



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2366A**

**ANNO: 2018**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Rizzo Gloria**

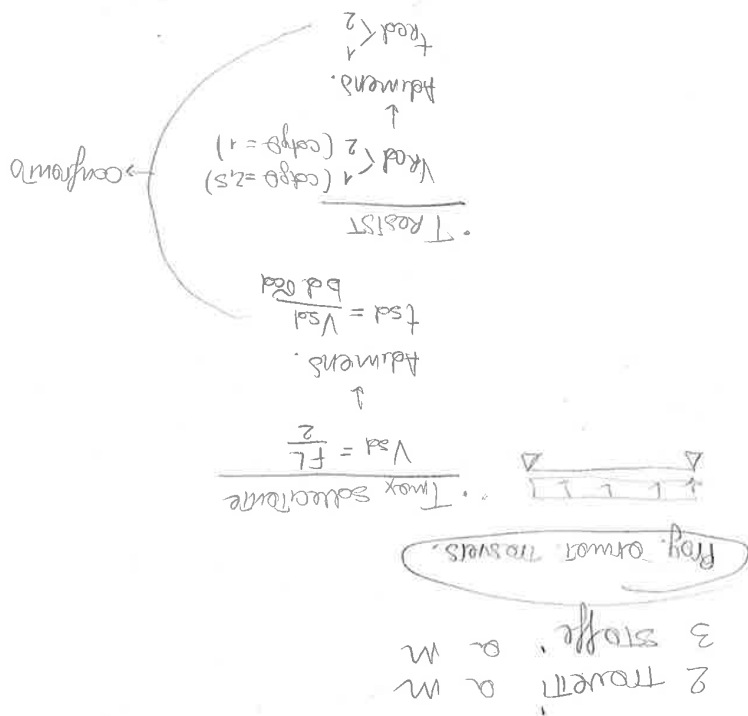
**MATERIA: Strutture - Teoria + Esercitazione - Prof. Fantilli**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

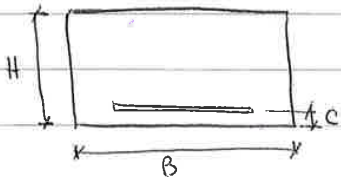
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# VERIFICA → Montoya



- sc [Mpa]
- dk [Mpa]
- dk [Mpa]
- Es [Mpa]
- Resist us =  $\sigma_{cd}$  [Mpa]
- Resist. sezione Vrd [N]

## 2) VERIFICA SEZIONE RETTANGOLARE A FLESSIONE



$H = 300 \text{ mm}$

$B = 600 \text{ mm}$

$c = 50 \text{ mm}$

$4 \phi 14$

C25/30

B450C

$M_{ed} = 30 \text{ kNm}$

$M_{rd}$

$\Rightarrow \mu_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}}$

### • CARATTERISTICHE DEI MATERIALI

$\sigma_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{25}{1,5} = 14,17 \text{ N/mm}^2$

$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391,3 \text{ N/mm}^2$

### • AREA FERRI

$A_s = n_f \frac{\pi \phi^2}{4} = 4 \cdot \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 615,75 \text{ mm}^2$

$d = H - c = 300 - 50 = 250 \text{ mm}$

$w = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b d \sigma_{cd}} = \frac{615,75 \cdot 391,3}{600 \cdot 250 \cdot 14,17} = 0,113$

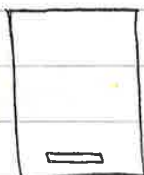
### • $\mu$ TAB. MONTOYA

w	$\mu_{rd}$
0,1071	0,1012
0,113	—
0,1176	0,1104

$\mu_{rd} = \mu_{rd1} \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} (\mu_{rd2} - \mu_{rd1}) = 0,1067$

$M_{rd} \quad \mu_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}} \Rightarrow M_{rd} = \mu_{rd} b d^2 \sigma_{cd} = 36,69 \text{ kNm}$

## 4) PROGETTO SEZIONE RETTANGOLARE (FLESSIONE)



$$B = 300 \text{ mm}$$

$$c = 50 \text{ mm}$$

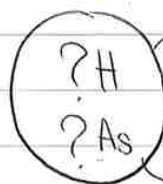
$$C25/30$$

$$B450C$$

$$M_{ed} = 130 \text{ kN}\cdot\text{m}$$

$$H = d + c$$

$$M_{ed} = \frac{M_{ed}}{b d^2 \sigma_{ed}}$$



$$w = \frac{A_s f_{yd}}{b d \sigma_{ed}}$$

Per il progetto mi porfo in campo 3

$$w = 0,2$$

$$\mu_{ed} = 0,18$$

$$M_{ed} = M_{ed}$$

Caratt. materiali

$$\sigma_{ed} = \xi_{dec} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{25}{1,5} = 14,17 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391,30$$

d

$$\mu_{ed} = 0,18 = \frac{M_{ed}}{b d^2 \sigma_{ed}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{M_{ed}}{b \sigma_{ed} \cdot 0,18}} = 442,81 \approx 450 \text{ mm}$$

$$H = d + c = 450 + 50 = 500 \text{ mm}$$

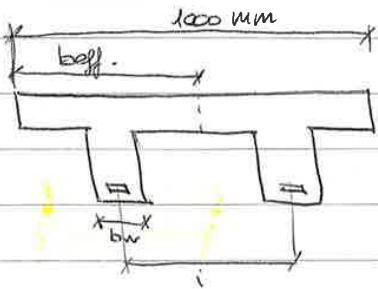
$$A_s \quad w = \frac{A_s f_{yd}}{b d \sigma_{ed}} = 0,2 \Rightarrow A_s = \frac{0,2 \cdot b d \sigma_{ed}}{f_{yd}} = \frac{0,2 \cdot 300 \cdot 450 \cdot 14,17}{391,30} = 977,7 \text{ mm}^2$$

$$A_b = \frac{\pi \phi^2}{4} = \frac{\pi \cdot 14^2}{4} = 153,92$$

$$n_f = \frac{A_s}{A_b} = 6,35 \approx 7 \text{ ferri } 7\phi 14$$

$$A_{resale} = n_f \cdot A_b = 1077$$

7) VERIFICA SEZIONE A T A FLESSIONE



H = 240 mm  
 c = 30 mm  
 d = 210 mm  
 bw = 150 mm  
 s = 50 mm  
 beff = 500 mm  
 As = 763 mm<sup>2</sup>

C40/45  
 B450C  
 M<sub>ed</sub> = 60 kN·m

RICORDA 2 beff.

• CARATTERISTICHE DEI MATERIALI

$$\sigma_{ed} = \alpha_{cr} \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{40}{1,5} = 22,67 \text{ N/mm}^2$$

$$f_{td} = \frac{f_{tk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391,30$$

$$d = H - c = 240 - 30 = 210$$

$$w = \frac{2 A_s f_{td}}{2 b_{eff} \cdot d \cdot \sigma_{ed}} = \frac{763 \cdot 391,30}{500 \cdot 210 \cdot 22,67} = 0,1254$$

•  $\xi$  da TABELLA DI MONTOYA

!! Se  $\eta_0 < \eta$  ⇒ si comporta come una sez. rettangolare → TAB. MONTROYA SEZ. RETT.

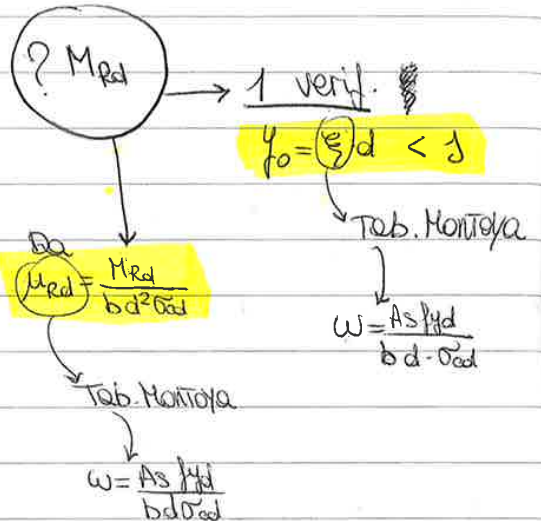
w	$\xi$
0,1171	0,1447
0,1254	←
0,1268	0,1568

$$\xi = \xi_1 + \frac{w - w_1}{w_2 - w_1} (\xi_2 - \xi_1) = 0,155$$

$$\eta_0 = \xi \cdot d = 0,155 \cdot 210 = 32,55 < \eta \text{ ok}$$

oppure verifico per  $\xi_{max} = 0,1268$  e sono di sicuro giusto per  $\xi$

$$M_{red} = \frac{M_{ed}}{2 b_{eff}^2 \sigma_{ed}} \Rightarrow M_{ed} = M_{red} b_{eff}^2 \sigma_{ed}$$

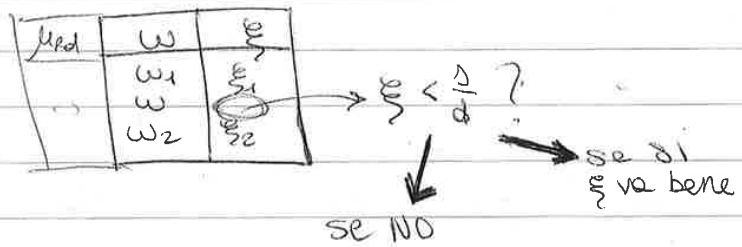


8) VERIFICA SEZIONE A T A FLESSIONE

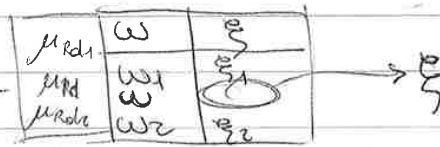
$h_p$   
 $\xi_0 = \xi d < \xi \Rightarrow \xi < \frac{1}{d}$

$w = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{b d \sigma_{sd}}$  con questo  $w$  entro nella Tab. di Montoya

ho  $h_p \xi_0 < \xi \Rightarrow$  Tab. sez. rettang.

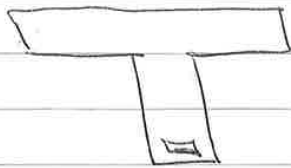


Tab. di Montoya sez. AT:

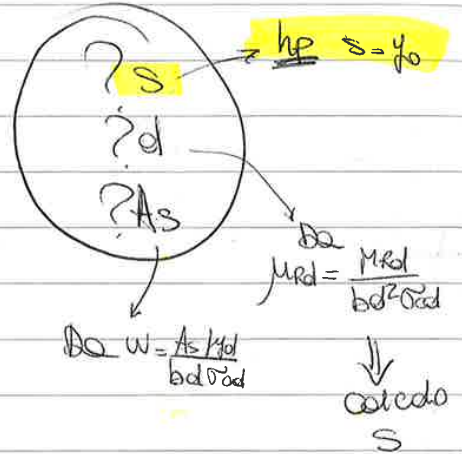


$M_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{sd}} \Rightarrow M_{rd} = \mu_{rd} b d^2 \sigma_{sd}$

10) PROGETTO SEZIONE AT A FLESSIONE NON HO S



$b_w$   
 $b_{eff} = 1000$   
 $c$   
 C25/30  
 B450C  
 $M_{ed} = 1000 \text{ kN}\cdot\text{m}$



Progetto in campo 3

$w = 0,2$   
 $\mu_{rd} = 0,18$   
 $\xi = 0,25$   
 $M_{rd} = M_{ed}$

• s:  $h_p \cdot s = y_0 = \xi \cdot d$

• d:

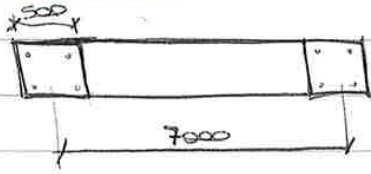
$$\mu_{rd} = \frac{M_{ed}}{bd^2\sigma_{ed}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{M_{ed}}{\mu_{rd} \cdot b \cdot \sigma_{ed}}} = 625 \text{ mm} \Rightarrow s = y_0 = \xi d = 0,25 \cdot 625 = 156,25$$

• As:

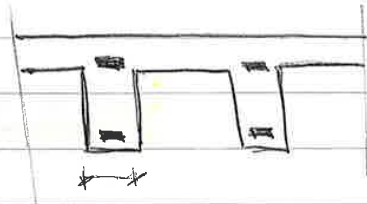
$$w = \frac{As \cdot f_{yd}}{bd \sigma_{ed}} \Rightarrow As = \frac{w \cdot b \cdot d \cdot \sigma_{ed}}{f_{yd}} = 4525 \text{ mm}^2$$



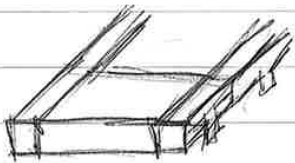
12) VERIFICA SOLAIO IN CA. A TAGLIO



$V_{Rd} > V_{Ed}$   
 $\hookrightarrow V_{Rdmin}$



- $l = 7\text{m}$                       C 25/30
- $b_w = 120\text{ mm}$                 B450
- $s = 50\text{ mm}$                      $G_1 = 3,3 \cdot \text{kN/m}^2$
- $b_{eff} = 500\text{ mm}$                 $G_2 = 1,7 \text{ kN/m}^2$
- $c = 50\text{ mm}$                      $Q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$
- $d = 230\text{ mm}$
- $A_s = 2\phi 12 = 2 \cdot \frac{\pi \cdot 12^2}{4} = 226,19$
- $A_{s'} = 1\phi 12$



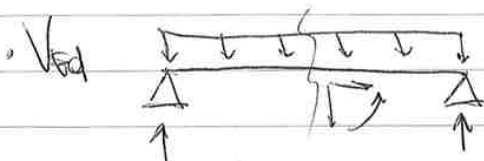
• corr. met.      $\alpha_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \cdot \frac{25}{1,5}$   
 $\alpha_{fd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15}$

•  $V_{Rdmin} = V_{min} \cdot b_w \cdot d = 12975,6 \text{ N} = 12,97 \text{ kN}$

$0,035 \cdot k^{1,5} \cdot \sqrt{f_{ck}} = 0,47$

$1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1,93 < 2$

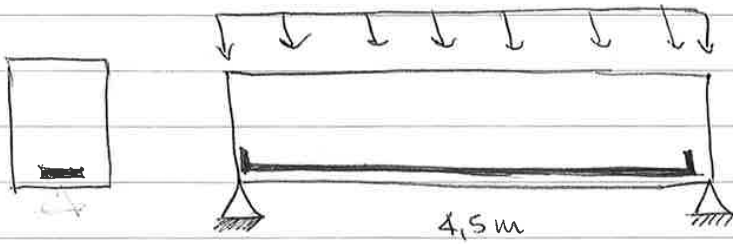
•  $V_{Rd} = \left[ \frac{0,18 \cdot k}{\gamma_c} \left( 100 \cdot \frac{A_s}{b_w \cdot d} \cdot f_{yk} \right)^{1/3} + k_{tr} \cdot \sigma_{cp} \right] b_w \cdot d = 17,5 \text{ kN} > V_{Rdmin}$



$q = G_1 \cdot \gamma_{G1} + G_2 \cdot \gamma_{G2} + Q_k \cdot \gamma_{Qk}$   
 $= 3,3 \cdot 1,3 + 1,7 \cdot 1,5 + 2 \cdot 1,5 = 9,8 \text{ kN/m}^2$

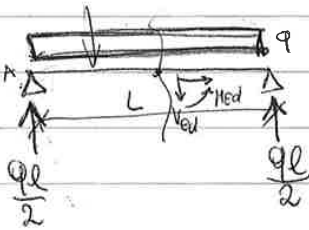
All'eq.  
 $V_A = \frac{qL}{2} = 34,3 \text{ kN}$       $V_B = \frac{qL}{2} = 34,3 \text{ kN}$

13) VERIFICA TRAVE A FLESSIONE E TAGLIO



$B = 300 \text{ mm}$   
 $H = 450 \text{ mm}$   
 $C = 50 \text{ mm}$   
 $d = 350 \text{ mm}$   
 $A_s = 2\phi 16 = 2 \frac{\pi 16^2}{4} = 201 \text{ mm}^2$   
 C25/30  
 B450C  
 $L = 4,5 \text{ m}$   
 $q_{\text{max}} = 15 \text{ kN/m}$

• A FLESS.  $M_{rd} > M_{ed}$



$M_{ed} = q \frac{L}{2} z - \frac{q z^2}{2} =$   
 $M_{ed} = \frac{qL}{2} z - \frac{qz^2}{2} \Rightarrow$

$M_{ed}(\frac{L}{2}) = 37,97$

$1) \frac{qL}{2} - V_{ed} = qz = 0 \Rightarrow V_{ed} = -qz + \frac{qL}{2}$   
 $V_{ed}(z = \frac{L}{2}) = 0$   
 $V_{ed}(z = 0) = 33,75$

$M_{rd} = 0,9 d f_{td} A_s = 49566 \cdot 136,6 = 49 \text{ KN m}$   
 $> M_{ed}$

$V_{rd} = \left[ \frac{0,18 \cdot k}{\gamma_c} \left( 100 \frac{A_s}{b w d} f_{tk} \right)^{1/3} \right] b w d = 47 > V_{min}$   
 $\times V_{ed}$

$V_{rd, min} = V_{min} b w d = 43050 \text{ N} = 43 \text{ KN}$   
 $0,055 k^{1/3} \sqrt{f_{tk}} = 0,41$   
 $1 - \sqrt{\frac{200}{d}} = 1,76 < 2$

# PROGETTO DI STRUTTURE

## 1ª Parte: Effetti delle azioni sulle strutture Ed

Sollecitazioni  $M, N, T$

1) CONDIZIONE STATICA  $\rightarrow$  Equazioni di equilibrio:

i carichi agenti devono essere in equilibrio con le sollecitazioni

$\Rightarrow$  impongo VINCOLI STATICI

2) CONDIZIONE CINEMATICA  $\rightarrow$  Equazioni di congruenza:

gli spostamenti e le rotazioni devono essere compatibili con i vincoli

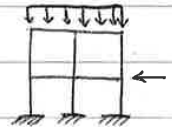
$\Rightarrow$  impongo VINCOLI CINEMATICI

3) COMPORTAMENTO DEI MATERIALI  $\rightarrow$  leggi costitutive:

assumiamo un regime elastico lineare

(legge di Hook  $\sigma = E \epsilon$ )

TELAI PIANI  $\rightarrow$  STRUTTURE fatte da aste contenute in un piano  
AZIONI all'interno del piano



- Se la struttura è ISOSTATICA per risolverla bastano le equazioni di equilibrio
- Se la struttura è IPERSTATICA servono tutte e 3 le condizioni

Abbiamo 2 metodi per risolverla:

### - METODO DELLE FORZE

le INCOGNITE sono le reazioni vincolari (quantità di tipo statico).  
Per definirle imponiamo delle CONDIZIONI di tipo cinematico (cioè il rispetto delle condizioni di congruenza)

### - METODO DEGLI SPOSTAMENTI

le INCOGNITE sono gli spostamenti/rotazioni (quantità di tipo cinematico).  
Per definirle imponiamo delle CONDIZIONI di tipo statico (cioè il rispetto delle condizioni di equilibrio).

Si possono individuare  $\infty$  sistemi equilibrati

TEOREMA DI KIRCHHOFF: Tra le  $\infty$  soluzioni ce ne sarà una sola che soddisferà contemporaneamente le condizioni di equilibrio e di congruenza

La CONGRUENZA con il metodo delle forze la impongo applicando l'equazione dei LAVORI VIRTUALI:

$L_i^{a,b} = L_e^{a,b}$  Il lavoro interno fatto da 2 sistemi a e b è uguale al lavoro esterno fatto da 2 sistemi a e b.  
 "a" = SISTEMA VIRTUALE  
 "b" = SISTEMA REALE

$$L_{est}^{a,b} = F_a \cdot \eta_b$$

$$L_{int}^{a,b} = \int L M_a \mu_b dz + \int L N_a \lambda_b dz + \int L T_a \eta_b dz$$

$\mu_b = \frac{M_b}{EI} \rightarrow$  CURVATURA  
 $\lambda_b = \frac{N_b}{EA} \rightarrow$  DEFORMAZIONE ASSIALE  
 $\eta_b = \frac{T}{GA} \rightarrow$  DEFORMAZIONE TANGENZIALE  
 Questo contributo diventa rilevante solo nelle travi tozze  
 $\bar{\mu}, \bar{\lambda}, \bar{\eta}$  deformazioni medie

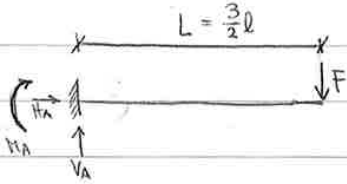
Come sistema virtuale assumo uno dei sistemi esistenti ("a" = i)

$$L_{est}^{i,b} = L_{int}^{i,b}$$

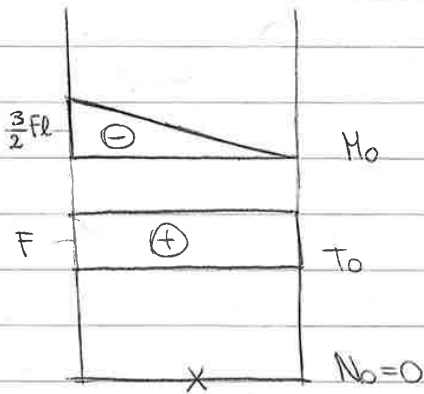
$L_{est} = u \cdot 0$  perché nel sistema reale nel punto dove ho applicato la forza ho un vincolo quindi lo spostamento reale è nullo



ES. SIST. PRINC.

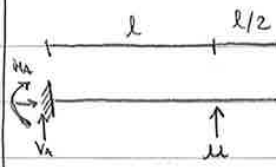


$$\begin{aligned} \Rightarrow H_A &= 0 \\ \uparrow V_A &= F \\ \text{A)} \quad M_A - F \cdot \frac{3}{2}l &= 0 \\ M_A &= -F \cdot \frac{3}{2}l \end{aligned}$$

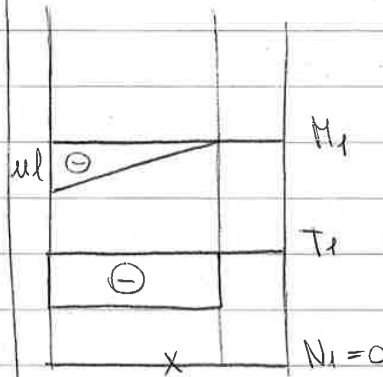


$$M_0(z) = -\frac{F3}{2} \left(1 - \frac{z}{l} \frac{2}{3}\right)$$

SIST. AUX



$$\begin{aligned} \Rightarrow H_A &= 0 \\ \uparrow V_A + \mu &= 0 \Rightarrow V_A = -\mu \\ \text{A)} \quad -M_A + \mu l &= 0 \\ M_A &= \mu l \end{aligned}$$



$$M_1(z) = \mu l \left(1 - \frac{z}{l}\right)$$

$$\begin{aligned} \int_l M_1^2 dz &= \mu^2 l^2 \int_0^l \left(1 - \frac{z}{l}\right)^2 dz = \mu^2 l^2 \left[ \int_0^l dz + \int_0^l \frac{z^2}{l^2} dz - 2 \int_0^l \frac{z}{l} dz \right] = \\ &= \mu^2 l^2 \left[ l + \frac{l^3}{3l^2} - 2 \frac{l^2}{2l} \right] = \frac{\mu^2 l^3}{3} \end{aligned}$$

$$\int_l M_1 M_0 dz = \mu l \cdot \frac{F3}{2} \int_0^l \left(1 - \frac{z}{l}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \frac{z}{l}\right) dz = -\frac{\mu l^2 F 3}{2} \left[ \int_0^l dz - \frac{z}{3l} \int_0^l z dz - \int_0^l \frac{z}{l} dz + \frac{2}{3l^2} \int_0^l z^2 dz \right]$$

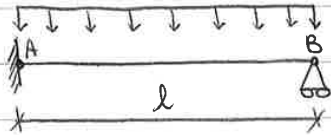
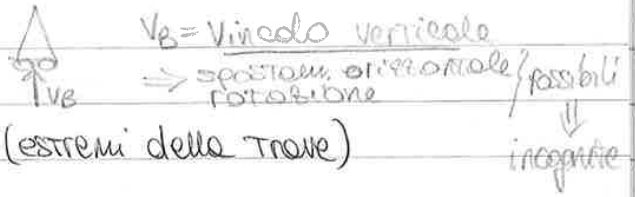
$$= -\frac{\mu l^2 F 3}{2} \left[ l - \frac{2}{3l} \frac{l^2}{2} - \frac{l^2}{2l} + \frac{2}{3l^2} \frac{l^3}{3} \right] = -\frac{\mu l^3 F 3}{2} \left[ 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{9} \right] =$$

$$= -\frac{\mu l F 3}{2} \left( \frac{18 - 6 - 9 + 4}{18} \right) = -\frac{\mu l F 3}{2} \left( \frac{7}{18} \right) = -\frac{\mu l F 7}{12}$$

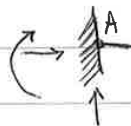
$$R_B^b = \underbrace{R_B^0}_0 + X_1 \underbrace{R_b^1}_\mu = -\frac{7}{4} \frac{F}{\mu}$$

## METODO DEGLI SPOSTAMENTI

INCOGNITE = spostamenti/rotazioni dei nodi (estremi delle trave)



$h=1$



3 vincoli  $\Rightarrow$  0 spostamenti possibili



Vincolo verticale

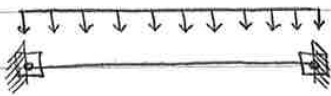
$\Rightarrow$  gli spostamenti possibili sono lo spostamento orizzontale e la rotazione

$\rightarrow \eta_B$        $\curvearrowright \varphi_B$



• Definire un SISTEMA PRINCIPALE:

È il sistema reale in cui tutti i nodi (dove ci sono gli spostamenti) sono bloccati, come se ci fossero degli incastri.



struttura ancora più iperstatica  $\mu_0$  lo  $\eta_0$

• Definire i SISTEMI AUSILIARI:

dato il sistema principale si applicano degli spostamenti unitari in corrispondenza dei vincoli aggiunti.

SIST. AUX 1

SIST. AUX 2



n spostamenti mi porteranno a definire n sistemi ausiliari  $\lambda_n \mu_n \eta_n$  congruenti

$$\int_L EI \left( \mu_0 + \sum_{j=1}^n X_j \mu_j \right) \mu_i dz + \int_L EA \left( \lambda_0 + \sum_{j=1}^n X_j \lambda_j \right) \lambda_i dz = 0 \quad \left| \begin{array}{l} \text{SISTEMA DI} \\ n \text{ equazioni in} \\ n \text{ incognite} \end{array} \right.$$

Possiamo scrivere il sistema in maniera compatta.

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{01} \\ \vdots \\ \delta_{0n} \end{Bmatrix} \Rightarrow \underbrace{[H]}_{\text{MATRICE DI RIGIDEZZA}} \{X\} = \{F\}$$

$$\Rightarrow \delta_{ij} = \int_L EI \mu_i \mu_j dz + \int_L EA \lambda_i \lambda_j dz$$

$$\delta_{0i} = - \int_L EI \mu_0 \mu_i dz - \int_L EA \lambda_i \lambda_0 dz$$

Penso a qualcosa che non mi faccia passare dalla risoluzione dei sistemi principali + overtoni

$[k]\{n\} = \{s\}$   $\rightarrow$  correlazione tra le sollecitazioni nei nodi e i rispettivi spostamenti nodali

$$\begin{bmatrix} k_{11} & & & k_{14} \\ & \ddots & & \\ & & k_{33} & \\ k_{41} & & & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{Bmatrix}$$

$\downarrow$   
 MATRICE DI RIGIDEZZA Il problema diventa calcolare  $[k]$

$$\begin{aligned} s_1 &= k_{11} n_1 + k_{12} n_2 + k_{13} n_3 + k_{14} n_4 \\ s_2 &= k_{21} n_1 + k_{22} n_2 + k_{23} n_3 + k_{24} n_4 \\ s_3 &= k_{31} n_1 + k_{32} n_2 + k_{33} n_3 + k_{34} n_4 \\ s_4 &= k_{41} n_1 + k_{42} n_2 + k_{43} n_3 + k_{44} n_4 \end{aligned}$$

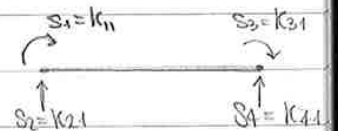
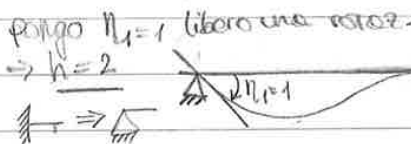
SIGNIFICATO FISICO DEI  $k_{ij}$ : il generico  $k_{ij}$  è la sollecitazione  $s_i$  quando  $n_j = 1$  e tutti gli altri  $n$  sono nulli.

$\downarrow$   
 DETERMINAZIONE DELLA MATRICE  $[k]$

$\cdot k_{11} \quad k_{21} \quad k_{31} \quad k_{41}$

pongo  $n_1 = 1 \quad n_2 = n_3 = n_4 = 0$

STRUTT. PRINCIPALE

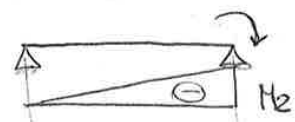
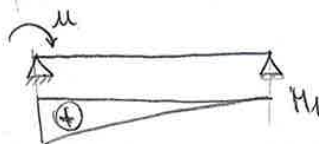


Si trascuri la deformabilità prodotta dal taglio nel caso in cui  $L$  è molto più grande delle altre 2 dimensioni della trave, quindi è il caso del solido di Saint Venant.  $\Rightarrow$  si risolve la struttura con il METODO DELLE FORZE ( $h=2 \Rightarrow$  grado 2 vincoli) la struttura è 2 volte iperstatica quindi si imposta il sistema reale (0) e 2 sistemi ausiliari (1 e 2)

SIST. 0

SIST. 1

SIST. 2



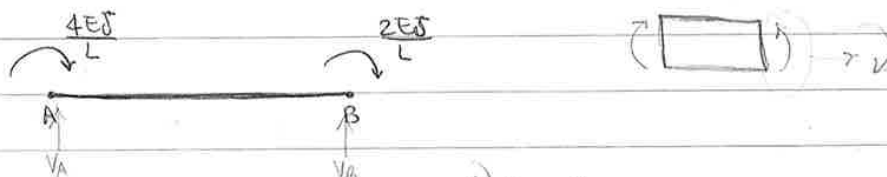


$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\right) X_2 &= \frac{C \cdot \eta_1 EJ}{cL} \Rightarrow X_2 = \frac{2 \eta_1 EJ}{cL} \\ X_1 &= 2 \cdot \frac{2 \eta_1 EJ}{cL} = \frac{4 \eta_1 EJ}{cL} \end{aligned} \right.$$

Ripendo la STRUTTURA REALE

$$M_b(A) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = 0 + \overset{\textcircled{\eta=1}}{c} \cdot \frac{4 \eta_1 EJ}{cL} + 0 = \frac{4 \eta_1 EJ}{L} = \frac{4 EJ}{L}$$

$$M_b(B) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = 0 + 0 + (-c) \frac{2 \eta_1 EJ}{cL} = -\frac{2 \eta_1 EJ}{L} = -\frac{2 EJ}{L}$$



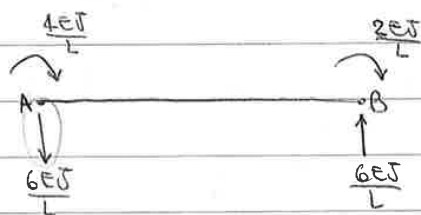
1)  $V_A = -V_B$

2)  $-\frac{4EJ}{L} + V_B \cdot L - \frac{2EJ}{L} = 0$

$\Rightarrow V_B = \left(\frac{4EJ}{L} + \frac{2EJ}{L}\right) \cdot \frac{1}{L}$

$\Rightarrow V_B = \frac{6EJ}{L^2}$

$\Rightarrow V_A = -V_B = -\frac{6EJ}{L^2}$  ⊖ quindi cambio verso ipotizzato



REAZIONI VERTICALI DI TAGLIO IN A E B

$K_{11} = S_1 = 4EJ/L$

$K_{21} = S_2 = -6EJ/L^2$

$K_{31} = S_3 = 2EJ/L$

$K_{41} = S_4 = +6EJ/L^2$

⊖ perché discorde con gli spostamenti

$$i=1 \int u \cdot \varphi \cdot EJ = X_1 \int_0^L M_1^2 dz + X_2 \int_0^L M_1 M_2 dz$$

$$i=2 \int u \cdot \varphi \cdot EJ = X_1 \int_0^L M_1 M_2 dz + X_2 \int_0^L M_2^2 dz$$

$$\int M_1^2 dz = \frac{L}{6} \left[ (-u)(-u) + 4\left(-\frac{u}{2}\right)\left(\frac{u}{2}\right) + 0 \cdot 0 \right] = \frac{u^2 L}{3}$$

$$\int M_1 M_2 dz = \frac{L}{6} \left[ (-u) \cdot 0 + 4\left(-\frac{u}{2}\right)\left(\frac{u}{2}\right) + 0 \cdot u \right] = -\frac{u^2 L}{6}$$

$$\int M_2^2 dz = \frac{L}{6} \left[ 0 \cdot 0 + 4\left(\frac{u}{2}\right)\left(\frac{u}{2}\right) + u \cdot u \right] = \frac{u^2 L}{3}$$

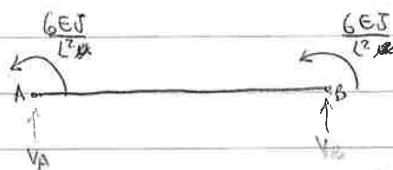
$$\begin{cases} u \cdot \varphi \cdot EJ = X_1 \left(\frac{u^2 L}{3}\right) + X_2 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) \\ u \cdot \varphi \cdot EJ = X_1 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) + X_2 \left(\frac{u^2 L}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \varphi EJ = \frac{u^2 L}{6} (2X_1 - X_2) \\ u \varphi EJ = \frac{u^2 L}{6} (-X_1 + 2X_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X_1 - X_2 = \frac{6 \varphi EJ}{uL} \\ -X_1 + 2X_2 = \frac{6 \varphi EJ}{uL} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 = +\frac{6EJ\varphi}{Lu} \\ -X_1 + 2X_2 = +\frac{6EJ\varphi}{Lu} \end{cases} \text{ SIST } \varphi = \frac{M_2}{L} = \frac{1}{L}$$

$$\begin{cases} X_1 = +\frac{6EJ}{L^2 u} \\ X_2 = +\frac{6EJ}{L^2 u} \end{cases}$$

$$M_b(A) = X_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = \frac{6EJ}{L^2}$$

$$M_b(B) = M_b + M_1 X_1 + M_2 X_2 = \frac{6EJ}{L^2}$$



REAZIONI VERTICALI DI TAGLIO IN A E B

$$\uparrow V_A = -V_B$$

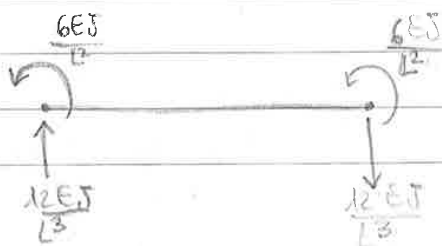
$$\uparrow \frac{6EJ}{L^2} + \frac{6EJ}{L^2} + V_B \cdot L = 0$$

$$\Rightarrow V_B = \left( -\frac{6EJ}{L^2} - \frac{6EJ}{L^2} \right) \cdot \frac{1}{L} = -\frac{12EJ}{L^3}$$

combinò verso

$$\uparrow V_B \Rightarrow \downarrow V_B$$

$$\Rightarrow V_A = -V_B = +\frac{12EJ}{L^3}$$



hp. stesso geometria  $\Rightarrow EJ = \text{cost}$   
 stesso materiale

$$\begin{cases} i=1 \\ i=2 \end{cases} \left\{ \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{EJ} \left( X_1 \int M_1^2 dz + X_2 \int M_1 M_2 dz \right) \\ u \cdot \varphi &= \frac{1}{EJ} \left( X_1 \int M_1 M_2 dz + X_2 \int M_2^2 dz \right) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} u \varphi EJ = X_1 \int M_1^2 dz + X_2 \int M_1 M_2 dz \\ u \varphi EJ = X_1 \int M_1 M_2 dz + X_2 \int M_2^2 dz \end{cases}$$

$$\int M_1^2 dz = \frac{L}{6} \left[ u \cdot u + 4 \frac{u}{2} \cdot \frac{u}{2} + 0 \cdot 0 \right] = \frac{L}{3} 2u^2 = \frac{u^2 L}{3}$$

$$\int M_1 M_2 dz = \frac{L}{6} \left[ u \cdot 0 + 4 \frac{u}{2} \cdot \left(-\frac{u}{2}\right) + 0 \cdot (-u) \right] = \frac{L}{6} (-u^2) = -\frac{u^2 L}{6}$$

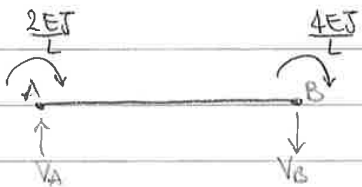
$$\int M_2^2 dz = \frac{L}{6} \left[ 0 \cdot 0 + 4 \left(-\frac{u}{2}\right) \left(-\frac{u}{2}\right) + (u) \cdot (-u) \right] = \frac{L}{6} \cdot 2u^2 = \frac{u^2 L}{3}$$

~~$$\begin{cases} u \varphi EJ = X_1 \left(\frac{u^2 L}{3}\right) + X_2 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) \\ u \varphi EJ = X_1 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) + X_2 \left(\frac{u^2 L}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \varphi EJ = \frac{u^2 L}{6} (2X_1 - X_2) \\ u \varphi EJ = \frac{u^2 L}{6} (-X_1 + 2X_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{u \varphi EJ \cdot 6}{u^2 L} = 2X_1 - X_2 \\ \frac{u \varphi EJ \cdot 6}{u^2 L} = -X_1 + 2X_2 \end{cases}$$~~

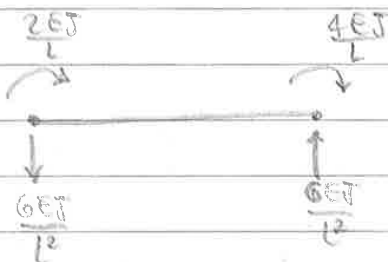
$$\begin{cases} X_1 \frac{u^2 L}{3} + X_2 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) = 0 \\ u \varphi EJ = X_1 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) + X_2 \left(\frac{u^2 L}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow X_1 = \frac{X_2}{2} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{X_2}{2} \\ u \varphi EJ = \frac{X_2}{2} \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) + X_2 \frac{u^2 L}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{X_2}{2} \\ 2 \varphi EJ = X_2 \left(-\frac{u^2 L}{6}\right) + X_2 \frac{2}{3} u^2 L \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{X_2}{2} \\ X_2 u^2 L \left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = 2 \varphi EJ \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 = \frac{X_2}{2} \\ X_2 = \frac{4 \varphi EJ}{u^2 L} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_1 = \frac{2 \varphi EJ}{u^2 L} \\ X_2 = \frac{4 \varphi EJ}{u^2 L} \end{cases} \quad \varphi = \frac{1}{3} = 1$$



$$\begin{aligned} M_b(A) &= M_0 + (M_1) X_1 + (M_2) X_2 = \frac{2 \cdot EJ}{L} \\ M_b(B) &= M_0 + (M_1) X_1 + (M_2) X_2 = \frac{4 \cdot EJ}{L} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \uparrow V_A = V_B \\ A) -\frac{2 \cdot EJ}{L} - \frac{4 \cdot EJ}{L} - V_B L = 0 \Rightarrow V_B = -\frac{6 \cdot EJ}{L^2} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} i=1 \\ i=2 \end{cases} \int u \chi \epsilon \sigma = \chi_1 \int M_1^2 dz + \int M_1 M_2 dz$$

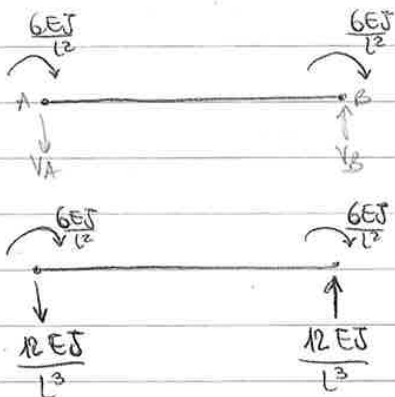
$$\int u \chi \epsilon \sigma = \chi_1 \int M_1 M_2 dz + \int M_2^2 dz$$

$$\int M_1^2 dz = \frac{u^2 L}{3} \quad \int M_1 M_2 dz = -\frac{u^2 L}{6} \quad \int M_2^2 dz = \frac{u^2 L}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \frac{6EJ}{L^2 u} \\ X_2 &= \frac{6EJ}{L^2 u} \end{aligned} \right\}$$

$$M_b(A) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = u \cdot \frac{6EJ}{L^2 u} = \frac{6EJ}{L^2}$$

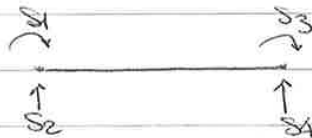
$$M_b(B) = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 = -u \cdot \frac{6EJ}{L^2 u}$$



REAZIONI VERTICALI DI TAGLIO

$$1) V_A = V_B$$

$$A) -\frac{6EJ}{L^2} - \frac{6EJ}{L^2} + V_B L = 0 \Rightarrow V_B = \frac{12EJ}{L^3}$$



$$K_{14} = S_1 = \frac{6EJ}{L^2}$$

$$K_{24} = S_2 = -\frac{12EJ}{L^3}$$

$$K_{34} = S_3 = \frac{6EJ}{L^2}$$

$$K_{44} = S_4 = \frac{12EJ}{L^3}$$

### SOLLECITAZIONI NODALI

Dato l'equazione  $\{S\} = [k] \cdot \{\eta\}$  nel caso in cui  $\{\eta\} = 0$  dovremmo avere  $\{S\} = 0$ .  
 In realtà, data una trave vincolata agli estremi con incastri perfetti, se la carico, anche se se gli spostamenti nodali sono nulli ( $\{\eta\} = 0$ ), le sollecitazioni si verificano.

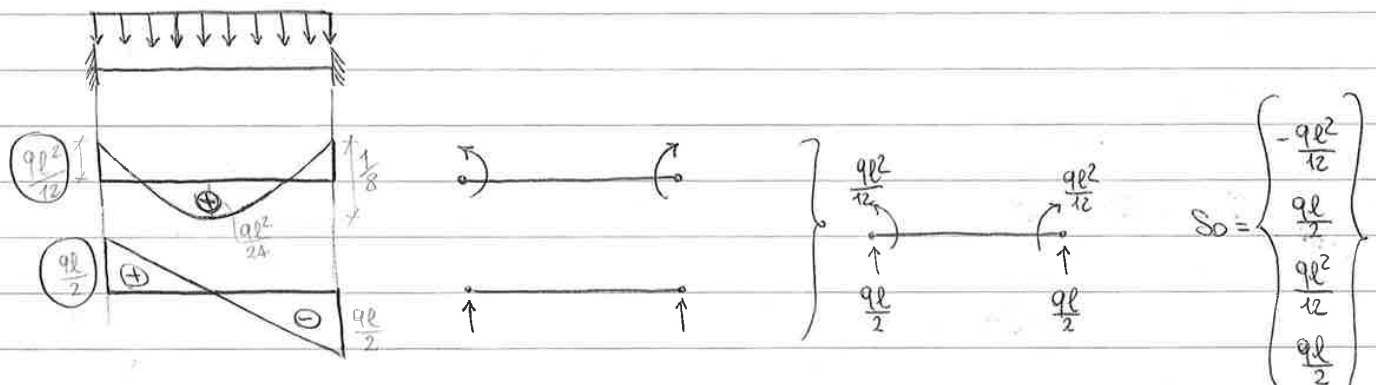
$$S = [k] \cdot \{\eta\} + \{S_0\}$$

$\{S_0\}$  → SOLLECITAZIONI NODALI che si verificano quando  $\{\eta\} = 0$

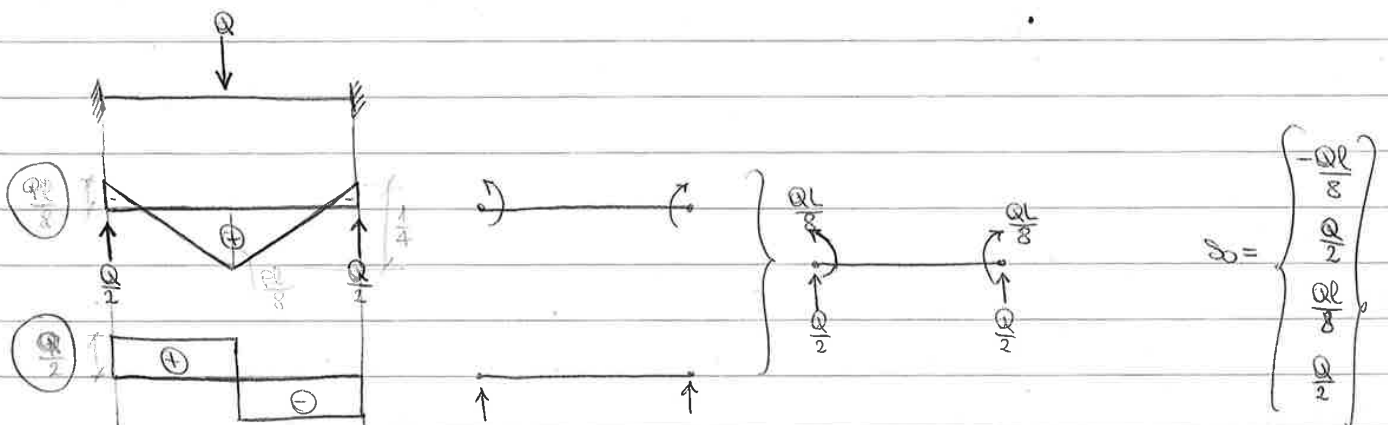
Dipendono dal tipo di carico:

• Se  $q=0 \Rightarrow \{S_0\} = 0$

• Se  $q$  uniforme



• Se  $Q$  concentrato



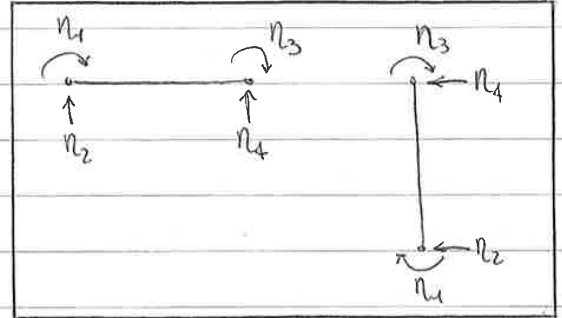
• Dilataz. Termica



**MATRICE [H]**

Associo gli spostamenti possibili delle singole travi con quelli realmente presenti

TRAVE	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$
1	0	0	X <sub>1</sub>	X <sub>5</sub>
2	X <sub>1</sub>	0	X <sub>2</sub>	0
3	0	0	X <sub>2</sub>	X <sub>5</sub>
4	X <sub>2</sub>	0	X <sub>3</sub>	0
5	X <sub>4</sub>	0	X <sub>3</sub>	X <sub>5</sub>



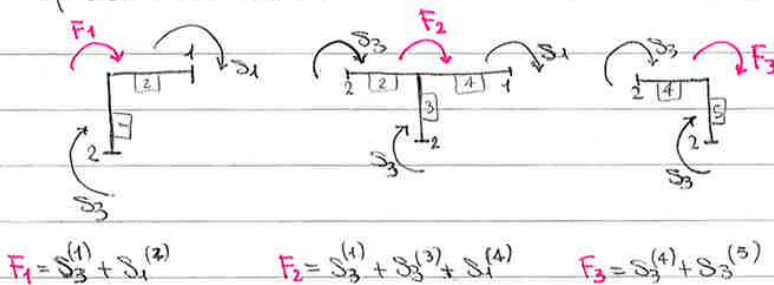
Genero una MATRICE DI INCIDENZA a cui associo questi spostamenti

TRAVE	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$
1	0	0	1	5
2	1	0	2	0
3	0	0	2	5
4	2	0	3	0
5	4	0	3	5

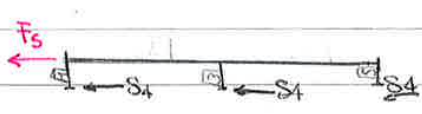
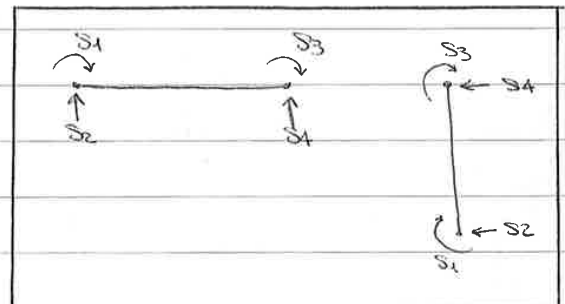
termini della matrice di incidenza:

$M_{xi}^t$  → n° della trave  
 $M_{xi}^t$  → n° dello spostamento associato

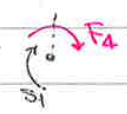
Equilibrio ai nodi:



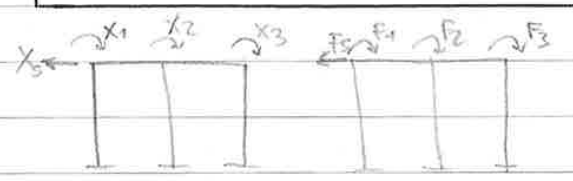
$F_1 = S_3^{(1)} + S_1^{(2)}$        $F_2 = S_3^{(1)} + S_3^{(3)} + S_1^{(4)}$        $F_3 = S_3^{(4)} + S_3^{(5)}$



$F_3 = S_4^{(1)} + S_4^{(3)} + S_4^{(5)}$



$F_4 = S_1^{(5)}$



In ogni nodo ci deve essere l'equilibrio tra le F e le S

⇒ SPOSTAMENTI NODALI  $\{X\}$

$$\{X\} = [H]^{-1} \cdot \{F - F_0\}$$

CALCOLO DELLE SOLLECITAZIONI

Calcolati gli spostamenti incogniti, per ottenere le sollecitazioni associe le  $\{X\}$  alle  $\{n\}$  delle singole travi (sost. in H)

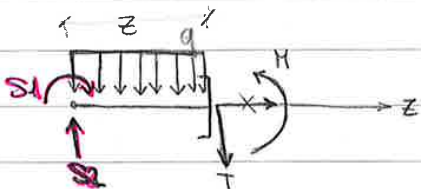
• TRAVE 1

$$n_1 = 0 \quad n_2 = 0 \quad n_3 = X_1 \quad n_4 = X_5$$

$$\{S\} = [K] \{X\} + \{S_0\}$$

$$S_1 = K_{13} \cdot X_1 + K_{14} \cdot X_5 + S_{01}$$

$$S_2 = K_{23} \cdot X_1 + K_{24} \cdot X_5 + S_{02}$$



$$M = S_1 + S_2 \cdot z - qz \cdot \frac{z}{2}$$

$$T = S_2 - qz$$

**SCHEMA**

$$\{S\} = [K] \{X\} + \{S_0\} \rightarrow \{F\} = [H] \{X\} + \{F_0\} \Rightarrow \{X\} \rightarrow \{S\} = [K] \{X\} + \{S_0\}$$

• FORZE NODALI PRODOTTE DA  $\{X\} = 0$

Carico uniforme

$$F_{01} = S_{01}^{(1)} = -ql^2/12$$

$$F_{02} = S_{03}^{(1)} + S_{01}^{(2)} = ql^2/12 - ql^2/12 = 0$$

$$F_{03} = S_{03}^{(2)} = ql^2/12$$

3 compare in  $\eta_3$  Tr.2

$$S_0 = \begin{Bmatrix} -ql^2/12 \\ ql^2/12 \\ ql^2/12 \\ ql^2/12 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{F_0\} = \frac{ql^2}{12} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

• FORZE NODALI

Non sono applicate forze esterne ai nodi

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

• SPOSTAMENTI NODALI

$$\{X\} = [H]^{-1} \cdot \{F - F_0\}$$

$$\{F\} = [H] \cdot \{X\} + \{F_0\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} + \frac{ql^2}{12} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (4X_1 + 2X_2 + 0X_3) \cdot \frac{EI}{l} + \frac{1}{12} ql^3 &= 0 \\ (2X_1 + 8X_2 + 2X_3) \cdot \frac{EI}{l} + 0 &= 0 \\ (0X_1 + 2X_2 + 4X_3) \cdot \frac{EI}{l} + \frac{1}{12} ql^3 &= 0 \end{aligned}$$

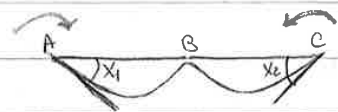
$$\Rightarrow \begin{cases} X_1 = \frac{ql^3}{48EI} \\ X_2 = 0 \\ X_3 = -\frac{ql^3}{48EI} \end{cases}$$

Cioè rispetto alla convenzione

iniziale che avevamo utilizzato

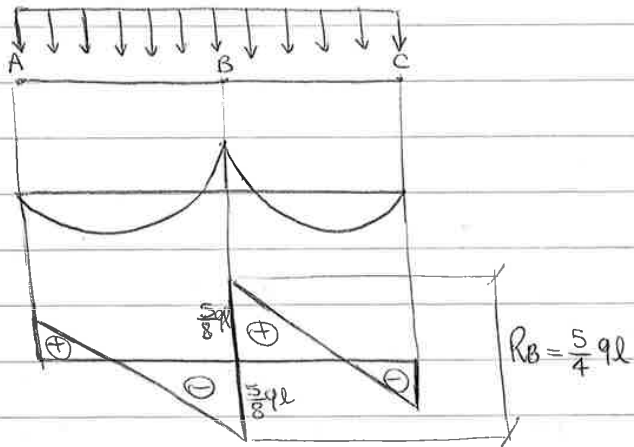
• la rotazione centrale è nulla

• le rotazioni agli estremi sono simmetriche

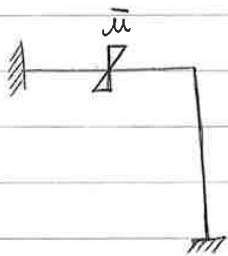




### DIAGRAMMA DI MOMENTO E TAGLIO DI TUTTA LA STRUTTURA

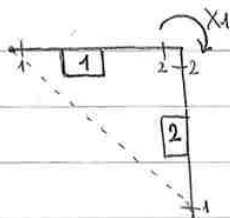


### Esempio 3



$E = 30 \text{ GPa}$   
 $\Delta T = 20^\circ\text{C}$   
 $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ\text{C}}$

#### • SPOSTAMENTI NODALI INCOGNITI



$X = \{X_i\}$

#### • MATRICE DI INCIDENZA

TRAVE	$n_1$	$n_2$	$n_3$	$n_4$
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0

#### • MATRICE DI RIGIDEZZA [H]

I termini di [H] sono tutti nulli tranne  $H_{11}$

$$H_{11} = k_{33}^{(1)} + k_{33}^{(2)} = \frac{4EI}{l} + \frac{4EI}{l} = \frac{8EI}{l}$$

#### • FORTE NODALI

$$\{F\} = [H] \cdot \{X\} + \{F_0\}$$

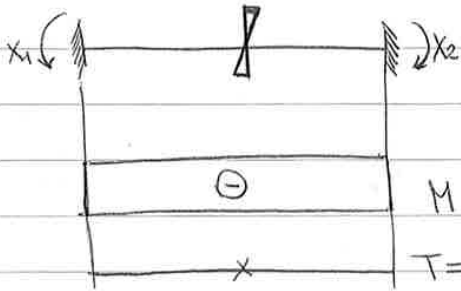
$$F_{11} = H_{11} \cdot X_1 + F_{01}$$

$$F_{01} = \cancel{S_{03}^{(1)}} + \cancel{S_{03}^{(2)}}$$

dipende da  $\bar{u}$

o perché non si hanno carichi sulle trave 2

$$\begin{cases} X_1 = -X_2 \\ X_2 = \frac{EJ\bar{u}}{\mu} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -\frac{EJ\bar{u}}{\mu} \\ X_2 = \frac{EJ\bar{u}}{\mu} \end{cases}$$



→ la somma di 2 diagrammi lineari è lineare

→  $T = \frac{dM}{dx} \rightarrow \cos t = 0$



VEETTORE  $\{S_0\}$

$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} -EJ\bar{u} \\ 0 \\ +EJ\bar{u} \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow S_{03}$$

• SPOSTAMENTO NORMALE  $X_1$

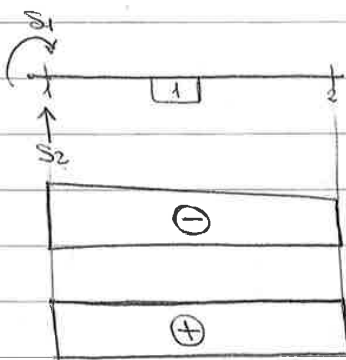
$$F_{11} = H_{11} \cdot X_1 + S_{03}^{(1)}$$

$$0 = \frac{8EJ}{l} \cdot X_1 + EJ\bar{u} \Rightarrow X_1 = -\frac{EJ\bar{u} l}{8EJ} = -\frac{\bar{u} l}{8} \quad [-]$$

$\bar{u}$  = CURVATURA IMPRESSA  
[1/m]

• SOLLECITAZIONI NORMALI

TRAVE 1



$$S_1 = k_{11}N_1 + k_{12}N_2 + k_{13}N_3 + k_{14}N_4 + S_{01} = \frac{2EJ}{l} \left( -\frac{\bar{u}l}{8} \right) - EJ\bar{u}$$

$$= -\frac{\bar{u}EJ}{4} - \bar{u}EJ = -\frac{5}{4}\bar{u}EJ$$

$$S_2 = k_{21}N_1 + k_{22}N_2 + k_{23}N_3 + k_{24}N_4 + S_{02} = -\frac{6EJ}{l^2} \left( -\frac{\bar{u}l}{8} \right) + 0$$

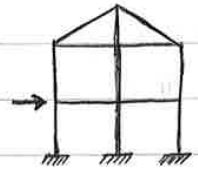
$$= \frac{3}{4}\frac{\bar{u}EJ}{l}$$

$$M(z) = S_1 + S_2 \cdot z \quad \begin{cases} M(z=0) = S_1 = -\frac{5}{4}\bar{u}EJ \\ M(z=l) = S_1 + S_2 \cdot l = -\frac{5}{4}\bar{u}EJ + \frac{3}{4}\bar{u}EJ = -\frac{1}{2}\bar{u}EJ \end{cases}$$

$$T(z) = S_2 = \frac{3}{4}\frac{\bar{u}EJ}{l}$$

## TELAIO 6X6

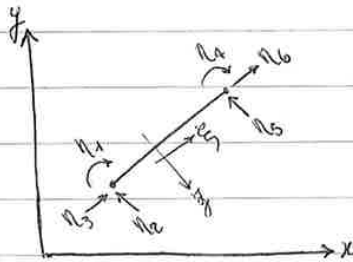
- hp - Presenza di TRAVI INCLINATE rispetto al sistema generale  $x, y$
- TRAVI ASSIALMENTE DEFORMABILI



Arrivare a scrivere  $\{F\} = [H]\{x\} + \{F_0\}$

- Scrivo un legame simile per la singola trave
- $$\{S\} = [k]\{\eta\} + \{S_0\}$$

!! la singola trave rispetto al sistema di riferimento globale  $x, y$  può essere inclinata  
 Assumo un sistema di riferimento locale  $\xi, \zeta$



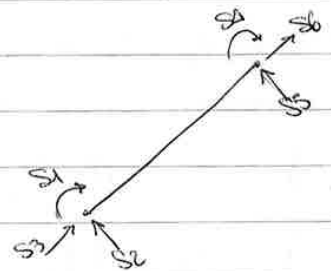
Se la trave è assialmente deformabile avrà 6 spostamenti possibili

$\{S\}$  ed  $\{S_0\}$  avranno 6 componenti nel verso e nella direzione di  $\{\eta\}$

$$\{\eta\} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \end{pmatrix}$$

$$\{S\} = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{pmatrix}$$

$$\{S_0\} = \begin{pmatrix} S_{01} \\ S_{02} \\ S_{03} \\ S_{04} \\ S_{05} \\ S_{06} \end{pmatrix}$$



Di conseguenza  $[k]$  sarà una matrice 6x6

$k_{ij} = S_i$  quando  $\eta_j = 1$  e gli altri  $\eta = 0$

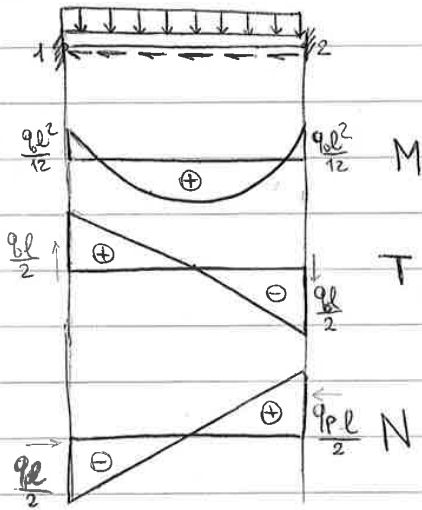
### MATRICE DI RIGIDEZZA

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix}$$

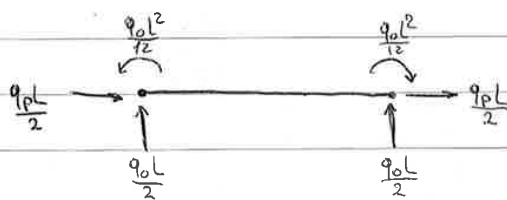
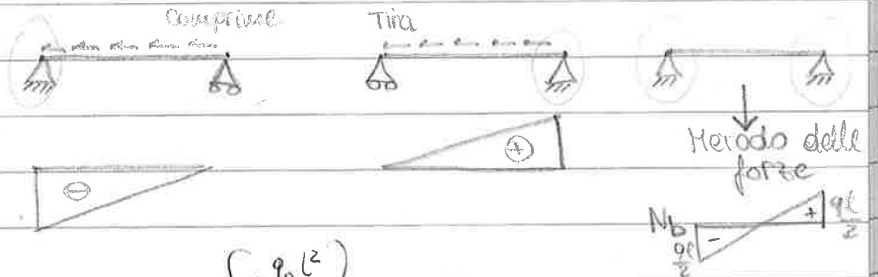
• SOLLECITAZIONI NORMALI QUANDO  $\beta=0$  (NODI BLOCCATI)

⊕  $q_{//}$  = da destra verso sinistra ( $q_p$ ) parallelo

⊕  $q_{\perp}$  = dall'alto verso il basso ( $q_0$ ) ortogonale



!! Il carico non è simmetrico non è uniformemente distribuito



$$\{S_0\} = \begin{Bmatrix} -\frac{q_0 L^2}{12} \\ q_0 L / 2 \\ q_p L / 2 \\ \frac{q_0 L^2}{12} \\ q_0 L / 2 \\ q_p L / 2 \end{Bmatrix}$$

Spast. di 1 nodo  
 $\downarrow$   
 $[w]$

$$\{s\} = [k] \{n\} + \{s_0\}$$

$$\{R\} = [w] \{s\} \quad \{u\} = [w] \{n\} \quad \{R_0\} = [w] \{s_0\}$$

$$[w][k][w] = [k]_{xy}$$

• MATRICE DI RIGIDEEA DI TUTTA LA STRUTTURA  $[k]_{xy}$

$$\{s\} = [k] \{n\} + \{s_0\}$$

$$[w] \{s\} = [w][k] \{n\} + [w] \{s_0\}$$

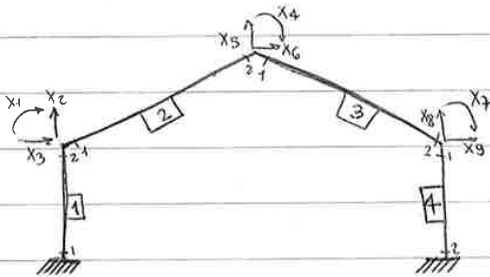
$$\{R\} = [w][k] \{n\} + \{R_0\}$$

proprietà:  $[w]^{-1} = [w]^T$

$$\{R\} = [w][k][w]^{-1} \{u\} + \{R_0\}$$

$$\{R\} = [k]_{xy} \cdot \{u\} + \{R_0\}$$

• Per definire  $[H]$  ed  $\{F_0\}$  si passa dalla Matrice di incidenza



TRAVE	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	1	2	3
2	1	2	3	4	5	6
3	4	5	6	7	8	9
4	7	8	9	0	0	0

$$\{F\} = [H] \{x\} + \{F_0\} \Rightarrow \{x\} = [H]^{-1} \{F - F_0\}$$

- Da  $\{x\}$  ricavo  $\{u\}$  per ogni trave (sist.  $x, y$ )
- Da  $\{u\}$  ricavo  $\{n\}$  per ogni trave (sist.  $\xi, \eta$ )
- Per ogni trave calcolo  $\{s\}$  ed  $M, N, T$ .

Non risolviamo l'equazione differenziale e ci riconduciamo a:

$$F_s = m \cdot a_H$$

AZIONE SISMICA

$$a_H = 7\%g = 0,07 \cdot 9,8 = 0,6867$$

ACCELERAZIONE SISMICA

terremoto  $\left\{ \begin{array}{l} \text{MOTO OSCILLATORIO} \leftrightarrow \\ \text{MOTO SULLULATORIO} \updownarrow \end{array} \right.$

$\rightarrow$  SOLAIO RIGIDO  $\rightarrow$  Trasto  
 $\rightarrow$  SOLAIO FLESSIBILE  $\rightarrow$  si deforma  $\rightarrow$  Quasi sempre garantito MOTO rigido se  $s \geq 4cm$

$\rightarrow$  Non prendiamo in considerazione le azioni verticali perché le strutture sono calcolate per i carichi verticali con un coeff. di sicurezza  $\approx 3$

Solaio rigido sollecitato da un'azione  $\rightarrow$  trasto  $\rightarrow$  i pilastri tenderanno a opporsi a questo movimento.

### RIPARTIZIONE DELL'AZIONE SISMICA NEI PILASTRI

- hp
- 1) Materiale del comportamento elastico-lineare
  - 2) Non si considera la presenza di G2
  - 3) Piano rigido
  - 4) Deformazione assiale nulla
  - 5) Effetti del 2° ordine trascurabili

$\rightarrow$  nascono per effetto della deformazione dell'elemento stesso



N si sposta  $\Rightarrow$  Def. di 2° ordine

F. braccio  $\Rightarrow$  Def. di 1° ordine

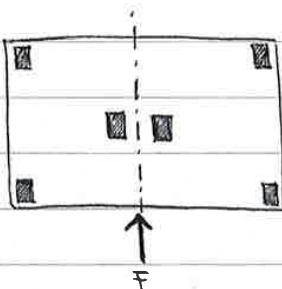
CASO 1) PILASTRI SIMMETRICI RISPETTO ALLA RETTA D'AZIONE DI F

(- Trasto)  
(- Rotazione)

1.1) PILASTRI UGUALI

$n = \text{n° di pilastri}$

$S_i = \text{Forza da applicare per avere lo spost. } \delta \text{ nell' } i\text{-esimo pilastro.}$

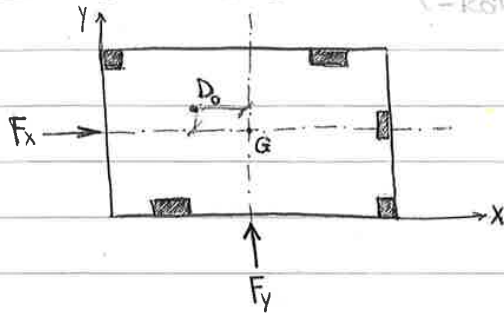


$$S_i = \frac{F}{n}$$

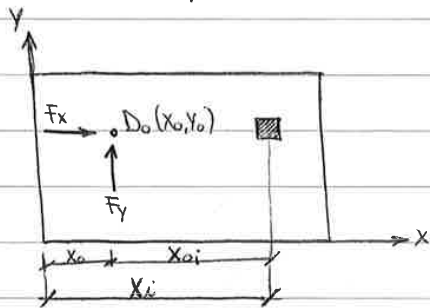
F si ripartisce equamente fra tutti i pilastri

CASO 2) DISPOSIZIONE NON SIMMETRICA DEI PILASTRI RISPETTO ALLA RETTA

DIREZIONE DI F (-TRASL. / -ROT. / -TORS. / -ROT. / -TORS.)



- Traslazione
- Rotazione



CONTRIB. TRASLAZIONALE

se applico una forza nel centro di taglio non ho torsione (rotazione)

- Traslazione
- ~~Rotazione~~

quindi suppongo di traslare Fx ed Fy nel centro di torsione o di taglio D0

D0 = CENTRO DELLE RIGIDENZE

$$\begin{cases} S_{x_i} = \frac{F_x}{\sum J_{y_i}} J_{y_i} \\ S_{y_i} = \frac{F_y}{\sum J_{x_i}} J_{x_i} \end{cases}$$

Eq. di equilibrio:

$$F_x \cdot y_0 = \sum (S_{y_i} \cdot y_i) \Rightarrow F_x \cdot y_0 = F_x \frac{\sum y_i \cdot J_{y_i}}{\sum J_{y_i}}$$

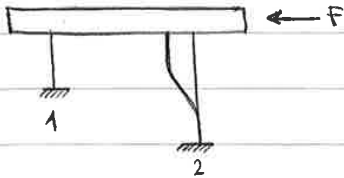
$$\Rightarrow y_0 = \frac{\sum y_i \cdot J_{y_i}}{\sum J_{y_i}}$$

$$\begin{cases} x_0 = \frac{\sum x_i \cdot J_{x_i}}{\sum J_{x_i}} \\ y_0 = \frac{\sum y_i \cdot J_{y_i}}{\sum J_{y_i}} \end{cases}$$



CASO 2) NON SIMMETRICI

ES.



Definisco:

- 1)  $B_{x1}, B_{y1}, x_1, y_1, l_1 \Rightarrow J_{x1}, J_{y1}$
- 2)  $B_{x2}, B_{y2}, x_2, y_2, l_2 \Rightarrow J_{x2}, J_{y2}$

Definisco le azioni orizzontali  $F_x, F_y$  che agiscono nel baricentro del soletto (quindi calcolo  $x_G, y_G$ )

Calcolo  $x_0, y_0$

$$e_x = x_0 - x_G \quad e_y = y_0 - y_G$$

- Contributo traslazionale
- Contributo rotazionale ( $M = F_y \cdot e_x - F_x \cdot e_y$ )

$$x_{0i} \quad y_{0i}$$

$$S_{TOT} = S_{TOT1} + S_{TOT2}$$

CASO 1) SIMMETRICI

$$S_i = \frac{12EI}{L^3} \cdot \delta$$

$$S_1 = \frac{12EI_1}{L_1^3} \cdot \delta \quad S_2 = \frac{12EI_2}{L_2^3} \cdot \delta$$

$$F = \sum S_i = \frac{12EI_1}{L_1^3} \delta + \frac{12EI_2}{L_2^3} \delta \Rightarrow \delta$$

⇒ sost. in  $S_1$  ed  $S_2$

RISULTATI

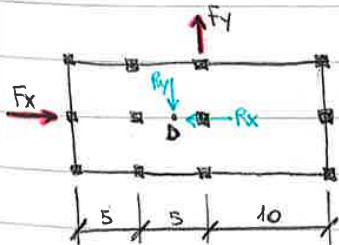
- L'asse delle rigidità sarà sull'asse di simmetria dell'impalcato
- " " " più spostato verso dove sono concentrati più pilastri

$R_x, R_y$  = Reazioni che si creano per contrastare le verticali forze  $F_x$  ed  $F_y$

$$R = \sum F_i$$

$$F_i = k \cdot \eta \cdot \delta$$

$$1F = k\delta$$



$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = R_y$$

$$4k \cdot \delta = R_y$$

$$F_y \cdot x_0 = \sum (F_i \cdot x_i)$$

$$R_y \cdot x_0 = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot 5m + F_3 \cdot 10m + F_4 \cdot 20m$$

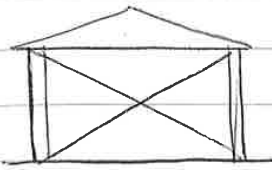
$$4k\delta \cdot x_0 = k\delta \cdot 0 + k\delta \cdot 5 + k\delta \cdot 10 + k\delta \cdot 20$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{0 + 5 + 10 + 20}{4} = \frac{35}{4} = 8,75$$

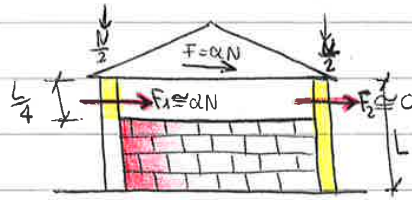
ELEMENTI NON STRUTTURALI

Non hanno capacità portante ma danno un contributo:

- CONTRIBUTO POSITIVO  
e' come un controvento

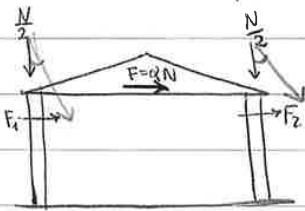


- CONTRIBUTO NEGATIVO  
Presenza di tamponatura impedire



$k = \frac{3EI}{L^3}$  Rigidezza proporz a  $L^3$

Assenza di tamponatura



Il muro impedisce al 1° pilastro di deformarsi come il 2° pilastro  
=> e' come se fosse alto  $\frac{L}{4}$

la 1° colonna e' 64 volte piu rigida

$k_1 = \frac{3EI}{(\frac{L}{4})^3} = 4^3 \frac{3EI}{L^3} = k_1 = 4^3 k_2 = 64 k_2$

Colonne uguali, stessa rigidità

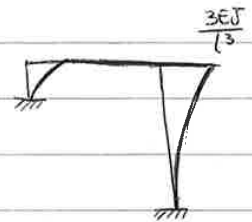
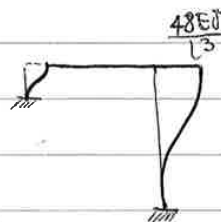
=> azione orizzontale equamente ripartita nelle 2 colonne

$F_1 = F_2 = \alpha \frac{N}{2}$

$R_1 = \frac{F_1}{\frac{N}{2}} = \alpha = 0,3$

$R_2 = \frac{F_2}{\frac{N}{2}} = \alpha = 0,3$

$R_1 = \frac{F_1 = \alpha N}{\frac{N}{2}} = 2\alpha = 0,6$

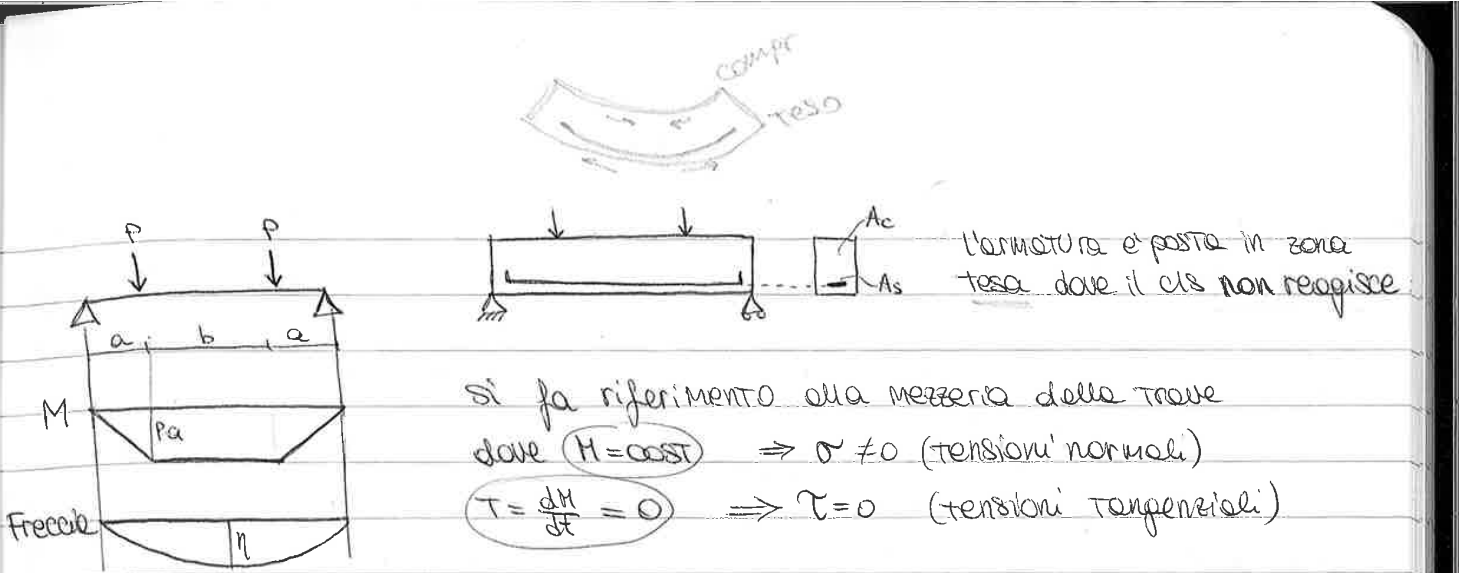


$F = F_1 + F_2$

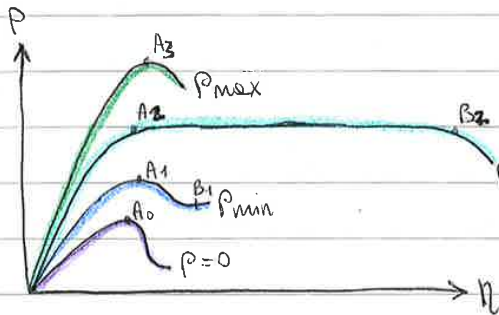
$\alpha N = k_1 \delta + k_2 \delta$

$T_1 = F_1 + F_2$   
 $\alpha N = k_1 \delta + k_2 \delta = 2k_2 \delta$

=>  $\frac{\alpha N}{2} = k_2 \delta$



Il comportamento strutturale della trave può essere graficizzato su un diagramma definito in termini di **CARICO-INFLESSIONE P-η**



Freccia max in mezzera sotto un carico P crescente

sono accettati incrementi della freccia solo se diminuisce il carico

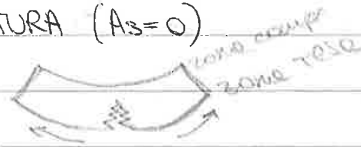
$\rho = \text{PERCENTUALE DI ARMATURA} = \frac{A_s}{A_c}$

1° CASO)  $\rho = 0$  STRUTTURA SENZA ARMATURA ( $A_s = 0$ )

ROTTURA FRAGILE: del cls teso

Si avrà una rottura per cls teso

$A_0$  = punto in cui la struttura si rompe: la tensione a trazione, dove il momento flettente è maggiore, è circa 10 volte più piccola di quella a compressione. Nel momento in cui si raggiunge  $\sigma_{max}$  si forma una fessura quindi la struttura non è più in grado di sopportare i carichi



2° CASO)  $\rho < \rho_{min}$  STRUTTURA CON POCA ARMATURA ( $A_s \neq 0$ )

ROTTURA FRAGILE: del cls teso

$A_1$  = punto in cui si ha rottura per fessurazione

$B_1$  = punto in cui si ha lo svernamento delle armature

$P_{A1} > P_{B1}$



(minore di quella minima prevista dalla norma)

Non resiste abbastanza

Verificare se la sezione è in grado di RESISTERE alle sollecitazioni agenti  $M$  ed  $N$ .  
Devono essere soddisfatte:

• EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

$$\int N = \int \sigma_z \cdot dA \quad (1)$$

$$\int N \cdot e + M_x = \int \sigma_z \cdot y \cdot dA \quad (2)$$

• EQUAZIONE DI CONGRUENZA

$$\epsilon_z = \lambda + \mu_x \cdot y \quad (3)$$

$\lambda$  = DEFORMAZIONE  
della fibra base.

$\mu_x$  = CURVATURA della sezione  
pendenza della retta



!! Le deformazioni devono rispettare i vincoli. Sulla base della Teoria di S. Venant la deformazione deve essere piana e quindi il profilo deformativo viene definito da una retta

$$\epsilon_z = \lambda + \mu_x \cdot y$$

• LEGGI COSTITUTIVE

hp comportamento elastico lineare

$$\sigma_z = E \cdot \epsilon_z \quad (4)$$

PROCEDIMENTO:

• Eq (3) in Eq. (4)  $\Rightarrow \sigma_z = E \cdot (\lambda + \mu_x \cdot y)$

• Sostituisco  $\sigma_z$  in (1) e (2)

$$\left. \begin{aligned} N &= \int E(\lambda + \mu_y) dA \\ N \cdot e + M &= \int E(\lambda + \mu_y) \cdot y \cdot dA \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} N &= \int E \cdot \lambda \cdot dA + \int E \cdot \mu_y \cdot dA \\ N \cdot e + M &= \int E \cdot \lambda \cdot dA + \int E \cdot \mu_y^2 \cdot dA \end{aligned}$$

$$N = E_c \cdot \lambda \cdot \left( \frac{E}{E_c} \right) \cdot dA + E_c \cdot \mu \int \left( \frac{E}{E_c} \right) \cdot y \cdot dA$$

$$N \cdot e + M = E_c \cdot \lambda \int \frac{E}{E_c} \cdot y \cdot dA + E_c \cdot \mu \int \left( \frac{E}{E_c} \right) \cdot y^2 \cdot dA$$

dipendono da  $\leftarrow$   
 $m = \frac{E_s}{E_c}$  Coeff. di Omogeneizz.

$$A_0 = \int \frac{E}{E_c} \cdot dA \quad \text{Area omogeneizz. del ds.}$$

$$S_0 = \int \frac{E}{E_c} \cdot y \cdot dA \quad \text{Momento statico dell'area omogeneizzata}$$

$$I_0 = \int \frac{E}{E_c} \cdot y^2 \cdot dA \quad \text{Momento d'inerzia dell'area omogeneizzata}$$

CASO 2)  $0 \equiv G \neq (C = \frac{A}{2})$

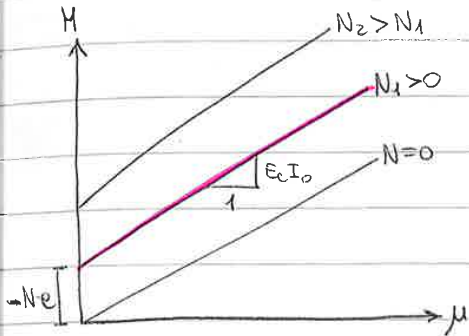
$0 \equiv G \Rightarrow \delta_0 = 0$

$C \neq G \Rightarrow e_x \neq 0$

$\Rightarrow N = \lambda E_c \cdot A_0$

$M + N \cdot e = \mu \cdot E_c \cdot I_0 \Rightarrow M = \mu \cdot E_c \cdot I_0 - N \cdot e$

retto non  
passante  
per l'orig.



Il legame M- $\mu$  è di tipo lineare



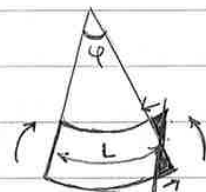
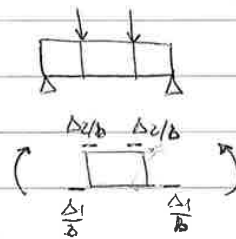
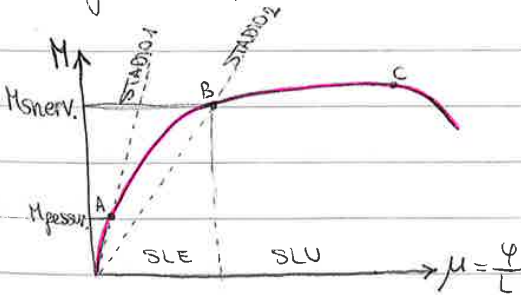
Avremo una serie di rette parallele la cui distanza è funzione del valore di N.

CASO 3) CASO SPERIMENTALE

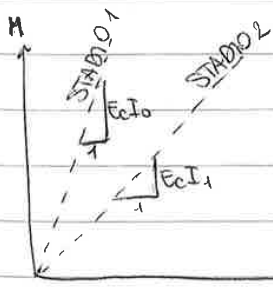
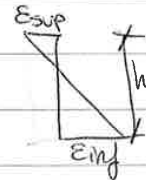
Si esamina il comportamento di una porzione di trave sottoposta a 2 forze P applicate a una stessa distanza dagli estremi

Dalle sperimentazioni di laboratorio risulta che il legame costitutivo dei materiali non è lineare come era stato inizialmente ipotizzato

$\Rightarrow$  il legame M- $\mu$  non sarà lineare, bensì:



Accorciamento  $E_{sup} = \frac{\Delta_2}{b}$   
Allungamento  $E_{inf} = \frac{\Delta_1}{b}$



$I_0$  = Mom d'inerzia della sezione interamente resgente.

$I_1$  = Mom d'inerzia della sezione parzialmente

Per ogni valore di P ed M riesco ad ottenere:

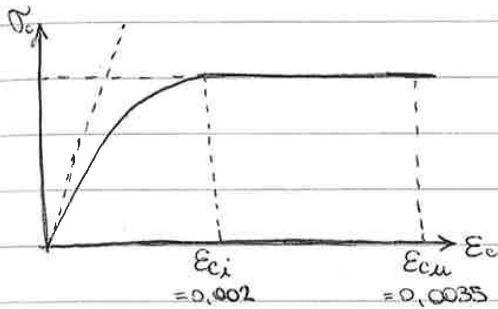
$$\mu = \frac{E_{sup} + E_{inf}}{h}$$

## LEGAMI COSTITUTIVI DEI MATERIALI

### • LEGAME $\sigma$ - $\epsilon$ del CALCESTRUZZO

Il legame costitutivo  $\epsilon$  di tipo PARABOLA-RETTANGOLO.

E' in sola compressione in quanto il cls e' poco resistente a trazione.



$$\epsilon_{ci} = 2\% \quad \epsilon_{cu} = 3,5\%$$

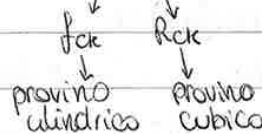
La resistenza di calcolo a compressione del cls vale:

$$f_{cd} = \sigma_{cd} = \alpha_{cc} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad [\text{MPa}] \quad \text{per cls di classe } C < C50/60$$

dove  $\alpha_{cc} = 0,85$  COEFFICIENTE RIDUTTO per resistenze di lunga durata

$\gamma_c = 1,5$  COEFF. PARZIALE DI SICUREZZA

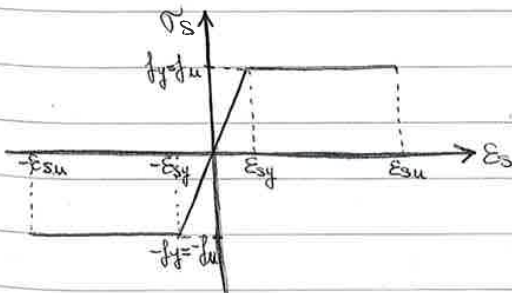
$f_{ck} = 25 \text{ MPa}$  per classi C ~~25/30~~ RESISTENZA CARATI. A COMPRESS.



### • LEGAME $\sigma$ - $\epsilon$ dell'ACCIAIO

Il legame costitutivo dell'acciaio e' di tipo trilineare ma si semplifica in bilineare

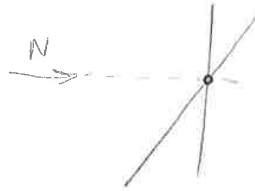
imponendo  $f_{yd} = f_{ud}$



Relazione bilineare sia in trazione che in compressione  $\Rightarrow$  definito ISORESISTENTE per entrambe le sollecitazioni

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

$f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2$  per B450 RESIST CARATI. ACCIAIO  
 $\gamma_s = 1,15$  COEFF. DI SICUREZZA ACCIAIO



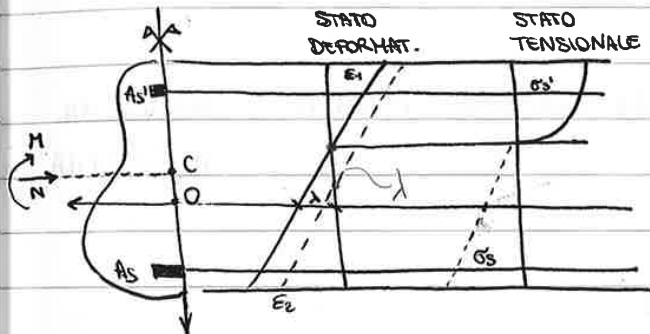
Ricostruisco il modello

- sost. (3) in (4)
- sost.  $\sigma_z (\lambda + \mu_x y)$  in Eq (1) ed Eq (2)

$$N = \int_A \sigma (\lambda + \mu_x y) dA \quad (5.1)$$

$$M + N e = \int_A \sigma (\lambda + \mu_x y) y dA \quad (6.1)$$

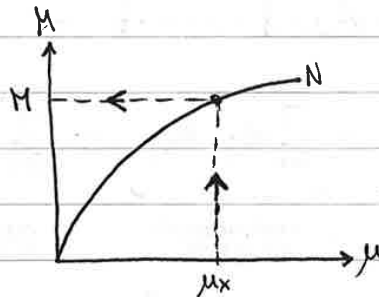
Del sistema (5.1) e (6.1) devo ottenere il legame  $M - \mu_x$  per un dato  $N$ .



In flessione retta  $N=0$   
 $\Rightarrow$  spostato il baricentro (quindi cambio la posizione della deformata  $\lambda$ ) per ottenere  $N=0$

Procedura iterativa

- 1)  $N$  è un dato di input
- 2)  $\mu_x$  " " " "
- 3) ipotizzo  $\lambda$   $\rightarrow$  li confronto
- 4)  $\epsilon = \lambda + \mu_y$
- 5)  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  dalla legge costit. } per ogni punto della sezione



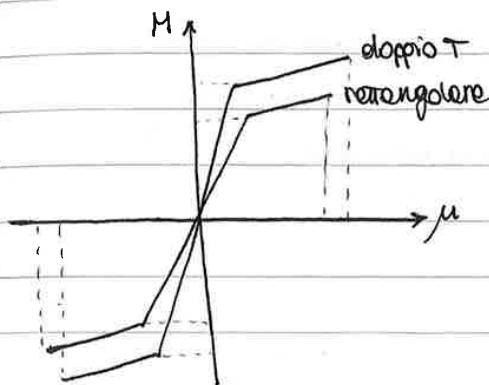
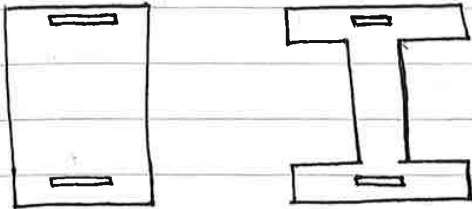
dalla 5.1 ricavo  $N$

- 6)  $N_{risposta} = \int_A \sigma dA$ 
  - $\neq N$  cambio  $\lambda$  e torno al passo 3)
  - $= N_{sollec.}$

7) Calcolo  $M_R = \int \sigma \cdot y dA \Rightarrow$  ottengo un punto del diagramma momento-curvatura

8) Cambio  $\lambda$  e ripeto il procedimento  $\Rightarrow$  ottengo altri punti del diagramma

## CONFRONTO SEZIONE RETTANGOLARE E SEZIONE A DOPPIO T



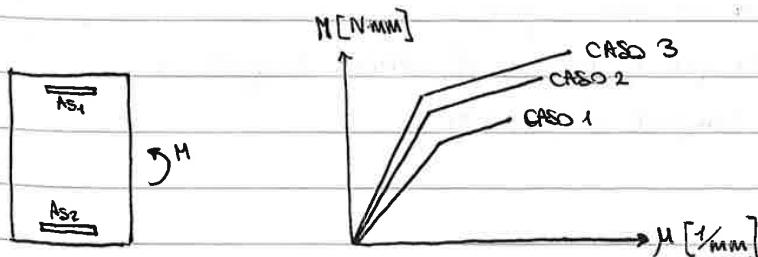
- il MOMENTO MAX nelle sezione a doppio T è superiore a quello della sezione rettangolare
- la CURVATURA ULTIMA nelle sezione rettangolare è <sup>inferiore</sup> superiore a quella della sezione a doppio T.

⇓  
 Quindi la sez a doppio T è in grado di resistere a sollecitazioni maggiori (⇒ ottimizzo la sezione)  
 la sezione a doppio T è più duttile

⇓  
 Trave a doppio T soluzione migliore

## INFLUENZE DI UNA ARMATURA AGGIUNTIVA A COMPRESSIONE

- Sezione rettangolare soggetta a solo momento flettente (→ FLESSIONE SEMPLICE)



MODIFICARE L'ARMATURA

CASO 1:  $A_{s1} = 0\% A_{s2}$

CASO 2:  $A_{s1} = 25\% A_{s2}$

CASO 3:  $A_{s1} = 50\% A_{s2}$

- ⇓
- Cresce leggermente  $M$  resistente
  - Cresce notevolmente  $\mu$  ⇒ duttilità

## ARMATURA MINIMA DA NORMA

- 25% dell'armatura in trazione in zone non critiche
- 50% dell'armatura in trazione in zone critiche



## FLESSIONE SEMPLICE

Per la progettazione e la verifica della sezione soggetta a flessione semplice si formulano delle ipotesi

hp: 1) PLANARITÀ DELLA SEZIONE

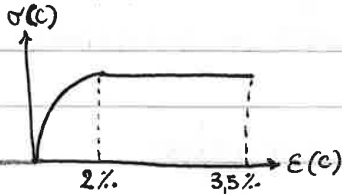
⇒ Deformazioni piane con

$\epsilon_s$  = deformazione dell'acciaio teso

$\epsilon_c$  = deformazione del c/c al lembo superiore compresso

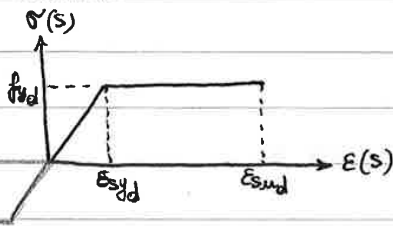
2) LEGGI COSTITUTIVE NON LINEARI

• CALCESTRUZZO



$$\sigma_{cd} = \alpha_1 \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0.85 \frac{f_{ck}}{1.5}$$

• ACCIAIO



$$f_{td} = \frac{f_{tk}}{\gamma_s} = \frac{f_{tk}}{1.15}$$

$$E_{syd} = \frac{f_{td}}{E_s} = \frac{f_{td}}{210000}$$

$$E_{sud} = 0.9 E_{smk}$$

7.5%

3) LIMITI DEFORMATIVI A SLU

$$\epsilon_{cmax} = \underline{3.5\%} \text{ (compressione)}$$

$$\epsilon_{smax} = \underline{E_{sud}} \text{ (trazione)}$$

} al raggiungimento di questi limiti si ha la rottura

Obiettivo: definire  $M_{Rd}$  a SLU

Definisco delle situazioni limite dei ~~profili limite~~ dei profili deformativi

sono ∞

↓  
raggruppati in 5 campi

### CAMPO III (FLESSIONE O PRESSOFLESSIONE)

Deformate = rette ottenute ruotando attorno al punto B

la sezione e' sia TESA che COMPRESSA.

L'A.N. e' interno alla sezione

Il collasso avviene per rottura a schiacciamento del cls superiore e per rottura a trazione dell'armatura inferiore (retta b)

$$\begin{aligned} \epsilon_c = -3,5\% & \quad \text{Si raggiunge il limite del cls} \\ \epsilon_{syd} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{syd} & \quad \text{l'acciaio e' nel pannello plastico} \end{aligned}$$

### CAMPO IV (PRESSOFLESSIONE)

Deformate = rette ottenute ruotando attorno al punto B

la sezione e' sia TESA che COMPRESSA (eccetto che per la retta d)

L'A.N. e' interno alla sezione o coincide con il lembo inferiore nel caso della retta d.

Il collasso avviene per rottura a compressione del cls superiore.

L'acciaio teso, eccetto per la retta c, non raggiunge mai lo snervamento.

$$\begin{aligned} \epsilon_c = -3,5\% & \quad \text{l'acciaio torna nel campo elastico} \\ \epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{syd} & \quad \text{e la sezione inizia ad essere compressa} \end{aligned}$$

$\epsilon_{sy}$  da proporzione:

$$\frac{-3,5\%}{H} = \frac{\epsilon_{sy}}{c} \Rightarrow \epsilon_{sy} = \frac{c}{H} (-3,5\%)$$

### CAMPO V (PRESSOFLESSIONE O COMPRESSIONE SEMPLICE)

Deformate = rette ottenute ruotando attorno al punto C

L'A.N. e' esterno alla sezione o coincidente con il lembo inferiore nel caso della retta d.

Il collasso avviene per rottura a schiacciamento del cls.

L'acciaio inferiore non raggiunge mai lo snervamento.

$$\begin{aligned} -2\% \leq \epsilon_{co} \leq -3,5\% & \quad \text{Punto C: } \frac{x}{1,5\%} = \frac{H}{3,5\%} \Rightarrow x = \frac{3}{7} H \\ -2\% \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} & \end{aligned}$$

Sostituisco alla  $\sigma$  la funzione della parabola-rettangolo

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_{cd} \left(2 - \frac{\epsilon}{\epsilon_c}\right) \frac{\epsilon}{\epsilon_c} & \text{se } 0 \leq \epsilon \leq 2\% \\ \sigma = \sigma_{cd} & 2\% \leq \epsilon \leq 3,5\% \end{cases}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \begin{cases} 500 \epsilon - 83333,3 \epsilon_c^2 & 0 \leq \epsilon_c \leq 2\% \\ \frac{0,00133 + \epsilon_c - 0,002}{\epsilon_c} & 2\% \leq \epsilon_c \leq 3,5\% \end{cases} \quad \text{funzione solo di } \epsilon_c$$

Riscrivo l'eq. di equilibrio

$$N_{ed} - \sigma_s A_s + \beta_1 y_0 b \sigma_{cd} = 0 \quad (1.1)$$

(2)

Si suppone che la posizione di C ~~sia~~ sia a  $\beta_2$  di  $y_0$

$$C \beta_2 y_0 = \int_{A_c} \sigma (y_0 - z) dA$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \frac{\int \sigma (y_0 - z) dA}{C \cdot y_0} = \frac{b \int_0^{y_0} \sigma (y - z) dz}{\beta_1 y_0^2 \sigma_{cd} b}$$

$$\frac{\int_0^{\epsilon_c} \sigma \left(y_0 - \frac{\epsilon}{\epsilon_c} y_0\right) \frac{y_0}{\epsilon_c} d\epsilon}{\beta_1 y_0^2 \sigma_{cd}} = \frac{y_0^2}{\epsilon_c^2 \beta_1 \sigma_{cd} y_0^2} \int_0^{\epsilon_c} \sigma (\epsilon_c - \epsilon) d\epsilon$$

$$\Rightarrow \beta_2 = \begin{cases} \frac{-20833 \epsilon_c^2 + 166,7 \epsilon_c}{\beta_1} & 0 \leq \epsilon_c \leq 2\% \\ \frac{\frac{\epsilon_c^2}{2} - 0,00067 + 3,33 \cdot 10^{-7}}{\beta_1 \epsilon_c^2} & 2\% \leq \epsilon_c \leq 3,5\% \end{cases}$$



$$C = \int \sigma_c dA = \int \sigma_{cd} dA$$

$$\int \sigma_c dA = \int \sigma_{cd} b dy$$

$$\int \sigma_c dA = b \int \sigma_{cd} dy$$

$$\int \sigma_c dA = b \cdot \sigma_{cd} \beta_1 y_0$$

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\int \sigma_c dA}{\sigma_{cd} y_0 b} = \frac{b \int \sigma_{cd} dy}{\sigma_{cd} y_0 b}$$

Riscrivo l'equazione:

$$N_{ed} - \sigma_s A_s \left(\frac{h}{2} - c\right) - \beta_1 y_0 \sigma_{cd} b \left(\frac{h}{2} - \beta_1 y_0\right) = 0 \quad (2.1)$$

CAMPO	$E_s$	$E_c$	$\beta_1$	$\beta_2$	$K$
2	$E_{s,d}$	0	35%		1
3	$E_{s,d}$ $E_{s,y,d}$	-3,5	cost	cost	1
4	$E_{s,y,d}$ $E_{s,1}$	3,5%	cost	cost	0 1

divido i membri di Eq(2.2) per  $\sigma_{cd} b d^2$

$$\frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}} = \frac{y_0}{d^2} \beta_1 (d - \beta_2 y_0)$$

$$\mu_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}} \quad \text{MOMENTO RESISTENTE RIDOTTO}$$

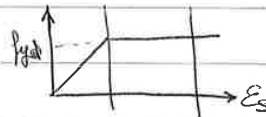
$$\Rightarrow \mu_{rd} = \frac{y_0 \beta_1 d}{d^2} - \frac{y_0^2 \beta_1 \beta_2}{d^2} = \beta_1 \xi - \beta_1 \beta_2 \xi^2$$

$$\Rightarrow \mu_{rd} = \xi \beta_1 (1 - \beta_2 \xi) \quad (2.3)$$

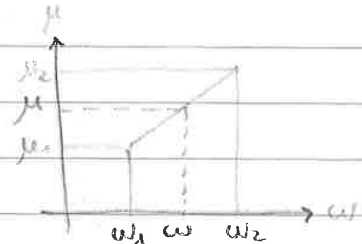
Con le equazioni (1.3) e (2.3) si costruiscono le TABELLE DI MONTOYA (SEZ. RETTANG.)

- Note la sezione e i materiali
- Si sceglie un profilo di stiratura il 2, il 3 o il 4 (in cui  $N=0$ )
- Sulle plicature saranno noti  $E_s$  ed  $E_c$  perché legati al profilo deformativo.
- Se è noto  $E_c$  posso calcolare  $\beta_1$  e  $\beta_2$
- Si calcola  $\xi = \frac{y}{d} = \frac{1 E_c l}{1 E_c l + E_s}$

• Si calcola  $k = \frac{\sigma_s(E_s)}{f_{y,d}}$

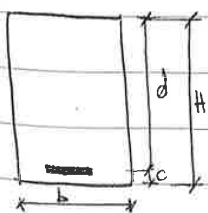


• Si calcola  $w = \frac{\xi \beta_1}{k}$



• Si calcola  $M_{rd} = \beta_1 \xi (1 - \beta_2 \xi)$

ESEMPIO



Noti:

$b = 300 \text{ mm}$

$H = 550 \text{ mm}$

$c = 50 \text{ mm}$

$A_s = 6 \phi 20$

C 30/37

B450C

$M_{ed} = 300 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Calcolo:

$\sigma_{cd} = \alpha_{cc} \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \frac{30}{1,15} = 17 \text{ MPa}$

$f_{y,d} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{450}{1,15} = 391 \text{ MPa}$

$A_s = n_f \pi \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = 6 \cdot \pi \frac{20^2}{4} = 1884 \text{ mm}^2$

$d = H - c = 550 - 50 = 500 \text{ mm}$

$w = \frac{A_s f_{y,d}}{b d \sigma_{cd}} = \frac{1884 \cdot 391}{300 \cdot 500 \cdot 17} = 0,288$

MONTOYA	
w	$\mu_{rd}$
0,256	0,222
0,308	0,254

$\mu_{rd} = \mu_{rd1} + \frac{(\mu_{rd2} - \mu_{rd1})}{w_2 - w_1} (w - w_1) = 0,245$

$M_{rd} = \mu_{rd} \cdot b d^2 \sigma_{cd} = 31240000 \text{ N}\cdot\text{mm} = 31,24 \text{ kNm} > M_{ed}$

Per risolvere le equazioni devo definire il valore ottimale di  $\xi$

$$\xi = \frac{f_0}{d} = \frac{3,5\%}{3,5\% + \epsilon_s} \rightarrow \text{definire il valore ottimale di } \epsilon_s$$

↓  
% DI ARMATURA

$$P_{min} < \rho < P_{max}$$

• % DI ARMATURA MAX

§ 4.1.6.1.1 NTC 2008

$$A_{smax} \leq 4\% \cdot b \cdot d \Rightarrow \frac{A_{smax}}{b \cdot d} \leq 4\%$$

$$\frac{A_{smax} \cdot \sigma_{cd} \cdot f_{jd}}{b \cdot d \cdot \sigma_{cd} \cdot f_{jd}} \leq 4\% \Rightarrow w \leq 4\% \cdot \frac{f_{jd}}{\sigma_{cd}}$$

hp Acciaio B450C  $\Rightarrow f_{jd} = 381 \text{ MPa}$

cls C25/30  $\Rightarrow \sigma_{cd} = 14 \text{ MPa}$

$$\Rightarrow w \leq 4\% \cdot \frac{381}{14} = 1,1$$

$$w = 0,81 \xi \Rightarrow \xi \leq \frac{w}{0,81} = 1,36$$

• % DI ARMATURA MIN

§ 4.1.6.1.1 NTC 2008

$$A_{smin} \geq b \cdot d \cdot 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yk}}$$

$f_{ctm}$  = RESISTENZA MEDIA A TRAZIONE DEL CLS

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3}$$

$$f_{yk} = f_{jd} \cdot \gamma_s$$

$$\frac{A_{smin} \cdot \sigma_{cd} \cdot f_{jd}}{b \cdot d \cdot \sigma_{cd} \cdot f_{jd}} \geq 0,26 \cdot \frac{0,3 f_{ck}^{2/3}}{f_{jd} \cdot \gamma_s} \Rightarrow w \geq \frac{0,26 \cdot 0,3 f_{ck}^{2/3}}{1,15 \cdot \sigma_{cd}} = 0,04$$

$$w = 0,81 \xi \Rightarrow \xi \geq \frac{0,04}{0,81} = 0,05$$

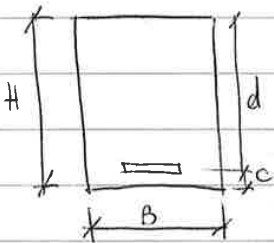
Se  $\xi = 0,11 \Rightarrow$  profondità dell'A.N. minore  $\Rightarrow$  sezione maggiore

Se  $\xi = 0,25 \Rightarrow$  " " maggiore  $\Rightarrow$  " minore  $\rightarrow$  soluzione ottimale

SOSTITUISCO nelle 2 equazioni

$$\begin{cases} w = 0,81(\xi) \\ \mu_{rd} = \beta_1 \xi (1 - \beta_2 \xi) = 0,81(\xi)(1 - 0,42(\xi)) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 0,81 \cdot 0,25 = 0,2 \\ \mu_{rd} = 0,81 \cdot 0,25(1 - 0,42 \cdot 0,25) = 0,18 \end{cases}$$

Utilizzo delle formule:



- Scelgo i materiali (es. C25/30, B450C) e definisco le caratteristiche
- STABILISCO c in base alla classe di esposizione del cls

CASO a) Vincolo H e ricavo  $d = H - c$

Da  $\mu_{rd} = 0,18$  ricavo B

Da  $w = 0,2$  ricavo  $A_s$

$$\mu_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}}$$

$$w = \frac{A_s f_{td}}{b d \sigma_{cd}}$$

CASO b) Vincolo B

Da  $\mu_{rd} = 0,18$  ricavo  $d \Rightarrow H = d + c$

Da  $w = 0,2$  ricavo  $A_s$

$$w = 0,81 \xi \Rightarrow \frac{A_s f_{td}}{b d \sigma_{cd}} = 0,81 \cdot 0,25 \Rightarrow b \cdot d \cdot \sigma_{cd} = \frac{A_s f_{td}}{0,81 \cdot 0,25}$$

sapendo che

$$\mu_{rd} = \frac{M_{rd}}{b d^2 \sigma_{cd}} \Rightarrow M_{rd} = \underbrace{\mu_{rd}}_{0,18} \cdot b d^2 \sigma_{cd} = 0,18 \cdot d \cdot \frac{A_s f_{td}}{0,81 \cdot 0,25}$$

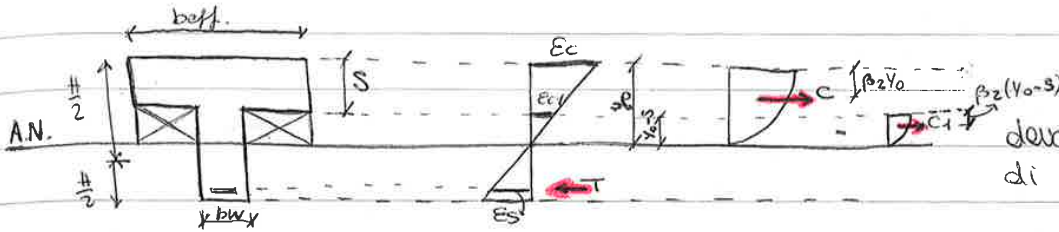
FORMULA DI CAPACITÀ PORTANTE

$$M_{rd} = A_s f_{td} d \cdot 0,9$$

$\Downarrow$

$$A_s = \frac{M_{rd}}{0,9 \cdot f_{td}}$$

• CASO 2) L'A.N. PASSA FUORI DALLO SPESSORE DELL'ALA  $y_0 > s$

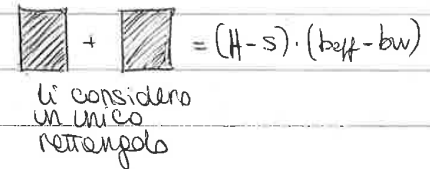
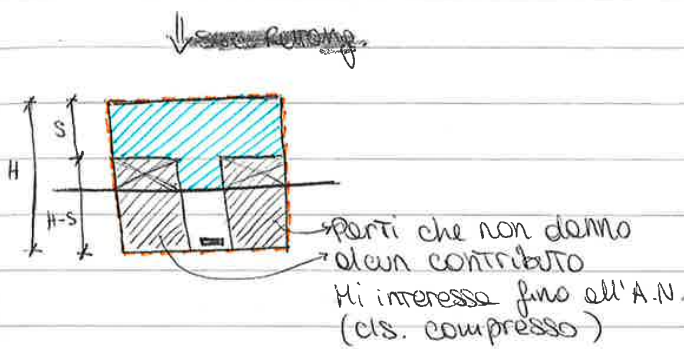


devo togliere il contributo di  $C_1$  perché non esiste

$$T = \sigma_s A_s$$

$$C = [\beta_1(\epsilon_c) \cdot beff \cdot y_0] \cdot \sigma_{cd}$$

$$C_1 = [\beta_1(\epsilon_{c1}) \cdot (beff - bw) \cdot (y_0 - s)] \cdot \sigma_{cd}$$



• Eq. Traslaz.

$$T = C - C_1$$

$$\sigma_s A_s = \beta_1(\epsilon_c) \cdot beff \cdot y_0 \cdot \sigma_{cd} - \beta_1(\epsilon_{c1}) \cdot (beff - bw) \cdot (y_0 - s) \cdot \sigma_{cd} \quad (1)$$

• Eq. ROTAZ. rispetto ad  $H/2$

$$M_{rd} = T \left( \frac{H}{2} - c \right) + C \left( \frac{H}{2} - \beta_2(\epsilon_c) y_0 \right) - C_1 \left( \frac{H}{2} - s - \beta_2(\epsilon_{c1}) (y_0 - s) \right)$$

$$= \underbrace{\sigma_s A_s}_{\text{da eq. della Trasl.}} \left( \frac{H}{2} - c \right) + \beta_1(\epsilon_c) beff \cdot y_0 \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - \beta_2(\epsilon_c) y_0 \right) - \beta_1(\epsilon_{c1}) (beff - bw) (y_0 - s) \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - s - \beta_2(\epsilon_{c1}) (y_0 - s) \right)$$

$$= \beta_1(\epsilon_c) beff \cdot y_0 \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - c \right) - \beta_1(\epsilon_{c1}) (beff - bw) (y_0 - s) \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - c \right) + \beta_1(\epsilon_c) beff \cdot y_0 \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - \beta_2(\epsilon_c) y_0 \right) - \beta_1(\epsilon_{c1}) (beff - bw) (y_0 - s) \cdot \sigma_{cd} \cdot \left( \frac{H}{2} - s - \beta_2(\epsilon_{c1}) (y_0 - s) \right) \quad (2)$$

ADIMENSIONAMENTO LE EQUAZ.

• Divido (1) per  $\sigma_{cd} \cdot beff \cdot d$

Ricorda  $\xi = \frac{y_0}{d}$   $w = \frac{bw}{beff} \frac{As}{A_c}$   $k = \frac{\sigma_s}{f_{yd}} \Rightarrow \sigma_s = k \cdot f_{yd}$

$$k w = \beta_1(\epsilon_c) \xi - \beta_1(\epsilon_{c1}) \left( \xi - \frac{s}{d} \right) \left( 1 - bw/beff \right) \quad (1.1)$$

• Divido (2) per  $\sigma_{cd} \cdot beff \cdot d^2$

$$\mu_{rd} = \beta_1(\epsilon_c) \xi \left[ 1 - \beta_2(\epsilon_c) \xi \right] - \beta_1(\epsilon_{c1}) \cdot \left( \xi - \frac{s}{d} \right) \left( 1 - \frac{bw}{beff} \right) \left[ 1 - \frac{s}{d} - \beta_2(\epsilon_{c1}) \left( \xi - \frac{s}{d} \right) \right] \quad (2.1)$$

Caso b)  $s$  non è noto

$\xi = 0,25$     $w = 0,2$     $M_{ed} = 0,18$

Da  $M_{ed} = \frac{M_{ed}}{\sigma_{cd} b d^2}$  ricavo  $d$

Da  $\xi = \frac{y_0}{d}$  ricavo  $y_0$    *Scelgo  $s$  in modo che tutto il rettangolo superiore sia totalmente compresso*

$\Downarrow$  rango  
 $y_0 = s$

Calcolo  $w = 0,81 \xi$

Calcolo  $A_s = \frac{w b e f d \sigma_{cd}}{f_{yd}}$  e  $A_b = \frac{\pi \phi^2}{4}$

Calcolo  $n_f = \frac{A_s}{A_b}$

Caso c)  $s$  noto,  $d$  noto

Calcolo  $M_{ed} = \frac{M_{ed}}{b e f d^2 \sigma_{cd}}$

Da  $M_{ed} = 0,81 \xi (1 - 0,42 \xi)$  ricavo  $\xi$

Calcolo  $y_0 = \xi \cdot d$    
 { se  $y_0 \leq s$  procedo come una sezione rettangolare  
 { se  $y_0 > s$  cambio sezione

Osservazioni:

Perché si fanno sezioni a T e non rettangolari?

$\times$  increment T in zona compr.

Perché essendo  $M_{ed} = T \cdot b r_1 + C \cdot b r_2$  cerco la forma in cui a parità di distanza le 2 forze sono le più grandi possibili

} - per increment T in zona Tesa aumento  $A_s$

" " // compr allargo la base di c/c

Dopo aver calcolato  $A_s$  aggiungo  $A_s'$  in zona compr.

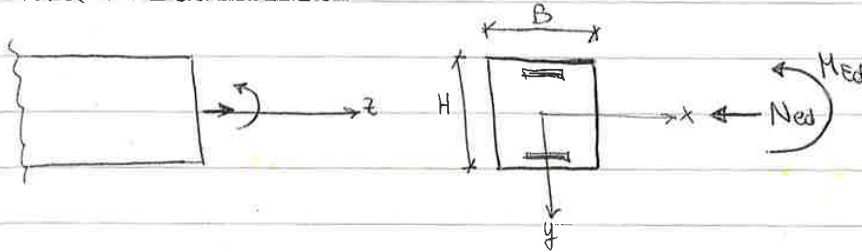
• ZONE CRITICHE (modo trave-pilastro)  $\rightarrow \rho' = \frac{A_s'}{b \cdot h} \geq 0,50 \rho$

• ZONE NON CRITICHE  $\rightarrow \rho' = 0,25 \rho$

Nel digr. M- $\mu$  avevamo notato che l'area di armatura in compressione influenza poco i calcoli, quindi se la sezione non è verificata non serve mettere l'armat. in compress per aumentare la resistenza. serve soltanto per soddisfar. le condiz. di duttilità.



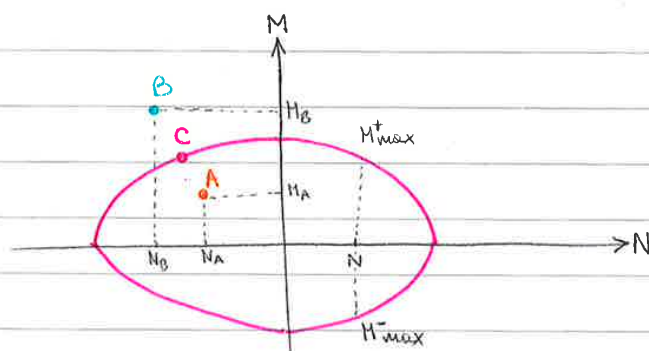
DEFINIZIONE DELLO SLU



Si può giungere a stato limite sia a causa di  $N_{ed}$  sia a causa di  $M_{ed}$

- 1) Fisso  $N \rightarrow M$  cresce fino a rottura
- 2) Fisso  $M \rightarrow N$  cresce fino a rottura

Si può realizzare un diagramma a rottura ponendo lungo le ordinate i valori del momento resistente e lungo l'asse delle ascisse il valore dello sforzo normale resistente.



1) Cambiando  $N_{ed}$  ottengo altri valori di  $M$  e rottura

Se unisco i punti che definiscono la rottura ottengo una curva chiusa:

**DOMINIO DI INTERAZIONE M-N**

Se un punto è interno al dominio di rottura la sezione è verificata

Domínio di interazione = dominio resistente

$M, N$  = coppia di sollecitazioni agenti sulla sezione

IL DOMINIO DI INTERAZIONE PERMETTE DI FARE LA VERIFICA A STATO LIMITE ULTIMO:

- **PUNTO A (interno al dominio)**  $\rightarrow$  la sezione è in grado di resistere alle sollecitazioni  $M_A, N_A \Rightarrow Ed < Rd$
- **PUNTO B (esterno al dominio)**  $\rightarrow$  la sezione non è in grado di resistere alle sollecitazioni  $M_B, N_B \Rightarrow Ed > Rd \rightarrow$  Modifica armatura o geometria o cambio classe di resistenza del c.a.
- **PUNTO C (sul dominio)**  $\rightarrow Ed = Rd$  condizione di SLU. Soddisfa la verifica


Per progettare o verificare le sezioni in c.a. soggette a pressoflessione occorre definire  $M, N$  e vedere se il punto cade all'interno del dominio.

• Se  $x=H \Rightarrow N = -\sigma_u bH$   
 $M=0$  } Tutta la sezione è compressa  
 e non sopporta sforzo di flessione

• Se  $x = \frac{H}{2} \Rightarrow N=0$   
 $M = \frac{bH^2}{4} \sigma_u$  } Massimo momento positivo  
 la sezione non sopporta sforzo normale  
 ↳ elastico

• Se  $x = -\frac{H}{2} \Rightarrow N=0$   
 $M = -\frac{bH^2}{4} \sigma_u$  } Massimo momento negativo  
 la sezione non sopporta sforzo normale  
 ↳ elastico

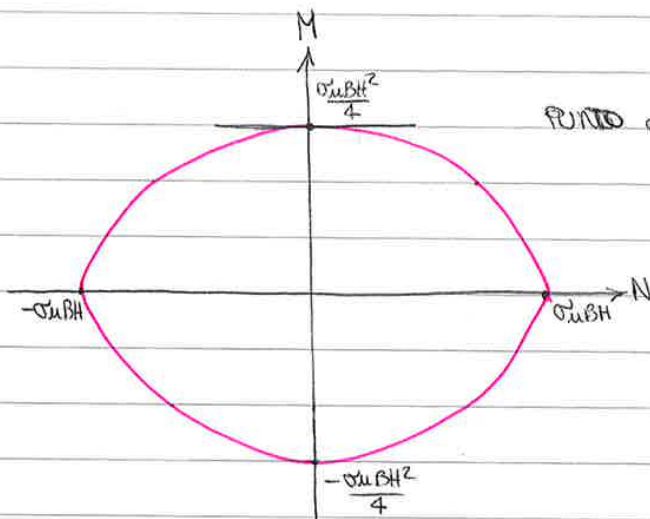
Se il materiale avesse avuto un comportamento lineare elastico avremmo avuto:



$$\sigma_u = \frac{M}{I} y \quad \sigma_u = \frac{M}{\frac{bH^3}{12}} \cdot \frac{H}{2} \Rightarrow \sigma_u = \frac{M}{\frac{bH^2}{6}}$$

↳ elastico

Riportando i punti ottenuti sul diagramma M-N si ottiene:



Punto di massimo  $\rightarrow$  lo otterremo facendo  
 $\frac{\partial M}{\partial x} = 0$

$$\sigma_u b H - 2 \sigma_u b x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{H}{2}$$

(Ad  $x = \frac{H}{2}$  ho il max valore di Mom. flessione)

**■ DOMINIO DI INTERAZIONE DI UN MATERIALE ISORESISTENTE**

es. Acciaio