V \approx k \cdot \frac{Q}{R}$$

Q → carica dell'intero corpo

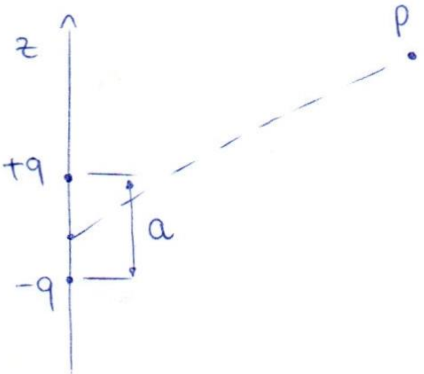
$$Q = \int_{corpo} dq$$

Ma se $Q = 0$ ci sono effetti elettrici?

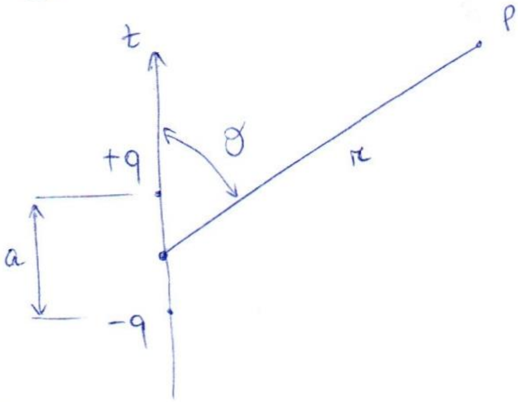
Immaginiamo dunque un sistema neutro ⟹ dipolo (cariche opposte e distanziate)

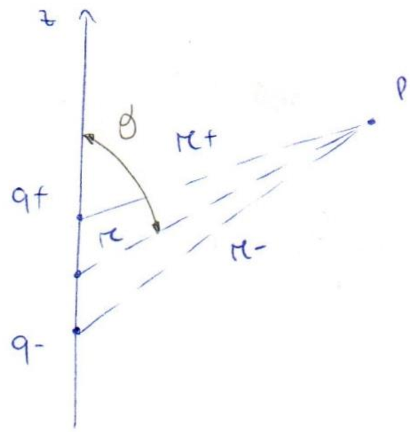
↳ Problema di quanto vale il potenziale in punto P.

Dipolo considerabile con carica neutra



Problema con simmetria cilindrica
⟶ Teoricamente potenziali uguali per tutti i punti alla stessa distanza da asse z





$V = k \cdot \dfrac{q}{r}$ x una carica

$$V(r,\vartheta) = k\frac{q}{r_+} - k\frac{q}{r_-}$$

?

Per le due cariche presenti nel dipolo

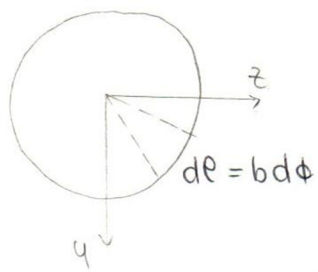
Capitolo 1

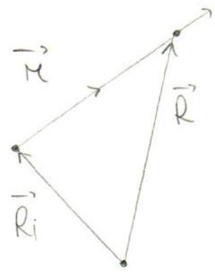
15/10/2017

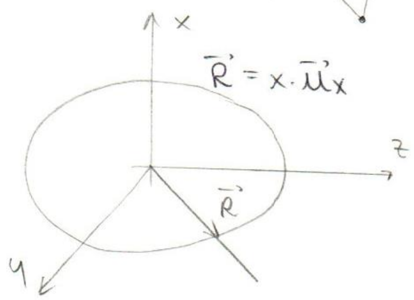
(1) $\vec{E} = k \cdot \sum_{n=1}^{N} \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_i$

$\vec{r}_i = r \cdot \vec{u}_i$

$\vec{E} = k \cdot \sum_{i=1}^{N} q_i \cdot \frac{\vec{r}_i}{r^2}$







$\vec{R}' = b(\cos\phi \cdot \vec{u}_y + \operatorname{sen}\phi \cdot \vec{u}_z)$

$dq = \lambda d\ell = \lambda b d\phi$

dove λ = densità di carica

corpo continuo

$\hookrightarrow E = k \int_{corpo} dq \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$

$\vec{r} = \vec{R} - \vec{R}' = x \cdot u_x - b(\cos\phi\, \vec{u}_y + \operatorname{sen}\phi\, \vec{u}_z)$

$\vec{r} = \sqrt{x^2 + b^2}$

$\Rightarrow E(x) = k \int_0^{2\pi} \lambda b d\phi \cdot \frac{x\,\vec{u}_x - b(\cos\phi\, \vec{u}_y + \operatorname{sen}\phi \cdot \vec{u}_z)}{(x^2+b^2)^{3/2}}$

Se la carica è distribuita uniformemente $\longrightarrow$ λ = costante

$$E(x) = k \frac{\lambda b}{(x^2+b^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} x \cdot \vec{u}_x - b(\cos\phi\, \vec{u}_y + \operatorname{sen}\phi \cdot \vec{u}_z)\, d\phi =$$

$$= k \cdot \frac{\lambda b}{(x^2+b^2)^{3/2}} \left\{ 2\pi x\, \vec{u}_x \right\}$$

$$E(x) = k \cdot \frac{Q \cdot x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \vec{u}_x$$

$$\frac{dE}{dx} = kq \frac{d}{dx} \left\{ \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \right\} = kq \left\{ \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} + x \frac{d}{dx}\left(x^2+R^2\right)^{-3/2} \right\} =$$

$$= kq \left\{ \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{x}{(x^2+R^2)^{5/2}} \cdot x \right\} = kq \left\{ \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} - 3 \frac{x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}} \right\}$$

$\hookrightarrow \frac{dE}{dx} = 0 \qquad \frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}} = 3 \frac{x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}} \longrightarrow x^2 + R^2 = 3x^2$

$$x = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

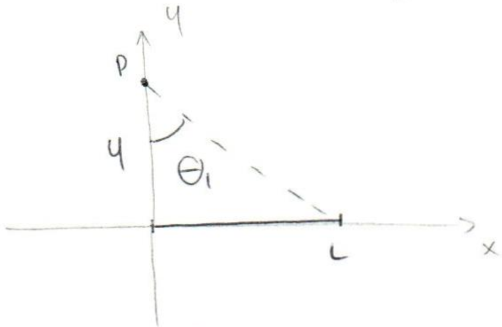
15/10/2017

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k q_0 q \cdot \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \cdot \bar{u}_x$$ equazione del momento della carica

$x << R$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k q_0 Q}{R^3} \cdot x =$$

$$= k \frac{q_0 \cdot Q}{mR^3} \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot x = 0$$



$y \cdot Tg\,\theta_1 = L$

$Tg\,\theta_1 = L/y$

θ_1 è il max angolo che posso avere

$$\bar{E}(y) = \int_0^{\theta_1} 2k\frac{\lambda}{y} \cdot \bar{u}_y \cos\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= 2k\frac{\lambda}{y} \cdot \bar{u}_y \left[\operatorname{sen}\vartheta\right]_0^{\theta_1} = 2k\frac{\lambda}{y}\operatorname{sen}\theta_1 \cdot \bar{u}_y$$

+ facile considerando direttamente $\begin{cases} L = r\operatorname{sen}\theta_1 \\ r = \sqrt{y^2+L^2} \end{cases}$

ma $\quad \operatorname{sen}\theta_1 = \dfrac{Tg\,\theta_1}{\sqrt{1+Tg^2\theta_1}} = \dfrac{L/y}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{y}\right)^2}} = \dfrac{L}{\sqrt{y^2+L^2}}$ (Tutto con L e y)

$$\Longrightarrow \vec{E}(y) = 2k \cdot \frac{\lambda}{y} \cdot \frac{L}{\sqrt{y^2+L^2}} \cdot \vec{u}_y$$ Vale per ogni punto y

- Se il campo è lontano ($y \gg L$)

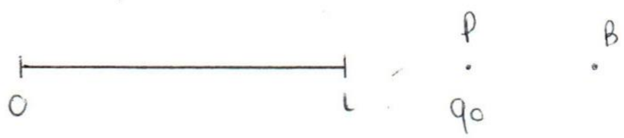
$$\bar{E}(y) = \frac{2k\lambda L}{y^2}\bar{u}_y = k\frac{Q}{y^2}\bar{u}_y$$ come carica puntiforme

- Se il campo è vicino ($y \ll L$)

$$\bar{E}(y) = 2k\frac{\lambda}{y} \cdot \frac{\cancel{L}}{\cancel{L}} \cdot \bar{u}_y = 2k \cdot \frac{\lambda}{y}\bar{u}_y$$ (scende con $1/y$)

Capitolo 2

spostare carica q_0 (-) fino al punto B. Carica q_0 è attratta da carica positiva.



$\lambda = \dfrac{Q}{L}$

$$W_{ext} = \int_P^B \bar{F}_{ext} \cdot d\bar{r} =$$

$$= \int_P^B -\bar{F} \cdot d\bar{r} =$$

$$= -\int_P^B q_0 \bar{E}\, d\bar{r} =$$

$$= -q_0 \int_P^B \bar{E} \cdot d\bar{r}$$

$$\int_P^B \bar{E}\, d\bar{r} = V(P) - V(B)$$

$$W_{ext} = -q_0\{V(P) - V(B)\}$$

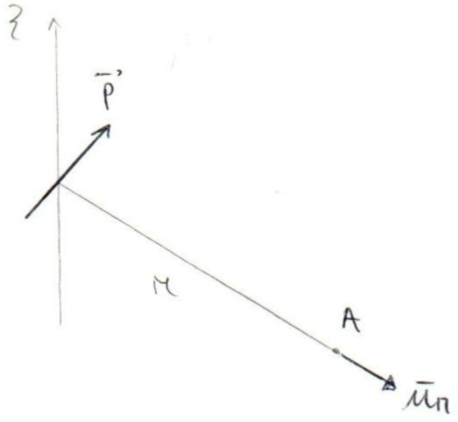
$$= q_0\{V(B) - V(P)\}$$

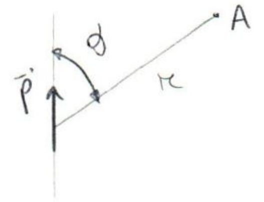
Potenziale di dipolo : $\boxed{V = k \cdot \frac{p \cos\vartheta}{r^2}}$

$$= k \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^2}$$

ϑ sempre angolo tra vettore $\vec{p}$ del dipolo e linea che congiunge il centro del dipolo con il punto di interesse.

→ In qualunque modo sia il dipolo





Posso riscrivere con $\vec{r} = r \cdot \vec{u}_r$

$$\boxed{V = k \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}}$$ → per qualunque riferimento

↖ solita sostituzione

Calcolo del campo :

$$\begin{cases} \vec{r} = x \, \vec{u}_x + y \cdot \vec{u}_y + z \cdot \vec{u}_z \\ \vec{p} = p_x \cdot \vec{u}_x + p_y \cdot \vec{u}_y + p_z \cdot \vec{u}_z \end{cases}$$

$$\rightarrow \vec{p} \cdot \vec{r} = x p_x + y p_y + z p_z$$

$\vec{p} \cdot \vec{r}$ = scalare

$$E = -\vec{\nabla} V$$

sappiamo che $V = k \cdot \frac{(x p_x + y p_y + z p_z)}{r^3}$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x p_x + y p_y + z p_z}{r^3} \right) =$$

→ quantità costanti!

$$= k \left\{ \frac{p_x}{r^3} + (x p_x + y p_y + z p_z) \frac{\partial}{\partial x} (r^{-3}) \right\} =$$

$$= k \left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{(x p_x + y p_y + z p_z)}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} \right\}$$

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$

$$= k \left\{ \frac{p_x}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \, x}{r^5} \right\}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial y} = K \left\{ \frac{p_y}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \, y}{r^5} \right\}$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = k \left\{ \frac{p_z}{r^3} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \cdot z \right\}$$

Sostituiamo tutto in $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$

Argomenti lezione

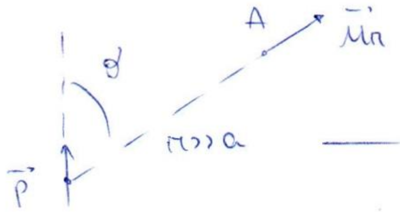
22/10/2017

1) DIPOLO
2) u, $\vec F$, $\vec M$
3) Teorema GAUSS
4) Angolo solido
5) Eq. Poisson

DIPOLO

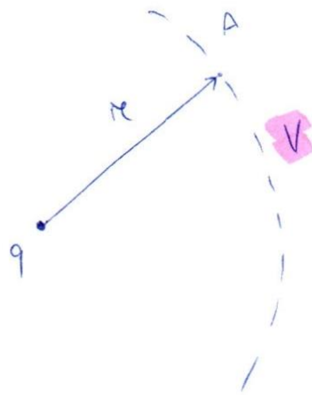
$\begin{cases} \text{carica } q \\ \text{distanza } a \end{cases} \longrightarrow p = qa$

$-q \; \vec a \; +q \qquad \vec p = q \cdot \vec a$



Potenziale dipolo

$r \gg a \longrightarrow V = k \cdot \dfrac{\bar p \cdot \bar u_n}{r^2}$



Carica concentrata

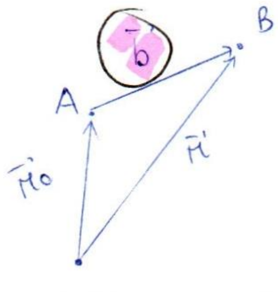
$V = k \cdot \dfrac{q}{r}$

potenziale come carica concentrata (dipendenza $1/r$)

- Se il dipolo viene inserito in un **luogo in cui c'è già un campo**? Quali sono le **azioni meccaniche**?

carica concentrata $\begin{cases} \vec F = q\vec E & \vec E = \text{campo in cui mettiamo } q \\ u = qV & V = \text{potenziale in cui mettiamo } q \end{cases}$

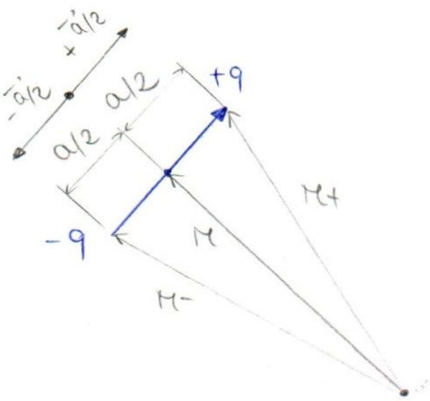
Legame tra V e $\vec E$ $\Longrightarrow$ $\vec E = -\nabla V = -\left\{ \bar u_x \dfrac{\partial V}{\partial x} + \bar u_y \dfrac{\partial V}{\partial y} + \bar u_z \dfrac{\partial V}{\partial z} \right\}$



f = funzione del posto
$\longrightarrow$ funzione in A a distanza $\vec r_0$

$\vec r = \vec r_0 + \vec b \longleftarrow$ vogliamo calcolare in B

Utilizziamo ciò che abbiamo trovato nel caso del dipolo.



$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r} + \dfrac{\vec{a}}{2} \\ \vec{r}_- = \vec{r} - \dfrac{\vec{a}}{2} \end{cases}$$

Energia potenziale dipolo

$$U = U_+ + U_- =$$

$$= qV(\vec{r}_+) + (-q) \cdot V(\vec{r}_-)$$

(carica · potenziale in quel punto)

Utilizziamo la formula trovata dove $a/2$ è infinitesimo

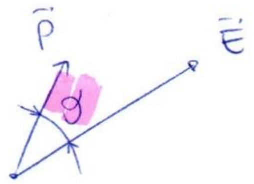
$$= q\left(V\left(\vec{r}+\frac{\vec{a}}{2}\right) - V\left(\vec{r}-\frac{\vec{a}}{2}\right)\right)$$

$$= q\left(\cancel{V(\vec{r})} + \frac{\vec{a}}{2}\cdot\vec{\nabla}V - \cancel{V(\vec{r})} + \frac{\vec{a}}{2}\vec{\nabla}V\right)$$

$$= q\left(\frac{\vec{a}}{2}\vec{\nabla}V + \frac{\vec{a}}{2}\vec{\nabla}V\right) =$$

$$U = q\,\vec{a}\,\vec{\nabla}V = \vec{p}\cdot\vec{\nabla}V = -\vec{p}\cdot\vec{E}$$

In pratica



$$U = -p \cdot E \cdot \cos\vartheta$$

di conseguenza la posizione di eq. stabile (con U minima)

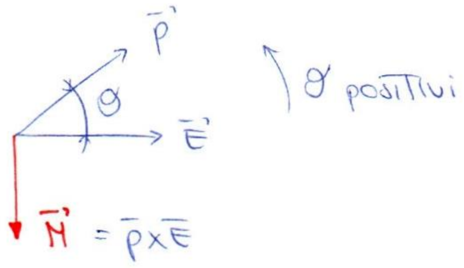
$$\xrightarrow{\vec{p}} \vec{E} \quad (\vartheta = 0)$$

e eq. instabile (con U massima)

$$\xleftarrow{\vec{p}} \quad \longrightarrow \vec{E} \quad (\vartheta = \pi)$$

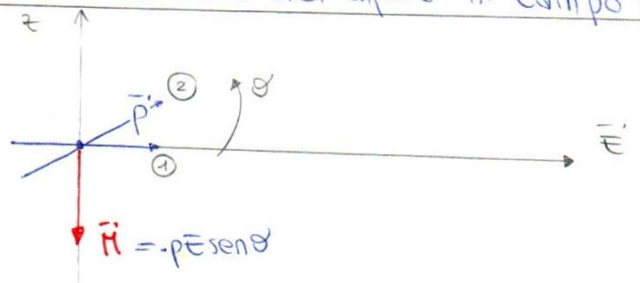
Applichiamo ciò al dipolo

$$M = \vec{p} \times \vec{E}$$



Esempi sul dipolo

(1) Studiare momento del dipolo in campo esterno (uniforme)



① posizione di eq. stabile

② comincia ad oscillare → calcoliamo tipo di oscillazione

→ Ci poniamo in modo che il dipolo oscilli

\+ Forza totale nulla con $\vec{E}$ = costante

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_{cm}) = 0$$

\+ Teorema momento angolare $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ (meccanico) con $\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = I \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_z$

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{I \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{u}_z}_{L} \right) = -pE \operatorname{sen}\theta \cdot \vec{u}_z$$

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -pE \operatorname{sen}\theta$$

che corrisponde al caso del pendolo fisico

→ piccole oscillazioni con $\theta < 5°$ → $\operatorname{sen}\theta \sim \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{pE}{I} \cdot \theta = 0$$

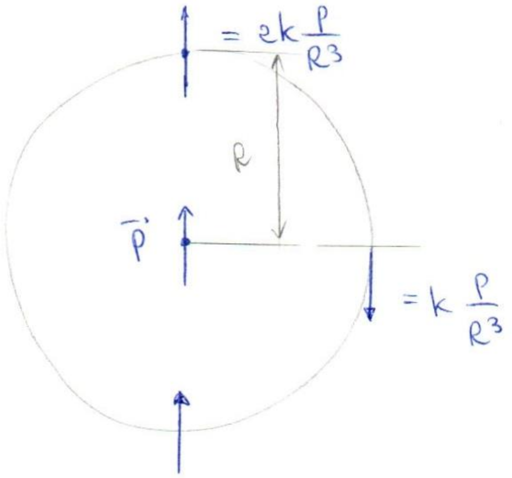
eq. oscillatore armonico

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot \theta = 0$$

la cui soluzione

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

sapevamo che:

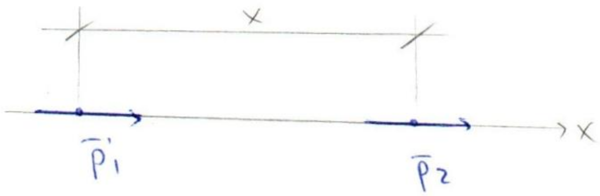


+ Calcoliamo la Forza esercitata dal dipolo sulla carica

$$\vec{E} = 2k\frac{p}{x^3}\cdot\vec{u}_x$$

$$\vec{F}_{PQ} = Q\cdot\vec{E}_P = 2k\frac{QP}{x^3}\cdot\vec{u}_x \implies$$ conferma del principio di azione - reazione (medesima forza)

(4) Dipoli posti a una distanza x $\implies$ Forza esercitata?



$$\begin{cases} \vec{E}_1 = 2k\frac{p_1}{x^3}\vec{u}_x \\ \vec{p}_2 = p_1\cdot\vec{u}_x \end{cases} \implies U_{12} = -\vec{p}_2\cdot\vec{E}_1 = (-p_2\vec{u}_x)\left(2k\frac{p_1}{x^3}\cdot\vec{u}_x\right) =$$

$$= -2k\frac{p_1p_2}{x^3}$$

$$\vec{F}_{12} = -\vec{\nabla}U_{12} = -\frac{d}{dx}\left(-2k\frac{p_1p_2}{x^3}\right)\cdot\vec{u}_x =$$

$$= +2k\,p_1p_2\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)\vec{u}_x =$$

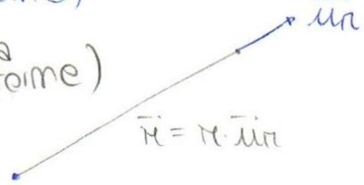
$$= -2kp_1p_2\left(\frac{-3}{x^4}\right)\vec{u}_x =$$

$$= -6k\,p_1p_2\frac{1}{x^4}\cdot\vec{u}_x =$$

$$\vec{F}_{12} = -6k\frac{p_1p_2}{x^4}\vec{u}_x$$

→ LEGGE di GAUSS (Teorema)

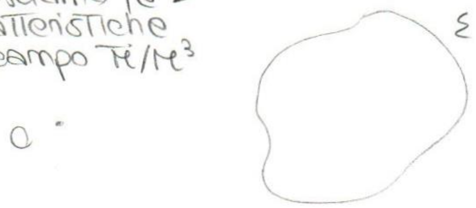
$\vec{E} = k \frac{q}{r^2} \cdot \vec{u}_r$ (carica puntiforme)



che possiamo scrivere come

$\vec{E} = k \cdot \frac{q}{r^3} \cdot \vec{r}$ così sappiamo che se Σ non contiene O il flusso sarà

Conosciamo le caratteristiche del campo $\vec{r}/r^3$



$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \, \vec{u}_n \, d\Sigma =$

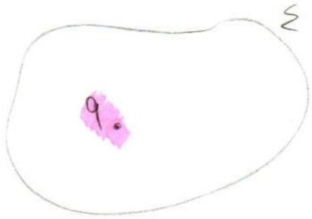
$= kq \oint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$

Ma se la carica è alla superficie

$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint_\Sigma \vec{E} \, \vec{u}_n \, d\Sigma =$

$= kq \oint_\Sigma \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 4\pi \cdot kq$

conosco il flusso di $\vec{r}/r^3$

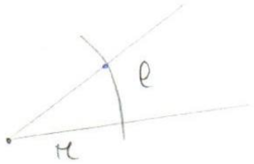


Sapendo che $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ $\Longrightarrow$ $\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \cancel{4\pi} \cdot \frac{q}{\cancel{4\pi}\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

q tutta la carica contenuta

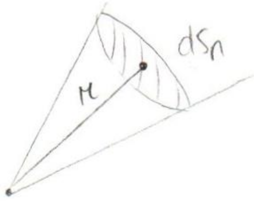
↳ stesso problema si può risolvere con angolo solido

- angolo piano



$\alpha = \frac{\ell}{r}$

- estensione nello spazio → angolo solido



$d\Omega = \frac{dS_n}{r^2}$

se $d\Sigma$ è la superficie $d\Sigma_0$ è quella $\perp r$ (proiezione)

$\boxed{d\Sigma_0 \equiv dS_n}$

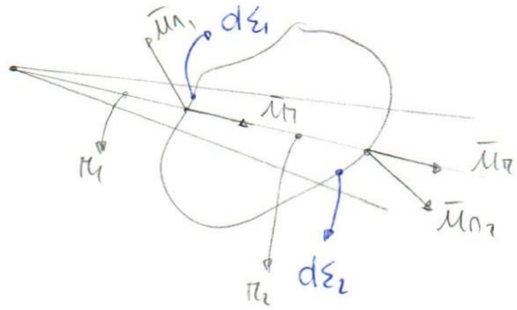
Angolo Totale 4π (sfera)

$$d\phi = \bar{E}\,\bar{u}_n\,d\Sigma = k\frac{q}{r^2}\cdot\bar{u}_r\cdot\bar{u}_n\cdot d\Sigma = kq\frac{d\Sigma_n}{r^2} = kq\,d\Omega$$

$$d\phi_{d\Sigma}(\bar{E}) = kq\,d\Omega$$

Se Σ contiene q $\Rightarrow$ $\phi_\Sigma(\bar{E}) = \oint_\Sigma d\phi = kq\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\Omega = 4\pi\cdot kq = \frac{q}{\varepsilon_0}$

Se Σ non contiene q $\Rightarrow$ succede come in precedenza



$$d\phi = d\phi_1 + d\phi_2 =$$
$$= kq\left\{\frac{\bar{u}_r\cdot\bar{u}_{n_1}}{r_1}d\Sigma_1 + \frac{\bar{u}_r\cdot\bar{u}_{n_2}}{r_2^2}d\Sigma_2\right\}$$
$$= kq\left\{-\frac{d\Sigma_{n1}}{r_1^2} + \frac{d\Sigma_{n2}}{r_2^2}\right\} =$$

angolo ottuso $\ominus$

(hanno stesso angolo solido) ← le due superfici sono sotto lo stesso cono e daranno flussi uguali e opposti.

flussi opposti → $\phi_\Sigma = 0$

$$= kq\,(-d\cancel{\Omega} + d\cancel{\Omega}) = 0$$

CON la presenza di più cariche $\Rightarrow$ FLUSSO?

$$\bar{E} = \sum_{i=1}^{N}\bar{E}_i \quad \text{con } \bar{E}_i = k\frac{q_i}{r_i^2}\cdot\bar{u}_i$$

$$\phi_\Sigma(\bar{E}) = \oint_\Sigma \bar{E}\,\bar{u}_n\,d\Sigma = \oint_\Sigma\left(\sum_{i=1}^{N}\bar{E}_i\right)\cdot\bar{u}_n\,d\Sigma =$$
$$= \oint_\Sigma \sum_{i=1}^{N}\left(\bar{E}_i\cdot\bar{u}_n\,d\Sigma\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\Big(\underbrace{\oint_\Sigma \bar{E}_i\cdot\bar{u}_n\cdot d\Sigma}_{\text{flusso attraverso } \Sigma \text{ di } q_i}\Big)$$
$$= \sum_{i=1}^{N}\phi_\Sigma(\bar{E}_i)$$

a questa somma contribuiscono solo le cariche che $\in$ alla superficie Σ

$$\phi_\Sigma(\bar{E}) = \frac{q(\Sigma)}{\varepsilon_0}$$

↪ $q(\Sigma)$ = carica totale contenuta in Σ
= somma delle cariche contenute in Σ (SOLO QUELLE)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\begin{cases} E_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} \\ E_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

espressione di tipo LOCALE

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \rho / \varepsilon_0$$

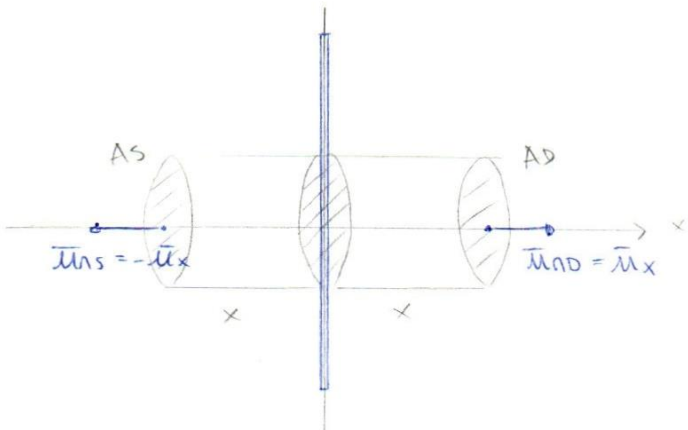
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial z} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

↳ altra formulazione di Poisson

con $\rho = 0 \Longrightarrow$ eq. di Laplace o eq. armonica

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial z} = 0$$

Piano uniformemente carico ⟶ Campo elettrico PIASTRA



densità di carica uniforme

⟶ supponiamo ∞ (grandezza piastra)

⟶ tutti i punti alla stessa distanza (piani yz) sono uguali

⟶ unica direzione del campo è normale al piano

$$\Longrightarrow \vec{E} = E(x) \cdot \vec{u}_x \quad \text{(senza calcoli)}$$

$$E(x) = -E(-x)$$

Consideriamo sup. di Gauss ⟹ stessa simmetria del problema (CILINDRICA)

$$A_S = A_D = A$$

densità sup. di carica

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \frac{q(\Sigma)}{\varepsilon_0} \quad \text{con } q(\Sigma) = \sigma \cdot A$$

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \oint \vec{E}\, \vec{u}_n \, d\Sigma = \quad [\text{superficie} = 2 \text{ basi} + \text{sup. laterale}]$$

$$= \underbrace{\cancel{\iint_{\text{sup. lat.}} \vec{E}\, \vec{u}_n \, d\Sigma_L}}_{\substack{\text{prodotto scalare} = 0 \\ \text{poiché } \vec{E} \text{ sempre } \perp \vec{u}_n}} + \iint_{A_D} \vec{E}\, \underbrace{\vec{u}_{nD}}_{\vec{u}_x} \, d\Sigma + \iint_{A_S} \vec{E} \cdot \underbrace{\vec{u}_{nS}}_{-\vec{u}_x} \, d\Sigma_S =$$

$$= E(x) \cdot A_D - E(-x) \cdot A_S =$$

$$= [\underbrace{E(x) - E(-x)}_{2E(x)}] \cdot A = 2E(x) \cdot A$$

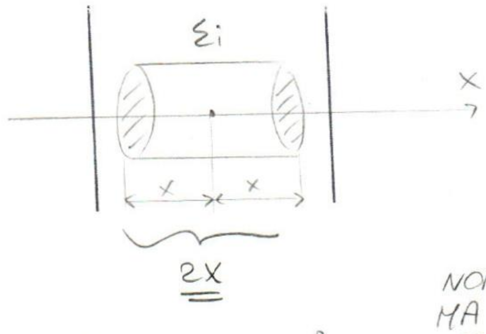
→ se $|x| > L/2$

$$2E(x)\cdot \cancel{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot \rho \cdot \cancel{A}\cdot L$$

$$\boxed{E(x) = \frac{\rho L}{2\varepsilon_0}}$$

→ quando siamo all'interno?

$|x| < L/2$



$Q(\Sigma_i) = 2xA\rho$ = carica contenuta in Σ_i

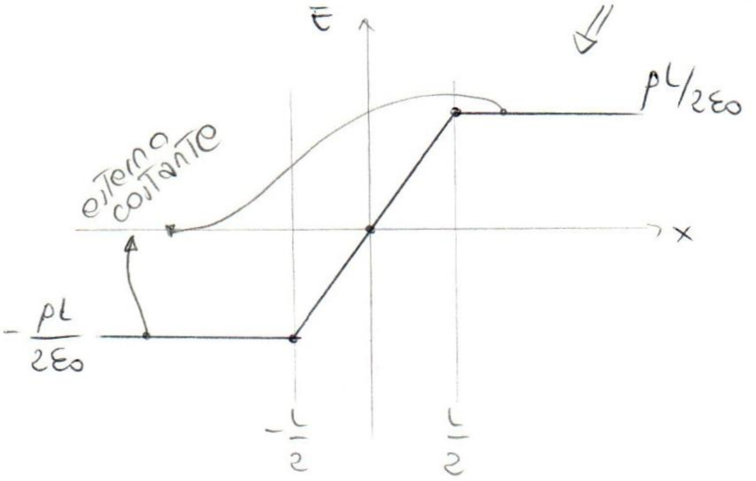
$$C_0 \quad \Phi_{\Sigma_i}(\vec{E}) = \frac{Q(\Sigma_i)}{\varepsilon_0}$$

$$\cancel{2}E(x)\cdot \cancel{A} = \frac{\cancel{2}x\cancel{A}}{\varepsilon_0}\cdot \rho$$

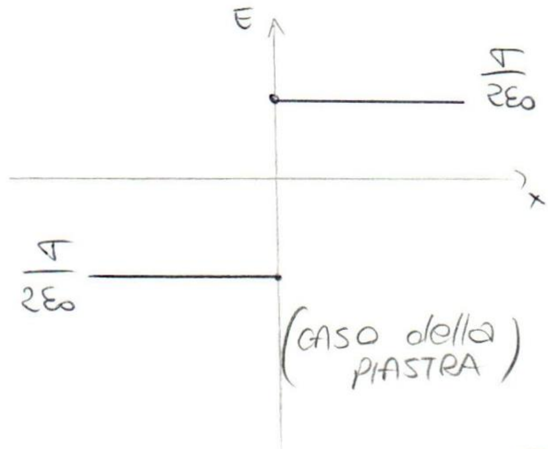
$$\boxed{E(x) = \frac{\rho x}{\varepsilon_0}}$$

All'interno NON è costante MA cambia in modo lineare da $-x$ a $+x$

Andamento del campo?



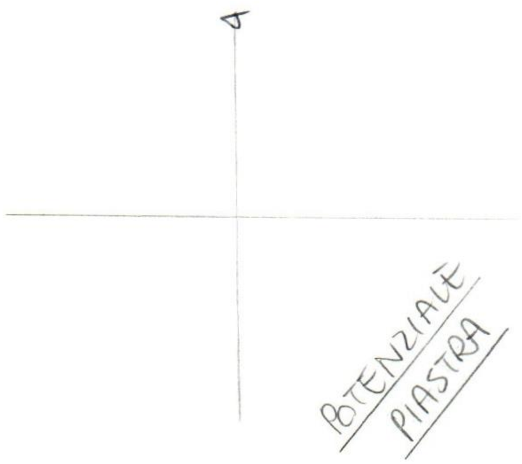
Prima avevamo invece:



(CASO della PIASTRA)

\+ Determinare potenziale elettrico legato al campo

DOVRÒ INTEGRARE



$$\bar{E} = \pm \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\bar{u}_x$$

$$\vec{E} = -\bar{\nabla} V = -\bar{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} - \bar{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} - \bar{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

→ $x > 0$ $\quad \vec{E} = +\sigma/2\varepsilon_0 \cdot \vec{u}_x$

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\bar{u}_x = -\bar{u}_x \frac{\partial V}{\partial x} - \bar{u}_y \frac{\partial V}{\partial y} - \bar{u}_z \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \end{cases} \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

a) potenziale continuo

$$V_i\left(\frac{L}{2}\right) = V_e\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$-\frac{\rho L}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{2} + A = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{L^2}{4}\right) + B$$

continuità potenziale

b) poniamo arbitrariamente $B = 0$

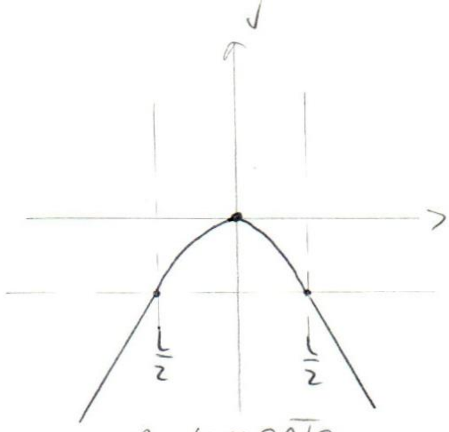
$$-\frac{\rho L}{2\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{2} + A = -\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{L^2}{4}\right)$$

$$A = \frac{\rho L^2}{4\varepsilon_0} - \frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0} = \frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0}$$

sostituisco nelle formule dei potenziali

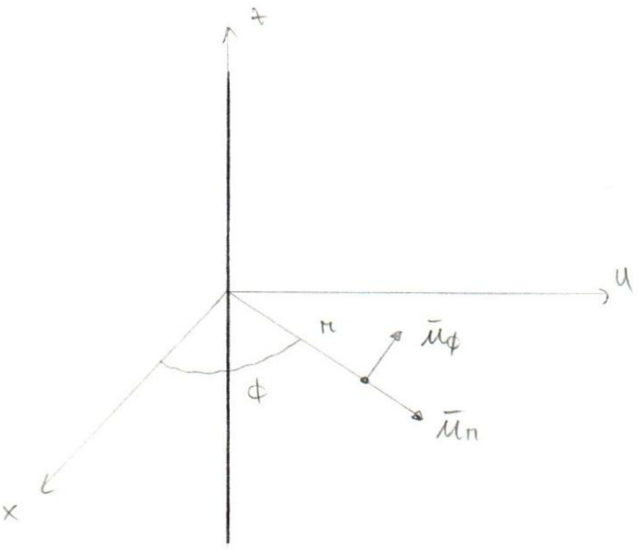
$$\Longrightarrow \quad V_e(x) = -\frac{\rho L}{2\varepsilon_0}\cdot x + \frac{\rho L^2}{8\varepsilon_0}$$

$$V_i(x) = -\frac{\rho x^2}{2\varepsilon_0}$$



Andamento potenziale LASTRA

\+ Filo uniformemente carico



SOLO DIREZIONE RADIALE

→ campo $\bar{E}$ sicuramente non dipende da z poiché tutti i punti sul filo sono equivalenti per carica distribuita uniformemente

→ $\bar{E}$ senza componente z

il campo $\bar{E}$ ha solo componente lungo $\bar{u}_r$

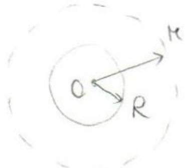
→ direzione radiale

dipenderà dunque dalla distanza r

$$\Longrightarrow \quad \bar{E} = E(r)\,\bar{u}_r$$

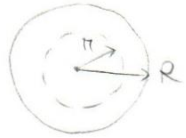
→ mi aspetto punti equivalenti che stanno alla stessa distanza

1) $r > R$ $\qquad Q(\Sigma) = Q$



sup. Gauss > guscio (esterno)

2) $r < R$ $\qquad Q(\Sigma) = 0$



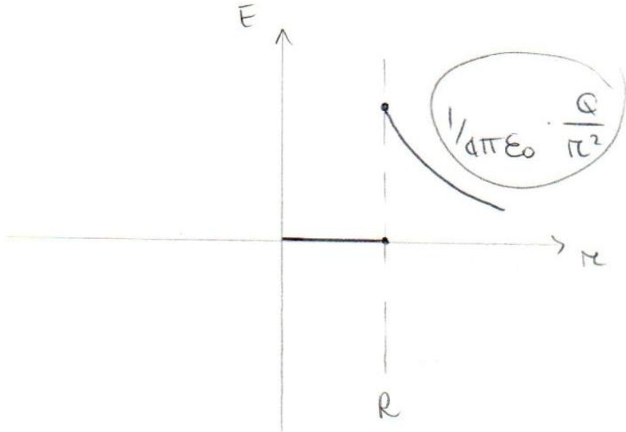
sup. Gauss < guscio (interno)

1) $r > R$ $\Longrightarrow$ $4\pi r^2 \cdot E(r) = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$

2) $r < R$ $\Longrightarrow$ $4\pi r^2 \cdot E(r) = 0$

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

$$E(r) = 0$$



All' esterno è come considerare il campo di una carica concentrata.

NON C'È CAMPO INTERNO

In coordinate sferiche $\quad \bar{\nabla} f = \bar{u}_r \dfrac{\partial f}{\partial r} + \bar{u}_\vartheta \dfrac{\partial f}{\partial \vartheta} \cdot \dfrac{1}{r} + \bar{u}_\phi \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta} \dfrac{\partial f}{\partial \phi}$

Calcoliamo il potenziale $\Longleftarrow$

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V \longrightarrow \begin{cases} \boxed{E(r) = -\dfrac{\partial V}{\partial r}} \\ 0 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \vartheta} \\ 0 = \dfrac{1}{r \operatorname{sen}\vartheta} \cdot \dfrac{\partial V}{\partial \phi} \end{cases}$$

Unica componente

$\Longrightarrow$ Non c'è dipendenza da ϑ e ϕ

$\longrightarrow V = V(r)$

1) $r > R$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} = -\frac{dV}{dr}$$

$$V(r > R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + A$$

2) $r < R$

$$0 = -\frac{dV}{dr} \longrightarrow V(r < R) = B$$

1) $r > R$ $\qquad 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \longrightarrow E(r>R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}$

2) $r < R$ $\qquad 4\pi r^2 \cdot E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{r^3}{R^3} \longrightarrow E(r<R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, Q \cdot \frac{r}{R^3}$

lezione 30/10/2017 - mattina

CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

Metallo: per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel metallo

Conduttore in equilibrio elettrostatico: le cariche sono ferme (non c'è movimento macroscopico) $\Rightarrow \vec{E} = 0 \ \forall P$ del conduttore (condizione macroscopica)

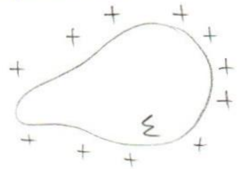
↳ Non c'è movimento ordinato di carica se $\vec{E} = 0$

(1) L'eccesso di carica può stare solo in superficie → All'interno $= 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$ $\qquad$ se $\forall P \in \tau \quad \vec{E} = 0$

$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \longrightarrow \rho = 0$

se carico

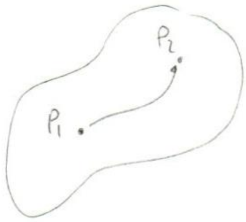


(2) Tutti i punti del conduttore sono allo stesso potenziale

Se $\forall P \in \tau \quad \vec{E} = 0$, presi due punti P_1 e $P_2 \in \tau$ e un percorso $\gamma \in \tau$ si ha:

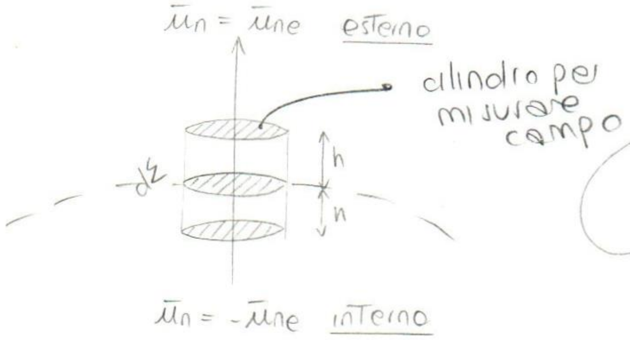
$$V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \, d\vec{r} = 0$$

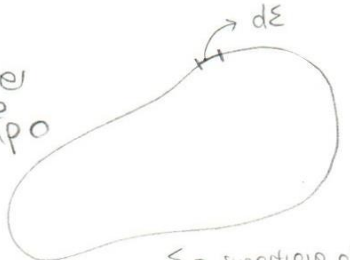
Ma $\vec{E} = 0 \longrightarrow V(P_1) = V(P_2)$



(3) In particolare la superficie è una superficie equipotenziale.
Quindi $\forall P \in \tau \ \vec{E} = 0$. In superficie $\vec{E} \perp \Sigma$, dato che Σ è equipotenziale

(4) Teorema di Coulomb





Σ = superficie chiusa
σ = densità superficiale

Quando due conduttori sono messi a contatto, o collegati con un filo conduttore, formano un solo conduttore.

Problema

Due sfere conduttrici isolate, con cariche Q_{10} e Q_{20} e raggi R_1, R_2, molto lontane sono collegate con un filo metallico. Calcolare le cariche sui fili ed i rapporti dei campi quando si è raggiunto l'equilibrio (Trascurare carica sul filo).

Soluzione

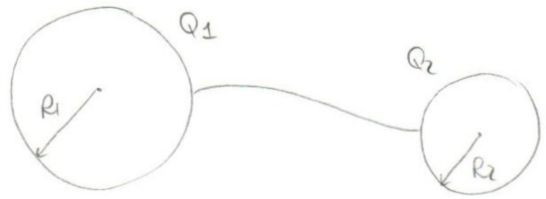
Per un guscio sferico isolato di carica Q e raggio R:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot \bar{u}_r \quad ; \quad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{R}$$

Prima del collegamento:

$$\begin{cases} \vec{E}_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{10}}{R_1^2} \vec{u}_{r_1} \\ V_{10} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{10}}{R_1} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_{20} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{20}}{R_2^2} \cdot \bar{u}_{r_2} \\ V_{20} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_{20}}{R_2} \end{cases}$$

Dopo il collegamento le due sfere formano un unico conduttore → Equipotenziale. Le cariche Q_{10} e Q_{20} si ridistribuiscono in modo che $V_1 = V_2$



$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1} \\ V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_2}{R_2} \end{cases}$$

Con $Q_1 + Q_2 = Q_{10} + Q_{20} = q$ ← carica Totale

→ $V_1 = V_2 \Rightarrow \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \rightarrow \boxed{Q_2 = Q_1 \cdot \frac{R_2}{R_1}}$

$$Q_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) = q \rightarrow Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \cdot q$$

$$Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot q$$

→ I campi in superficie

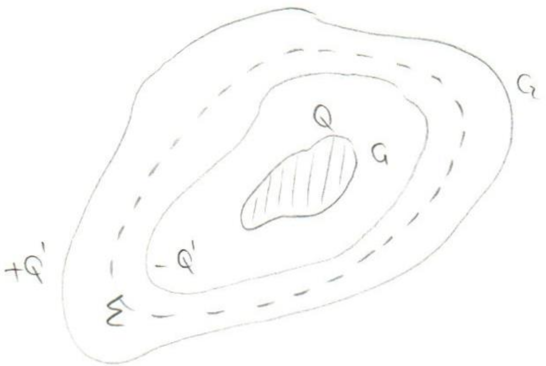
$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1}{R_1^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1^2} \cdot \frac{R_1}{R_1+R_2} \cdot q$$

$$\hookrightarrow E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1(R_1+R_2)} \cdot q \quad ; \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_2(R_1+R_2)} \cdot q$$

Caso della sfera

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u}_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{R^2}$$

→ Conduttore cavo scarico C_2 contenente un conduttore carico C_1 con carica q.
Qual è la situazione di equilibrio?



- C_2 era neutro e neutro rimane

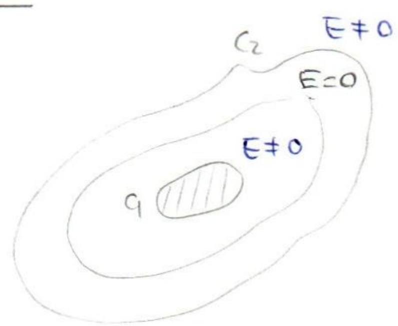
$\forall P \in \tau$ di C_2, $\vec{E} = 0$ dentro C_2 → $\oint_\Sigma \vec{E}\,\vec{u}_n\, d\Sigma = 0$

→ $Q(\Sigma) = 0$ → $Q - Q' = 0$ → $Q' = Q$

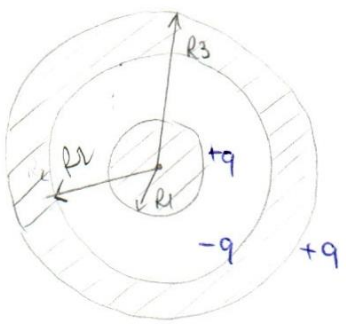
Induzione completa

→ All'esterno il campo NON cambia!

Il campo dentro dipende dalla posizione di C_1 e dalla sua forma. Fuori è sempre lo stesso.
La distribuzione di $-q$ su C_2 è tale che il campo elettrico dovuto a tale carica più quello di q portato da C_1 è identicamente nullo nella massa di C_2.



CONDENSATORE SFERICO



→ $\forall P$ tale che $R_1 < r < R_2$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$

come carica puntiforme

→ $\forall P$ tale che $R_2 < r < R_3$

$$\vec{E} = 0$$

→ $\forall P$ tale che $r > R_3$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\cdot\vec{u}_r$$

$$\begin{cases} V(r < R_1) = \text{costante} \\ V(R_2 < r < R_3) = \text{costante} \end{cases}$$

$$\rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi \varepsilon_0 d}{\ln(R_2/R_1)}$$

Se $R_2 - R_1 = h \ll R_1$ ed R_2

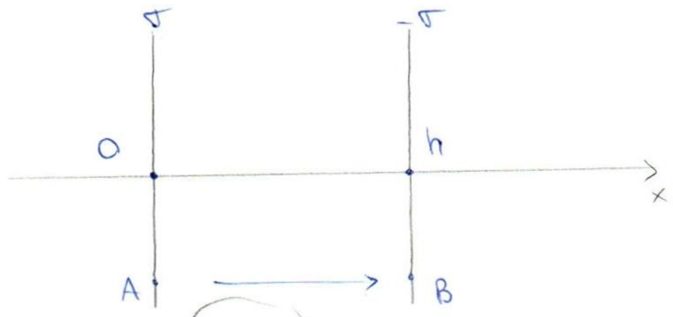
$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1 + h}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{h}{R_1}\right) \approx \frac{h}{R_1}$$

$$\hookrightarrow C \simeq 2\pi \varepsilon_0 d \frac{R_1}{h}$$

Ma $2\pi R_1 d = \Sigma$ = superficie laterale del cilindro

$$\rightarrow C = \varepsilon_0 \cdot \frac{\Sigma}{h}$$

Condensatore a facce piane



$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \vec{\mu}_x$$

unica piastra

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\int_A^B -dV = \int_A^B E\,dx$$

$$V(A) - V(B) = E \int_0^h dx$$

$$\boxed{\Delta V = E \cdot h}$$

considerando campo uniforme tra le piastre

$$\Delta V = E \cdot h = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot h = \frac{1}{A} \cdot \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \cdot h = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{h}{A}$$

di nuovo proporzionale alla carica

Superficie di area A $\rightarrow$ $Q = \sigma \cdot A$

$\cdot \frac{A}{A}$ in modo da avere Q

capacità?

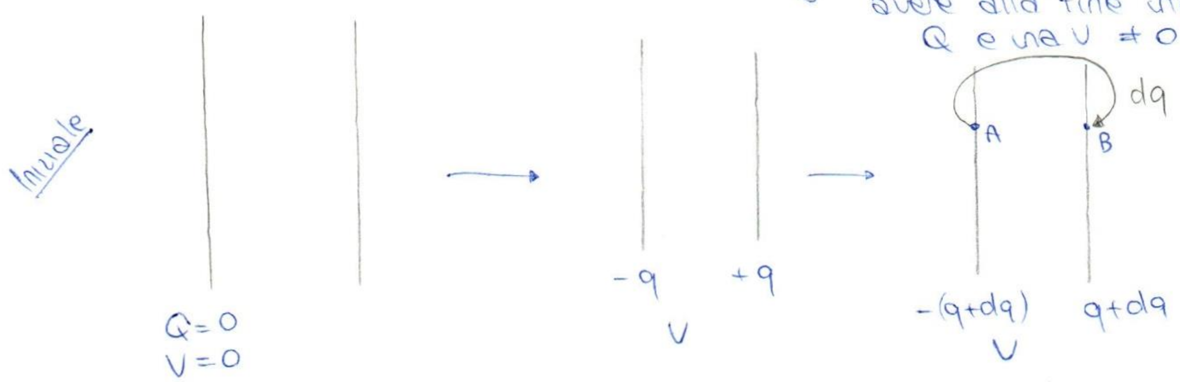
$$\boxed{C} = \frac{Q}{\Delta V} = \boxed{\varepsilon_0 \cdot \frac{A}{h}}$$

Se nel condensatore ho $Q = 0$

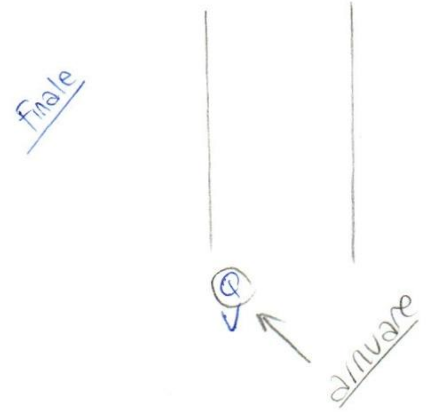
$\rightarrow$ scarico $\rightarrow$ $V = 0$

$\rightarrow$ Vogliamo caricarlo in modo da avere alla fine una Q e una $V \neq 0$

Iniziale



Finale



per trasportare carica dq dovrò compiere un lavoro

$$dW_{ext} = \int_A^B d\vec{F}_{ext} \cdot d\vec{r} =$$

$$= -\int_A^B d\vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_A^B dq \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$= -dq \int_A^B \underbrace{\vec{E}\,d\vec{r}}_{\Delta V} = dq\,[V(A) - V(B)]$$

$$= dq \cdot V$$

potenziale in quel momento

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\, d\tau = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{1}{r^{\cancel{4}\,2}} \cdot 4\pi \cancel{r^2}\, dr =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} =$$

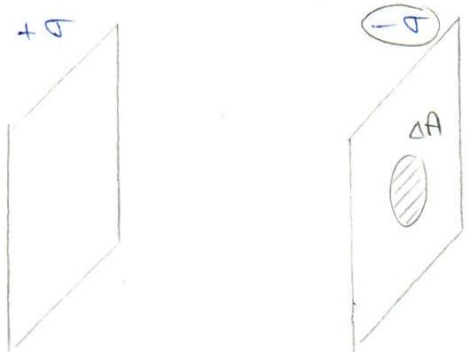
$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}}$$

ma sapevamo che $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1 R_2}{R_1 - R_2}$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \Leftarrow$$

Forza tra le armature

le due armature si attraggono necessariamente. Con che forza?



ΔA con chi interagisce?

(1) Con le cariche negative sul piano dove si trova

↳ sup. infinita → ci sarà sempre elemento simmetrico che rispetto a ΔA darà interazione nulla.

(2) cariche $\oplus$ sull'altro piano.

$\Delta q = -\sigma \cdot \Delta A$

Forza con cui è attratta?

$\Delta \vec{F} = \Delta q \cdot \vec{E}_\sigma$

$\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot \vec{u}_x$ generato solo da superficie $+\sigma$

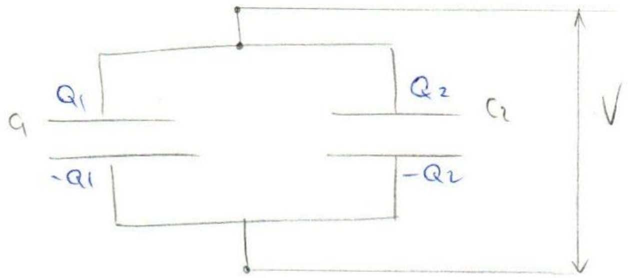
$$\Delta\vec{F} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_x\,(-\sigma\cdot\Delta A) \Leftarrow$$

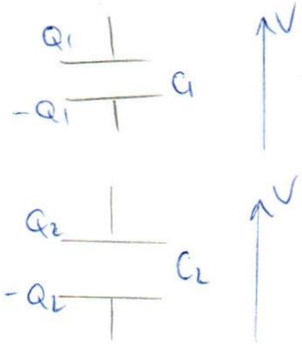
$$\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = -\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\varepsilon_0}\cdot\vec{u}_x = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2\cdot\vec{u}_x$$

$$\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot\vec{u}_x \quad ;\; u =$$ densità di energia elettrostatica

Condensatori in PARALLELO

↳ Hanno la stessa ΔV





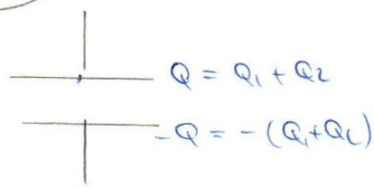
$$C_1 = \frac{Q_1}{V}$$

$$C_2 = \frac{Q_2}{V}$$

$$\begin{cases} Q_1 = C_1 \cdot V \\ Q_2 = C_2 \cdot V \end{cases}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2) \cdot V$$

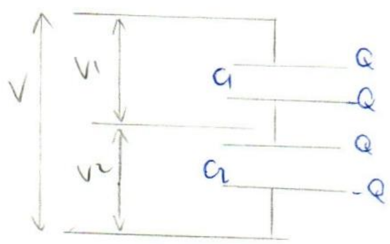
Carica Totale



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{Q_1}{V} + \frac{Q_2}{V} = C_1 + C_2$$

Condensatori in SERIE

↳ Hanno stessa carica sulle armature



$$\begin{cases} C_1 = \frac{Q}{V_1} \\ C_2 = \frac{Q}{V_2} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_1 = \frac{Q}{C_1} \\ V_2 = \frac{Q}{C_2} \end{cases}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_1} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1}\right)$$

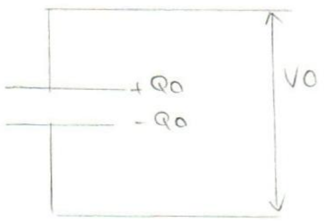
$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Argomenti

1) Esercizio
2) Esperienza Faraday
3)
4) Polarizzazione
5) Cariche di polarizzazione
6) Polarizzabilità
7) Mezzi lineari

Esercizio

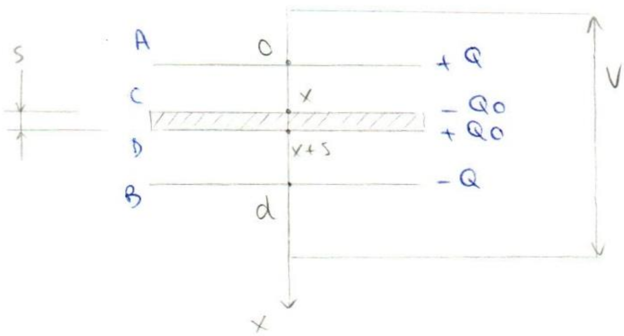
Condensatore isolato → metto le cariche e lo carico



$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad C = \frac{Q}{V}$$

$$V_0 = \frac{Q_0}{C_0} = \frac{d}{\varepsilon_0 A} Q_0 = \frac{d}{\varepsilon_0} \cdot \sigma_0 = \bar{E}_0 \cdot d$$

↳ se metto lastra di conduttore?



campo

$$\begin{cases} 0 < x < X & E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \\ X < x < X+s & 0 \\ X+s < x < d & E = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Fuori c'è campo dentro no

$$-dV = \bar{E}\, d\bar{r}$$

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \bar{E}\, d\bar{r} =$$

$$= \int_A^C \bar{E}\, d\bar{r} + \underbrace{\cancel{\int_C^D \bar{E}\, d\bar{r}}}_{=0} + \int_D^B \bar{E}\, d\bar{r} =$$

$$= \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cdot x + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left[d - (x+s)\right] = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d-s)$$

$$V = V_A - V_B \implies V = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d-s)$$

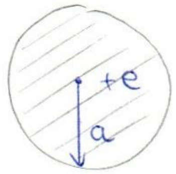
Q_0 = carica asportabile

↳ V diminuisce se aumenta s ⟹ fino ad arrivare $= 0$ con $s = d$

↳ Q invece aumenta per riuscire a mantenere V costante

$$\downarrow V \quad \uparrow Q$$

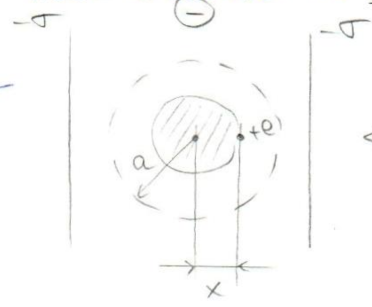
Atomo di H (in 1S)



Nello stato 1S $p = 0$

con $p = qa$ (momento dipolo)

↳ applico campo elettrico ⟶ nucleo (+) va verso $-\sigma$
nube elettronica (−) va verso $+\sigma$



Raggiungo equilibrio quando ho bilancio tra forza deformante sul protone e attrazione elettrostatica della nube elettronica.

↳ Immaginiamo che centro delle cariche (+) si sposta

$F_D = eE$

deformante, vuole separare il protone

$F_e = eE_e$

di richiamo dell'elettrone

POLARIZZAZIONE + DEFORMAZIONE

$$\rho = \frac{-e}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

raggio atomico

$$q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{-e}{\cancel{\frac{4}{3}}\pi a^3} \cdot \cancel{\frac{4}{3}}\pi x^3 =$$

$$= - \quad \cdot \frac{x^3}{a^3}$$

$$E_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{x^2} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x^{\cancel{3}}}{a^3}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}}$$

$$E_e = -\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{a^3}$$

$$F_e = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{a^3}$$

Forza dell'elettrone

In equilibrio $F_D = F_e$ ⟸

$$\cancel{e}E \quad \frac{e^{\cancel{2}}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{x}{a^3} = 0$$

↓

spostamento del baricentro?

$$\boxed{x = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{e}\cdot E}$$

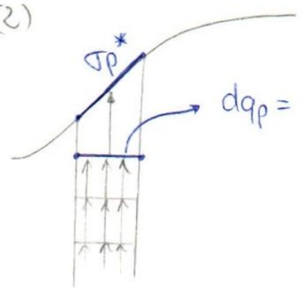
$$\boxed{p = e \cdot x = 4\pi\varepsilon_0 a^3 \cdot E} \longrightarrow p = \varepsilon_0 \alpha E$$

= momento di dipolo generato
= momento di dipolo indotto

con $\boxed{\alpha = 4\pi a^3}$ ← ordine del volume

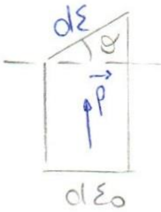
= polarizzabilità

(2)



$dq_p = \sigma_p \cdot d\Sigma_0$

(1) Vettore polarizzazione $\vec{P}$ che incontra superficie (NON ⊥ al vettore)



$dq_p = P \cdot d\Sigma_0$

$dq_p^* = \sigma_p^* \cdot d\Sigma$

$$\begin{cases} P\, d\Sigma_0 = \sigma_p^*\, d\Sigma \\ \sigma_p^* = P \dfrac{d\Sigma_0}{d\Sigma} \end{cases}$$

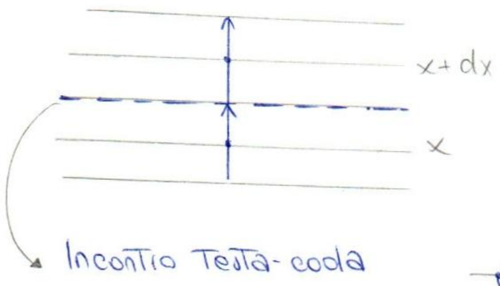
$d\Sigma_0 = d\Sigma \cdot \cos\theta$

$\Longrightarrow \sigma_p^* = P \cdot \cos\theta$

componente lungo la normale

(3) $\vec{P}$ non uniforme

$P = P(x)$



$P(x+dx)$

$P(x)$

Incontro Testa-coda

superficie elementare

$dq_p = P(x+dx)(dy \cdot dz)$

$dq_p = P(x)(dy \cdot dz)$

$\Longrightarrow$ NON si annullano

$\longrightarrow dq_p(x+dx) + dq_p(x) =$

$= -P(x+dx)\, dy\, dz + P(x)\, d\, dz =$

$= \{-P(x+dx) + P(x)\}\, dy\, dz =$

$= \{-\cancel{P(x)} - \frac{dP}{dx} \cdot dx + \cancel{P(x)}\}\, dy\, dz =$

$$dq_v = -\frac{dP}{dx} \cdot dx\, dy\, dz$$

esiste densità di carica di polarizzazione che posso associare

$$\rho_p = \frac{dq_v}{dx\,dy\,dz} = -\frac{dP}{dx}$$

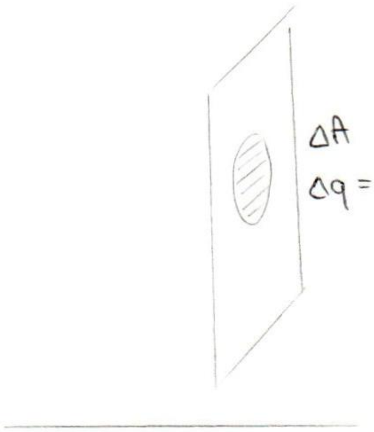
$\Longrightarrow$ se P cambiasse anche in y e z $\Longrightarrow$ $\rho_p = -\nabla \underline{P}$

$$= - \iiint_{\tau} \bar{\nabla} \cdot \bar{P} \, d\tau + \oint_{\Sigma(\tau)} \bar{P} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma =$$

applico divergenza

$$= - \oint_{\Sigma(\tau)} \bar{P} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma + \oint_{\Sigma(\tau)} \bar{P} \, \bar{u}_n \, d\Sigma = 0 \Rightarrow$$ CORPO NEUTRO

Esercitazione 4



ΔA

$\Delta q = \sigma dA$

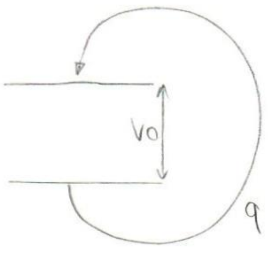
Lo stesso calcolo può essere affrontato valutando l'energia!

Con condensatore piano:

$$\mathcal{U} = \begin{cases} 1/2 \, QV \\ 1/2 \, CV^2 \\ 1/2 \, \dfrac{Q}{C^2} \end{cases}$$

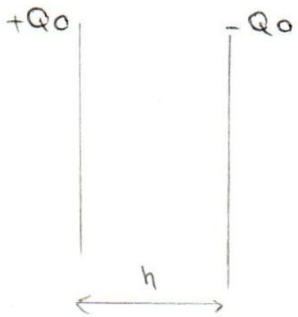
Se sposto la carica q?

Mantengo V_0 con generatore



⟶ lavoro che spende il generatore per spostare la carica sarà $\mathcal{L} = q \cdot V_0$

↳ esercizio 1



$$C(h) = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{h}$$

Carichiamo con Q_0 e poi stacchiamo dal generatore.

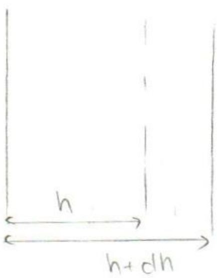
⟶ condensatore isolato

Se modifico e passo a $h + dh$

$$C = \frac{Q_0}{V} \rightarrow V = \frac{Q_0}{C}$$

Spostamento armatura

se cambio $\begin{cases} h \rightarrow h + dh \\ V \rightarrow V + dV \end{cases}$



$$dV = d\left(\frac{Q_0}{C}\right) = Q_0 \cdot d\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q_0}{C^2} \, dC$$

$\Rightarrow \boxed{dW_{ext} = dU}$

$$dW_{ext} = F_{ext} \cdot dh + dW_G$$ del generatore

$$dW_G = dQ \cdot V_0 = dC \cdot V_0^2$$

Ci conviene usare seconda formula per U poichè V_0 = costante

$$C. \quad dU = d\left(\frac{1}{2} C V_0^2\right) = \frac{1}{2} V_0^2 \cdot dC$$

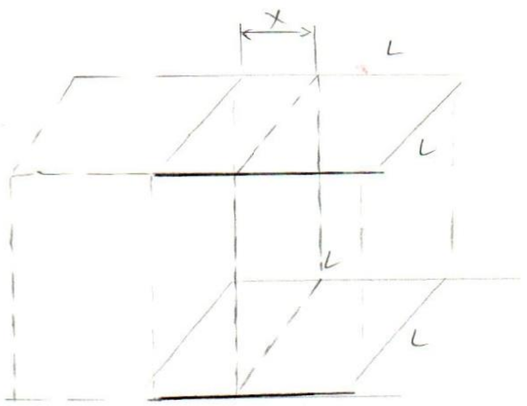
$$F_{ext} \cdot dh + dC \cdot V_0^2 = \frac{1}{2} dC \cdot V_0^2$$

$$F_{ext}\, dh = -\frac{1}{2} dC\, V_0^2$$ come prima

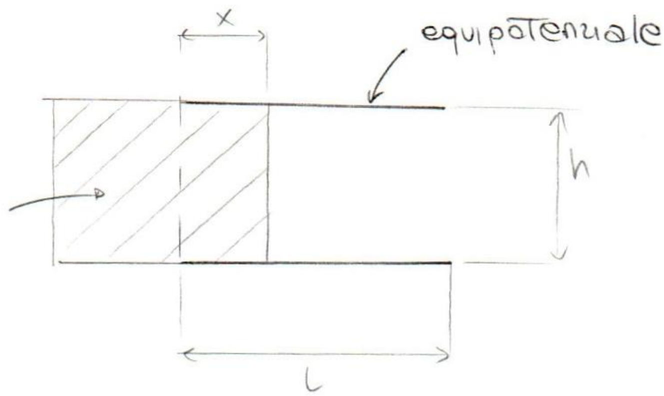
$$F_{ext} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dh} \cdot V_0^2 =$$

Ritorno al medesimo risultato

$$= \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{A}{h^2} \cdot V_0^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 A \cdot \left(\frac{V_0}{h}\right)^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot A$$



Inserisco dielettrico parzialmente nel condensatore. Cosa accade?



Avevamo visto che quando il dielettrico riempiva lo spazio

$$C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{h} \rightarrow C = k \cdot \varepsilon_0 \frac{A}{h}$$

MANCA

Avrò una capacità con dielettrico e una a vuoto (dove ancora non è arrivato il dielettrico)

$$C = C_D + C_V \qquad \begin{cases} C_D = k \varepsilon_0 \dfrac{L \cdot x}{h} \\ C_V = \varepsilon_0 \dfrac{L(L-x)}{h} \end{cases}$$

$$C(x) = k \varepsilon_0 \frac{Lx}{h} + \varepsilon_0 \frac{L(L-x)}{h}$$

$$C(x) = \varepsilon_0 \frac{L}{h} (kx + L - x) = \varepsilon_0 \frac{L}{h} \left[(k-1)x + L\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 242

$$\longrightarrow \quad F_{ext} \cdot dx = -\frac{1}{2} dC \cdot V_0^2$$

$$F_{ext} = -\frac{1}{2} \frac{dC}{dx} \cdot V_0^2$$

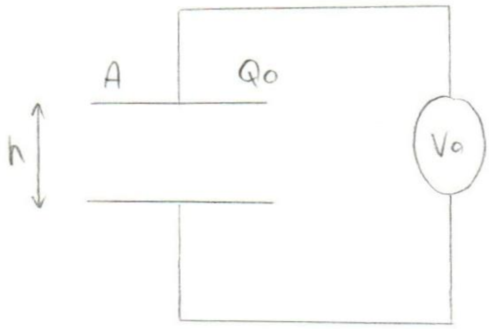
$$F_{ext} = -\frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{L}{h} (k-1) V_0^2$$

$$F_{int} = -F_{ext} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{L}{h} (k-1) V_0^2 \longrightarrow$$

quando il condensatore è sottoposto a V_0 la forza di risucchio è costante (no dipendenza da x)

Condensatore con generatore V_0

$$C_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{h} \qquad C_0 = \frac{Q_0}{V_0}$$



$$Q_0 = C_0 \cdot V_0 = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{h} \cdot V_0$$

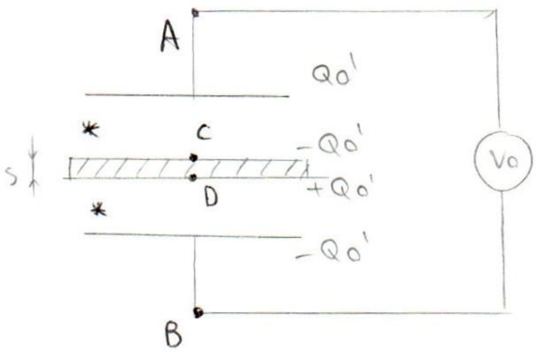
↳ = condizioni iniziali

Inseriamo poi una lastra nel condensatore. (conduttore)

—▸ Nuova carica sugli elettrodi?

Campo $\vec{E}$ nel conduttore = 0

$$* \quad \vec{E} = \frac{Q_0'}{A} \cdot \frac{1}{\varepsilon_0}$$



sappiamo che $V(A) - V(B) = V_0$

$$V(A) - V(B) = \int_A^B \vec{E}\, d\vec{r} =$$

$$= \int_A^C \vec{E}\, d\vec{r} + \underbrace{\int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{r}}_{=0} + \int_D^B \vec{E}\, d\vec{r} =$$

$$= \frac{Q_0'}{A\varepsilon_0} \cdot \overline{AC} + \frac{Q_0'}{A\varepsilon_0} \cdot \overline{BD} = \frac{Q_0'}{A\varepsilon_0} \cdot \underbrace{(\overline{AC} + \overline{BD})}_{= h-s} = \frac{Q_0'}{A\varepsilon_0} \cdot (h-s)$$

$$V_0 = \frac{Q_0'}{A\varepsilon_0} \cdot (h-s) \longrightarrow Q_0' = \varepsilon_0 \frac{A}{h-s} V_0$$

Q_0 aumenta con s

→ Teorema diventa scritta per dielettrici $\boxed{\oint_\Sigma \bar{D} \cdot \bar{u}_n \cdot d\Sigma = Q_{lib}(\Sigma)}$

Eq. Gauss per dielettrici

Se il corpo presenta polarizzazione invece che usare $\vec{E}$
Ti conviene usare altro vettore che corrisponde alle cariche vere.

+ Materiali FERROELETTRICI $\vec{P} \neq 0$ anche se $\vec{E} = 0$
(Presentano sempre una certa polarizzazione)

+ Materiali LINEARI materiali + "banali" Tali che $\vec{P}$ è funzione del campo presente → $\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$

$$\boxed{\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_0 \cdot \chi \vec{E}}$$

con χ = suscettività elettrica ("chi")

quando vale tale relazione allora cambia definizione di $\vec{D}$

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E}}$$

$1 + \chi = k$
$\begin{cases} k = \text{costante dielettrica relativa} \\ \varepsilon_0 k = \text{costante dielettrica assoluta} \end{cases}$

$Q_{lib} = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho_{lib} \cdot d\tau$ sostituisco in Gauss

$\oint_\Sigma \bar{D} \bar{u}_n d\Sigma = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho_{lib} d\tau$ applico divergenza

$\iiint_{\tau(\Sigma)} \bar{\nabla} \cdot \bar{D} \cdot d\tau = \iiint_{\tau(\Sigma)} \rho_{lib} \cdot d\tau$

$\iiint_{\tau(\Sigma)} (\bar{\nabla} \cdot \bar{D} - \rho_{lib}) d\tau = 0 \quad \forall \Sigma \Longrightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{lib}}$

equazione di POISSON

vale per ogni legame tra $\vec{D}$ e $\vec{P}$

Sostituendo → $\boxed{\vec{\nabla}(\varepsilon_0 k \vec{E}) = \rho_{lib}}$

Nel condensatore?

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$

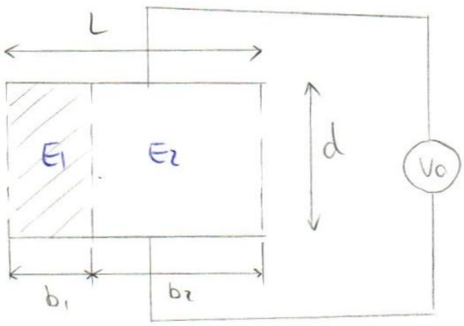
$$\vec{E} = \frac{E_0}{k} = \frac{\sigma_0}{k\varepsilon_0} \longrightarrow D = \varepsilon_0 k E = \cancel{\varepsilon_0 k} \cdot \frac{\sigma_0}{\cancel{\varepsilon_0 k}}$$

$$\boxed{D = \sigma_0}$$

corrispondenza con la densità di carica

↳ Esercizio 2

Condensatore piano riempito parzialmente con due materiali diversi ($k_1 \neq k_2$) → capacità del sistema?



$$E = V_0/d$$

→ capacità → $E_1 = E_2 = \frac{V_0}{d}$

$$\begin{cases} D_1 = \varepsilon_0 k_1 E_1 \rightarrow = \varepsilon_0 k_1 \frac{V_0}{d} \\ D_2 = \varepsilon_0 k_2 E_2 \rightarrow = \varepsilon_0 k_2 \frac{V_0}{d} \end{cases}$$

Carica Q_1? Q_2?

$$\begin{cases} Q_1 = \sigma_1 \cdot b_1 \cdot L \\ Q_2 = \sigma_2 \cdot b_2 \cdot L \end{cases}$$

Dimostrato sopra

sappiamo che

$$\begin{cases} D_1 = \sigma_1 \\ D_2 = \sigma_2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \varepsilon_0 k_1 V_0/d \\ \sigma_2 = \varepsilon_0 k_2 V_0/d \end{cases}$$

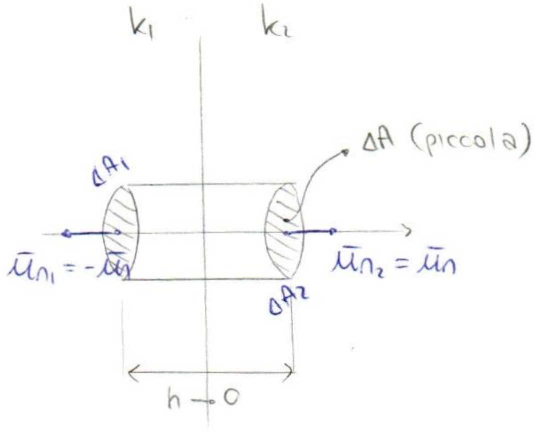
$$\begin{cases} Q_1 = \varepsilon_0 k_1 \cdot \frac{b_1 L}{d} \cdot V_0 \\ Q_2 = \varepsilon_0 k_2 \frac{b_2 L}{d} V_0 \end{cases}$$

$$Q = Q_1 + Q_2 = \varepsilon_0 k_1 \frac{b_1 L}{d} V_0 + \varepsilon_0 k_2 \frac{b_2 L}{d} V_0$$

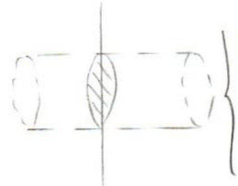
$$C = \frac{Q}{V_0}$$ (V_0 costante)

$$\boxed{C = \varepsilon_0 k_1 \frac{b_1 L}{d} + \varepsilon_0 k_2 \frac{b_2 L}{d}}$$

(2) Consideriamo seconda legge e ipotizziamo presenza di carica libera all'interfaccia



$$\lim_{h\to 0} \oint \bar{D}\,\bar{u}_n\, d\Sigma = \lim_{h\to 0} Q_{lib}$$



con $h \to 0$ unica carica che rimane è quella sulla superficie di base.

$$\lim_{h\to 0} Q_{lib} = \sigma_{lib} \cdot \Delta A$$

$\Delta A \to$ Area di base

$$\lim_{h\to 0} \oint_\Sigma \bar{D}\,\bar{u}_n\, d\Sigma = \lim_{h\to 0} \left\{ \iint_{\Delta A_1} \bar{D}_1 \cdot \bar{u}_{n_1}\, d\Sigma_1 + \iint_{\Delta A_2} \bar{D}_2\, \bar{u}_{n_2}\, d\Sigma_2 + \underbrace{\cancel{\iint_{sup.\,lat} \bar{D} \cdot \bar{u}_{n_L} \cdot d\Sigma}}_{=0 \text{ con } h\to 0} \right.$$

ΔA piccola $\Rightarrow$ D costante

$$= \bar{D}_1\, \bar{u}_{n_1}\, \Delta A_1 + \bar{D}_2 \cdot \bar{u}_{n_2}\, \Delta A_2 \qquad (\Delta A_1 = \Delta A_2 = \Delta A)$$

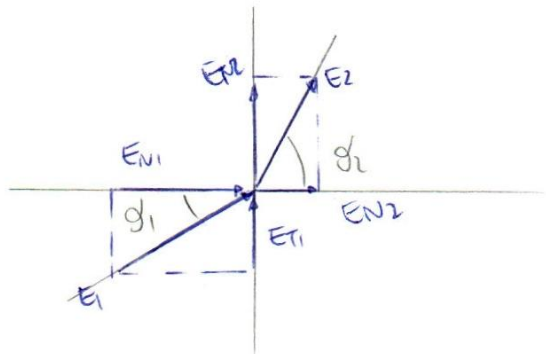
$$= -D_1 \cdot \bar{u}_n \cdot \Delta A + D_2 \cdot \bar{u}_n\, \Delta A$$

$$\Rightarrow (D_2\, \bar{u}_n - D_1\, \bar{u}_n)\cancel{\Delta A} = \sigma_{lib} \cdot \cancel{\Delta A}$$

$$\boxed{\bar{D}_2\, \bar{u}_n - \bar{D}_1\, \bar{u}_n = \sigma_{lib}}$$

Se carico con componente σ_{lib}
→ la componente normale del campo all'interfaccia è DISCONTINUA
→ Rifrazione delle linee di forza

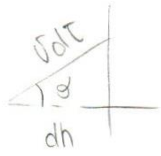
Se non abbiamo caricato con σ_{lib}? → $\sigma_{lib} = 0$
⇒ Rifrazione linee di forza



$$\begin{cases} E_{N_1} = E_1 \cdot \cos\vartheta_1 \\ E_{T_1} = E_1\, \mathrm{sen}\,\vartheta_1 \\ E_{N_2} = E_2 \cdot \cos\vartheta_2 \\ E_{T_2} = E_2 \cdot \mathrm{sen}\,\vartheta_2 \end{cases}$$

prima legge (pagina precedente)
→ $E_{T_1} = E_{T_2}$ (continuità $\vec{E}$)
⇒ $E_1\, \mathrm{sen}\,\vartheta_1 = E_2\, \mathrm{sen}\,\vartheta_2$

$$\begin{cases} dN = n \cdot d\tau \quad \text{(Numeo particelle)} \\ d\tau = d\Sigma \cdot dh = \\ \quad = d\Sigma \, v dt \cos\vartheta \end{cases}$$



$\rightarrow$ $\underline{dN = n \cdot d\Sigma \cdot v dt \cdot \cos\vartheta}$

$dQ = q \cdot dN \implies dQ = nq \cdot v d\Sigma \cos\vartheta \, dt$

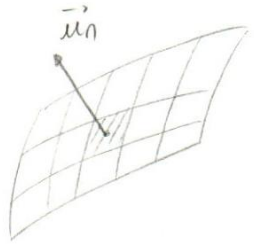
carica singola particella

$$\frac{dQ}{dt} = nq \, v d\Sigma \cos\vartheta = \rho v d\Sigma \cos\vartheta$$

densità di carica elettrica

$$\frac{dQ}{dt} = \rho \cdot \vec{v} \, \bar{u}_n \, d\Sigma = \vec{j} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma$$

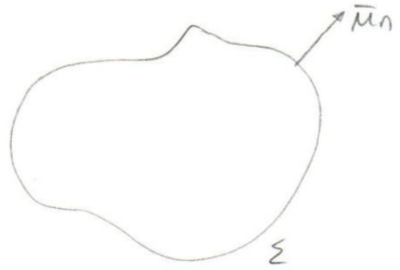
$\vec{j} = \rho \vec{v}$ = vettore densità di corrente



$$\boxed{\left(\frac{dQ}{dt}\right)_\Sigma = \iint_\Sigma \vec{j} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma}$$

= flusso del vettore densità di corrente

$\hookrightarrow$ Principio conservazione della carica



Quanta carica esce?

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{escono} = \oint_\Sigma \vec{j} \cdot \bar{u}_n \, d\Sigma$$

$\rightarrow$ Al tempo t quante cariche c'erano dentro?

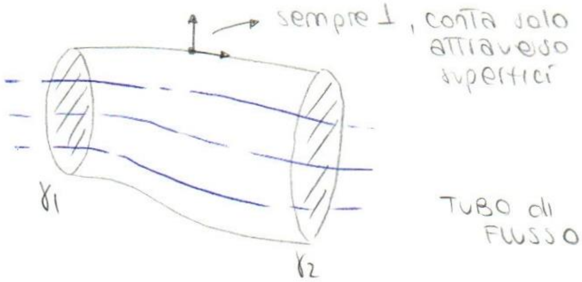
$$Q = \iiint_{T(\Sigma)} \rho \, d\tau$$

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{DIM} = \frac{d}{dt} \iiint_{T(\Sigma)} \rho \, d\tau$$

diminuzione delle cariche $\implies$ quelle che escono devono essere uguali a quelle che mancano dentro

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{escono} = -\left(\frac{dQ}{dt}\right)_{DIM}$$

Regime stazionario → linee di flusso



$f(0) = 0$

$$f(x) = f(0) + \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \dot{x} + \dots$$

$$\lambda = \left(\frac{df}{dx}\right)_0 \rightarrow f(x) = \lambda x \quad \text{(sviluppo usato per i dielettrici)}$$

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{E})$$
$$\vec{P}(0) = 0$$
$$\vec{P} = \vec{E}\chi\varepsilon_0$$

Applico medesimo ragionamento con la corrente

$$\rightarrow \vec{J} = \vec{J}(\vec{E})$$
$$\vec{J}(0) = 0$$

$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$ = legge di Ohm → $\boxed{\vec{E} = \frac{1}{\sigma} \cdot \vec{J} = \rho \cdot \vec{J}}$

σ → conducibilità elettrica

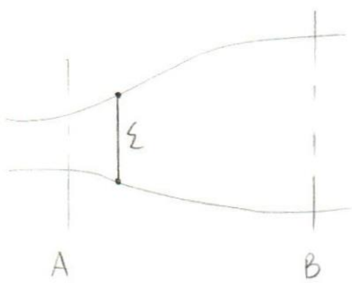
ρ → Resistività elettrica

ρ con campo di variazione enorme

$$\rho \begin{cases} Cu & 2 \times 10^{-8} \\ H_2O & 2 \times 10^{5} \\ & 10^{10} \end{cases}$$

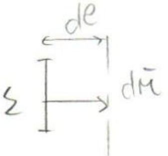
↳ Prendiamo conduttore filiforme (sempre condizioni stazionarie)

Passeremo da formula locale a legge globale.



$$\vec{E}\,d\vec{r} = \rho \cdot \vec{J}\,d\vec{r}$$

$$\int_A^B \vec{E}\,d\vec{r} = V(A) - V(B)$$



→ sezione generica

$$\rho \vec{J}\,d\vec{r} = \rho\left(\frac{i}{\Sigma}\bar{u}_T\right) \cdot d\ell\,(\bar{u}_T) = \rho \cdot \frac{i}{\Sigma}\,d\ell$$

$$\int_A^B \rho \vec{J}\,d\vec{r} = \int_A^B \rho \cdot \frac{1}{\Sigma}\,d\ell = i\left\{\int_A^B \rho \frac{d\ell}{\Sigma}\right\}$$

Esercitazione 5

09/11/2017

$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E}$

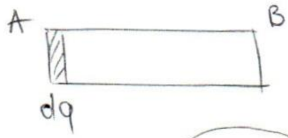
$\vec{J} = \rho \cdot \vec{v}$ con $\rho = nq \rightarrow \vec{J} = nq\vec{v}$

$$nq\vec{v} = \sigma\vec{E}$$

$$\vec{v} = \frac{\sigma}{nq}\vec{E}$$

mentre trovavamo $m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E} \rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{E}$ che cambiava secondo proporzioni diverse

$\vec{J} = \sigma\vec{E} \Longrightarrow V_A - V_B = Ri$ $\qquad R = \int_A^B \rho \frac{dl}{\Sigma}$



spostare dq da $A \rightarrow B$

$$\rightarrow dW_{AB} = \int_A^B d\vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B dq \cdot \vec{E}\, d\vec{r} = dq\int_A^B \vec{E}\, d\vec{r} = dq\,(V_A - V_B)$$

Potenza

$$\frac{dW_{AB}}{dt} = \frac{dq}{dt}(V_A - V_B) = i\,\underbrace{(V_A - V_B)}_{Ri} = \boxed{Ri^2}$$

$\frac{dq}{dt} = i$

$\Rightarrow$ se conduttore è ohmico il lavoro fatto dalle linee di campo è Ri^2

(1) Problema degli elettroliti ✓ ok

elettroni che possono muoversi $\rightarrow$ Applichiamo $\vec{E}$

$\Longrightarrow$ quale corrente attraversa la cella?

equaz. del movimento della carica $m\frac{dv}{dt} = qE$ (unidirezionale)

↳ forse così non varrebbe la legge di Ohm perché avrei dipendenza da t

$$v(t) = \frac{q}{m}Et$$

↳ Avrei $J = nqv = n\frac{q^2}{m}Et$ che aumenterebbe sempre