



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2364A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Scuderi Paolo

MATERIA: Fondamenti di Meccanica Strutturale - Prof. Cinefra

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1) Spiegare i vantaggi nell'utilizzare le LEGHE METALLICHE e i MATERIALI COMPOSITI nelle costruzioni aeronautiche

Per capire ciò bisogna far riferimento alla LUNGHEZZA DI ROTTURA $L_R = \frac{\sigma_R}{\gamma \cdot g}$ ($\sigma_R = \frac{M \cdot g}{A}$, tensione di rottura).

Questa è dell'ordine della decina di km per le leghe metalliche, che insieme alle loro elevate proprietà meccaniche spiega il motivo per cui si utilizzano in campo aeronautico.

Inoltre si deve considerare il peso specifico. Proprio per questo gli acciai sono meno utilizzati (ρ elevato) rispetto alle LEGHE DI ALLUMINIO.

I MATERIALI COMPOSITI invece sono costituiti dall'accoppiamento di due o più materiali e in genere sono molto fragili. Il loro vantaggio sta nell'essere costituiti da FIBRE immerse in una MATRICE che possono essere orientate, anzitutto a modificare le sue proprietà meccaniche (già elevate) in una particolare direzione. In genere si utilizzano per la costruzione di elementi connettivi

NOIA. il PANNELLO SANDWICH è molto usato in campo aeronautico. È costituito da un corpo centrale (cuore) molto leggero che abbiniamo le parti resistenti (PELLI) in modo da sopportare brillantemente sforzi dovuti alla flessione

2) Spiegare le sostanziali differenze tra CORPO RIGIDO e CORPO DEFORMABILE riportando anche un esempio

Nella meccanica del CORPO RIGIDO le distanze tra punti diversi del corpo si conservano durante il moto, mentre in quelle dei CORPI DEFORMABILI sono ammesse DEFORMAZIONI, ovvero la capacità di cambiare forma e volume del corpo in esame.

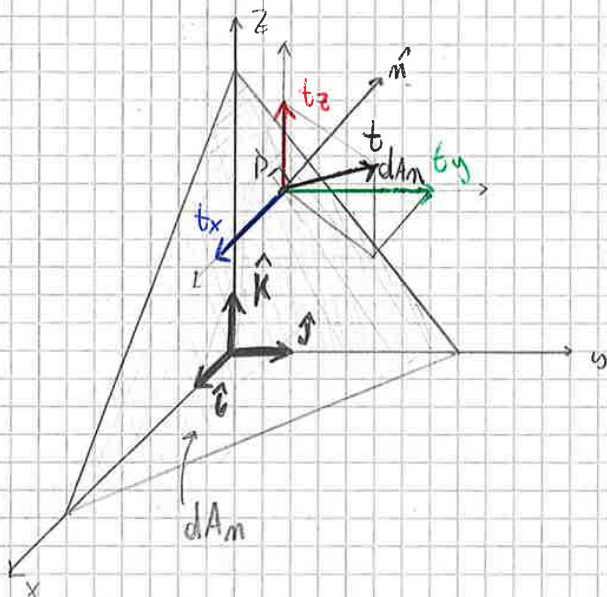
In natura tutti i corpi sono deformabili, perciò l'assunzione di corpo rigido è una PURA ASTRAZIONE.

Definendolo VETTORE TENSIONE TANGENZIALE TOTALE $\vec{T} = \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2}$
 $\Rightarrow \vec{T} = \tau \hat{t} + \sigma_m \hat{m}$

4) Dimostrare, aiutandosi graficamente, che le NOVE COMPONENTI SPECIALI DI TENSIONE sono condizione necessaria e sufficiente per definire lo stato di tensione in un punto qualsiasi del corpo

Le nove componenti speciali di tensione INDIVIDUANO UNIVOCAMENTE lo stato di tensione $\hat{\sigma}$ nel generico punto P

$$\hat{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



Dato un punto P e un vettore $\hat{n} = n_x \hat{i} + n_y \hat{j} + n_z \hat{k}$ tracciamo un piano \perp a \hat{n} in modo da generare un prisma con le tre facce ortogonali agli assi cartesiani.

Indichiamo con \vec{T}_{dAm} il vettore tensione di tale faccia

NOTA • Si assumono le TENSIONI positive se uscenti dal solido, negative se entranti.

• Le FACCE sono dette positive se l'asse di riferimento è uscente dalla faccia, altrimenti negative

$$\vec{T}_{dAm} = \tau_x \hat{i} + \tau_y \hat{j} + \tau_z \hat{k}$$

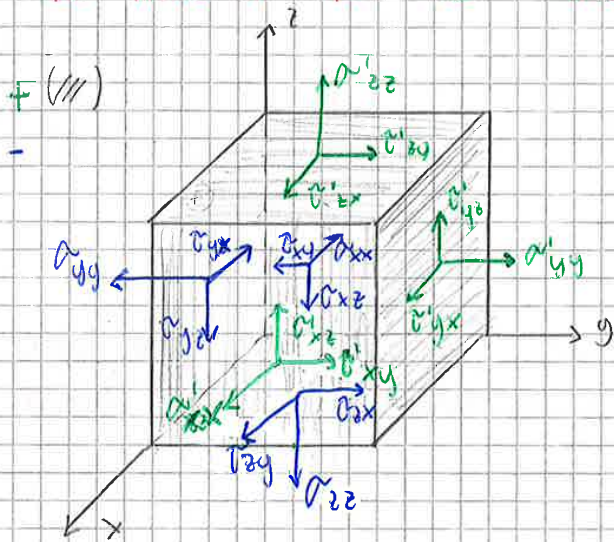
$$\vec{T}_{dAm} \stackrel{d\vec{F}}{=} \frac{d\vec{F}}{dA_m} \rightarrow d\vec{F} = \vec{T}_{dAm} dA_m$$

Segue la dimostrazione solo per la componente x di \vec{T}_{dAm} , per le altre componenti il discorso è analogo

Se la tensione normale σ_{xx} varia lungo x tale variazione dovrà essere accompagnata da un'analoga variazione delle tensioni tangenziali τ_{yx} e τ_{zx} rispettivamente lungo l'asse y e z in modo che la variazione totale sia nulla (o pari eventualmente ad un'azione esterna)

$$\sigma_x^T = (\sigma_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}) \Rightarrow \nabla \cdot \sigma_x^T = 0$$

6) Si dimostrano, aiutandosi graficamente, le RELAZIONI DI RECIPROCA' tramite considerazioni sull'equilibrio.



Siano dx, dy, dz le dimensioni elementari del parallelepipedo.

Per essere // vi saranno valori di tensioni diverse. Per semplicità consideriamo però il caso in cui esse sono uguali e dunque lo STATO DI TENSIONE È UNIFORME ($\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}$)

• equilibrio alla traslazione x'

$$\sigma'_{zz} dx dy + \tau'_{yz} dx dz + \tau'_{zx} dy dx - \sigma_{xx} dy dz - \tau_{yz} dx dz - \tau_{zx} dy dx = 0 = 0$$

• equilibrio alla rotazione attorno asse $y + x'$

$$\tau'_{ij} = \tau'_{ji} \quad (i, j = x, y, z \wedge i \neq j)$$

Le relazioni trovate sono dette RELAZIONI DI RECIPROCA' (o anche Teorema di Cauchy).

Due tensioni tangenziali su due facce ortogonali, per ragioni di equilibrio, dovranno avere lo stesso modulo. Si parte perciò da 9 a 6 incognite

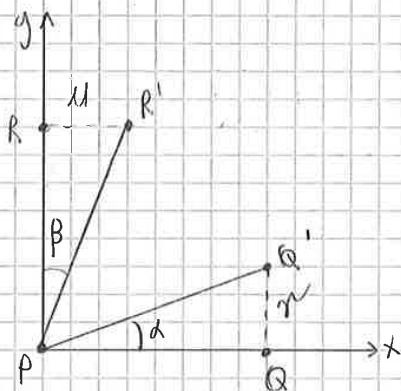
allora
$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

Si definisce DEFORMAZIONE LINEARE
$$\epsilon_{xx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Con discorsi analoghi lungo le direzioni y e z si ottiene
$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{e} \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial u}{\partial z}$$

La deformazione lineare lungo una direzione si interpreta come una variazione di spostamento nella direzione considerata. Infatti, nel caso gli spostamenti siano piccoli, lo stato deformato è molto vicino a quello indeformato.

g) Si derivi, aiutandosi graficamente, la relazione tra DEFORMAZIONE A TAGLIO - SPORSTAMENTI, spiegandone il significato fisico.



$$P(x, y, z)$$

$$Q(x + \Delta x, y, z)$$

$$R(x, y + \Delta y, z)$$

I tre punti si spostano, ma considerando lo spostamento angolare nel piano x-y allora $P = P'$

$$P'(x, y, z)$$

$$Q'(x + \Delta x, y, z) = Q(x + \Delta x, y, z) + \Delta r(x + \Delta x, y, z)$$

$$R'(x, y + \Delta y, z) = R(x, y + \Delta y, z) + \Delta u(x, y + \Delta y, z)$$

allora
$$\alpha \approx \tan \alpha = \frac{Q'Q}{PQ} = \frac{\Delta r}{\Delta x}$$

$$\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta x} = \frac{\partial r}{\partial x}$$

Analogamente
$$\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$$

11) Spiegare il significato fisico delle eq. di CONGRUENZA nel corpo e sul contorno

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Consideriamo il corpo C elasticizzato, vincolato ed in equilibrio per ipotesi. È soggetto ad un campo di deformazioni tale da non presentare discontinuità in nessun punto del corpo.

Si suddivida il corpo C in tanti cubetti elementari e si immagini di estrarli dal continuo.

Si considerino i cubetti isolati, e note le deformazioni si passi alla determinazione degli spostamenti.

Immaginando ora di assemblare i cubetti deformati per ricostruire il corpo C deformato si pongono premesse due cose:

- non sono presenti vuoti e/o sovrapposizioni di molecole
 \Rightarrow lo stato di deformazione è CONGRUENTE e COMPATIBILE, sono soddisfatte le eq.
- vuoti \Rightarrow non sono soddisfatte le eq.

NOTA: le eq. di congruenza sono condizioni sulle DEFORMAZIONI. Sul contorno del corpo, dove sono prescritti solo SPOSTAMENTI, questi dovranno soddisfare le condizioni di vincolo, o CONDIZIONI AL CONTORNO DI TIPO GEOMETRICO

13) Ripetere la legge costitutiva di un materiale anisotropo con scrittura esplicita dei vettori σ, ϵ e la matrice C , spiegando il significato e le proprietà di quest'ultima

COMPORTAMENTO ANISOTROPO: il materiale presenta proprietà meccaniche che dipendono dalle direzioni lungo le quali sono misurate

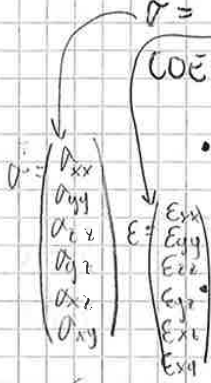
$$* C = \begin{bmatrix} C_{11} & & & & & \\ C_{21} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

Indico con x la direzione assiale del prisma. La legge di Hooke nel caso mono dimensionale è

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}, \text{ generalizzata al caso tridimensionale}$$

$$\vec{\sigma} = C \vec{\epsilon} \text{ dove } C \text{ è la matrice } 6 \times 6 \text{ dei } C_{ij}$$

COEFFICIENTI DI RIGIDEZZA (costanti elastiche)



- considerazioni sull'energia elastica ci garantiscono che C è SIMMETRICA

il materiale è detto NON OMOGENEO se C_{ij} dipendono dalla posizione $P(x, y, z)$

- la legge di Hooke può essere scritta come $\epsilon = S \sigma$ dove S è la MATRICE DEI COEFFICIENTI DI DEFORMABILITÀ, che conserva le proprietà di C

14) Derivare la matrice C per un materiale isotropo, elencare le proprietà e ripetere le espressioni dei coeff. di elasticità in funzione delle proprietà di E, ν e G

COMPORTAMENTO ISOTROPO: i coefficienti di rigidità C_{ij} non dipendono dalle direzioni che si considerano (sono invarianti rispetto alle direzioni)

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{21} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}$$

15) Scrivere la matrice Q per un materiale costituito da strati di materiale ortotropo diversamente orientati e spiegare le differenze con le proprietà della matrice C del materiale ortotropo

COMPORTAMENTO ORTOTOPO: se esistono tre piani ortogonali di simmetria per i coeff. di rigidezza C_{ij} . Tali direzioni sono indicate con 1, 2, 3.

NOTA: i materiali ISOTROPI sono particolari materiali ortotropi in cui 1, 2, 3 possono essere scelti a caso

(ISOTROPI)
ORTOTOPO

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = E_1 \frac{1 + \nu_{23} \nu_{32}}{\Delta}$$

$$C_{22} = E_2 \frac{1 + \nu_{13} \nu_{31}}{\Delta}$$

$$C_{33} = E_3 \frac{1 + \nu_{12} \nu_{21}}{\Delta}$$

Un laminato è in generale costituito da una sequenza di strati incollati l'uno sull'altro. Scrivere la legge di Hooke in un riferimento qualsiasi rotato di un angolo $\theta \rightarrow$ matrice di rotazione T

$$Q = T C T^T = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & Q_{36} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{55} & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{36} & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}$$

$$\sigma = Q \epsilon$$

RELAZIONI GEOMETRICHE

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{zy} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}$$

FORMA MATRICIALE

$$\epsilon^T = \{ \epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, 2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{xz}, 2\epsilon_{yz} \}$$

$$\sigma^T = \{ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz} \}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

$$b^T \sigma = f$$

$$\epsilon = b^T s$$

↳ vettore spostamento

12) Vedi PARIGI LIMITE QUAD. **Domande quali sono le equazioni fondamentali dei continui deformabili (EFCD) e discutere, qualitativamente, le due possibili formulazioni con le quali è possibile risolvere il problema strutturale governato da tali equazioni**

Le eq. di equilibrio sono:

- 3 eq. indefinite di equilibrio
- 3 eq. compatibilità
- 6 relazioni fisiche
- 6 relazioni geometriche

a cui bisogna associare le condizioni al contorno di tipo geometrico e/o meccanico. Totale 18 eq.

Molte sono le tecniche utilizzate per la riduzione dei problemi.

si ottiene

$$\nabla^2 \sigma_{xy} + \frac{1}{(1+\nu)} \frac{\partial^2 I_1}{\partial x \partial y} = \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial g_x}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial x} \right)$$

La riduzione permette il calcolo di $\hat{\sigma}$ (tensore degli sforzi) in ogni punto del volume del corpo.

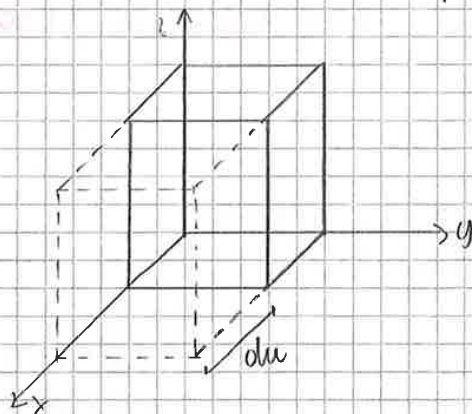
È possibile poi trovare $\hat{\epsilon}$ tramite la legge di Hooke.

Integrando si ottiene il vettore spostamenti s

19) Derivare l'espressione generale del lavoro di dilatazione di un corpo deformabile

In un corpo deformabile, per definizione, una volta cessata un'azione esterna la deformazione residua risulta nulla.

Quindi il lavoro speso dalle azioni esterne durante la deformazione viene immagazzinato dal corpo in ENERGIA DI DEFORMAZIONE che si deforma. Cessato il carico il corpo ritorna alla configurazione indeformata rilasciando completamente tale energia.



$$dV = dx dy dz$$

solo azione dello σ_{xx}

$$t_{\sigma_{xx}} = \sigma_{xx} \hat{i}$$

$$dF = \sigma_{xx} dy dz \hat{i}$$

$$\text{spostamento} \rightarrow du = \epsilon_{xx} dx \hat{i}$$

$$\begin{aligned} dL_d^{xx} &= dF_x du - \\ &= \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dx dy dz - \\ &= \sigma_{xx} \epsilon_{xx} dV \end{aligned}$$

Il lavoro totale delle forze normali è detto LAVORO DI DILATAZIONE

22) Scrivere l'espressione generale del lavoro delle forze esterne applicabili ad un corpo deformabile 30

• FORZE CONCENTRATE

$$L_e = F \cdot s = F_x u \hat{i} + F_y v \hat{j} + F_z w \hat{k}$$

se ho più forze concentrate $\Rightarrow L_e = \sum_i L_{e,i}$

• FORZE DI LINEA, DI SUPERFICIE, DI VOLUME

$$\delta L_e = \sum_c^{N_v} \left[\int_{V_i} (F_{v,i} \delta s) dV \right] + \sum_c^{N_s} \left[\int_{S_i} (F_{s,i} \delta s) dS \right] + \sum_c^{N_l} \left[\int_{l_i} (F_{l,i} \delta s) dl \right] + \sum_c (F_i \delta s)$$

23) Scrivere l'enumerato del PLV e spiegare le differenze tra le due possibili forme (spostamenti e forze)

Il lavoro totale fatto da un sistema di forze e tensioni "A" su un sistema di spostamenti e deformazioni "B" è nullo

I sistemi A e B indicano due possibili configurazioni del corpo C, assolutamente indipendenti l'uno dall'altro.

Il sistema A rappresenta la configurazione in cui le forze interne ed esterne sono congruenti.

Il sistema B quella in cui spostamenti e deformazioni sono in equilibrio.

Per ottenere una variazione di lavoro uno dei due sistemi deve avere conseguenza di una variazione di forze/tensioni o deformazioni/spostamenti

• P.S.V \rightarrow "lavoro normale", gli spostamenti sono considerati variazione virtuale e le F reali

• P.F.V \rightarrow "lavoro complementare", gli spostamenti sono considerati reali, la variazione delle F è virtuale.

25) Scrivere l'enunciato del teorema di Betti, spiegandone un'applicazione

Dato un solido elastico e assegnati due sistemi di forze, il lavoro che le forze del primo sistema eseguirebbero quando si attribuissero al solido gli spostamenti dovuti alle forze del secondo sistema è uguale al lavoro che le forze del secondo sistema eseguirebbero quando si attribuissero al solido gli spostamenti dovuti alle forze del primo sistema

$$\int_V \vec{F}^a \cdot \vec{s}^b dV + \int_S \vec{q}^a \cdot \vec{s}^b dS = \int_V \vec{F}^b \cdot \vec{s}^a dV + \int_S \vec{q}^b \cdot \vec{s}^a dS$$

È molto utile quando bisogna determinare le LINEE DI INFLUENZA DI SPOSTAMENTI E ROTAZIONI

26) Scrivere l'enunciato del teorema di Clapperton, spiegandone un'applicazione

Il lavoro di deformazione compiuto mentre le forze esterne crescono gradatamente dal valore 0 al loro valore finale è uguale alla metà del lavoro che le forze stesse produrrebbero se, mentre si compie la deformazione, esse agissero con tutto la loro intensità finale

$$L = \frac{1}{2} \left[\int_V \vec{F} \cdot \vec{s} dV + \int_S \vec{q} \cdot \vec{s} dS \right] \quad \rightarrow \quad L = \frac{1}{2} \int_V \epsilon \sigma dV$$

Consente di ricavare il lavoro di deformazione noti gli spostamenti dei punti di applicazione dei carichi.

29) Ripetere le ipotesi assiomatiche su cui si basa il modello strutturale "asta"

L'asta è l'ELEMENTO STRUTTURALE PIÙ SEMPLICE nelle teorie delle strutture.

È un elemento unidimensionale di tipo membranale e assiomatico.

L'ipotesi assiomatica è la seguente: LA GENERICA FUNZIONE f INCOGNITA LUNGO L'ASSE UNIDIMENSIONALE È ASSUNTA COSTANTE SULLA SEZIONE

$$f(x, y, z) = f_0(z)$$

Tale ipotesi implica che la tensione normale $\sigma_{zz} = \text{cost}$ (termine membranale), $w(x, y, z) = \text{cost}$, $\epsilon_{zz}(x, y, z) = \text{cost}$

La tensione σ_{zz} è l'unica diversa da zero, le altre tensioni ($\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}$) e deformazioni ($\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$) sono considerate piccole e dunque trascurabili.

30) Scrivere il lavoro virtuale interno per un'asta, introducendo la definizione di sforzo normale

Il lavoro virtuale è dovuto alle sole tensioni e deformazioni normali lungo il suo asse.

$$\begin{aligned} \delta L_i^{ab} &= \int_V \sigma_{zz}^a \delta \epsilon_{zz}^b dV = \\ &= \int_z \left[\int_S \sigma_{zz}^a \frac{\delta \sigma_{zz}^b}{E} dA \right] dz = \\ &= \int_0^L \frac{N^a \delta N^b}{EA} dz \end{aligned}$$

se $N = \text{cost}$ lungo l'asse $\Rightarrow \delta L_i^{ab} = \frac{N^a \delta N^b}{EA} L$

$$p_z = \text{cost}$$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{p_z}{EA} z + C_1$$

$$w(z) = -\frac{p_z}{EA} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

Condizioni al contorno di tipo meccanico e geometrico

$$\begin{cases} z=0 \rightarrow w=0 \\ z=l \rightarrow N=F \end{cases}$$

$$w(z=0) = -\frac{p_z}{EA} \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$N = \sigma_{zz} EA = \frac{\partial w}{\partial z} EA \rightarrow \frac{dw}{dz} = \frac{N}{EA}$$

$$\frac{d}{dz} \left(-\frac{p_z}{EA} \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 \right) = -\frac{p_z}{EA} z + C_1 = \frac{N}{EA}$$

$$N(l) = F \Rightarrow -\frac{p_z}{EA} l + C_1 = \frac{F}{EA}$$

$$C_1 = \frac{F + p_z l}{EA}$$

$$\Rightarrow w(z) = -\frac{p_z}{2EA} z^2 + \frac{F + p_z l}{EA} z$$

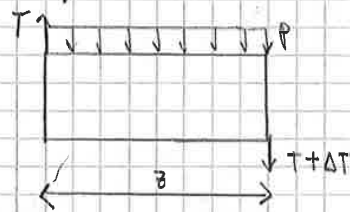
34) Scrivere e dimostrare l'eq. di equilibrio trasversale in una trave soggetta ad un carico distribuito trasversale $p(z)$

$$\left[\begin{array}{l} \bullet \Delta N = -p_z \Delta z \\ \frac{\Delta N}{\Delta z} = -p_z \xrightarrow{\text{nel punto}} \frac{dN}{dz} = -p_z \end{array} \right]$$

carico assiale concentrato $\rightarrow \Delta N = -p_z \Rightarrow$ discontinuità
 carico assiale distribuito \rightarrow pendenze $\neq 0$

$$\bullet \Delta T = -p \Delta z$$

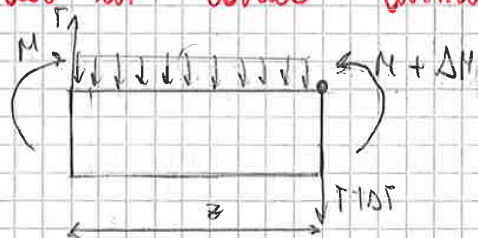
$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = -p \xrightarrow{\text{nel punto}} \frac{dT}{dz} = -p$$



carico \perp asse concentrato $\rightarrow \Delta T = -p$
 carico \perp asse distribuito \rightarrow pendenze $\neq 0$

35) Scrivere e dimostrare l'eq. di equilibrio alla rotazione in una trave soggetta ad un carico distribuito trasversale $p(z)$

$$M + T \Delta z - (p \Delta z) \cdot \frac{\Delta z}{2} - (M + \Delta M) = 0$$



transversabile

$$M + T \Delta z - M - \Delta M = 0$$

$$\frac{\Delta M}{\Delta z} = T \xrightarrow{\text{nel punto}} \frac{dM}{dz} = T$$

38) Scrivere la relazione di Navier nel caso di sistema di riferimento solo biassiale

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{I_x M_y - I_{xy} M_x}{I_x I_y - I_{xy}^2} x + \frac{I_y M_x - I_{xy} M_y}{I_x I_y - I_{xy}^2} y$$

39) Scrivere le ipotesi su cui si basa la teoria della trave di B. Saint Venant e le conclusioni che ne possono trarre considerando le eq. indefinite di equilibrio

- alcune tensioni sono piccole rispetto ad altre e quindi possono essere trascurate
- tali tensioni si sviluppano in un corpo di forma particolare, esecato e vincolato singolarmente
- la geometria è cilindrica, generata dalla traslazione di una figura piana qualunque che si conserva durante la traslazione
- il materiale costituente è omogeneo con comportamento isotropo.
- le sezioni terminali del solido, ortogonali a z, sono dette basi C_{xy}
- le forze esterne sono applicate in maniera tale da annullare in ogni punto le tensioni σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy}

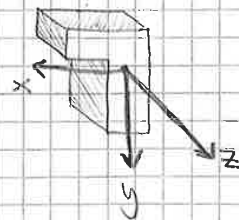
Le EFCO si semplificano

$$\sigma_{xz, z} = 0$$

$$\sigma_{yz, z} = 0$$

$$\sigma_{xz, x} + \sigma_{yz, y} + \sigma_{zz, z} = 0$$

) conclusioni



- $\sigma_{zz, z} = 0 \Rightarrow \sigma_{zz}$ è al più una funzione lineare
- le tensioni taglianti non dipendono da z, cioè sono le stesse su tutte le sezioni

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = K_0 + K_0 z = \text{cost}$$

Hp: FLESSIONE SEMPLICE

$$K_0 = K_2 = 0 \\ K_1 \neq 0 \rightarrow K_1 = \frac{M_y}{I_y}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{M_y}{I_y} x$$

analogo se
 $K_3 = 0$ e $K_2 \neq 0$
 $K_2 \rightarrow \frac{M_x}{I_x}$

42) Scrivere le eq. fondamentali dei continui deformabili per una trave soggetta a torsione pura, dando la definizione di quest'ultima

Un solido è soggetto a torsione PURA se sulle sue basi sono applicati due momenti torcenti puri uguali ed opposti.

EFCO

- $\sigma_{zz} = 0$
- $\sigma_{xz,x} + \sigma_{yz,y} = 0$
- $\sigma_{yz,x} + \sigma_{xz,y} = K_3$
- $\sigma_{xz} dy - \sigma_{yz} dx = 0$ (sul contorno)

$$\nabla \cdot \vec{c}_{\text{tor}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{c}_{\text{tor}} = \text{cost (sulla sezione)}$$

Essendo nulle tutte le tensioni normali (σ) per la legge di Hooke tutte le deformazioni lineari sono nulle. Infatti poiché $\sigma_{xy} = 0 \rightarrow \epsilon_{xy} = 0$, ovvero sulle sezione $x-y$ ogni segmento ruota in maniera rigida attorno all'asse z : le sezioni ruotano una rispetto all'altra ma conservano la propria forma.

44) Scrivere la I^a FORMULA DI BREDT e definire le grandezze coinvolte

$$\vartheta = \frac{M_z}{G I_t}$$

eq. costitutiva della torsione
 → momento torcente applicato
 → rigidità torsionale (I_t è il modulo torsionale)

45) Scrivere le tensioni taglianti in funzione del momento torcente in una sezione circolare definendo le grandezze coinvolte

$$\tau = \frac{M_z}{I_p} r$$

momento torcente
 raggio
 momento polare = I_t
 = $I_y + I_x$ sezione circolare

46) Scrivere la I^a FORMULA DI BREDT, le TENSIONI TAGLIANTI e il MODULO TORSIONALE per una sezione chiusa a parete sottile con spessore costante

$$M_z = 2q \Omega \quad \text{I}^{\text{a}} \text{ FORMULA DI BREDT}$$

$$\tau = \frac{M_z}{2\Omega} \quad \text{TENSIONI TAGLIANTI}$$

$$I_t = \frac{4\Omega^2}{\int \frac{ds}{t}} \quad \text{MODULO TORSIONALE} = \frac{4\Omega^2}{t}$$

47) Scrivere le TENSIONI TAGLIANTI e il MODULO TORSIONALE per una sezione aperta a parete sottile con spessore costante

$$\tau = \frac{z M_z}{I_t} y$$

$$I_t = \frac{b\Delta^3}{3}$$

50) Scrivere la definizione di CENTRO DI TAGLIO e le relative ipotesi di validità

Si consideri una sezione avente una qualsiasi geometria. Si applichi una forza di taglio T agente lungo una qualsiasi retta della sezione e sia questa l'unica sollecitazione della struttura.

Tale forza provocherà una rotazione e una traslazione della sezione.

Fra le possibili rette d'azione ne esisterà due aventi come intersezione il punto C_{Ta} della sezione, che non provocheranno alcuna rotazione della sezione ma solamente una traslazione. Questo punto è detto centro di taglio.

Tale definizione è legata all'assioma dell'indeformabilità della sezione.

51) Scrivere il campo di spostamenti per la teoria della trave di Timoshenko e spiegare le differenze con le ipotesi del modello di Eulero-Bernoulli

La teoria di Timoshenko è un'evoluzione della teoria di Eulero-Bernoulli poiché si basa su ipotesi cinematiche meno restrittive.

Nella teoria di Eulero-Bernoulli le deformazioni (così come l'allungamento) furono ritenute trascurabili rispetto alla flessione che la stessa subisce per effetto di carichi applicati. Nel modello di Timoshenko tale sezione è ancora rigida, ma ruotando non resta più perpendicolare all'asse della trave, dunque le deformazioni non possono essere ritenute trascurabili.

$$u(x, y, z) = u_s(z)$$

$$w(x, y, z) = w_s(z) + \theta_s(z) \cdot x$$



EULERO BERNULLI



TIMOSHENKO

53) Scrivere il campo di spostamenti di un modello di trave qualsiasi utilizzando la CARRERA UNIFIED FORMULATION spiegando il significato della simbologia adottata

Il campo di spostamenti può essere scritto tramite la CUF utilizzando un'espansione di funzioni generiche F_r

$$\vec{s} = F_r \vec{z}_r \quad r = 1, 2, \dots, M$$

$F_r \rightarrow$ funzioni delle coordinate della sezione x e y

$\vec{z}_r \rightarrow$ vettore spostamenti

$M \rightarrow$ num. termini espansione

La scelta di F_r e M è arbitraria: diverse basi di funzione di diverso ordine possono essere considerate per studiare il campo di spostamenti.

Una scelta possibile è quella dei polinomi di Taylor che consistono in una base $20 x^i y^j$

$$N=2, M=6$$

$$\begin{aligned} u_x &= u_{x1} + x u_{x2} + y u_{x3} + x^2 u_{x4} + xy u_{x5} + y^2 u_{x6} \\ u_y &= u_{y1} + x u_{y2} + y u_{y3} + x^2 u_{y4} + xy u_{y5} + y^2 u_{y6} \\ u_z &= u_{z1} + x u_{z2} + y u_{z3} + x^2 u_{z4} + xy u_{z5} + y^2 u_{z6} \end{aligned}$$

$N=0 \quad \quad \quad N=1 \quad \quad \quad N=2$

18 variabili \rightarrow 3 cost (M=0)
 \rightarrow 6 lineari (M=1)
 \rightarrow 9 paraboliche (M=2)

deformazioni

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= u_{x,x} = u_{x2} + 2x u_{x4} + y u_{x5} \\ \epsilon_{yy} &= u_{y,y} \\ \epsilon_{zz} &= u_{z,z} \end{aligned}$$

55) Derivare la matrice di rigidità K nel caso di eq. di equilibrio scritte in forma debole per un elemento finito 3D, utilizzando la notazione matriciale

$$\delta L_i = \int_V \delta \vec{\epsilon}^T \vec{\sigma} dV$$

Legge di Hooke $\sigma = C \epsilon$

$$\delta L_i = \int_V \delta \vec{\epsilon}^T C \vec{\epsilon} dV$$

$$\vec{\epsilon} = \vec{b} \vec{s} = \vec{B} \vec{s}$$

$$\delta \epsilon = B \delta s \rightarrow \delta \epsilon^T = \delta s^T B^T$$

$$\begin{aligned} \delta L_i &= \int_V (\delta s^T B^T) C (B s) dV \\ &= \delta s^T \left(\int_V B^T C B dV \right) s \end{aligned}$$

\vec{K}

$$K = \int_V B^T C B dV$$

57) Derivare la matrice di rigidità K per un elemento finito 1D di tipo asta a due nodi, utilizzando la notazione matriciale.

Vettore che contiene gli spostamenti assiali nei nodi

$$S^T = \{W_1, W_2\}$$



$$w(z) = L_1 W_1 + L_2 W_2$$

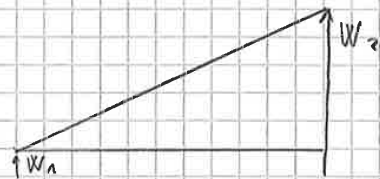
$$= L_i W_i$$

$$= \tilde{L} S$$

$$\tilde{L} = [L_1, L_2]$$

condizioni $w = W_1 \rightarrow z = 0$

$w = W_2 \rightarrow z = l$



$$\frac{w - W_1}{W_2 - W_1} = \frac{z - 0}{l - 0} \rightarrow \frac{w - W_1}{z} = \frac{W_2 - W_1}{l}$$

$$w(z) = \left(1 - \frac{z}{l}\right) W_1 + \left(\frac{z}{l}\right) W_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 = 1 - \frac{z}{l} \quad L_2 = \frac{z}{l}$$

asta \Rightarrow unica def. lungo l'asse $\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$

$$\epsilon_{zz} = \tilde{b} w = \tilde{b} \tilde{L} S = B S$$

$$\tilde{b} = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial L_1}{\partial z} W_1 + \frac{\partial L_2}{\partial z} W_2 = \frac{\partial \begin{bmatrix} 1 - \frac{z}{l} & \frac{z}{l} \end{bmatrix}}{\partial z} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & \frac{1}{l} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \delta L_i = \int_V \delta \epsilon_{zz}^T \tilde{\sigma}_{zz} dV = \int_V \delta \epsilon_{zz}^T E \epsilon_{zz} dV = \delta S^T \left(\int_V B^T E B dV \right) S$$

sostituisco B in K e trovo $K = \frac{E}{l^2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \int_V dV$

$$= \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

59) Scrivere il campo di spostamenti per il modello 2D di Kirchhoff ed elencare le ipotesi su cui esso si basa

La TEORIA DELLA PIASTRA DI KIRCHHOFF deriva dalle seguenti assunzioni assiomatiche:

- i segmenti perpendicolari alle superficie media della piastra rimangono dritti dopo la deformazione.
- tali segmenti non si allungano e non si accorciano
- ruotando rimangono perpendicolari alla superficie media dopo la rotazione

Il campo di spostamenti è lineare nelle coordinate z:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + \phi_x(x, y)z$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + \phi_y(x, y)z$$

↳ rotazioni delle normali trasversali attorno, rispettivamente, all'asse y e x

60) Scrivere la LEGGE FONDAMENTALE DEI LAMINATI e spiegare il significato delle matrici A, B e D

LAMINATO: materiale anisotropo

La legge fondamentale dei laminati è un'eq. costitutiva che lega le azioni interne al campo delle deformazioni.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix}$$

$[A_m]$ A → tensore di rigidità lega azioni a deformazioni membranali

$[B_m]$ B → tensore di accoppiamento membrano-flessionale lega azioni membranali a le deformazioni del pt. medio

$[D_m]$ D → tensore di rigidità flessionale lega momenti e curvatures

63) Considerato un guscio in coordinate curvilinee ortogonali, scrivere il vettore che individua la posizione del generico punto P del guscio e la base dei vettori locali

Guscio: corpo tridimensionale racchiuso tra due superfici curve

$$\vec{g}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \alpha} = A \left(1 - \frac{r_2}{R_\alpha}\right) \vec{a}$$

$$\vec{g}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \beta} = B \left(1 - \frac{r_2}{R_\beta}\right) \vec{b}$$

$$\vec{g}_3 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \gamma} = \{m\}$$

$$\vec{r}_x = \vec{r}_x(\alpha, \beta) \quad \text{se fuori dalla cap. media} + \vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3$$

\downarrow
 coordinate curvilinee = linee di curvatura

$\vec{a} \times \vec{b}$

64) Descrivere la procedura di base seguita nel METODO MISIO ASINTOTICO - ASSIOMATICO (MAAA)

L'MAAA fornisce risultati asintotici partendo da variabili assiomatiche. Valuta l'importanza di un'incognita al variare di parametri.

Si parte fissando i dati del problema, scegliendo le variabili da valutare, un modello e l'accuratezza (M). Successivamente ciascun termine della teoria viene rimosso (disattivato) e si valuta se la soluzione viene influenzata.

Si ottiene così il modello di spostamenti con il minor numero di incognite e con l'accuratezza scelta.

parte domanda 18

• FORMULAZIONE AGLI SPOSTAMENTI

Partendo dalle equazioni indefinite di equilibrio, possiamo rendere le tensioni in funzione delle deformazioni, introducendo le relazioni costitutive per rendere le σ in funzione delle ϵ e le relazioni geometriche per rendere le ϵ in funzione degli spostamenti. Poi introduciamo anche le eq. di equilibrio al contorno e otteniamo le eq. finali scritte in termini di spostamenti.

• FORMULAZIONE ALLE TENSIONI

Si parte dalle eq. di congruenza scritte in termini di deformazioni. Introduciamo le relazioni costitutive, ma scritte in termini di deformabilità, e le equazioni indefinite di equilibrio al contorno: in questo modo introduciamo le forze. A questo punto le equazioni finali saranno scritte in termini di tensioni e di forze esterne.

$$\begin{aligned}
 I_y &= \sum A_i (x_i - \bar{X}_G)^2 \\
 &= 50 (0 - 80)^2 + 60 (200 - 80)^2 + 40 (0 - 80)^2 \\
 &= 320000 + 864000 + 256000 = \\
 &= 1440000 = \\
 &= 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{xy} &= \sum A_i (x_i - \bar{X}_G)(y_i - \bar{Y}_G) \\
 &= 50 (0 - 80)(0 - 26,67) + 60 (200 - 80)(0 - 26,67) + 40 (0 - 80)(100 - 26,67) \\
 &= 106680 - 192024 - 234656 = \\
 &= -320000 = \\
 &= -3,2 \cdot 10^5 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_x = 2,933 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \\ I_y = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \\ I_{xy} = -3,2 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

3) Asi principali di inerzia (ξ, η)

sono ruotati rispetto a (x, y) di un angolo θ tale che

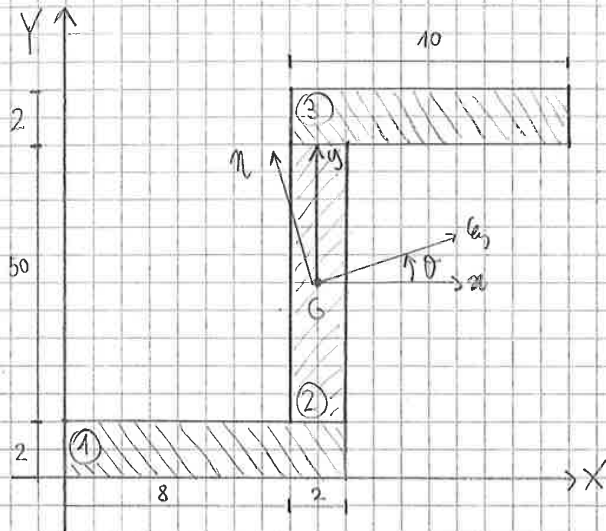
$$\operatorname{tg}(2\theta)' = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \cdot (-3,2 \cdot 10^5)}{1,44 \cdot 10^6 - 2,933 \cdot 10^5} = \frac{-6,4 \cdot 10^5}{1,1467 \cdot 10^6} = -0,55812$$

$$2\theta = \operatorname{arctg}(-0,58812) = -29,167^\circ$$

$$\theta = \frac{-29,167^\circ}{2} = -14,583^\circ$$

es. 1.6.7



1) Centroide rispetto (X, Y)

$$A_1 = (8+2) \cdot 2 = 20 \text{ mm}^2$$

$$G_1 (5, 1)$$

$$A_2 = 2 \cdot 50 = 100 \text{ mm}^2$$

$$G_2 (9, 27)$$

$$A_3 = 2 \cdot 10 = 20 \text{ mm}^2$$

$$G_3 (13, 53)$$

$$X_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{20 \cdot 5 + 100 \cdot 9 + 20 \cdot 13}{20 + 100 + 20} = \frac{1260}{140} = 9 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{20 \cdot 1 + 100 \cdot 27 + 20 \cdot 53}{20 + 100 + 20} = \frac{3780}{140} = 27 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \boxed{G (9; 27)}$$

$$= 2080 + 0 + 2080 = 4160 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_x = 47886,7 \text{ mm}^4 \\ I_y = 21468,7 \text{ mm}^4 \\ I_{xy} = 4160 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

3) Asi principali di inerzia (ξ, η)

$$\tan(2\theta) = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{2 \cdot 4160}{21468,7 - 47886,7} = \frac{8320}{-26418} = -0,3129$$

$$2\theta = \arctan(-0,3129) = -17,48^\circ$$

$$\theta = -\frac{17,48^\circ}{2} = -8,74^\circ$$

$\Rightarrow (\xi, \eta)$ ruotati di $\theta = -8,74^\circ$ rispetto (m, y)

4) Momenti di inerzia rispetto (ξ, η)

NOTA

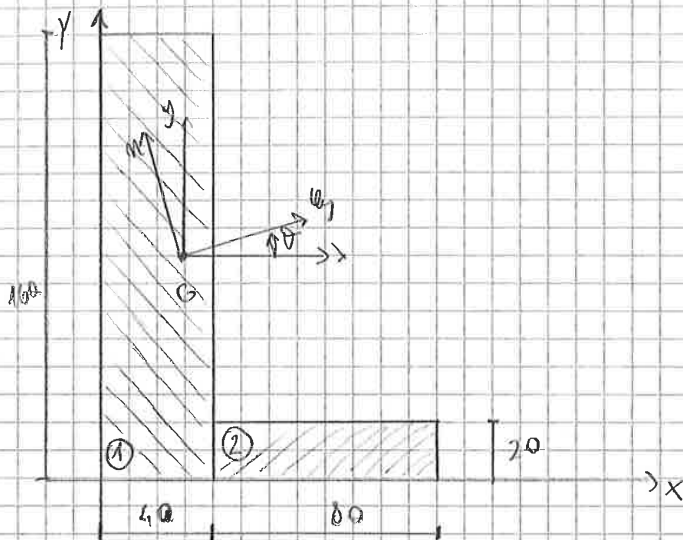
$I_x > I_y$

$$\begin{aligned} I_\xi &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\ &= 34677,7 + 13209,16 \\ &= 47886,86 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_\eta &= \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2} = \\ &= 34677,7 - 13209,16 \\ &= 21468,54 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_\xi = 47886,86 \text{ mm}^4 \\ I_\eta = 21468,54 \text{ mm}^4 \end{cases} \quad (I_{\xi\eta} = 0)$$

ES. 1.6.11



1) Centroide rispetto (X, Y)

$$A_1 = 4a \cdot 16a = 64a^2 \quad G_1(2a, 8a)$$

$$A_2 = 8a \cdot 2a = 16a^2 \quad G_2(8a, a)$$

$$X_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{64a^2 \cdot 2a + 16a^2 \cdot 8a}{64a^2 + 16a^2} = \frac{256a^3}{80a^2} = 3,2a$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{64a^2 \cdot 8a + 16a^2 \cdot a}{64a^2 + 16a^2} = \frac{512a^3}{80a^2} = 6,4a$$

$$\Rightarrow \boxed{G(3,2a; 6,4a)}$$

2) Momenti di inerzia rispetto (x, y) concentrici

$$I_a = I_x + d^2 A$$

$$I_{a1} = \frac{4a(16a)^3}{12} + (6,4a - 8a)^2 64a^2 = 1490,77 a^4$$

3) Asi principali di inerzia (ξ, η)

$$\tan(2\theta) = \frac{2 I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2 \cdot (-537,6)}{631,5 - 1998} = \frac{-1075,2}{-1366,5} = 0,787$$

$$2\theta = \arctan(0,787) = 38,2^\circ$$

$$\theta = \frac{38,2^\circ}{2} = 19,1^\circ$$

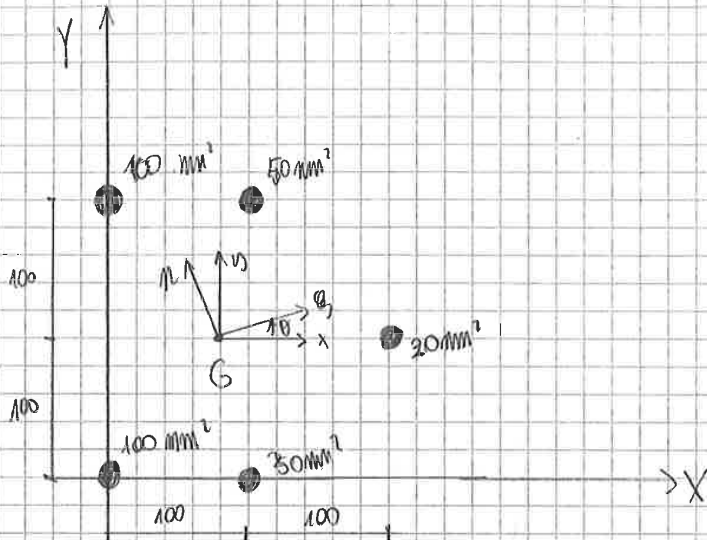
$\Rightarrow (\xi, \eta)$ sono ruotati di $\theta = 19,1^\circ$ rispetto (x, y)

4) Momenti di inerzia rispetto (ξ, η)

NOTA
$$I_\xi = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\begin{aligned} I_x > I_y &= \frac{1}{2}(1998 a^4 + 631,5 a^4) + \frac{1}{2}\sqrt{(1998 a^4 - 631,5 a^4)^2 + 4(-537,6 a^4)^2} \\ &= \frac{1}{2} 2629,5 a^4 + \frac{1}{2}\sqrt{(1366,5 a^4)^2 + 1156095,04 a^8} \\ &= 1314,75 a^4 + 869,33 a^4 \\ &= 2184 a^4 \end{aligned}$$

DS. 1.6.12



1) Centroide rispetto (X, Y)

$$X_G = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{100 \cdot 0 + 50 \cdot 100 + 20 \cdot 200 + 50 \cdot 100 + 100 \cdot 0}{100 + 50 + 20 + 50 + 100}$$

$$= \frac{14000}{320} = 43,75 \text{ mm}$$

$$Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$= \frac{100 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 20 \cdot 100 + 50 \cdot 200 + 100 \cdot 300}{100 + 50 + 20 + 50 + 100}$$

$$= \frac{32000}{320} = 100 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \boxed{G(43,75 ; 100)}$$

3) Assi principali d'inerzia (ξ, η)

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \cdot 0}{11,87500 - 3,0 \cdot 10^6} = 0$$

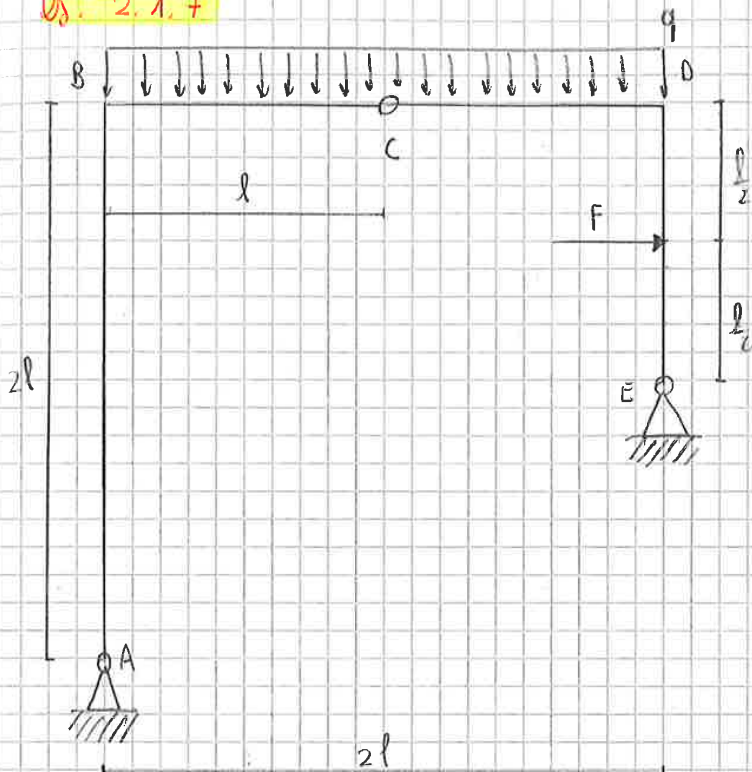
$$\theta = 0$$

⇒ gli assi principali d'inerzia coincidono con gli assi (x, y) → $\theta = 0^\circ$

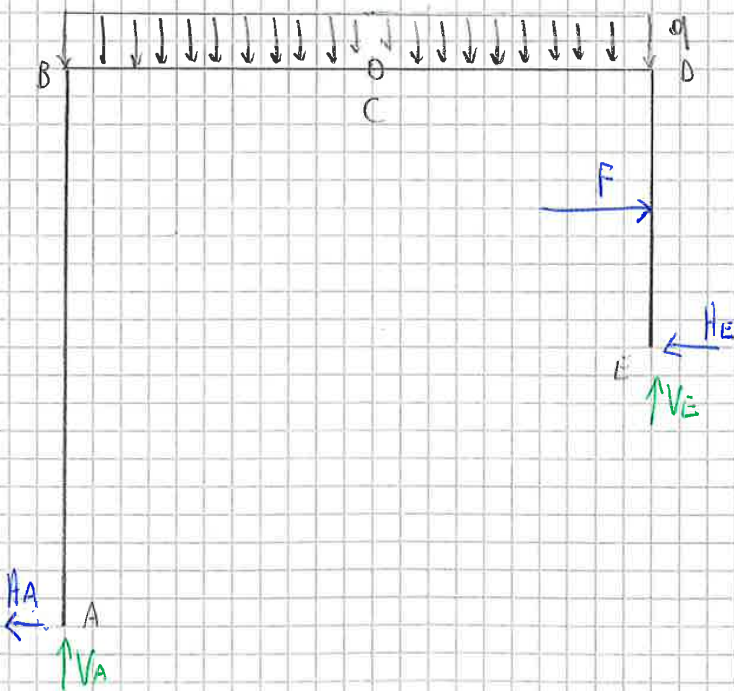
4) Momenti d'inerzia rispetto (ξ, η)

Poiché accade cioè $(x, y) \equiv (\xi, \eta) \Rightarrow$ anche per i momenti

Es. 2.1.7



DCL



$$\updownarrow \quad V_A + V_E - 2ql = 0$$

$$\rightleftarrows \quad -H_A - H_E + F = 0$$

$$A \curvearrowright \quad 2ql(l) + F\left(l + \frac{l}{2}\right) - V_E(2l) - H_E(l) = 0$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & 2ql^2 + \frac{3}{2}Fl - \left(H_E - \frac{F}{2} + ql \right) 2l = (F - H_A) l = 0 \\
 & 2ql^2 + \frac{3}{2}Fl - H_E 2l + Fl - ql^2 - Fl + H_A l = 0 \\
 & \underline{2ql^2} + \frac{3}{2}Fl - 2l(F - H_A) + \cancel{Fl} - \cancel{ql^2} - \cancel{Fl} + H_A l = 0 \\
 & ql^2 + \frac{3}{2}Fl - 2Fl + H_A 2l + H_A l = 0 \\
 & 3H_A l = -ql^2 + \frac{Fl}{2}
 \end{aligned}$$

$$H_A = -\frac{ql}{3} + \frac{F}{6}$$

$$(2) \quad H_E = F - \left(-\frac{ql}{3} + \frac{F}{6} \right)$$

$$H_E = F + \frac{ql}{3} - \frac{F}{6}$$

$$H_E = \frac{ql}{3} + \frac{5}{6}F$$

$$(4) \quad V_E = \left(\frac{ql}{3} + \frac{5}{6}F \right) \cdot \frac{E}{2} + \frac{ql^2}{2}$$

$$V_E = \frac{5}{6}ql + \frac{F}{3}$$

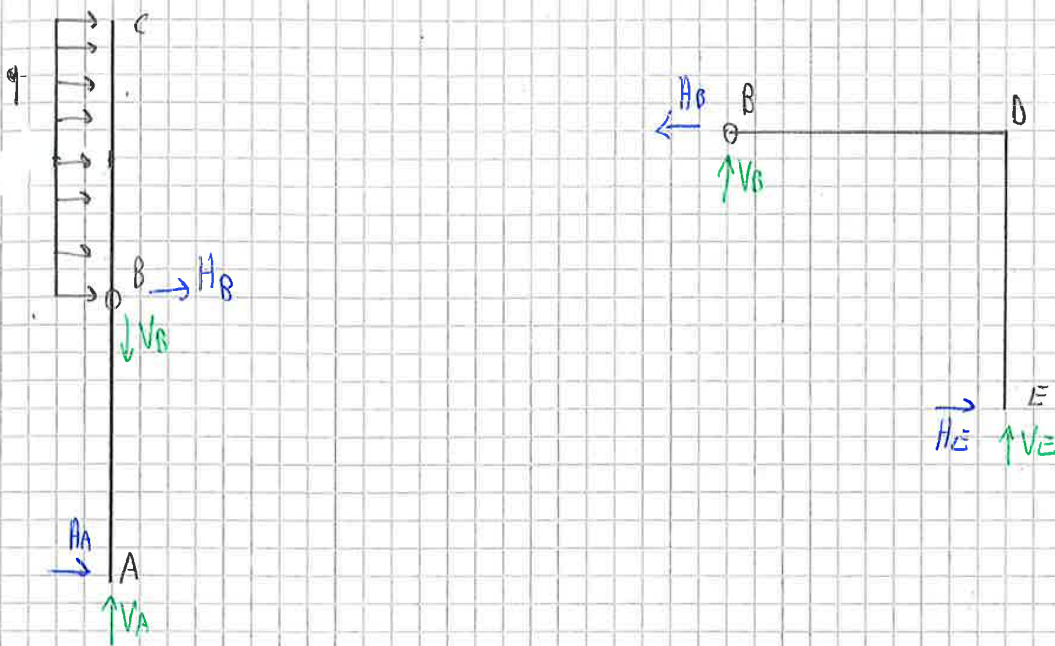
$$(1) \quad V_A = 2ql - V_E$$

$$V_A = 2ql - \left(\frac{5}{6}ql + \frac{F}{3} \right)$$

$$V_A = -\frac{F}{3} + \frac{7}{6}ql$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad & \boxed{ \begin{aligned} V_A &= \frac{7}{6}ql - \frac{F}{3} \\ H_A &= -\frac{1}{3}ql + \frac{F}{6} \\ V_E &= \frac{5}{6}ql + \frac{F}{3} \\ H_E &= \frac{1}{3}ql + \frac{5}{6}F \end{aligned} }
 \end{aligned}$$

3 eq. 4 incognite \rightarrow arco la 4^a eq



$$\updownarrow) V_A - V_B = 0$$

$$\updownarrow) V_E + V_B = 0$$

$$\leftrightarrow) H_A + H_B + ql = 0$$

$$\leftrightarrow) H_E = H_B$$

$$\color{red}{\downarrow} H_A l - ql \left(\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$\color{red}{\downarrow} V_E l + H_E l = 0$$

9 eq, 4 incognite \rightarrow solo 4 sono indipendenti

Risolvo

$$\begin{cases} V_A + V_E = 0 & (1) \\ H_A + H_E + ql = 0 & (2) \\ \frac{3}{2} ql^2 - V_E l = 0 & (3) \\ V_E l + H_E l = 0 & (4) \end{cases}$$

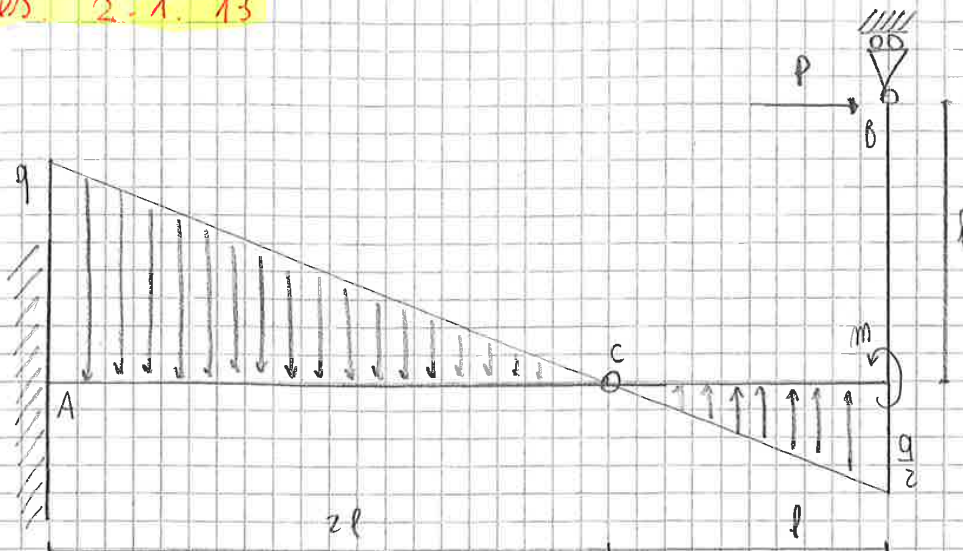
$$(1) \quad V_A = -V_E$$

$$(2) \quad H_A = -ql - H_E$$

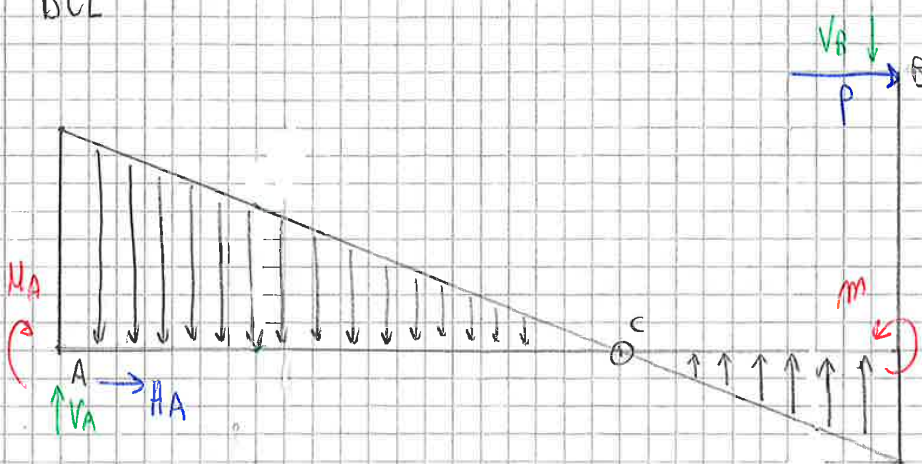
$$(3) \quad V_E = \frac{3}{2} ql$$

$$(4) \quad H_E = -V_E$$

es. 2-1. 13



DCL



$$\updownarrow) \quad V_A - V_B = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot q + \frac{1}{2} \cdot \frac{q}{2} \cdot l = 0$$

$$\leftrightarrow) \quad H_A + P = 0$$

$$\curvearrowright) \quad H_A \cdot l - m + q \cdot l \left(\frac{2l}{3} \right) - \frac{q \cdot l}{2} \left(2l + l - \frac{l}{3} \right) + V_B \cdot 3l + P \cdot l = 0$$

3 eq., 4 incognite \Rightarrow cerco la 4^a eq.

$$PV_B - \frac{ql^2}{6} - m + Pl = 0$$

$$V_B = \frac{ql}{6} + \frac{m}{l} - P$$

$$(1) M_A = -2l \left(\frac{ql}{6} + \frac{m}{l} - P \right) - \frac{ql^2}{6}$$

$$M_A = -\frac{ql^2}{3} - 2m + 2Pl - \frac{ql^2}{6}$$

$$M_A = 2Pl - 2m - \frac{ql^2}{2}$$

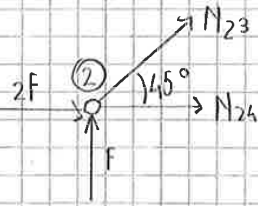
$$(2) V_A = V_B + \frac{3}{4}ql$$

$$V_A = \frac{ql}{6} + \frac{m}{l} - P + \frac{3}{4}ql$$

$$V_A = \frac{m}{l} - P + \frac{11}{12}ql$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = \frac{m}{l} - P + \frac{11}{12}ql \\ H_A = -P \\ M_A = 2Pl - 2m - \frac{ql^2}{2} \\ V_B = \frac{ql}{6} + \frac{m}{l} - P \end{cases}$$

EQUILIBRIO AI NODI



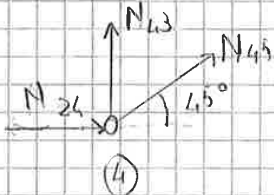
$$\updownarrow) \quad F + N_{23} \sin 45^\circ = 0$$

$$\leftrightarrow) \quad 2F + N_{24} + N_{23} \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{23} = \frac{-F}{\sin 45^\circ} = \frac{-2F}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} F$$

$$N_{24} = -2F + \sqrt{2} F \frac{\sqrt{2}}{2} = -F$$

$$\boxed{\begin{aligned} N_{23} &= -\sqrt{2} F \\ N_{24} &= -F \end{aligned}}$$



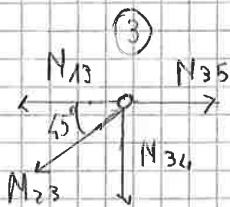
$$\updownarrow) \quad N_{43} + N_{45} \sin 45^\circ = 0$$

$$\leftrightarrow) \quad +N_{24} + N_{45} \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{45} = -\frac{N_{24}}{\cos 45^\circ} = -\sqrt{2} F$$

$$N_{34} = -\frac{N_{45}}{\sin 45^\circ} = F$$

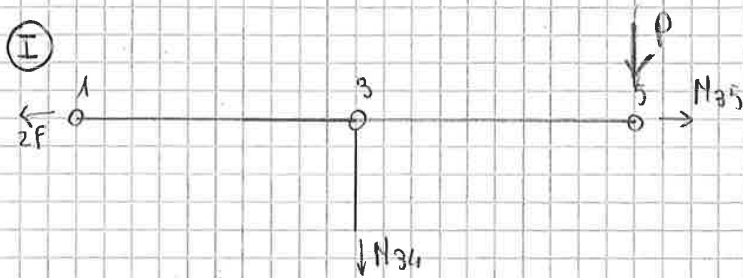
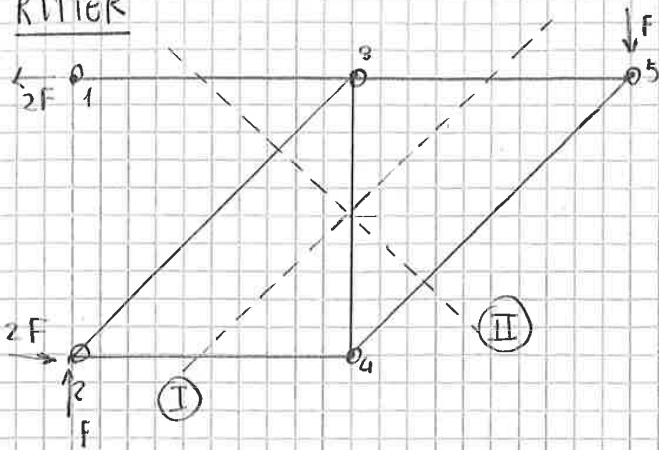
$$\boxed{\begin{aligned} N_{34} &= F \\ N_{45} &= -\sqrt{2} F \end{aligned}}$$



$$\updownarrow) \quad -N_{23} \sin 45^\circ = 0$$

$$\leftrightarrow) \quad -N_{13} + N_{35} + N_{23} \cos 45^\circ = 0 \quad \text{OK}$$

RITTER



$$\sum \rightarrow: F l - 2F l - N_{24} l = 0$$

$$\sum \downarrow: -2F l + F l + N_{35} l = 0$$

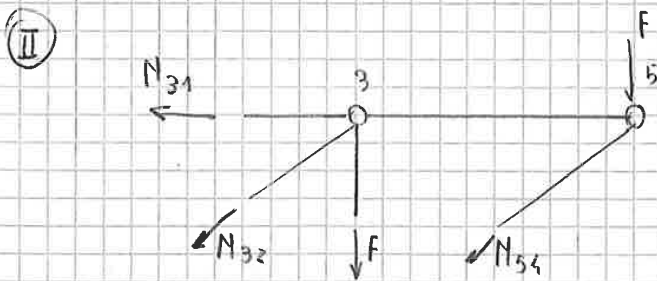
$$\sum \uparrow: F - N_{34} = 0$$



$$N_{24} = -F$$

$$N_{35} = F$$

$$N_{34} = F$$



$$\sum \downarrow: F l + N_{34} l \sin 45^\circ = 0$$

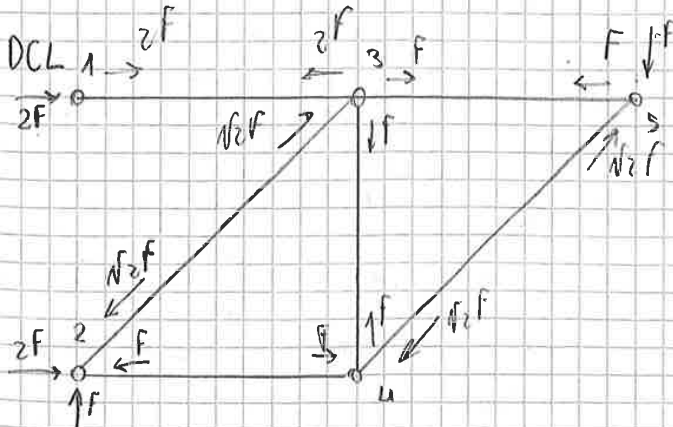
$$\sum \rightarrow: -F l - N_{32} l \sin 45^\circ = 0$$

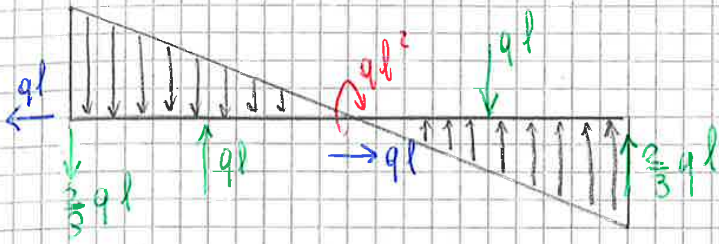
$$\sum \rightarrow: N_{31} + N_{32} \cos 45^\circ + N_{54} \cos 45^\circ = 0$$

$$N_{54} = -\sqrt{2}F$$

$$N_{32} = -\sqrt{2}F$$

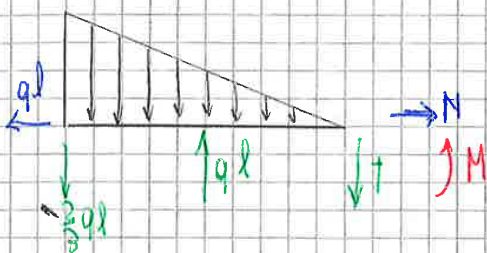
$$N_{31} = +2F$$





SFORZO NORMALE

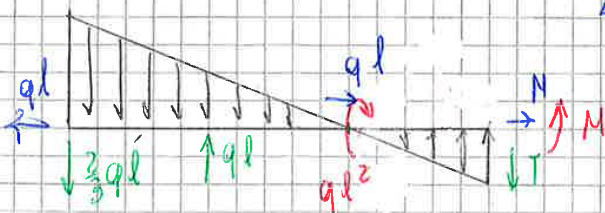
• $0 < z < l$



$$\leftrightarrow) -ql + N = 0$$

$$N = ql$$

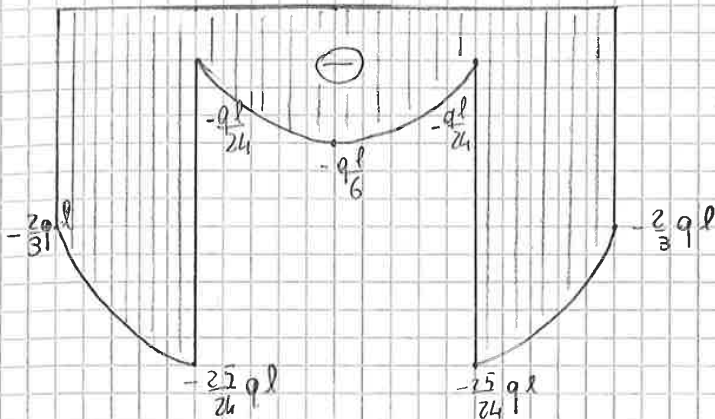
• $l < z < 2l$



$$\leftrightarrow) -ql + ql + N = 0$$

$$N = 0$$

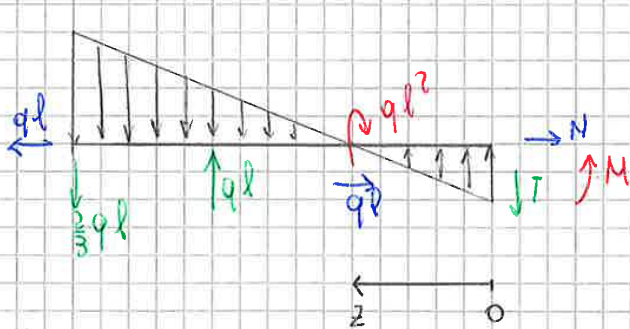




MOMENTO

Poiché il carico è antisimmetrico, il suo diagramma di momento sarà antisimmetrico \Rightarrow ne studio metà

• Taglio a $\frac{2}{3}l$



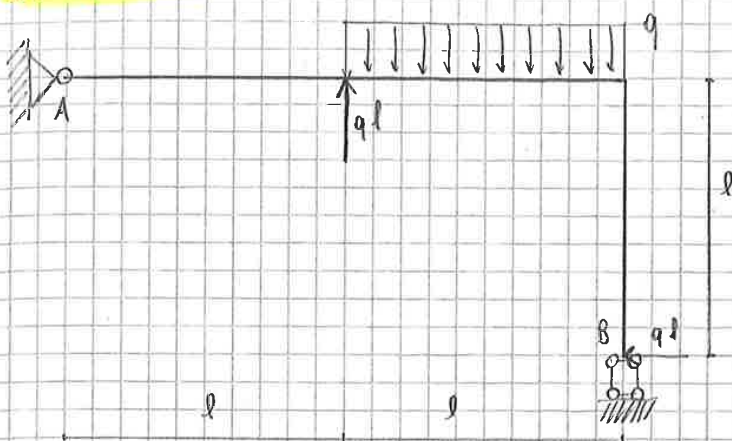
$$\begin{aligned}
 0 \downarrow M &= \cancel{ql^2} - \cancel{\frac{ql}{8} \cdot \frac{l}{6}} - \cancel{ql^2} + \cancel{\frac{2}{3}ql \cdot \frac{2}{3}l} + \\
 &+ \frac{ql}{2} \left(\frac{l}{2} + \frac{2}{3}l \right) \\
 M &= \frac{21}{40} ql^2
 \end{aligned}$$

NOTA: agli estremi $M=0$ (cerniera + carrello)

• Nel punto centrale

$$\begin{aligned}
 0 \downarrow M + \frac{ql}{2} \cdot \frac{2}{3}l - \frac{ql^2}{2} + \frac{2}{3}ql \cdot l - ql^2 &= 0 \\
 M + \frac{ql^2}{3} - \frac{ql^2}{2} + \frac{2}{3}ql^2 - ql^2 &= 0 \\
 M &= \frac{ql^2}{2}
 \end{aligned}$$

es. 3.1.2



REAZIONI VINCOLARI



$$\updownarrow V_A + ql - ql = 0$$

$$\leftrightarrow H_A - ql = 0$$

$$\curvearrowright ql^2 - ql \left(\frac{3}{2}l \right) - ql^2 - M_B = 0$$

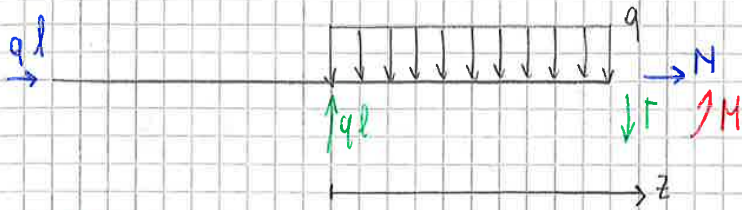
$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = 0 \\ H_A = ql \\ M_B = -\frac{3}{2}ql^2 \end{cases}$$

TAGLIO

• $0 < z < l$

poiché non vi sono sforzi perpendicolari alle trave $\rightarrow T=0$

• $l < z < 2l$



$\updownarrow T - ql + qz = 0$

$T(z) = -qz + ql$

$T(z=0) = ql$

$T(z=l) = -ql + ql = 0$

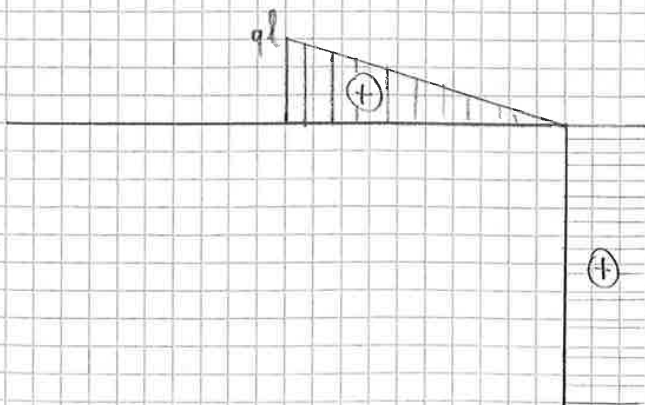
$T(z)$ andamento lineare

• $l < z < 2l \rightarrow$ tratto verticale

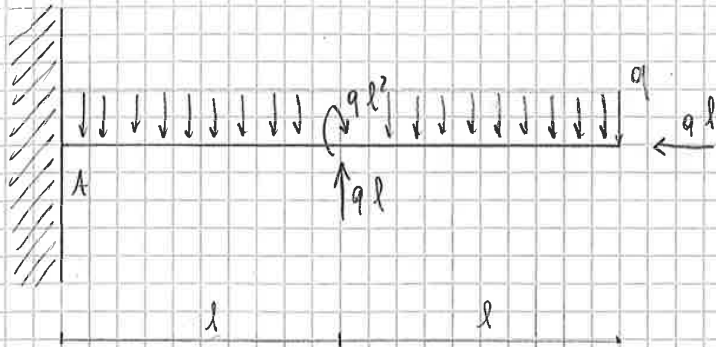


$\updownarrow T - ql = 0$

$T = ql$

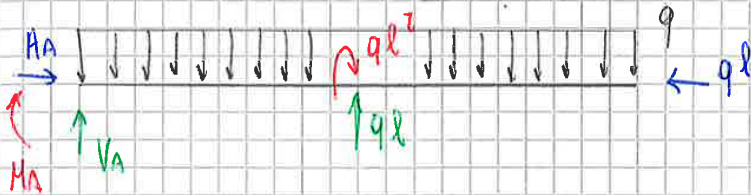


Es. 3.1.5



REAZIONI VINCOLARI

DCL



$$\updownarrow) V_A + ql - ql = 0$$

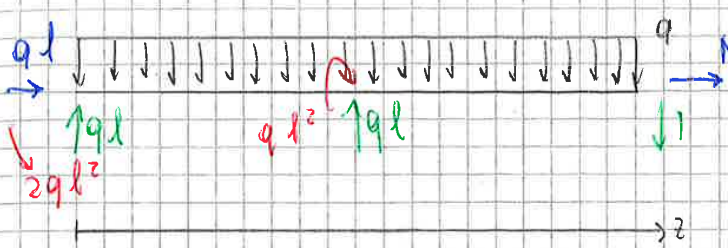
$$\leftrightarrow) H_A - ql = 0$$

$$\curvearrowright) M_A + ql^2 - ql^2 + 2ql^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_A = +ql \\ H_A = ql \\ M_A = -2ql^2 \end{cases}$$



• $l < z < 2l$



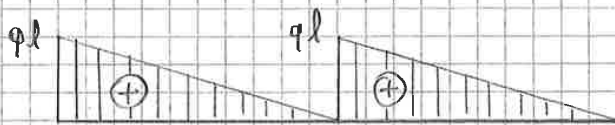
↓) $T - ql - ql + qz = 0$

$T(z) = -qz + 2ql$

$T(z=l) = ql$

$T(z=2l) = -ql + ql = 0$

$T(z)$ andamento lineare



MOMENTO

• $0 < z < l$

o.d. $M - qlz + 2ql^2 + \frac{qz^2}{2} = 0$

$M(z) = -\frac{qz^2}{2} + qlz - 2ql^2$

$M(z=0) = -2ql^2$

$M(z=l) = -\frac{3}{2}ql^2$

$M(z)$ andamento parabolico, concavo verso basso

• $l < z < 2l$

o.d. $M - qlz + 2ql^2 - ql(z-l) + \frac{qz^2}{2} - ql^2 = 0$

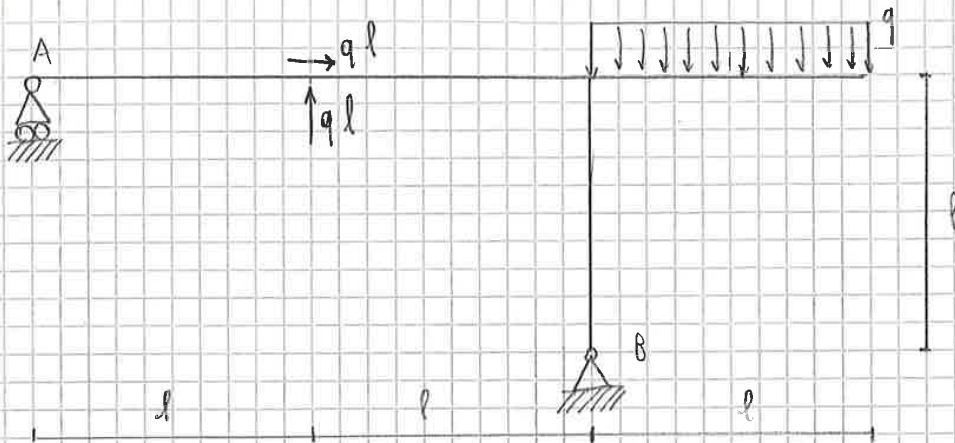
$M(z) = -\frac{qz^2}{2} + 2qlz - 2ql^2$

$M(z=l) = -ql^2$

$M(z=2l) = 0$

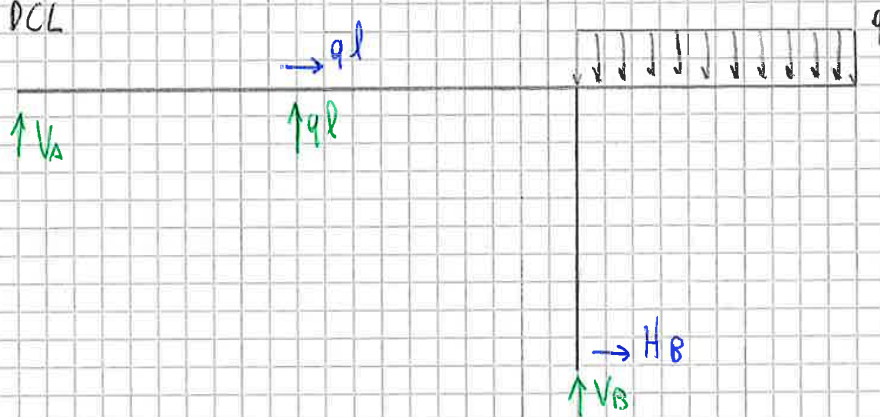
$M(z)$ andamento parabolico, concavo verso basso

Es. 3.1.6



REAZIONI VINCOLARI

DCL



$$\uparrow \downarrow) \quad V_A + \cancel{ql} + V_B - \cancel{ql} = 0$$

$$\leftrightarrow) \quad ql + H_B = 0$$

$$\curvearrowright) \quad \frac{ql^2}{2} + ql^2 + ql^2 + V_A 2l = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} H_B = -ql \\ V_A = -\frac{5}{2}ql \\ V_B = \frac{5}{4}ql \end{cases}$$

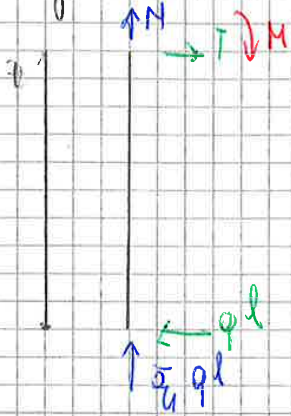
$M = -q \frac{z^2}{2}$

$M(z=0) = 0$

$M(z=l) = -q \frac{l^2}{2}$

$M(z)$ andamento parabolico, concavità verso il basso

• taglio $0 < z < l$



$T = ql$

$M = -\frac{5}{4} ql$

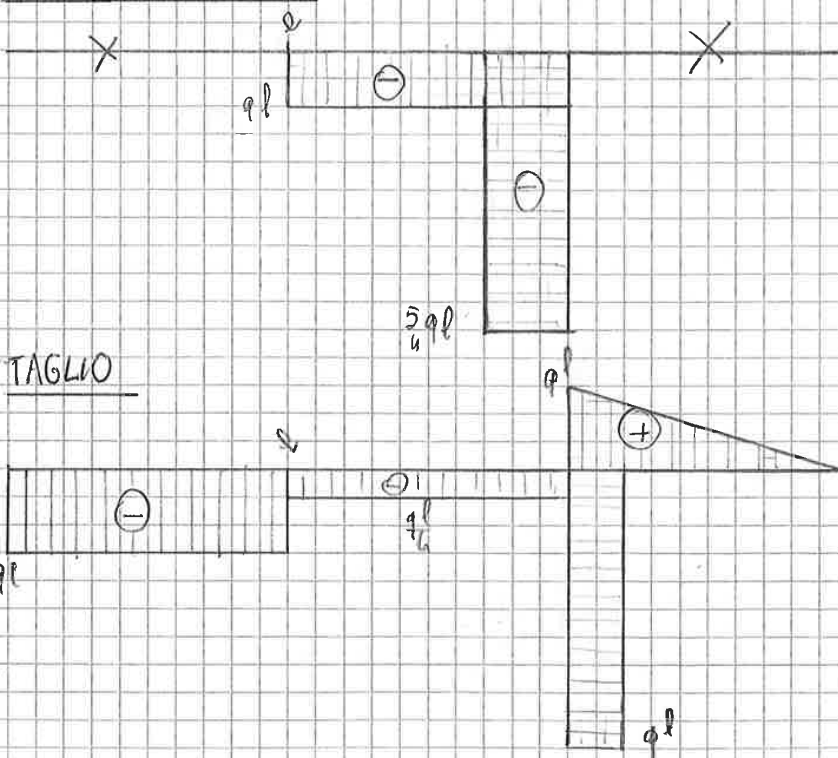
$M = -qlz$

$M(z=0) = 0$

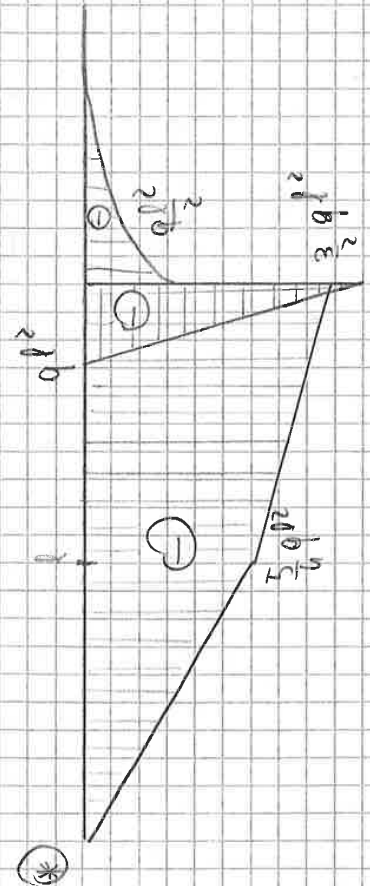
$M(z=l) = -ql^2$

$M(z)$ andamento lineare

SFORZO NORMALE



MOMENTO



2) sistema virtuale



• taglio $0 < z < l/2$
 $M^a = \frac{z}{2}$

• taglio $l/2 < z < l$
 $M^e = -\frac{z}{2} + \frac{l}{2}$

$$\Rightarrow V_C = \int_0^l \frac{M^a M^e}{EI} dz$$

$$V_C = \frac{1}{EI} \int_0^{l/2} \frac{mz^2}{2l} dz + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \frac{mz}{l} \left(\frac{l}{2} - \frac{z}{2} \right) dz$$

$$= \frac{m}{EI \cdot 2l} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^{l/2} + \frac{1}{EI} \int_{l/2}^l \frac{mz}{2} - \frac{mz^2}{2l} dz =$$

$$= \frac{m}{6lEI} \frac{l^3}{8} + \frac{m}{2EI} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{l/2}^l - \frac{m}{2lEI} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{l/2}^l =$$

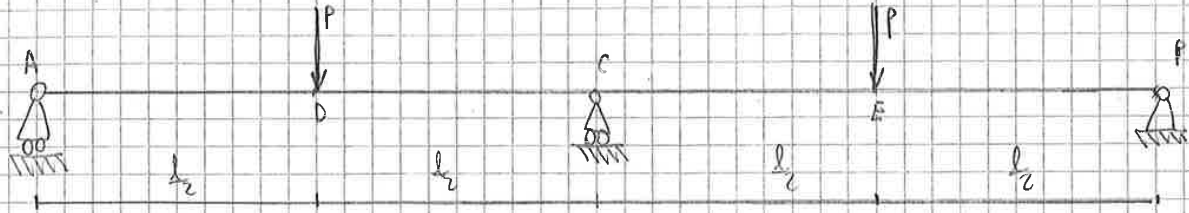
$$= \frac{ml^2}{48EI} + \frac{m}{4EI} \left(l^2 - \frac{l^2}{4} \right) - \frac{m}{6lEI} \left(l^3 - \frac{l^3}{8} \right) =$$

$$= \frac{ml^2}{48EI} + \frac{3ml^2}{4EI} = \frac{7ml^2}{48EI} =$$

$$= \frac{ml^2}{16}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{ml^2}{16} = V_C}$$

DS 4.2

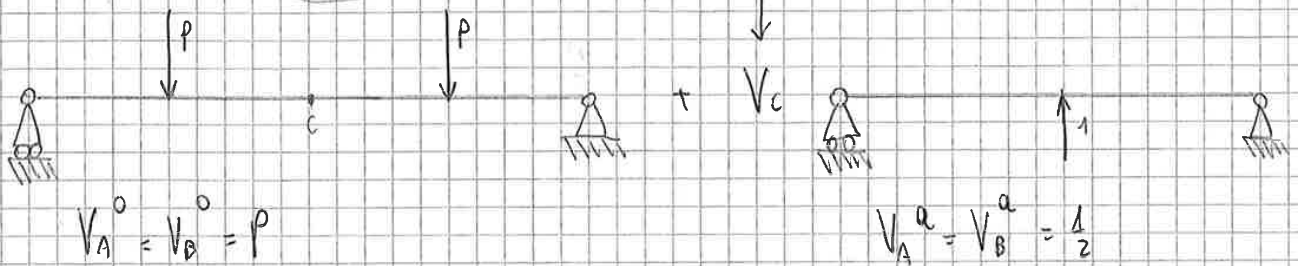


GRADO DI IPERELASTICITÀ = 1 (salto V_c come reazione vincolare)
 (iperelastico $\rightarrow H_B = 0$)

sistema di conditi esterni

$$\begin{bmatrix} \pi \\ b \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} u + \alpha \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} a$$

sistema unitario



$$\left. \begin{aligned} \delta e &= 0 \\ \delta u &= \int_0^{2l} \frac{M^a M^b}{EI} dz \end{aligned} \right\} \rightarrow \int_0^{2l} \frac{M^a M^b}{EI} dz = 0$$

$$\int_0^{2l} \frac{M^a (M^0 + \alpha M^e)}{EI} dz = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{- \int_0^{2l} \frac{M^e M^0}{EI} dz}{\int_0^{2l} \frac{(M^a)^2}{EI} dz} =$$

$$= \frac{- \int_0^{2l} M^0 M^e dz}{\int_0^{2l} (M^a)^2 dz}$$

(sapendo che $M^b = M^0 + \alpha M^e$)