NUMERO: 2365A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Scuderi Paolo

MATERIA: Aerodinamica - Teoria - Prof. Di Cicca

AERODINAMICA

Deriva dalla FLUIDODINAMICA → studio della dinamica dei fluidi

AERODINAMICA: comporti del fluido attorno ad un corpo solido valutando i carichi che il fluido agisce sul corpo solido
⇒ CORRENTI ESTERNE

FLUIDO COME MEZZO CONTINUO

materia → solido; liquido, gassoso } FLUIDI

SOLIDO

legami intermolecolari molto forti ⇒ mantengono forma e volume propri

LIQUIDI

legami intermolecolari più deboli ⇒ mantengono volume proprio ma si adattano alla forma del recipiente che li contiene

GAS

legami intermolecolari molto deboli → NON mantengono forma e volume propri. Tendono ad occupare tutto il volume del recipiente che li contiene

FLUIDO IN QUIETE

Grandezze termodinamiche : T, p, ρ

TEMPERATURA

Misura del grado di agitazione molecolare $\Rightarrow E_K$ posseduto dalle molecole

[K] [°C]

DENSITÀ

Considerato un volumetto $\delta\Omega$ contenente δm

$$\rho = \lim_{\delta\Omega \to 0} \frac{\delta m}{\delta\Omega}$$

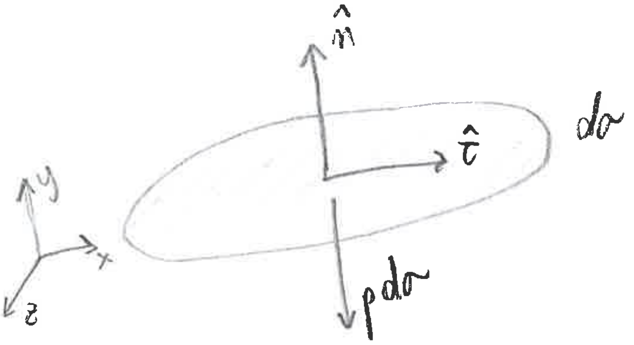
→ cade il concetto di particella e Hp. continuo $(\delta\Omega \to 0)$

$$\rho = \lim_{\delta\Omega \to \Omega_p} \frac{\delta m}{\delta\Omega} \qquad [kg/m^3]$$

Ω_p : volume particella fluida $\sim 3 \cdot 10^7$ molecole (cond. stand.)

PRESSIONE

Le collisioni delle molecole su superficie unitaria generano una pressione $[N/m^2]$ [Pa]



se fluido in quiete la $\vec{F}$ agente su $d\sigma$ ha solo componente normale $(p\,d\sigma)$

5

$\uparrow y \quad p_3\,\delta x\,\delta z - (p_2 \cancel{\cos\alpha})\left(\dfrac{\delta x}{\cancel{\cos\alpha}}\right)\delta z = W$

$$p_3 - p_2 = \frac{W}{\delta x\,\delta z}$$

se $\Omega \to 0 \Rightarrow p_3 - p_2 \to 0$

$p_3 = p_2$

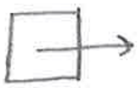
$\Rightarrow p_1 = p_2 = p_3$ LEGGE DI PASCAL $\Rightarrow$ la pressione è un campo scalare

FLUIDO IN MOVIMENTO

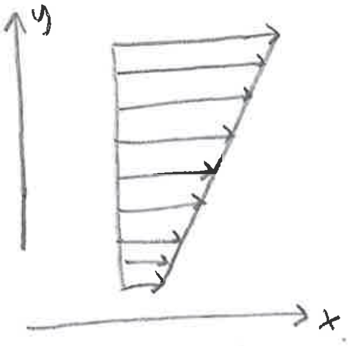
Se tempi di raggiungimento dell'equilibrio termodinamico << tempo caratteristico del fenomeno fluidodinamico
$\Rightarrow$ è possibile caratterizzare lo stato del fluido tramite le grandezze termodinamiche (T, p, ρ).

VELOCITÀ

vettore applicato al baricentro della particella fluida

 $\vec{v}(x,t)$

$\Rightarrow$ la velocità è un campo vettoriale esempio



$$\boxed{\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}}$$

LEGGE DI NEWTON

Se τ è di tipo lineare ⇒ si parla di FLUIDI NEWTONIANI

$\mu(p, T)$

GAS → μ cresce con T

LIQUIDI → μ decresce con T

GAS, LIQUIDI } μ cresce con p

LEGGE DI SUTHERLAND

Per gas ~ gas perfetti

$$\boxed{\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{T+S}{T_0+S}}$$

μ_0 : viscosità riferimento

T_0 : temperatura riferimento

S : costante di Sutherland [K]

VISCOSITÀ CINEMATICA

$$\boxed{\nu = \frac{\mu}{\rho}} \quad \left[m^2/s\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 400

COMPRIMIBILITÀ

Capacità di variare volume se soggetto a variazioni p e/o T

BULK ELASTICITY (elasticità di volume)

$$\boxed{K = -\frac{\delta p}{\frac{\delta \Omega}{\Omega}}}$$

misura della comprimibilità

La comprimibilità è legata alla velocità con cui si propaga un'onda nel fluido

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}}$$

VELOCITÀ PROPAGAZIONE

$$M = \rho \Omega$$

$$\frac{dM}{M} = \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta \Omega}{\Omega} \Rightarrow \frac{\delta \Omega}{\Omega} = -\frac{\delta \rho}{\rho}$$

$$K = \frac{\delta p}{\frac{\delta \rho}{\rho}}$$

$$c = \sqrt{\frac{\delta p}{\delta \rho}}$$

Per PICCOLE PERTURBAZIONI (es: onde sonore) la trasformazione che subisce il fluido al passaggio dell'onda è ISENTROPICA

$$c = \sqrt{\left(\frac{\delta p}{\delta \rho}\right)_{IS}}$$

VELOCITÀ SUONO $\Rightarrow c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$

INFLUENZA DEI NUMERI DI REYNOLDS E MACH

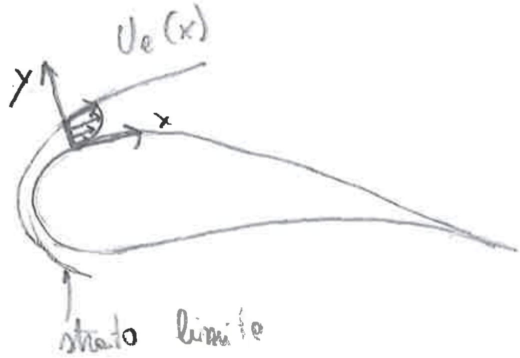
INFLUENZA Re

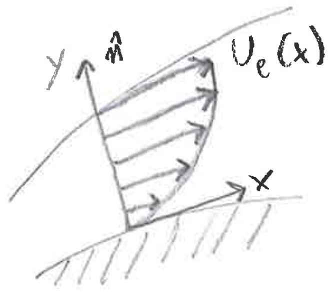
$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$ (cilindro)

Lo strato limite turbolento è più resistente alla transizione di quello laminare ⇒ distacco più a valle.

CORPI
- TOZZI ⇒ pt. separazione molto anticipato rispetto al bordo di fuga
- AFFUSOLATI ⇒ le linee di corrente tendo a seguire il profilo, la separazione si genera a valle (bordo d'attacco)

Alti numeri di Reynolds





$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

↓ gradienti di velocità, molto forti in zone vicine a parete ⇒ non posso trascurare gli sforzi viscosi nella regione interna allo strato limite

INFLUENZA M

VELOCITÀ DEL SUONO = velocità con cui si propagano le piccole perturbazione nel mezzo (fluido)

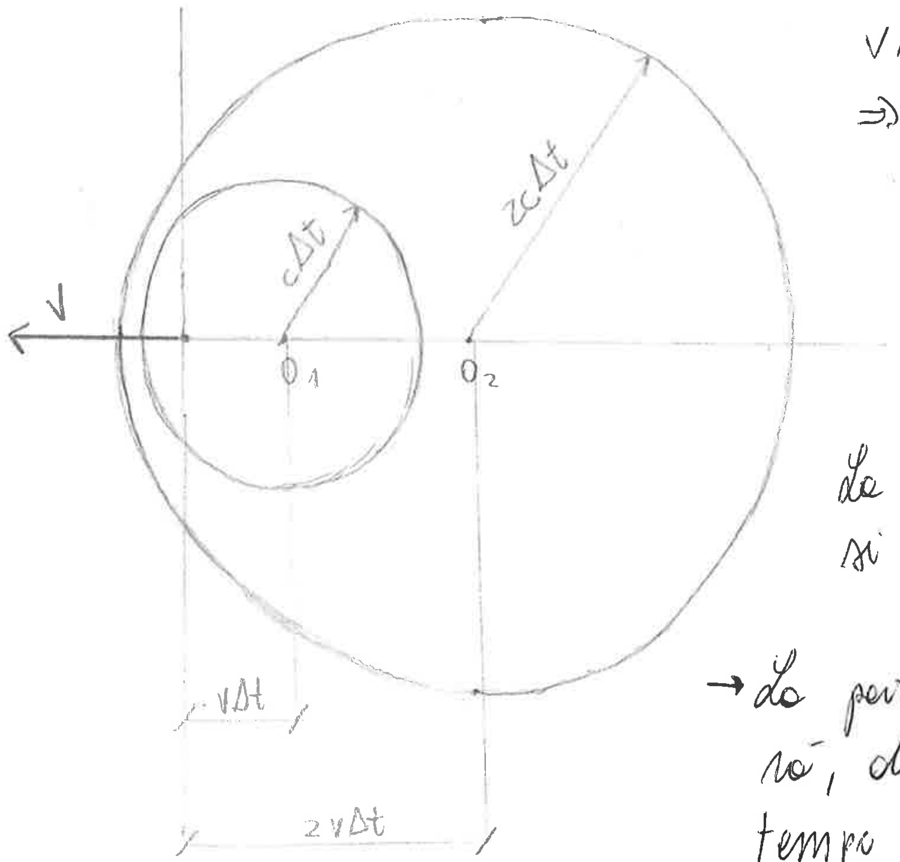
$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma R^* T}$$

dove $R^* = \frac{R}{\mathcal{M}} \left[\frac{J}{kg\,K}\right]$ $R = 8314 \frac{J}{Kmol\ K}$

$\mathcal{M}$ → massa molare

$$c^2 = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{is}}$$

1) $V < C$ ⇒ REGIME SUBSONICO



$v\Delta t < c\Delta t$

⇒ il disturbo si propaga sia a valle che a monte della sorgente

La zona perturbata si ampia

→ La perturbazione raggiungerà, dopo un opportuno tempo, ogni punto

μ = ANGOLO DI MACH (di semiapertura del cono) 15

$$\sin \mu = \frac{\overline{O_1H}}{\overline{O_1O}} = \frac{c\,\cancel{\Delta t}}{v\,\cancel{\Delta t}} = \frac{1}{M}$$

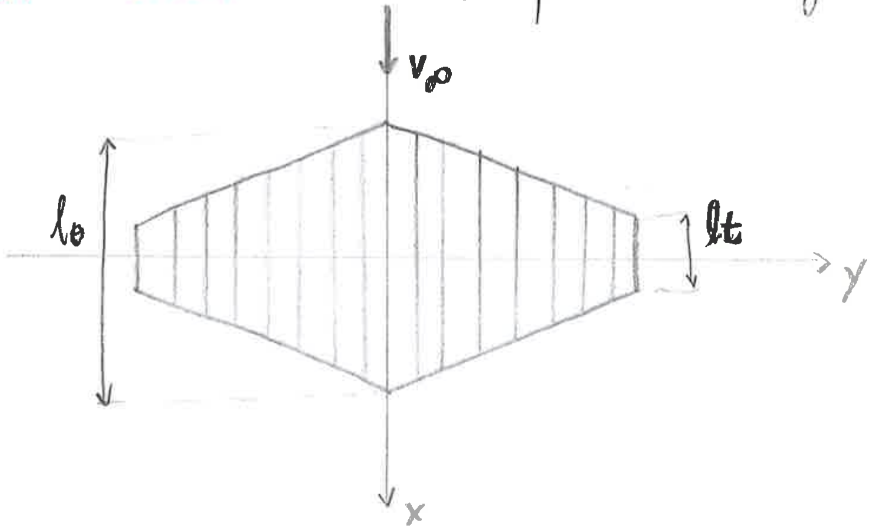
$$\boxed{\mu = \arcsin\left(\frac{1}{M}\right)}$$

aria $\rightarrow$ $c \sim 340 \ m/s$

acqua $\rightarrow$ $c \sim 1000 \ m/s$

$$\Rightarrow \begin{cases} M<1 \rightarrow \text{SUBSONICO} \\ M>1 \rightarrow \text{SUPERSONICO} \end{cases}$$

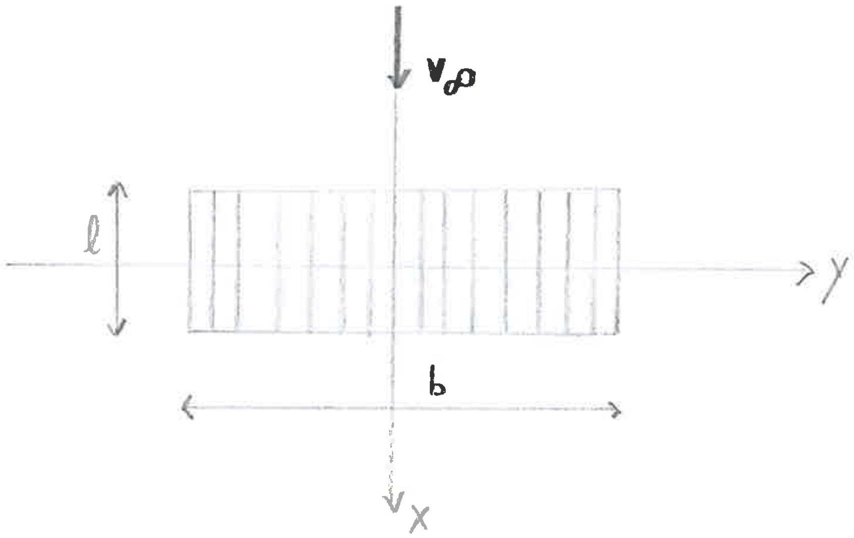
ALA RASTREMATA (tapered wing)



$t = \frac{l_t}{l_0}$ RAPPORTO RASTREMAZIONE

la corda varia profilo per profilo

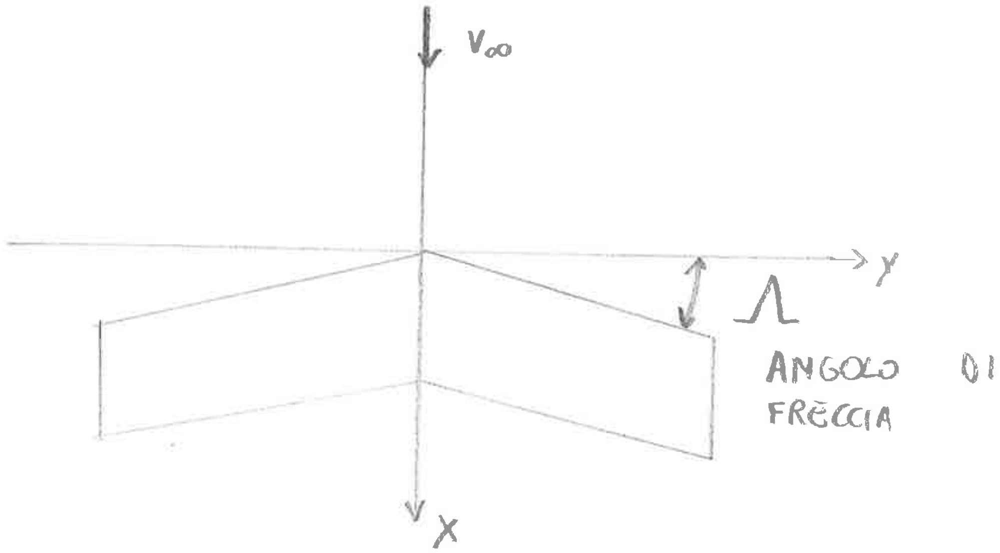
ALA NON RASTREMATA (ala rettangolare)



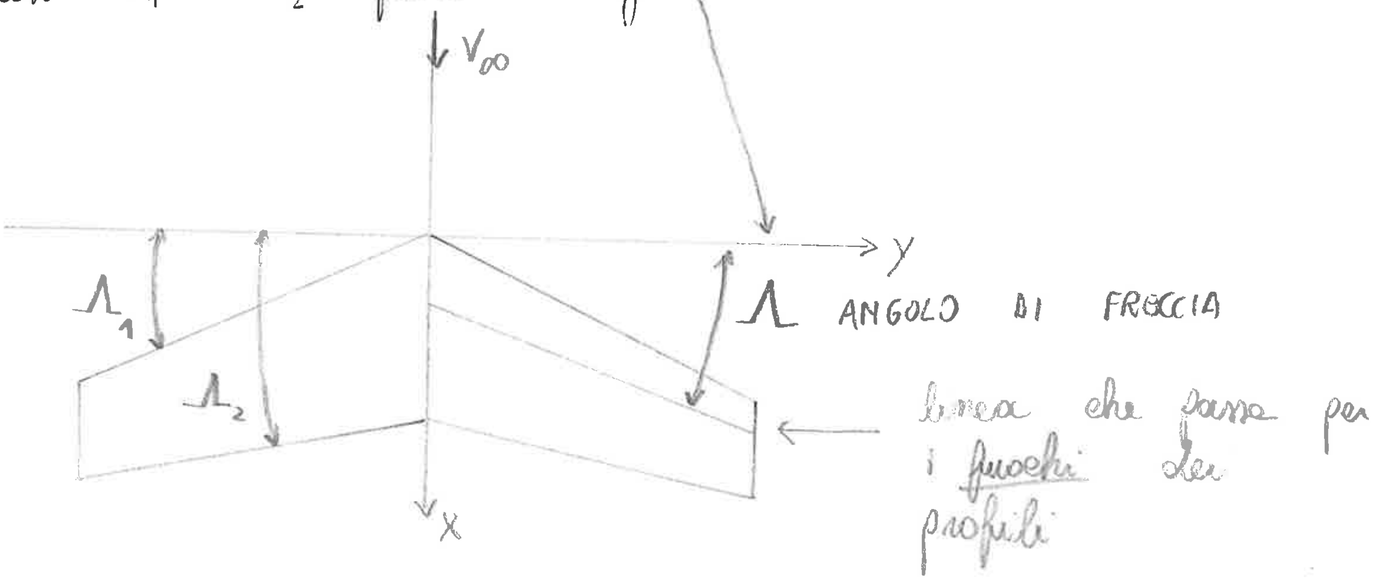
$\lambda = \frac{b}{l}$

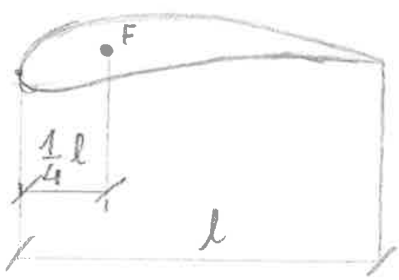
ALA
- TRIANGOLARE $\Rightarrow$ $t = 0$
- TRAPEZIA $\Rightarrow$ $0 < t < 1$
- RETTANGOLARE $\Rightarrow$ $t = 1$

ALA A FRECCIA



Con Λ_1 e Λ_2 quale scelgo?





Dal punto di vista aerodinamico per PROFILO ALARE si intende una sezione priva di rastremazione, angolo di freccia e con allungamento infinito

$\Rightarrow$ il campo di moto che si genera attorno ad esso è bidimensionale

$\Rightarrow$ $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ non esistono gradienti di pressione lungo y

Invece il campo di moto è tridimensionale nel caso in cui la corrente investe un' ALA (è finita)

(NOTA: PROFILO ALARE → lunghezza infinita
ALA → lunghezza finita)

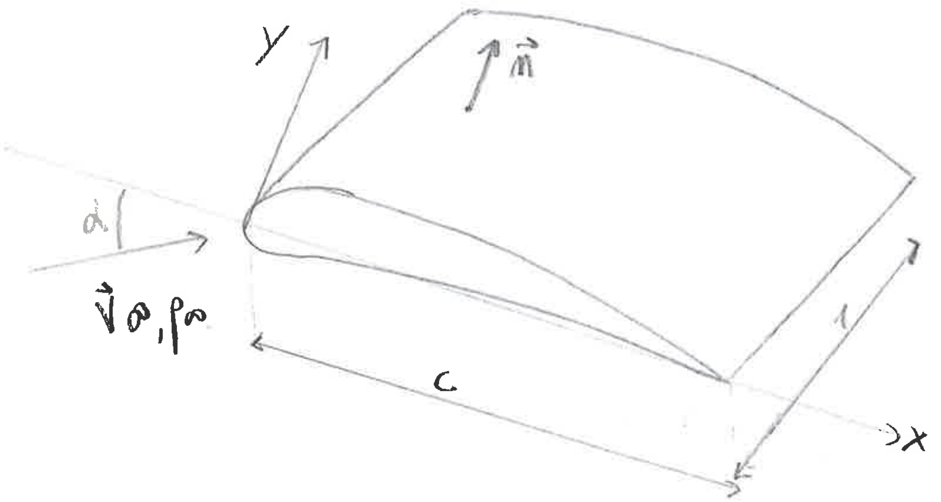
$$\boxed{\text{ALA} \neq \text{PROFILO ALARE}}$$

⚠ cambia anche il sistema di rif.

ALA → 3D
- rastremazione
- $\Lambda \neq 0$
- allungamento finito

PROFILO ALARE → 2D
- no rastremazione
- $\Lambda = 0$
- allungamento infinito

AZIONI AERODINAMICHE SU PROFILI ALARI



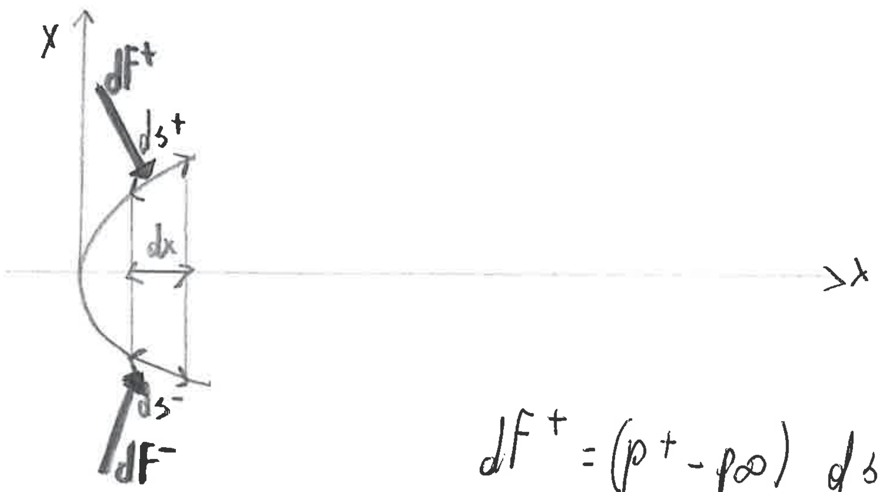
Hp: fluido ideale $\Rightarrow \tau = 0$

agisce solo la pressione sul profilo PRESSIONE ASSOLUTA

$p \quad \left[\frac{N}{m^2} = Pa\right]$

$p - p_\infty$ PRESSIONE RELATIVA $\lesseqgtr 0$

zona vicino al bordo d'attacco



$p = \frac{F}{S} \rightarrow F = pS$

$$dF^+ = (p^+ - p_\infty)\, ds^+ (1)$$

$$dF^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- (1)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 400

$$\begin{cases} dF_x^+ = (p^+ - p_\infty)\, ds^+ \sin\beta \\ dF_y^+ = -(p^+ - p_\infty)\, ds^+ \cos\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} dF_x^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- \sin\beta' \\ dF_y^- = (p^- - p_\infty)\, ds^- \cos\beta' \end{cases}$$

$$\beta \simeq \beta' \ll 1\,\text{rad} \Rightarrow \begin{cases} \sin\beta \simeq \beta \\ \cos\beta \simeq 1 \end{cases} \qquad \text{inoltre} \begin{cases} dx = ds^+ \cos\beta \\ dx = ds^- \cos\beta' \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \|dF_x^+\| \ll \|dF_y^+\| \\ \|dF_x^-\| \ll \|dF_y^-\| \end{array}\right\} \Rightarrow \|dF_x\| \ll \|dF_y\| \Rightarrow \|R_x\| \ll \|R_y\|$$

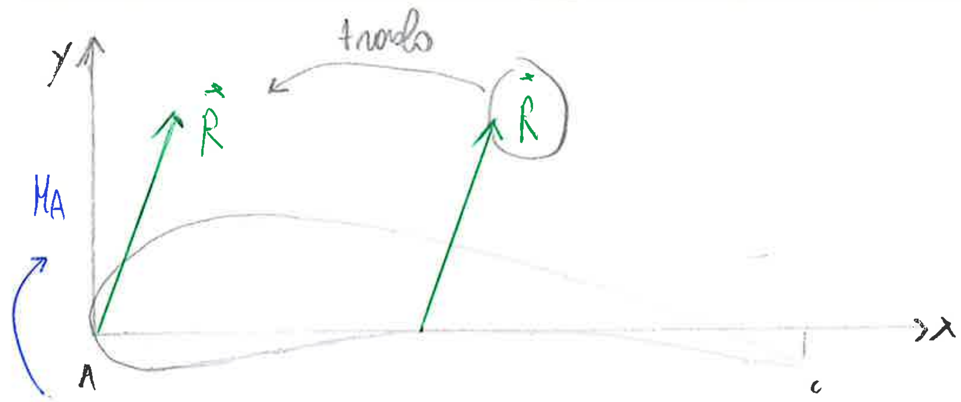
$\vec{R}$ è dato da R_x e R_y

$$R_x = \int_0^c dF_x^+ + \int_0^c dF_x^- \quad \text{(trascurabile)}$$

$$R_y = \int_0^c dF_y^+ + \int_0^c dF_y^-$$

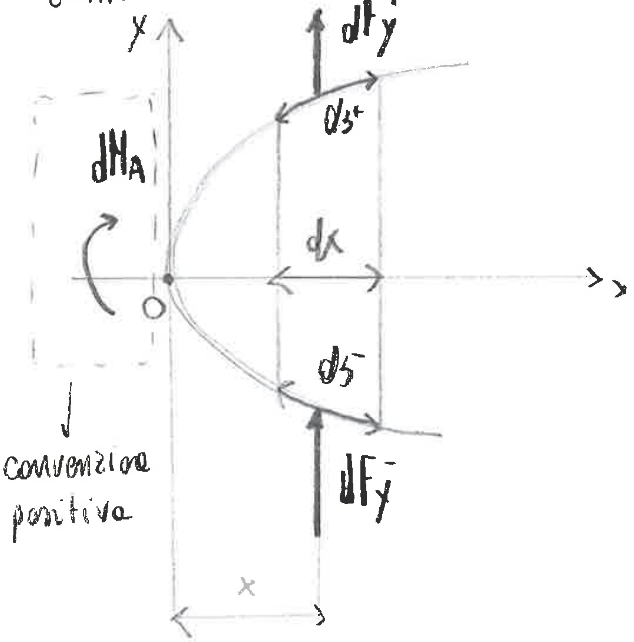
$$R_y = -\int_0^c (p^+ - p_\infty)\, dx + \int_0^c (p^- - p_\infty)\, dx =$$

$$\boxed{R_y = \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty)\right] dx}$$



Se traslo $\vec{R}$ nasce momento M_A

zoom bordo d'attacco



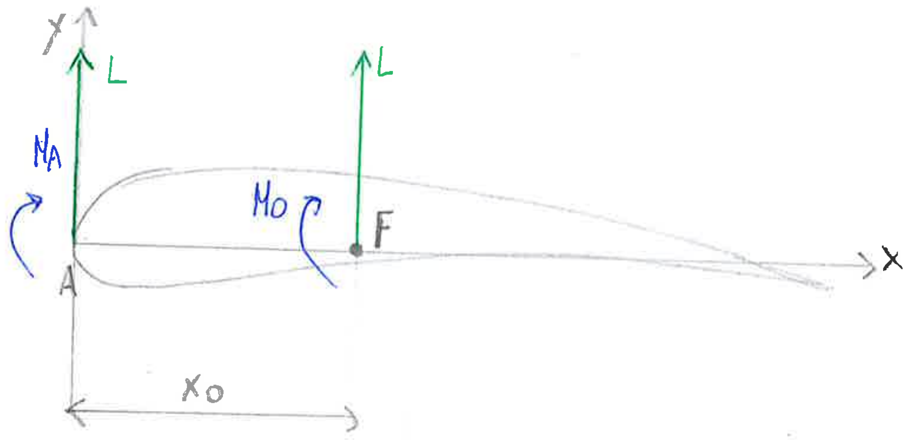
$\circlearrowleft_O)$

$$dM_A = -dF_y^+ x - dF_y^- x$$

$$dM_A = +(p^+ - p_\infty)\, x\, dx - (p^- - p_\infty)\, x\, dx =$$

$$= \left[(p^+ - p_\infty) - (p^- - p_\infty)\right] x\, dx$$

$$\boxed{M_A = \int_0^c \left[(p^+ - p_\infty) - (p^- - p_\infty)\right] x\, dx}$$



M_0 MOMENTO FOCALE

FUOCO → F è quel punto della corda tale per cui $\frac{dM_0}{d\alpha} = 0$ ⇒ M_0 non varia con l'incidenza α

$M_0 = M_A + L x_0$

$\boxed{x_0 = 0,25\, C}$ per profili in REGIME SUBSONICO

[$x_0 = 0,5\, C$ per profili in REGIME SUPERSONICO]

$$F \sim l^a V^b \rho^c \mu^d p^e$$

Valuto a, b, c, d, e attraverso analisi dimensionale

$$[Kg\ m\ s^{-2}] = [m]^a\ [m\ s^{-1}]^b\ [Kg\ m^{-3}]^c\ [Kg\ m^{-1}\ s^{-1}]^d\ [Kg\ m^{-1}\ s^{-2}]^e$$

$$[Kg\ m\ s^{-2}] = [Kg]^{c+d+e}\ [m]^{a+b-3c-d-e}\ [s]^{-b-d-2e}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 = c+d+e \\ 1 = a+b-3c-d-e \\ -2 = -b-d-2e \end{cases}$$

$$b = 2-d-2e$$
$$c = 1-d-e$$
$$a = 1-(2-d-2e)+3(1-d-e)+d+e$$
$$= 1-2+d+\cancel{2e}+3-3d-\cancel{3e}+d+\cancel{e}$$
$$= 2-d$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2-d \\ b = 2-d-2e \\ c = 1-d-e \end{cases}$$

Quindi $\quad F \sim l^{2-d}\ V^{2-d-2e}\ \rho^{1-d-e}\ \mu^d\ p^e$

Considero caso ALA

Il moto è 3D ⇒ oltre che dall'angolo di incidenza C_f dipenderà anche dall'angolo di imbardata

$$\left[\begin{array}{l} C_L \rightarrow \text{ALA} \\ C_\ell \rightarrow \text{PROFILO} \end{array}\right]$$

$$\boxed{C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}}$$

COEFFICIENTE DI PORTANZA ALA

S è la SUPERFICIE IN PIANTA dell'ala

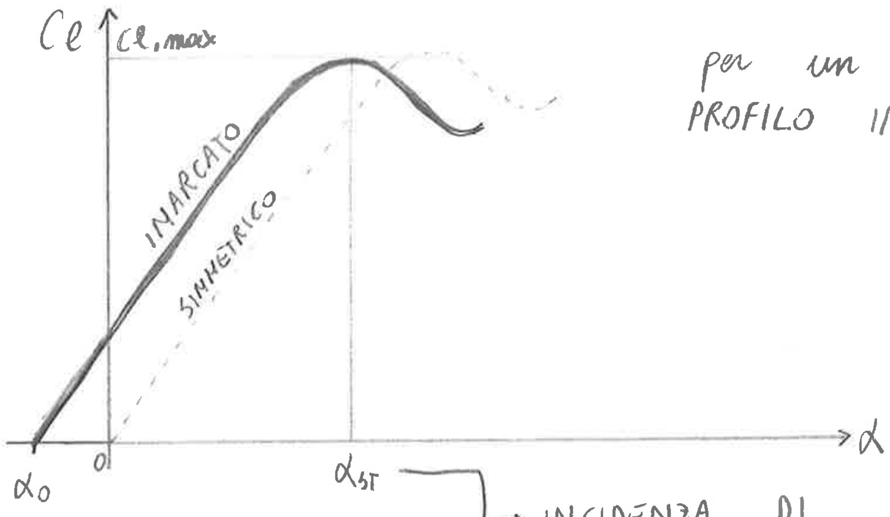
$$\boxed{C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S}}$$

COEFFICIENTE DI RESISTENZA ALA

$$\boxed{C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 S\, l}}$$

COEFFICIENTE DI MOMENTO ALA

$$C_F = f(\alpha, \beta, Re, M)$$

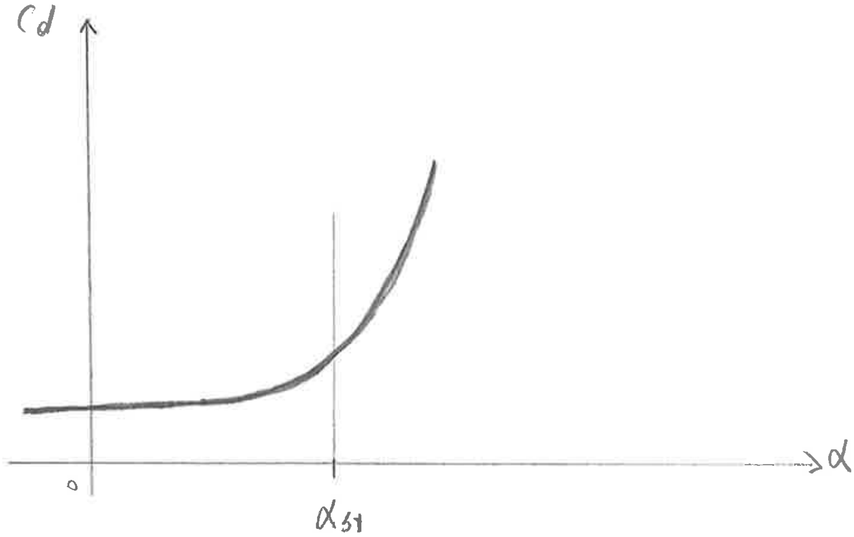


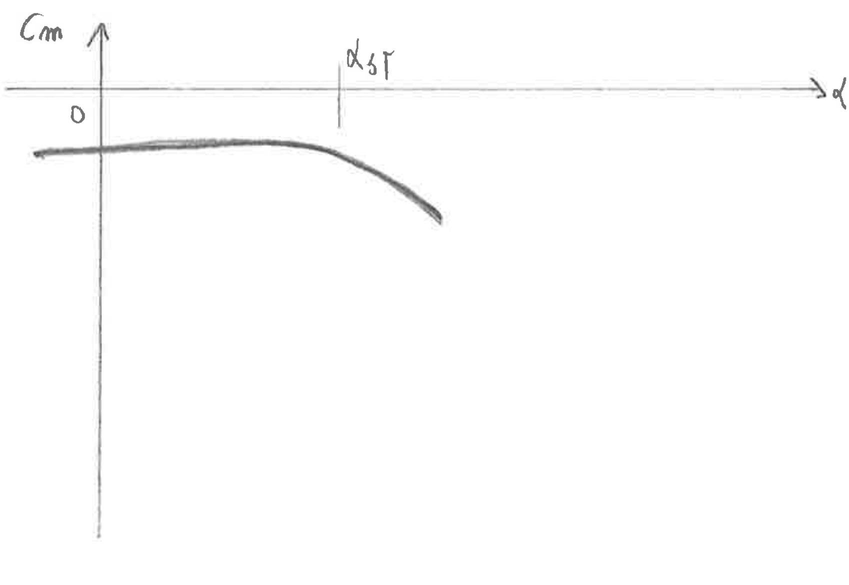
↳ INCIDENZA DI PORTANZA NULLA

↳ INCIDENZA DI STALLO

per un PROFILO INARCATO → non passa da zero!

Per un profilo → simmetrico ⇒ $\alpha_0 = 0$
↘ inarcato ⇒ $\alpha_0 < 0$





OSS

1) $L = \int_0^c \left[(p^- - p_\infty) - (p^+ - p_\infty) \right] dx$

$$C_l = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c} = \int_0^c \left(\frac{p^- - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} - \frac{p^+ - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \right) \frac{dx}{c} =$$

$$= \int_0^c \frac{c_p^- - c_p^+}{c} dx$$

$$\Delta c_p = c_p^- - c_p^+$$

$$\Rightarrow \boxed{C_l = \int_0^c \frac{\Delta c_p}{c} dx}$$

cambio variabile

$\Rightarrow \frac{c}{c} = 1 \; , \; \frac{x}{c}$

$$C_l = \int_0^1 \Delta c_p \, d\left(\frac{x}{c}\right)$$

2) $M_A = \int_0^c \left[(p^+ - p_\infty) - (p^- - p_\infty) \right] x \, dx$

$$C_{mA} = \frac{M_A}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 c^2} = \int_0^c \left(\frac{p^+ - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} - \frac{p^- - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2} \right) \frac{x}{c} \frac{dx}{c} =$$

$$= \int_0^c (c_p^+ - c^-) \frac{x}{c} \frac{dx}{c} = -\int_0^c \frac{\Delta c_p \, x}{c^2} dx$$

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

ROTORE

$$\boxed{\nabla \times \vec{v} = \vec{\omega}}$$

VORTICITÁ $= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\hat{k}$

VELOCITÁ

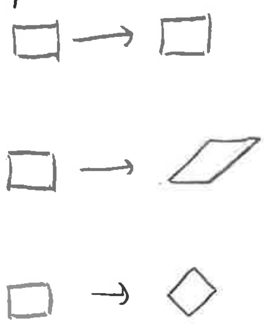
$\vec{v} = (u, v, w)$

Una particella può:

1) traslare

2) deformarsi

3) ruotare



misura la velocità di rotazione della particella

$\nabla \times \vec{f} = 0 \rightarrow$ campo irrotazionale

$\Downarrow$

Φ = FUNZIONE POTENZIALE (scalare)

$\vec{f} = \nabla \Phi$

$\Rightarrow \nabla \times \vec{f} = \nabla \times (\nabla \Phi) = 0$ c.v.d.

NOTA

$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho(\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\nabla \rho)$

DESCRIZIONE DEL MOTO FLUIDO

4

$$\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$$ VETTORE

variazione spaziale nel punto P del vettore velocità $\vec{V}$

$$\nabla\vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$ GRADIENTE

Lo scrivo come somma di due tensori → simmetrico + antisimmetrico

$$\nabla\cdot\vec{V} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

SIMMETRICO ↓

$\bar{\bar{D}}$ TENSORE VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE

$D_{ij} = D_{ji}$
6 componenti indipendenti

$$Tr(\bar{\bar{D}}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla\cdot\vec{V}$$

ANTISIMMETRICO ↓

$\bar{\bar{B}}$ TENSORE VELOCITÀ DI ROTAZIONE

$B_{ij} = -B_{ji}$
3 componenti indipendenti

$\bar{\bar{W}} = -\bar{\bar{B}}$

↳ TENSORE VORTICITÀ

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{V}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}$$

Si dimostra che $\vec{b} = \vec{\Omega}$

→ VEL. ANGOLARE DELL'ELEMENTO FLUIDO PENSATO COME CORPO RIGIDO ATTORNO AD UN PROPRIO ASSE

$$\frac{1}{2}\vec{\omega} = \vec{\Omega} \Rightarrow \boxed{\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}}$$

$(\omega = \nabla \times \vec{V})$

In conclusione il moto di una particella fluida è costituito da 4 elementi:

$\vec{V}$ [1) TRASLAZIONE ⇒ vettore $\vec{V}$ (velocità)

(vel angolare $\vec{\Omega}$ elemento fluido)

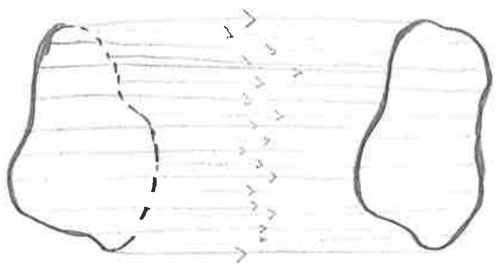
$\bar{\bar{B}}$ [2) ROTAZIONE DI CORPO RIGIDO ⇒ tensore $\bar{\bar{B}}(\vec{\omega})$

$\bar{\bar{D}}$ [3) VARIAZIONE VOLUMETRICA ⇒ $Tr(\bar{\bar{D}}) = \nabla \cdot \vec{V}$

(distorsione)

4) VARIAZIONE DI FORMA ⇒ elementi tensore $\bar{\bar{D}}_{ij}$ $i \neq j$

TUBO DI FLUSSO



il vettore $\vec{v}$ è sempre tg alla sup. laterale del tubo di flusso

Qualsiasi sezione individuo del tubo di flusso la portata è sempre la stessa!

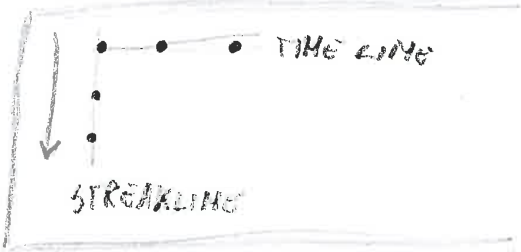
La linea di corrente può essere considerata un caso limite del tubo di flusso dove l'area di base tende a zero.

STREAKLINE linea che unisce le posizioni di tutte le particelle che sono rilasciate in un pt. a precisi Δt

$\Rightarrow$ visualizzazione in galleria del vento

TIMELINE linee che unisce le posizioni di tutte le particelle che sono rilasciate allo stesso t

$\Rightarrow$ visualizza la coerenza temporale delle strutture presenti



STREAMLINE = linee di corrente

• Se MOTO STAZIONARIO $\Rightarrow$ traiettoria = linee di corrente =
= steakline

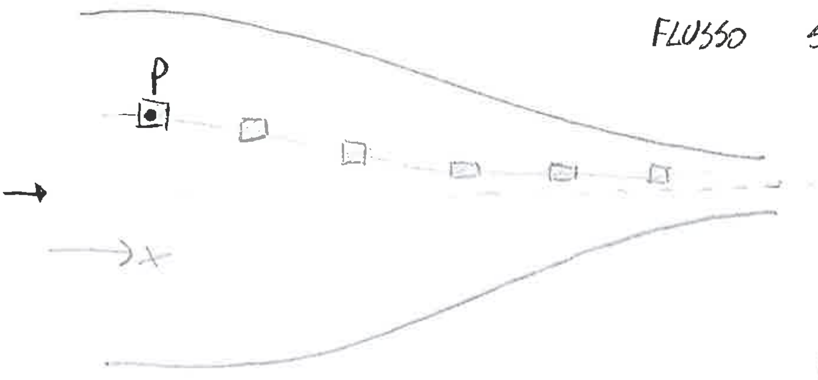
METODO EULERIANO

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,y,z,t) \\ v &= v(x,y,z,t) \\ w &= w(x,y,z,t) \\ T &= T(x,y,z,t) \end{aligned}\right\}$$

VARIABILI INDIPENDENTI (4)
- x
- y
- z
- t

$a_x = \dfrac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow$ ACCELERAZIONE A PUNTO FISSO

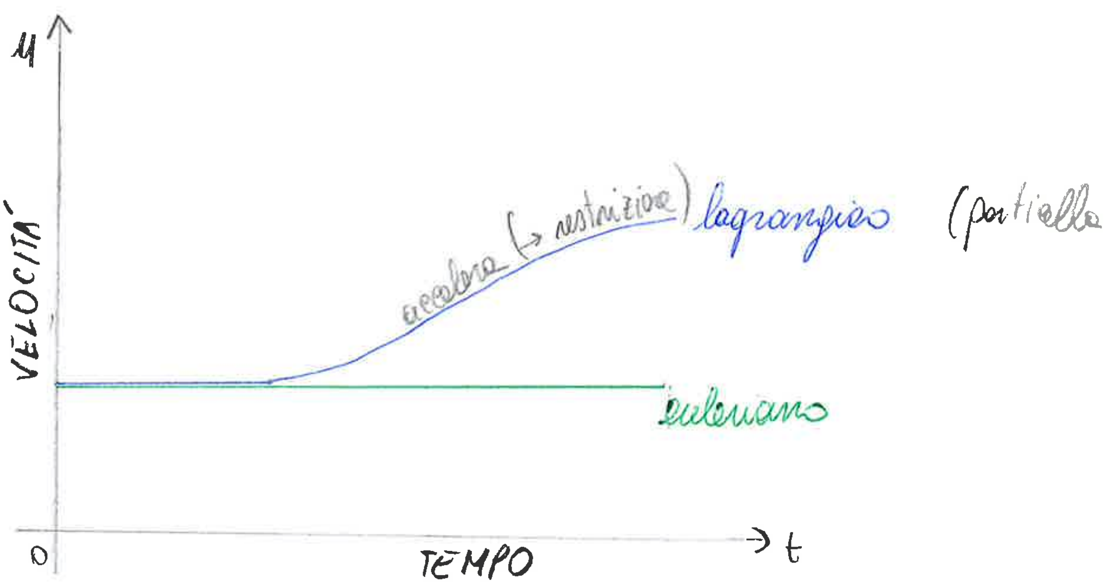
Avendo definito dei campi $\Rightarrow$ sono presenti GRADIENTI



FLUSSO STAZIONARIO PERMANENTE

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

visualizzazione velocità nei due metodi



$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla u$$

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v$$

$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla w$$

Se il caso è stazionario $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$$

FLUIDO IN QUIETE

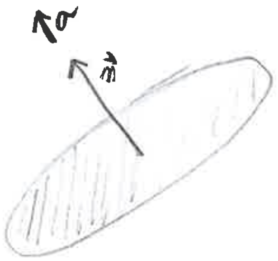
- esistono solo sforzi normali
- $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$

$$\overline{\overline{\Pi}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\Pi_{ij} = \sigma_{ij}\,\delta_{ij}$$

$\delta_{ij} \to$ DELTA DI KRONECKER

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 1 & , i = j \\ \delta_{ij} = 0 & , i \neq j \end{cases}$$



$$\vec{\sigma} = \sigma_n \hat{n}$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$$

gli sforzi ⊥ in un fluido in quiete possono essere solo di carattere compressivo

$$p = -\sigma_{11} = -\sigma_{22} = -\sigma_{33}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\Pi}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

$$\Pi_{ij} = \boxed{-p}\,\delta_{ij}$$

$\to$ PRESSIONE IDROSTATICA $\xrightarrow{\text{fluido quiete}}$ = PRESSIONE TERMODINAMICA

$\downarrow$

misura locale della compressibilità

$$\tau_{ii} = \sigma_{ii} + p$$
$$= \sigma_{ii} - \frac{1}{3}\sum_i \sigma_{ii}$$

$$Tr(\bar{\bar{\tau}}) = \sum_i \tau_{ii} = 0 \longrightarrow \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33} = 0$$

DIM: $\sum_i \sigma_{ii} = \overbrace{-3p}^{Tr(-p\bar{\bar{I}})} + \sum_i \tau_{ii}$

$-\cancel{3p} = -\cancel{3p} + \sum_i \tau_{ii}$

$\Rightarrow \boxed{Tr(\bar{\bar{\tau}}) = 0}$

RELAZIONE TRA SFORZI VISCOSI E DEFORMAZIONI

- I IPOTESI

Moto di una particella fluida $\rightarrow \nabla \vec{v}$

1) TRASLAZIONE PURA $\Rightarrow \vec{V}$
2) ROTAZIONE CORPO RIGIDO $\Rightarrow \bar{\bar{B}}$
3) VARIAZIONE VOLUMETRICA $\Rightarrow Tr(\bar{\bar{D}})$
4) DISTORZIONE FORMA $\Rightarrow$ altri $\bar{\bar{D}}$

gli elementi di $\bar{\bar{D}}$ producono sforzi viscosi

$\bar{\bar{\tau}}$ è legato a ciò che descrive una deformazione dell'elemento fluido $\Rightarrow$ 3) e 4)

$\Rightarrow$ è una FUNZIONE DI $\bar{\bar{D}}$

$$\boxed{\bar{\bar{\tau}} = f(\bar{\bar{D}})}$$

- II IPOTESI $\longrightarrow$ legame $\bar{\bar{\tau}}$ e $\nabla\vec{V}$ di TIPO LINEARE

Solitamente

$$\boxed{\lambda = \mu_{BULK} - \frac{2}{3}\mu}$$

μ_{BULK} VISCOSITÁ DI VOLUME/ESPANSIONE (bulk viscosity)

↳ è un fattore di smorzamento durante le fasi di espansione e compressione. È legato ai moti vibrazionali delle molecole.

Si può trascurare μ_{BULK}

$$\Rightarrow \mu_{BULK} = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \iff \text{IPOTESI DI STOKES}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}} - \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \vec{V}) \bar{\bar{I}}$$

$$\boxed{\bar{\bar{\tau}} = 2\mu \left[\bar{\bar{D}} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \bar{\bar{I}} \right]}$$

NOTA: Con l'IPOTESI DI STOKES si assume che la pressione di un fluido in movimento coincide con la pressione termodinamica

$$\left[p = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \right] = p_{\text{termodinamica}} = \left[-p_{\text{press. idrostatica}} \right]$$

Nell'ipotesi che q sia una funzione continua e derivabile

$$\int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial t}\, d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{f}_q \, d\Omega + \int_{\Omega} q_v \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{q}_s \, d\Omega$$

VALE SE NON ESISTONO DISCONTINUITÀ

analoghe

se $\Omega \longrightarrow$ infinitesimo

FORMA DIFFERENZIALE

$$\boxed{\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{f}_q + q_v + \nabla \cdot \vec{q}_s}$$

SENZA DISCONTINUITÀ

EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

Sono tre:

1) conservazione della MASSA → non si crea né si distrugge
2) conservazione della QUANTITÁ DI MOTO → $\Delta\vec{p} = \vec{F}_{applicata}$
3) conservazione dell' ENERGIA → non si crea né si distrugge

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Q (variabile conservativa) = M

$q = \rho$

$\vec{f}_q = \rho\vec{V}$

Hp: no sorgenti volumiche o superficiali

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\rho\, d\Omega = -\int_{\sigma}(\rho\vec{V}\cdot\hat{n})\, d\sigma}$$

FORMA INTEGRALE

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\, d\Omega = -\int_{\Omega}\nabla\cdot(\rho\vec{V})\, d\Omega$$

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0}$$

FORMA DIFFERENZIALE

EQ. DI CONTINUITÁ

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÁ MOTO

$\vec{Q}$

$\vec{q} = \rho \vec{V}$

$\bar{\bar{f}}_q = \rho \vec{V}\vec{V}$ → prodotto tensoriale

$\bar{\bar{q}}_s = \bar{\bar{\Pi}}$ (TENSORE DEGLI SFORZI) $\longrightarrow \left[\bar{\bar{\Pi}} = -p\bar{\bar{I}} + \bar{\bar{\tau}} \quad \bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}} + \lambda (\nabla \cdot \vec{V}) \bar{\bar{I}} \right]$

$\vec{q}_v = \rho \vec{f}$ → forze di campo (es. F. gravità)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho \vec{V}\, d\Omega = -\int_\sigma \rho \vec{V}(\vec{V}\cdot\hat{n})\, d\sigma + \int_\sigma \bar{\bar{\Pi}} \cdot \hat{n}\, d\sigma + \int_\Omega \rho \vec{f}\, d\Omega}$$

FORMA INTEGRALE

Considerando Ω non variabile ⇒

$$\int_\Omega \frac{\partial(\rho\vec{V})}{\partial t}\, d\Omega = -\int_\Omega \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V})\, d\Omega + \int_\Omega \nabla\cdot(\bar{\bar{\Pi}})\, d\Omega + \int_\Omega \rho \vec{f}\, d\Omega$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla\cdot(\rho\vec{V}\vec{V}) = \nabla\cdot(\bar{\bar{\Pi}}) + \rho\vec{f}}$$

FORMA DIFFERENZIALE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 400

Si può poi apporre in maniera esplicita la vorticità $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$ ricordando che:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) =$$

termine convettivo

$$= \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}} + \vec{f}}$$

CON $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$

LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA

E = energia totale per unità di massa

$$E = \underset{\text{interna}}{e} + \underset{\text{cinetica}}{\frac{V^2}{2}}$$

(entrambe per unità di massa)

$$q = \rho E$$

$$\vec{f}_q = \rho E \vec{V}$$

$$q_s = \bar{\bar{\pi}} \cdot \vec{V} - \vec{\varphi}$$

FLUSSO TERMICO CONDUTTIVO

$$\vec{q}_v = \rho \vec{f} \cdot \vec{V} + \vec{q}_V$$

ma $\overline{\overline{\Pi}} = -p\,\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$

$$\nabla\cdot(\overline{\overline{\Pi}}\cdot\vec{V}) = \nabla\cdot\left[(-p\,\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}})\cdot\vec{V}\right] =$$

$$= \nabla\cdot(-p\vec{V} + \overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{V}) =$$

$$= -\nabla\cdot(p\vec{V}) + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{V})$$

SCOMPOSIZIONE
$\overline{\overline{\Pi}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$

$$\Rightarrow \boxed{\rho\frac{\partial E}{\partial t} + \rho\vec{V}\cdot\nabla E = -\nabla\cdot(p\vec{V}) + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{V}) - \nabla\cdot\vec{q} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V} + \phi_v}$$

Introducendo la derivata lagrangiana

$$\boxed{\rho\frac{DE}{Dt} = -\nabla\cdot(p\vec{V}) + \nabla\cdot(\overline{\overline{\tau}}\cdot\vec{V}) - \nabla\cdot\vec{q} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V} + \phi_v}$$

LEGGE DI CONS. ENERGIA (I PRINC.) IN FORMA LAGRANGIANA

- Valgono le regole analoghe:
  1) FORMA INTEGRALE $\Rightarrow$ validità generale (ammesse anche le discontinuità)
  2) FORMA DIFFERENZIALE $\Rightarrow$ no discontinuità

- Procedimento per dimostrarla
  1) forma integrale
  2) forma differenziale
  3) forma quasi-lineare $\Rightarrow$ cons. massa
  4) scomposizione $\overline{\overline{\Pi}} = -p\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}}$
  5) forma lagrangiana

EQUAZIONE DELL' ENERGIA INTERNA

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla\cdot(p\vec V) + \nabla\cdot(\bar{\bar\tau}\cdot\vec V) + \rho\vec f\cdot\vec V - \nabla\cdot\vec q + q_v \qquad \text{(ENERGIA) (1)}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right) = -\nabla p\cdot\vec V + \vec V\cdot(\nabla\cdot\bar{\bar\tau}) + \rho\vec f\cdot\vec V \qquad \text{(E. MECCANICA) (2)}$$

Si ottiene sottraendo la seconda alla prima considerando che: (1) - (2)

- $-\nabla\cdot(p\vec V) = \underbrace{-p(\nabla\cdot\vec V)}_{\text{LAVORO TERMODINAMICO}} - \underbrace{\vec V\cdot(\nabla p)}_{\text{LAVORO MECCANICO}}$ LAVORO F. PRESSIONE

- $\nabla\cdot(\bar{\bar\tau}\cdot\vec V) = \underbrace{\vec V\cdot(\nabla\cdot\bar{\bar\tau})} + \underbrace{(\bar{\bar\tau}\cdot\nabla)\cdot\vec V}$ LAVORO F. VISCOSE

$\Delta\vec\tau$ su lati opposti particella ⇒ acc. ideal. ⇒ ΔE_K

tiene conto della TRASFORMAZIONE DI $Em \to Q$ per effetto dell'attrito viscoso per i gradienti di velocità (>0) ⇒ $\Delta\vec V$ su stessa faccia particella

NOTA PG. PRECEDENTE

$$D = \frac{1}{\rho}\boxed{(\bar{\bar\tau}\cdot\nabla)\cdot\vec V}$$ FUNZIONE DI DISSIPAZIONE (>0)

$$E = e + \frac{V^2}{2}$$

$$\rho\left[\frac{DE}{Dt} - \frac{D}{Dt}\left(\frac{V^2}{2}\right)\right] = \underbrace{-\nabla\cdot(p\vec V) + \nabla p\cdot\vec V}_{= -p(\nabla\cdot\vec V)} + \underbrace{\nabla\cdot(\bar{\bar\tau}\cdot\vec V) - \vec V\cdot(\nabla\cdot\bar{\bar\tau})}_{(\bar{\bar\tau}\cdot\nabla)\cdot\vec V} - \nabla\cdot\vec q + q_v$$

ma $\boxed{\mu_{BULK} \simeq 0}$ $\Rightarrow$ $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$ IPOTESI DI STOKES

$$\bar{\bar{\tau}} = 2\mu \bar{\bar{D}} - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{V})\bar{\bar{I}}$$

ma $2\bar{\bar{D}} = (\nabla\vec{V} + \nabla\vec{V}^T)$

infatti $D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\bar{\tau}} = \mu(\nabla\vec{V} + \nabla\vec{V}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{V})\bar{\bar{I}}}$$

LEGGE DI FOURIER

$$\boxed{\vec{q} = -K\nabla T}$$

Riscrivo utilizzando queste relazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0 \quad \text{(scalare)} \\ \rho\left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{V}\right) = -\nabla p + \nabla\cdot\left[\mu(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{V})\bar{\bar{I}}\right] + \rho\vec{f} \quad \text{(vettoriale)} \\ \rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla E\right) = -\nabla\cdot(p\vec{V}) + \nabla\cdot\left\{\left[\mu(\nabla\vec{V}+\nabla\vec{V}^T) - \frac{2}{3}\mu(\nabla\cdot\vec{V})\bar{\bar{I}}\right]\cdot\vec{V}\right\} + \rho\vec{f}\cdot\vec{V} + \nabla\cdot(K\nabla T) + q_v \quad \text{(scalare)} \end{cases}$$

EQ. NAVIER-STOKES

RELAZIONI TERMODINAMICHE

Lo stato termodinamico può essere determinato attraverso due variabili indipendenti (gas costituito da un singolo fluido o una miscela omogenea)

GAS PERFETTI

$$\frac{p}{\rho} = RT$$

$$R = \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{M}} \qquad \mathcal{R} = 8314 \frac{J}{Kmol\, K}$$

$$R_{aria} = 287 \frac{J}{Kg\, K}$$

$$e = C_v T$$

GAS IDEALI → C_v e C_p sono COSTANTI

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \qquad \gamma_{aria} = 1{,}4$$

$$R = C_p - C_v \qquad p = (\gamma - 1)\rho e$$

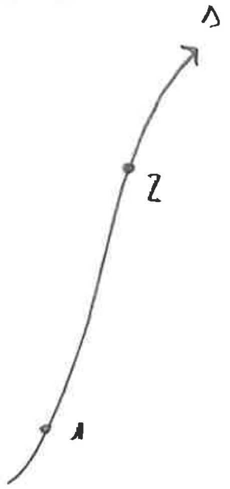
$$\frac{R}{C_v} = \gamma - 1$$

EQUAZIONE DELL' ENTROPIA

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p(\nabla \cdot \vec{V}) + \rho\Delta - \nabla \cdot \vec{q} + q_v \qquad \text{(ENERGIA INTERNA)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \\ &\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2} \frac{D}{Dt}(\rho) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2 \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\rho \nabla \cdot \vec{V}$$

RELAZIONI ISOENTROPICHE



$$T\,ds = de + p\,d\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad :T \qquad (e = c_v T)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{p}{T}\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

ma $\frac{p}{\rho} = RT \rightarrow \frac{p}{T} = \rho R$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + \rho R\,d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$ds = c_v \frac{dT}{T} + R\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$\frac{ds}{c_v} = \frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v}\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$= \frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\,\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$\int_1^2 \frac{ds}{c_v} = \int_1^2 \frac{dT}{T} + (\gamma-1)\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\frac{1}{\rho}}$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + (\gamma-1)\ln\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{c_v} = \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1}\right]$$

se ISENTROPICO $\Rightarrow s_2 = s_1 \Rightarrow \ln\left[\frac{T_2}{T_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1}\right] = 0$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} + \vec{f}$$ (QUANTITÀ DI MOTO)

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} - \vec{f}$$

$$T\nabla s - \nabla h = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} - \vec{f}$$

$$\boxed{T\nabla s = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega} - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\bar{\bar{\tau}} - \vec{f}}$$ EQ. DI CROCCO

$$T\nabla s = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) - \vec{V}\times\vec{\omega}$$ per fluido inviscido ($\bar{\bar{\tau}} = 0$)

Se FLUSSO OMOENTROPICO $\Rightarrow \nabla s = 0$

1) $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ STAZIONARIO
2) $\nabla\left(h + \frac{V^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow H = \text{cost}$ ENTALPIA TOT (o d'arresto)
3) $\vec{V}\times\vec{\omega} = 0 \Rightarrow$ IRROTAZIONALE ($\vec{\omega} = 0$)

TEOREMA DI BERNULLI

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{V^2}{2}\right) - \vec{V} \times \vec{\omega} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g}$$

FLUIDO IDEALE

Flusso $\boxed{\text{IRROTAZIONALE}}$, INCOMPRIMIBILE e INVISCIDO

$\vec{\omega} = \boxed{\nabla \times \vec{V} = 0}$

esiste Φ tale che

$\vec{V} = \nabla \Phi$ ↳ FUNZIONE POTENZIALE

$\rho = \text{cost} \iff \boxed{\nabla \cdot \vec{V} = 0}$

$\nabla \cdot \vec{V} = \nabla \cdot (\nabla \Phi) = 0$

$\Rightarrow \underbrace{\nabla^2}_{\text{LAPLACIANO}} \Phi = 0$

LAPLACIANO

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\boxed{\mu = 0}$

$$\boxed{\nabla^2 \Phi = 0}$$

EQ. DI LA PLACE $\Rightarrow$ sovrapposizione degli effetti

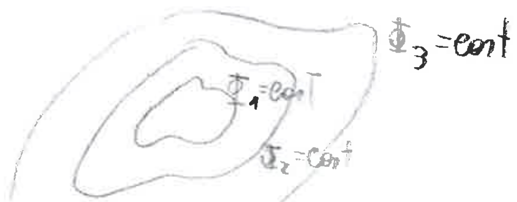
NOTA: $\vec{V}$ = VETTORE

Φ = SCALARE

$\vec{V} = (u, v, w)$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Rappresentazione campo di moto



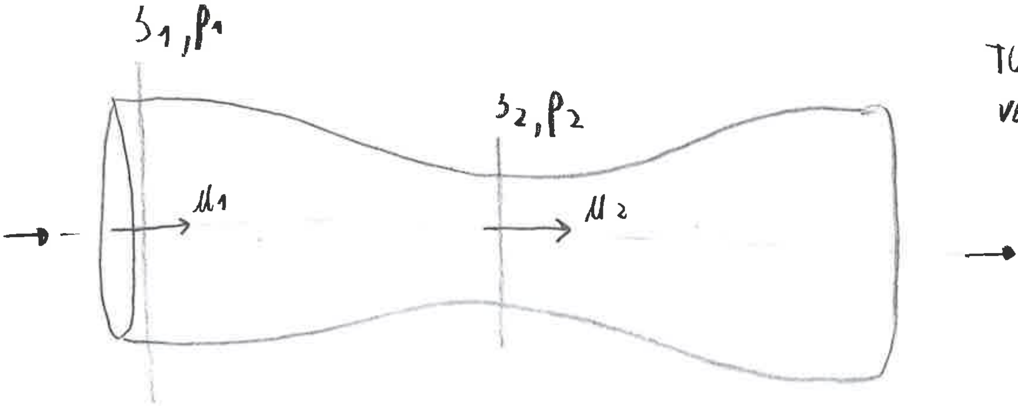
se STAZIONARIO $\Rightarrow$ $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{p + \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho g z = cost}$$

INCOMPRIMIBILE
STAZIONARIO
IRROTAZIONALE

in TUTTO il CAMPO (poiché ora è irrotazionale)

se $\vec{g}$ trascurabile $\Rightarrow$ $p + \frac{1}{2}\rho V^2 = cost = p^0$



TUBO DI VENTURI

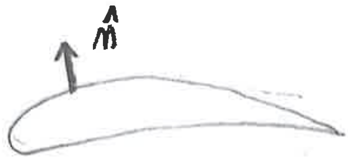
$$u_1 S_1 = u_2 S_2 \Rightarrow u_2 = u_1 \frac{S_1}{S_2}$$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 = cost = p^0$$

$S \downarrow \Rightarrow u \uparrow$ e viceversa

$p \downarrow \Rightarrow u \uparrow$ e viceversa

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 400



$$\boxed{\vec{V}_R \cdot \hat{n} = 0}$$ CONDIZIONE DI TANGENZA

↳ vel. relativa del fluido rispetto alla

$\vec{V}_R = \vec{V} - \vec{V}_W \longrightarrow (\vec{V} - \vec{V}_W) \cdot \hat{n} = 0$

↳ velocità parete

$\Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{V}_W \cdot \hat{n}$

Se il corpo fisso è indeformabile $\rightarrow \vec{V}_W = 0 \Rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$

EQUAZIONE DI LAPLACE → solo se CORRENTE IRROTAZIONALE

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

quello che succede è indipendente da quello che è successo

Non compare il tempo ⇒ non c'è dipendenza dalle condizioni iniziali, ma solo dalle condizioni al contorno

$\boxed{\text{CONDIZIONI AL CONTORNO}}$

1) CONDIZIONI IN CAMPO LONTANO

a) FLUIDO → quiete
CORPO → movimento

$\vec{V} = \nabla \Phi = 0$

$$\boxed{\nabla \Phi = 0}$$

b) FLUIDO → movimento
CORPO → quiete

$$\boxed{\nabla \Phi = \vec{V}_\infty}$$

83

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \vec{\omega} (\nabla \vec{V}) + \nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla \times \vec{f}}$$

EQ. DI TRASPORTO DELLA VORTICITA'

ma
$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{\omega}$$

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p = -\frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V}) - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla \times \vec{f}}$$

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega} \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] =$$

$$= \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt}\right] =$$

$$= \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \frac{\vec{\omega}}{\rho^2} (-\rho \nabla \cdot \vec{V})\right]$$

$$= \rho \left[\frac{1}{\rho} \frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \frac{\vec{\omega}}{\rho} \nabla \cdot \vec{V}\right]$$

$$= \frac{D\vec{\omega}}{Dt} + \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{V})$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{\omega}}{\rho}\right) = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla p) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla \times \vec{f}}$$

FLUIDO COMPRIMIBILE E INVISCIDO

$$\rho \frac{DE}{Dt} = -\nabla\cdot(p\vec{V}) + \cancel{\rho \vec{f}\cdot\vec{V}} \qquad \text{(ENERGIA)}$$

trascurabili

- dall' eq di continuità $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\,\nabla\cdot\vec{V}$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

- $\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{D\rho}{Dt} \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{-}\cancel{\rho}\,\nabla\cdot\vec{V} = \cancel{-}\rho^{\cancel{2}}\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{V} = \rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$-\nabla\cdot(p\vec{V}) = -p\,\boxed{\nabla\cdot\vec{V}} - \boxed{\vec{V}\cdot\nabla p}$$

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla p \Rightarrow \vec{V}\cdot\nabla p = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

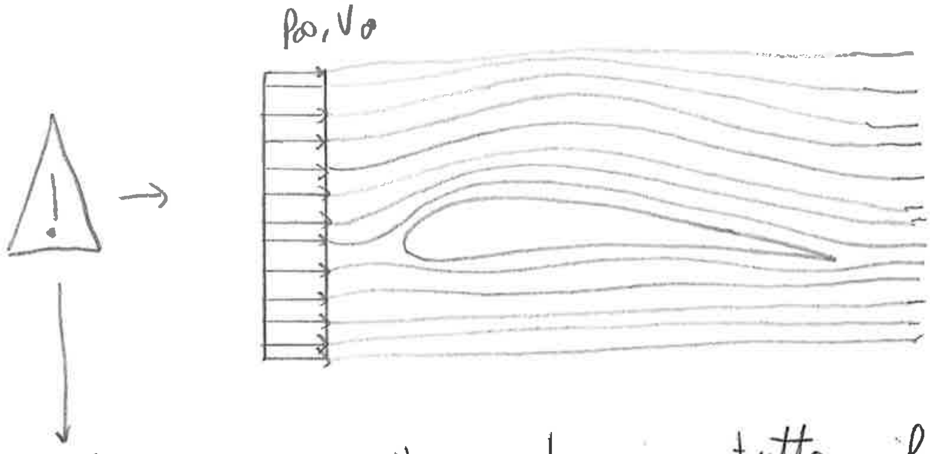
$$\Rightarrow -\nabla\cdot(p\vec{V}) = -p\rho\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \left(\frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}\right)$$

$$\Rightarrow \rho\frac{DE}{Dt} = -\rho p\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

$\Rightarrow \vec{V} \cdot \nabla H^0 = 0$

$H^0 = \text{cost}$ su una linea di corrente

COMPRIMIBILE
INVISCIDO
STAZIONARIO



ENTALPIA = quantità di energia interna che un sistema può scambiare con l'ambiente

in questo caso $H = \text{cost}$ in tutto il campo (è costituito da singole linee)

RICHIAMI TERMODINAMICI

$$\left.\begin{aligned} h &= c_p T \\ H^0 &= c_p T^0 \\ H^0 &= h + \frac{V^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_p T^0 = c_p T + \frac{V^2}{2}$$

$$T^0 = T + \frac{V^2}{2 c_p}$$

$$T^0 = T \left(1 + \frac{1}{c_p T} \frac{V^2}{2} \right)$$

moltiplico e divido per c^2

$$= T \left(1 + \frac{1}{c_p T} c^2 \frac{M^2}{2} \right) =$$

$$= T \left(1 + \frac{\gamma R \cancel{T}}{c_p \cancel{T}} \frac{M^2}{2} \right) =$$

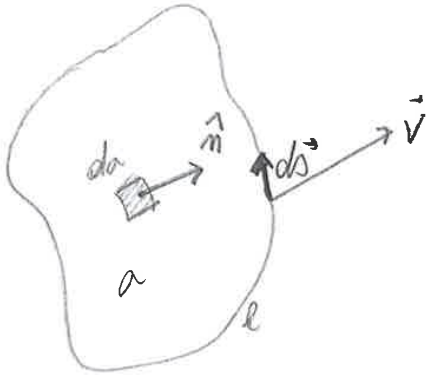
ma $\dfrac{\gamma R}{c_p} = \dfrac{\frac{\cancel{c_p}}{c_v}(c_p - c_v)}{\cancel{c_p}} = \gamma - 1$

Nel caso COMPRIMIBILE non si può scrivere più $p^0 = p + \frac{1}{2}\rho V^2$ (89)

Se il caso è ISENTROPICO uso una delle due relazioni precedenti $(p^0 = \dots, \rho^0 = \dots)$. $T^0 = \dots$ vale sempre!

CIRCUITAZIONE, TEOREMI DI HELMHOTS E DI KELVIN

• $$\boxed{\Gamma = \oint_\ell \vec{V} \cdot d\vec{s}}$$ CIRCUITAZIONE



$$\nabla \times \vec{V} = \vec{\omega}$$

$$\Gamma = \int_\sigma (\nabla \times \vec{V}) \cdot \hat{n}\, d\sigma$$ TEO. STOKES

$$\boxed{\Gamma = \int_\sigma \vec{\omega} \cdot \hat{n}\, d\sigma}$$

La CIRCUITAZIONE attorno ad una curva chiusa ℓ è uguale al FLUSSO DI VORTICITÀ che attraversa la superficie σ avente come contorno ℓ

$$d\Gamma = \vec{\omega} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

•) Dall' eq. della vorticità

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{V} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{V}) + \nabla\left(\frac{1}{\rho}\right) \times \nabla p + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \bar{\bar{\tau}}\right) + \nabla \times \vec{f}$$

$$\Big(\underbrace{\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla\vec{\omega}} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}\Big)\cdot\hat{n}\,da$$

$$= \left[\frac{D\vec{\omega}}{Dt} - \cancel{\vec{V}\cdot\nabla\vec{\omega}} + \cancel{\vec{V}\cdot\nabla\vec{\omega}} - \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}\right]\cdot\hat{n}\,da$$

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V} \quad \begin{pmatrix}\text{INVISCIDO}\\ \text{INCOMPRIMIBILE}\end{pmatrix}$$

$$= \Big(\cancel{\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}} - \cancel{\vec{\omega}\cdot\nabla\vec{V}}\Big)\cdot\hat{n}\,da =$$

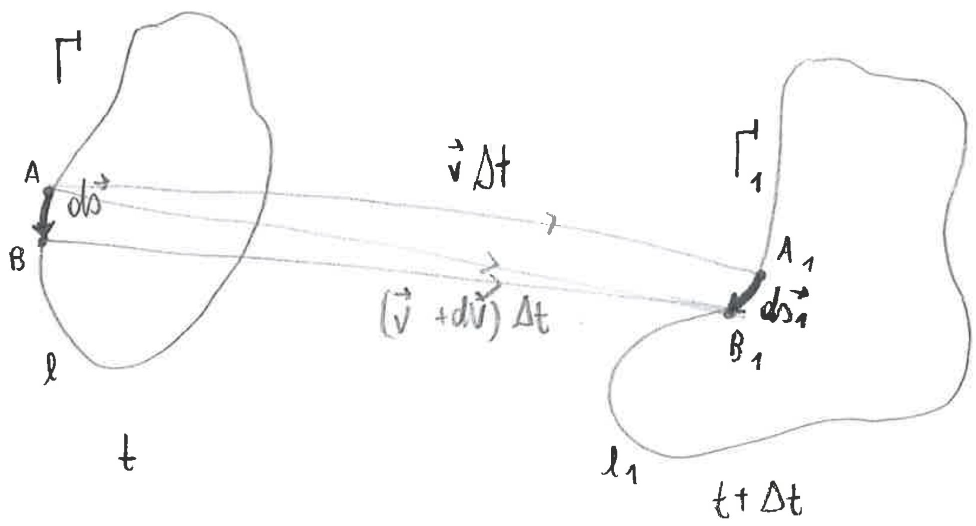
$$= 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{D}{Dt}\left(\vec{\omega}\cdot\hat{n}\,da\right) = 0}$$

TEOREMA DI HELMHOLTZ (3D) (INVISCIDO, $\boxed{\text{INCOMPRIBILE}}$)

Il flusso di vorticità (attraverso ogni superficie elementare che si muove con il fluido) è costante ⇒ LA VORTICITÀ È TRASPORTATA CON IL FLUIDO

•)



$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Gamma_1 - \Gamma}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_\ell \frac{D\vec{V}}{Dt}\cdot d\vec{s} + \cancel{\oint_\ell \vec{V}\cdot d\vec{V}}$$

$\rightarrow$ è un diff. esatto $\oint_\ell d\left(\frac{V^2}{2}\right)$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_\ell \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right)\cdot d\vec{s}$$

ma $\frac{dp}{ds} = \nabla p \cdot \hat{e}$ $\quad (d\vec{s} = ds\,\hat{e}) \Rightarrow dp = \nabla p \cdot d\vec{s}$

$$\Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = -\oint_\ell \frac{1}{\rho}\,dp$$

Quando si annulla?

1) INCOMPRIMIBILE ($\rightarrow \rho = cost$)

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\oint_\ell dp = 0 \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

2) $\rho = \rho(p) \rightarrow$ BAROTROPICO $\Rightarrow$ è COMPRIMIBILE

es: isentropico $\Rightarrow pv^\gamma = \frac{p}{\rho^\gamma} = cost \Rightarrow \rho = \left(\frac{p}{cost}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = -\underbrace{\oint \left(\frac{p}{cost}\right)^{\frac{1}{\gamma}} dp}_{\rightarrow\ diff} = 0 \Rightarrow \frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

MOTI BIDIMENSIONALI, FUNZIONI Φ e Ψ

Fluido INVISCIDO $\Rightarrow$ eq. Eulero

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \\ \dfrac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\dfrac{1}{\rho} \nabla p \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla E = -\dfrac{1}{\rho} \nabla \cdot (p \vec{V}) \end{cases}$$

aggiungo eq. stato $\rightarrow$ $\frac{p}{\rho} = RT$

Fluido INVISCIDO + STAZIONARIO + INCOMPRIMIBILE

$$\begin{cases} \cancel{\dfrac{\partial \rho}{\partial t}} + \rho \nabla \cdot \vec{V} + \cancel{\vec{V} \cdot \nabla \rho} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{V} = 0 \\ \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla \left(\dfrac{p}{\rho} \right) \Rightarrow p + \dfrac{1}{2} \rho V^2 = \text{cost} \ \left(\text{LINEA CORRENTE}\right) \\ \vec{V} \cdot \nabla E = -\nabla \cdot \left(\dfrac{p}{\rho} \vec{V} \right) \end{cases}$$

si può valutare il campo di moto dalle prime due e poi la terza disaccoppiata