NUMERO: 2361A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Scuderi Paolo

MATERIA: Meccanica delle Macchine - Prof. Marchesiello

MECCANICA DELLE MACCHINE

CINEMATICA è lo studio del moto dei corpi indipendentemente dalle cause che lo producono (è vietato parlare di azioni (forze e momenti)).

Le grandezze tipiche a cui si fa riferimento sono:

- tempo (t)
- spazio (s)
- velocità (v)
- accelerazione (a)

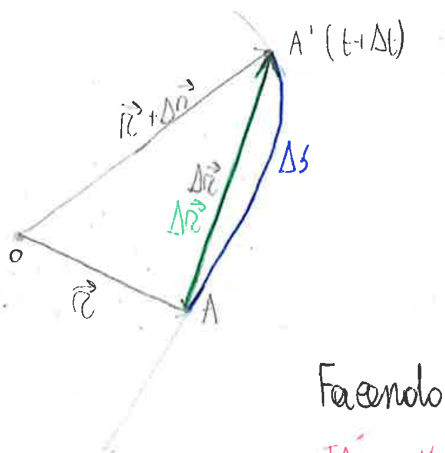
sono GRANDEZZE VETTORIALI ⇒ una loro variazione $\left(\frac{d}{dt}\right)$ può essere causata sia dalla variazione del modulo che della direzione

MODELLO DEL CORPO →
- CORPO PUNTIFORME (dimensioni trascurabili)
- CORPO ESTESO (dimensioni importanti) → RIGIDO / DEFORMABILE

CINEMATICA DEL PUNTO

TRAIETTORIA insieme delle posizioni assunte dal punto nel tempo

MOTO PIANO la traiettoria è contenuta in un piano detto piano del moto



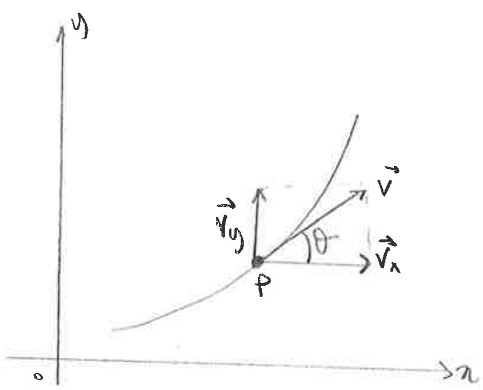
Δs è la distanza percorsa (scalare)

$\Delta\vec{r}$ è una variazione (vettore)

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$ VELOCITÀ MEDIA (in Δt)

Facendo tendere $\Delta t \to 0$ si ottiene la VELOCITÀ ISTANTANEA (o velocità)

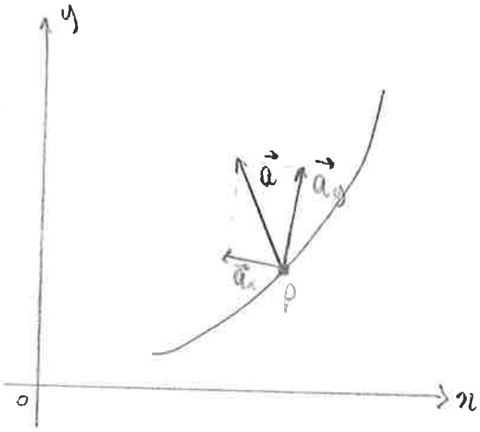
$$\vec{v} \overset{def}{=} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

$v_x = \dot{x}$

$v_y = \dot{y}$



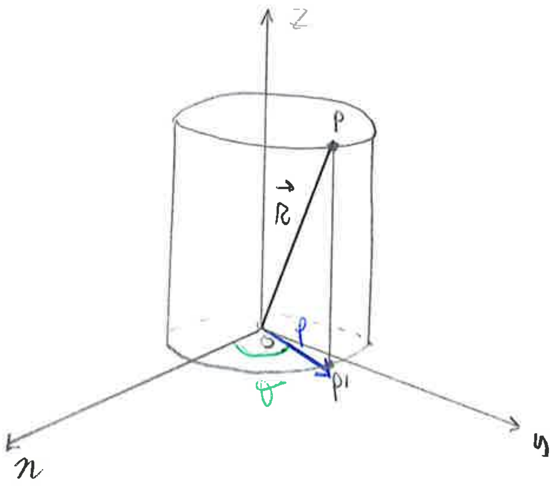
$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

$a_x = \ddot{x}$

$a_y = \ddot{y}$

2) COORDINATE CILINDRICHE

si utilizzano, in genere, quando il moto ha una direzione assiale



$P(\rho, \theta, z)$

trovato P, lo si proietta ⇒ P', si collega O con P'

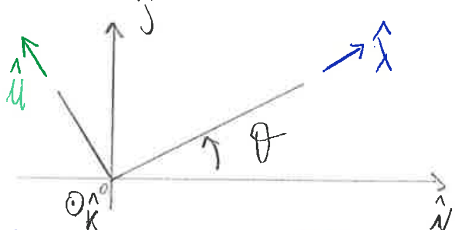
$\vec{OP'} = \rho$

θ = angolo tra $\hat{i}$ e $\vec{OP'}$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$

dove $\dot{\theta} = \omega = \dfrac{d\theta}{dt}$



$\hat{\lambda} = \cos\theta\, \hat{i} + \sin\theta\, \hat{j}$

$\hat{\mu} = -\sin\theta\, \hat{i} + \cos\theta\, \hat{j}$

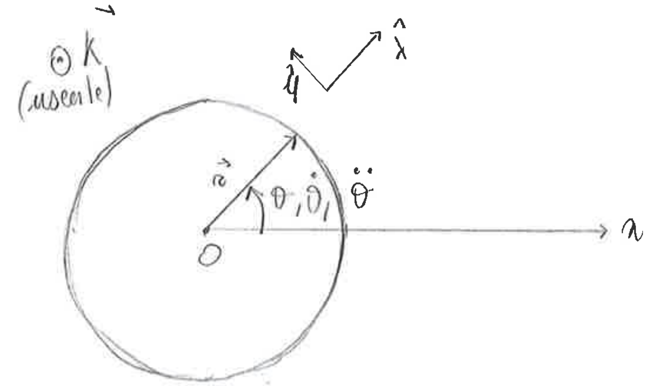
• $\vec{r} = \rho\hat{\lambda} + z\hat{k}$

• $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\hat{\lambda} + \rho\left(\dfrac{d\hat{\lambda}}{dt}\right) + \dot{z}\hat{k}$

↳ ANALIZZO (pg. dopo)

NOTA: $\hat{\mu}$ e $\hat{\lambda}$ NON sono fissi

CASO PARTICOLARE: MOTO CIRCOLARE



$r = \rho$

$\vec r = r\hat\lambda$

$\underbrace{r = cost}_{\text{circonferenza}} \Rightarrow \dot r = 0$

$$\vec v = \frac{d\vec r}{dt} = r\,\vec\omega \wedge \hat\lambda = r\dot\theta\,\hat k \wedge \hat\lambda =$$
$$= r\dot\theta\,\hat u$$ tangente alla traiettoria

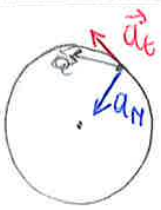
$$\vec a = \ddot\theta\,\hat u\, r + r\dot\theta(-\dot\theta\,\hat\lambda) = \underbrace{r\ddot\theta\,\hat u}_{\substack{acc.\ tg \\ a_t}} - \underbrace{r\dot\theta^2\,\hat\lambda}_{\substack{acc.\ \perp \\ a_n}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} a_{tg} = r\ddot\theta = r\dot\omega \\ a_n = -r\dot\theta^2 = -r\omega^2 \end{array}}$$

l'accelerazione è centripeta ⇒ la $\vec F$ può essere centrifuga ma con un segno "–" davanti

Nel moto circolare uniforme $\omega = cost \Rightarrow \dot\omega = 0 \Rightarrow a_{tg} = 0$

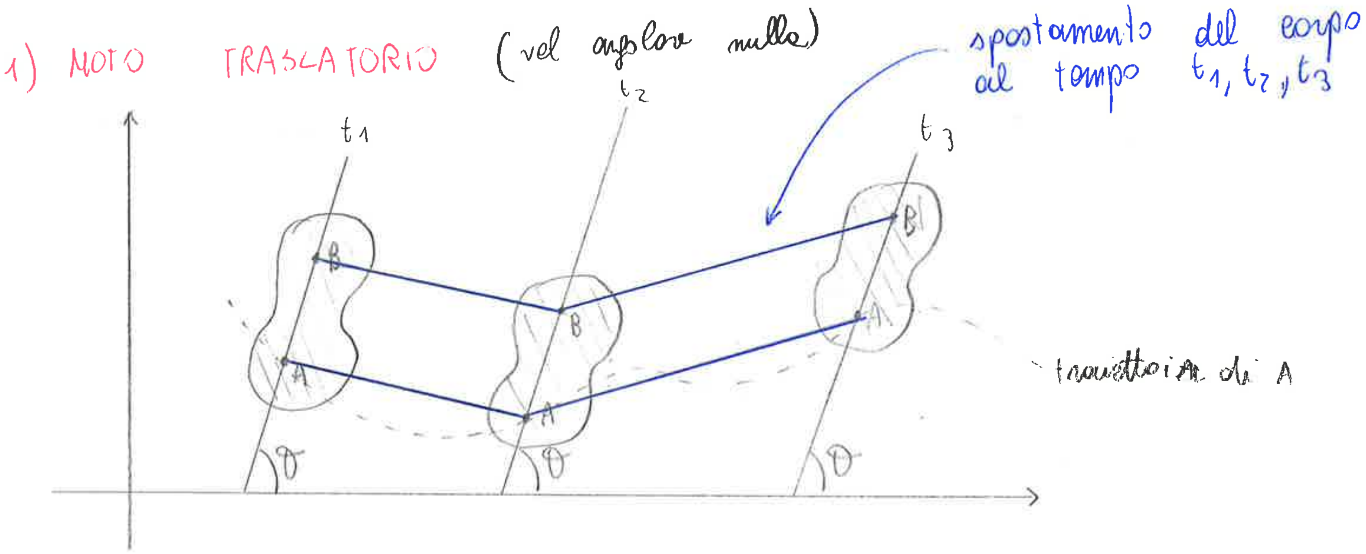
$$\boxed{\vec a = \vec a_N = -\omega^2 r\,\hat\lambda}$$



Abbiamo 3 tipi di moto:

1) MOTO TRASLATORIO (rettilineo o curvilineo)
2) MOTO ROTATORIO ATTORNO AD UN ASSE FISSO
3) MOTO PIANO GENERICO

1) MOTO TRASLATORIO (vel angolare nulla)



Il moto traslatorio è un moto caratterizzato dal fatto che qualunque retta solidale con il corpo rimane parallela a se stessa (la traiettoria può anche essere curvilinea, non per forza rettilinea)

$\vartheta = cost \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \ddot{\vartheta} = 0$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (RIGIDITÀ) $\rightarrow$ $AA'BB'$ parallelogramma $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

$\vec{V}_A = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{BB'}}{\Delta t} = \vec{V}_B$

$$\boxed{\begin{matrix} \vec{V}_A = \vec{V}_B \\ \vec{a}_A = \vec{a}_B \end{matrix} \quad \forall \text{ coppia } A,B}$$

In ogni istante di tempo le velocità sono uguali (cambiando istante le $\vec{v}$ possono essere diverse, ma risulterà sempre $\vec{V}_A = \vec{V}_B$)

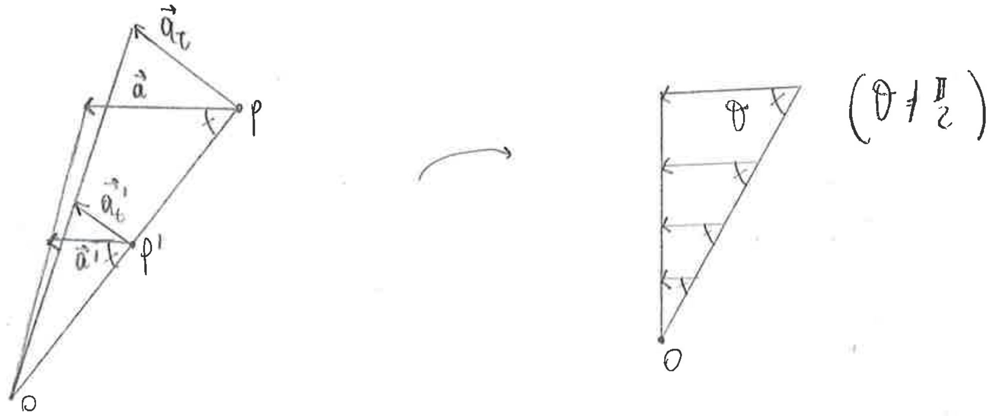
9

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = R\ddot{\vartheta}\,\hat{\mu} - R\dot{\vartheta}^2\,\hat{\lambda}$$

$$a_P = \sqrt{a_t^2 + a_N^2} = \sqrt{(R\ddot{\vartheta})^2 + (R\dot{\vartheta}^2)^2} = R\sqrt{\ddot{\vartheta}^2 + \dot{\vartheta}^4} \Rightarrow \boxed{a_P \propto R}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{a_t}{|a_n|} = \frac{\dot{\omega}}{\omega^2}$$

Vale la DISTRIBUZIONE TRIANGOLARE DELLA ACCELERAZIONI



CASI PARTICOLARE

1) MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\begin{cases} \omega = \text{cost} \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \\ a_t = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \end{cases}$$

2) MOTO INCIPIENTE (che sta per iniziare)

$\omega = 0$ e $\dot{\omega} \neq 0$

$$\begin{cases} a_N = 0 \\ a_t \neq 0 \\ \gamma = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Appena si parte con l'auto la vel. rot. è $=0$, ma acc. $\neq 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 214

Derivando la formula fondamentale della cinematica si ottiene il TEOREMA DI RIVALS (11)

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}}$$

Ciascuno dei 3 termini può dare origine a 2 componenti

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{a}_{B/A} = \underbrace{\vec{a}_{B/A\,N}} + \underbrace{\vec{a}_{B/A\,t}} \\ &\bullet\ \vec{a}_{B/A\,N} = -\omega^2 \ell \hat{\lambda} \quad (-r\omega^2) \\ &\bullet\ \vec{a}_{B/A\,t} = \dot{\omega} \ell \hat{\mu} \quad (r\dot{\omega}) \end{aligned}}$$

Formule equivalenti (poco usate di Rivals e F.F.C)

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \\ \vec{a}_B = \vec{a}_A + \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) \end{cases}$$

APPARTIENE AD UN PIANO SOLIDALE AL CORPO RIGIDO

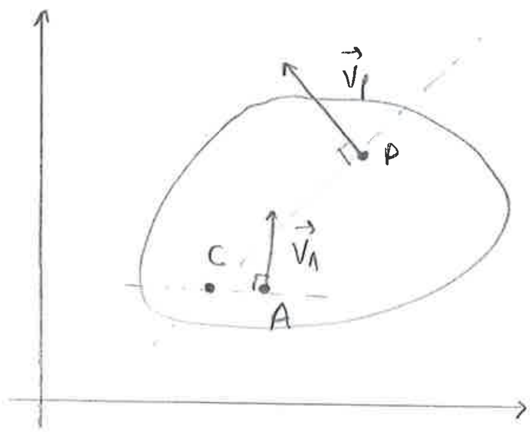
esempio: CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE (CIR)

punto C la cui $V = 0$ (ogni corpo rigido lo possiede)

$|\vec{v}_P| \propto PC$

Esistono dei criteri per individuarlo

Note le velocità di due punti del corpo



1) retta $\perp$ a $\vec{v}_P$
2) retta $\perp$ a $\vec{v}_A$
3) C è il punto di intersezione

NOTA CIR può essere posto fuori dal corpo rigido

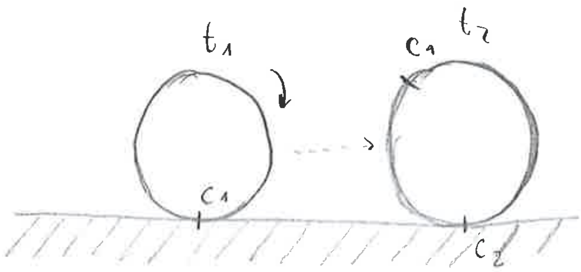
$\vec{V}_{CIR} = 0 \not\Rightarrow \vec{a}_{CIR} = 0$ (può essere, ma anche no)

Il CIR viene anche detto "CENTRO DELLE VELOCITÀ" che non è il CENTRO DELLE ACCELERAZIONI (per quanto mostrato prima)

→ Che traiettoria descrive il CIR nel tempo?

La traiettoria descritta dal CIR si chiama POLARE FISSA nel piano fisso oppure POLARE MOBILE nel piano mobile solidale con il corpo

esempio: RUOTA CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE (rotolamento puro)



V_{C_1} è la stessa di quella del terreno (nulla)

Nel MOTO DI ROTOLAMENTO PURO i due corpi, nel pt. di contatto, hanno la stessa velocità

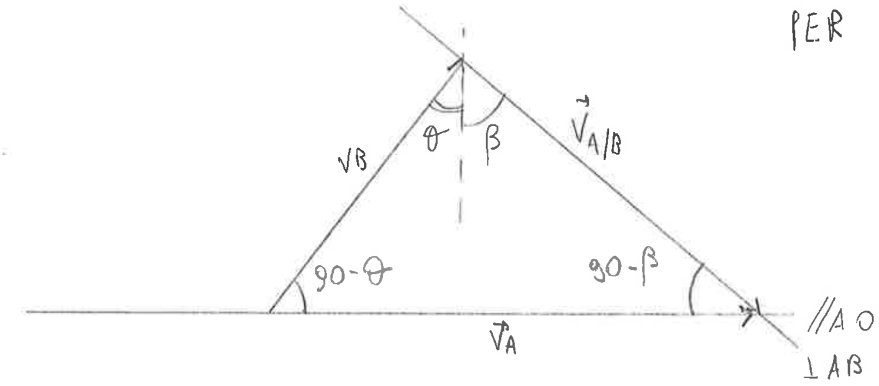
la POLARE FISSA è la retta del terreno
la POLARE MOBILE è la circonferenza della ruota

PROPRIETÀ (vale sempre)   La polare mobile ruota sulla polare fissa senza strisciare

$\vec{V}_B$ moto completamente
$\vec{V}_A$, $\vec{V}_{A/B}$ noti solo in direzione

SUCCEDE SEMPRE COSÌ NEI PROBLEMI DI CINEMATICA

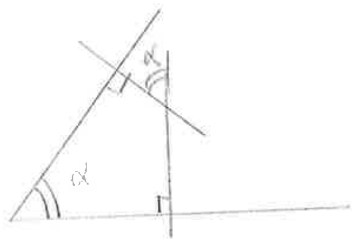
Triangolo delle velocità (non in scala)
↓
PER TROVARE IL <u>VERSO</u>



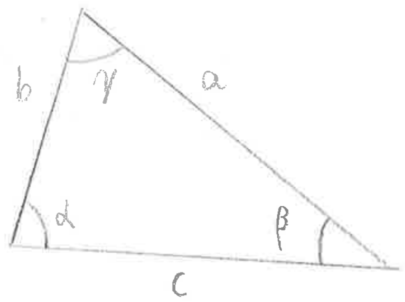
per capire gli angoli

RAGIONAMENTO:
"l'angolo compreso tra la ⊥ ad AB e la // ad AO nel disegno iniziale è?" →

Teorema di Euclide



Teorema dei seni



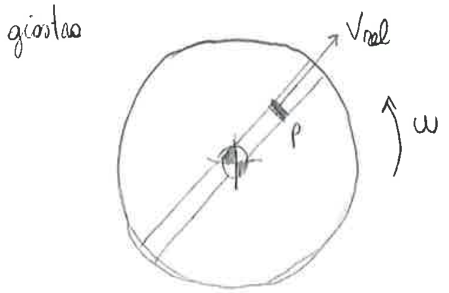
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

→ PER TROVARE <u>INCOGNITE</u>

$$\frac{V_B}{\sin(90-\beta)} = \frac{V_A}{\sin(\theta+\beta)} = \frac{V_{A/B}}{\sin(90-\theta)}$$

$$\frac{V_A}{\sin(\theta+\beta)} = \frac{V_B}{\sin(90-\beta)} \qquad \Bigg| \qquad \frac{V_{A/B}}{\sin(90-\theta)} = \frac{V_B}{\sin(90-\beta)}$$

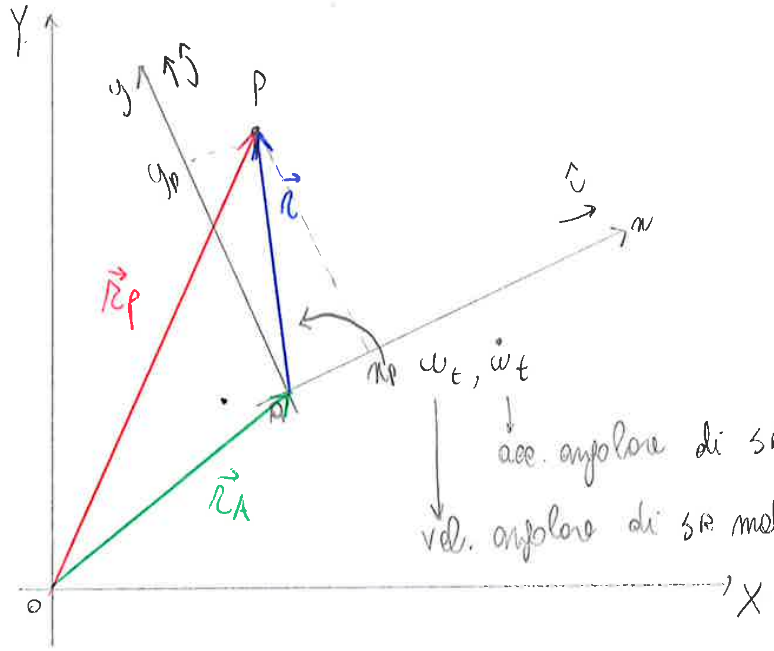
MOTI COMPOSTI o MOTI RELATIVI



Per calcolare la v di P vista un osservatore che non ruota abbiamo bisogno di due sistemi di riferimento

SR < FISSO (scelta arbitraria) / MOBILE

Il SR MOBILE è scelto arbitrariamente ma in modo che sia semplice esprimere il moto relativo



SR FISSO XOY

SR MOBILE xAy

$\omega_t \rightarrow$ TRASCINAMENTO

MOTO TRASCINAMENTO è il moto che P avrebbe se fosse reso solidale con il sistema di riferimento mobile (moto che ha SR mobile)

piantato chiodo su P del SR mobile, si muove direttamente con xAy. P è bloccato con (x_p, y_p)) BLOCCATO CON SR MOBILE

MOTO RELATIVO è il moto di P visto da un osservatore solidale con il SR mobile derivo $\hat{i}\,\hat{j}$ con POISSON (19)

$$= \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}_t}{dt} \wedge (x\hat{i} + y\hat{j}) + \vec{\omega}_t \wedge \left[\vec{\omega}_t \wedge (x\hat{i} + y\hat{j})\right] + \omega_t \wedge (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j}) + \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j} + \omega_t \wedge (\dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j})$$

$$\boxed{\vec{a}_p = \vec{a}_{tp} + \vec{a}_{rp} + \vec{a}_{cp}}$$

dove

$$\vec{a}_{tp} = \vec{a}_A + \frac{d\omega_t}{dt} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega}_t \wedge (\vec{\omega}_t \wedge \vec{AP})$$

ACC. TRASCINAMENTO (RIVALS) appunti precedenti

$$\vec{a}_{rp} = \ddot{x}\hat{i} + \ddot{y}\hat{j}$$

ACC. RELATIVA

⚠ $\vec{a}_{rp} \neq \frac{d\vec{V}_{rp}}{dt}$

$$\boxed{\vec{a}_{cp} = 2\,\omega_t \wedge \vec{V}_{rp}}$$

ACC. CORIOLIS (o complementare)

NOTA: ⚠ ω_t è la velocità di rotazione del SR mobile scelto da noi (nell'es. non c'è scelto ω_t, dipende dalle scelte!

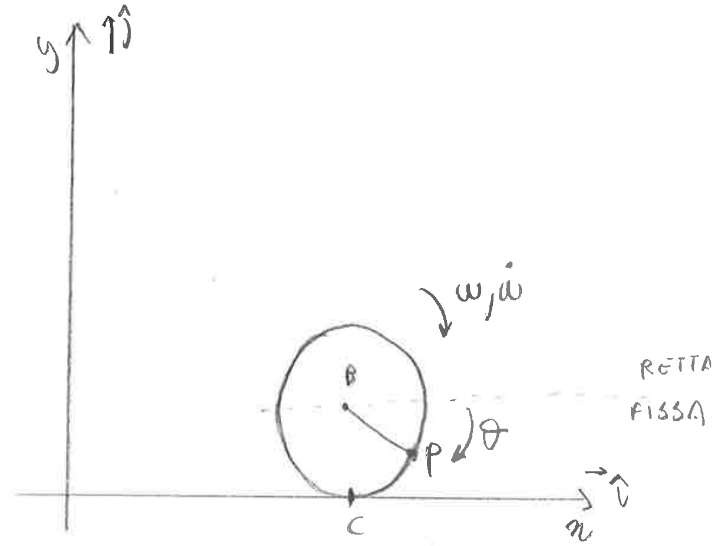
MOTI ASSOLUTI

Fino ad ora i metodi per risolvere gli es

1) F.F. CINEMATICA + RIVALS
2) CIR (da usare poco)

Ora aggiungiamo

3) DERIVAZIONE DELLE RELAZIONI GEOMETRICHE
→ in generale è complicato, trovo in poche applicazioni come questa!



moto rotolamento puro

$\overrightarrow{BP} = r$ (= cost)

$\theta = \omega t$ $\left[\omega = \frac{d\theta}{dt}\right]$

$$\begin{cases} x_P = x_B + r\cos\theta \quad [r\cos(\omega t)] \\ y_P = r - r\sin\theta \quad [r\sin(\omega t)] \end{cases} \quad \forall t \Rightarrow \text{deriv} \left(\frac{d}{dt}\right) \begin{cases} \dot{x}_P = \dot{x}_B - r\omega\sin\theta \\ \dot{y}_P = -r\omega\cos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{deriv} \begin{cases} \ddot{x}_P = \ddot{x}_B - r\dot{\omega}\sin\theta - r\omega^2\cos\theta \\ \ddot{y}_P = -r\dot{\omega}\cos\theta + r\omega^2\sin\theta \end{cases}$$

Considero il moto di C
(C è P con $\theta = 90°$) quando ω = cost ($\dot{\omega} = 0$)

→

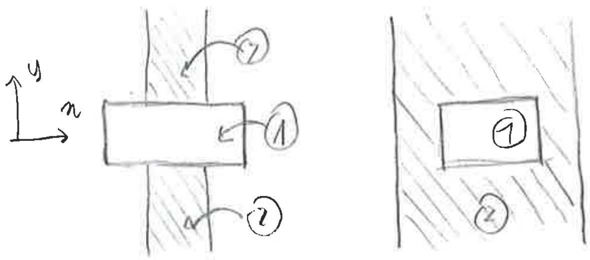
COLLEGAMENTI TRA CORPI RIGIDI

COPPIE CINEMATICHE (CINEMATISMI)

moto relativo determinato dalla geometria delle superfici coniugate

VINCOLI (elenco)

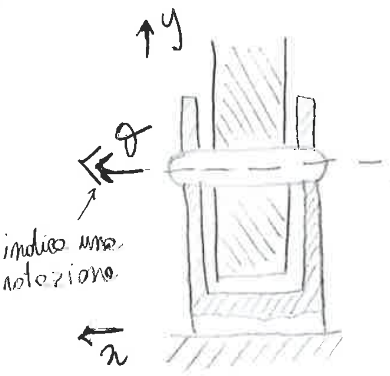
1) Coppia PRISMATICA (o guida lineare)



GRADI DI LIBERTÀ → 1

- consente traslazione lungo x
- impedisce rotazioni e traslazioni lungo y

2) COPPIA ROTOIDALE (o cerniera) più utilizzata



GRADI DI LIBERTÀ → 1

- lungo x e y sono vietati
- solo rotazione θ

CERNIERA FISSA  oppure 

CERNIERA MOBILE 

Si usano spesso

CUSCINETTI RADENTI (bronzina) → costituito da materiale più tenero, posto tra albero e boccola

CUSCINETTI VOLVENTI (minore attrito)

3) APPOGGIO SCORREVOLE (carrello)

realizzato con coppia prismatica più coppia rotoidale

GRADI DI LIBERTÀ → 2

- impedita traslazione ⊥ al piano
- permessa rotazione e traslazione // al piano

- Nello SPAZIO un corpo rigido ha 6 GDL (per esempio la posizione x, y, z di un suo punto e 3 rotazioni)
- Nel PIANO un corpo rigido ha 3 GDL

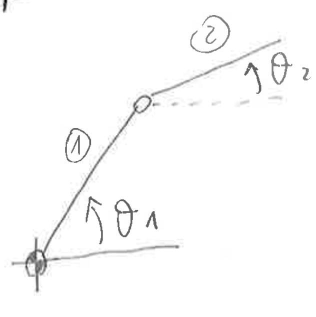
REGOLE SUI GDL

- la CERNIERA (fissa o mobile) toglie 2 GDL
- la GUIDA LINEARE toglie 2 GDL
- il CARRELLO 1

Per i CINEMATISMI PIANI:

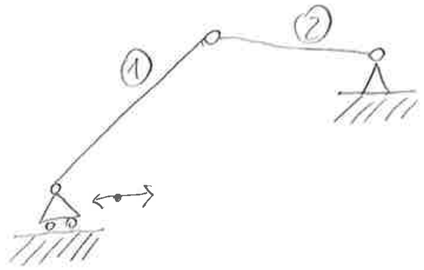
$$\boxed{N_{GDL} = N_{elementi} \cdot 3 - N_{cerniere} \cdot 2 - N_{guide\ lin} \cdot 2 - N_{carrelli} \cdot 1}$$

esempio



$N = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2 \Rightarrow$ siccome sono 2 in genere scelgo θ_1 e θ_2

esempio: MANOVELLISMO (sistema biella - manovella)



$N = 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$

il GDL lo scelgo io, il numero no! ⚠

ANALISI DELLE FORZE

Si possono classificare in base a certe proprietà

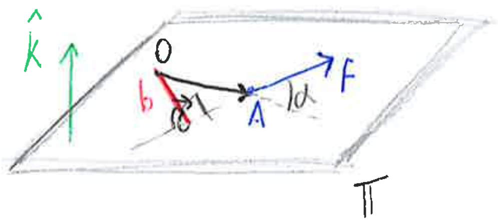
1) NATURA DELLA FORZA
- forze DI CONTATTO (o di superficie)
  - Pressioni (⊥ sup)
  - (Tangenziali) attrito o F. viscose
- forze DI MASSA
  - peso
  - elettromagnetiche
  - forze di inerzia

2) POSIZIONE DELLA FORZA RISPETTO AL SISTEMA
- forze ESTERNE
- forze INTERNE (hanno risultante nulla ma in genere a lavoro non nullo)

3) LAVORO COMPIUTO DALLE FORZE
- forze MOTRICI (stesso verso del moto, $\mathcal{L}>0$)
- forze RESISTENTI (verso opposto, $\mathcal{L}<0$)

4) APPLICAZIONE DELLA FORZA
- forze CONCENTRATE
- forze DISTRIBUITE

MOMENTO DI UNA FORZA



$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{F} = \overline{OA} \cdot F \cdot \sin\alpha \; \hat{k}$$

(regola mano dx)

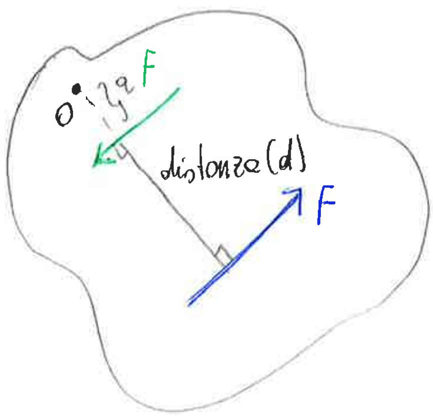
- $\overline{OA} \sin\alpha$ è detto anche BRACCIO DELLA $\vec{F}$
- Momento → associato all'idea di ROTAZIONE
- Vale la proprietà DISTRIBUTIVA, ovvero

$$(\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \wedge \vec{F} = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \vec{r}_2 \wedge \vec{F}$$

$$\vec{r} \wedge (\vec{P} + \vec{Q}) = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{Q}$$ → utile quando $\vec{P}$ e $\vec{Q}$ sono le componenti di $\vec{F}$ in un sistema di riferimento cartesiano

COPPIA DI FORZE

è il momento prodotto da una "coppia di $\vec{F}$" con stesso modulo, verso opposto (devono essere parallele) e non allineate



è arbitrario, lo scelgo

$$M_O = \underbrace{F(a+d)} - \underbrace{Fa} = Fd$$

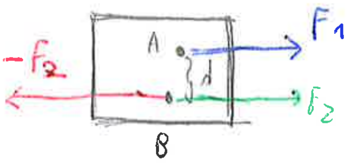
⇒ il momento prodotto da una coppia di $\vec{F}$ NON DIPENDE DAL POLO

$$\rightarrow \vec{C} = Fd$$

Il vettore coppia $\vec{C}$ è un VETTORE LIBERO (non applicato)

TAUTOLOGIA $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

CONDIZIONE (suff ?) NECESSARIA anche è che il momento risultante sia nullo (rispetto a qualsiasi polo)

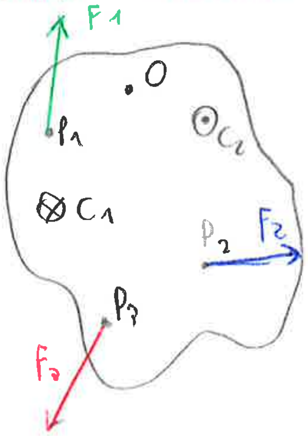


$M_A = 0$

$M_B = F_1 d \neq 0$

$\Rightarrow$ NON IN EQUILIBRIO (inoltre anche $\vec{R} \neq \vec{0}$)

EQUAZIONI CARDINALI DELLA STATICA



$$\begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0} & (1) \\ \vec{M}_O = \sum_{i=1}^{n} (\vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i) + \sum_{j=1}^{N} \vec{C}_j = \vec{0} & (2) \end{cases}$$

il corpo è in equilibrio $\Leftrightarrow$ sono verificate le due eq. vettoriali (1), (2).

NOTA: Rispetto ad un POLO QUALSIASI (scelto a piacere)

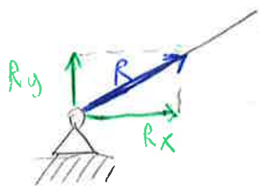
REGOLA PER LA SCELTA DEL POLO

Lo scelgo in modo da eliminare ("ammazzare") il maggior numero di incognite

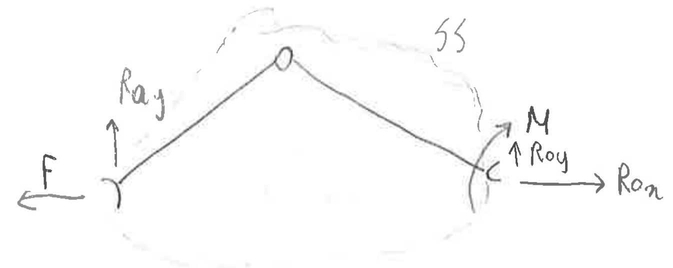
REAZIONI VINCOLARI

Sono le azioni che il vincolo è in grado di esercitare

1) CERNIERA

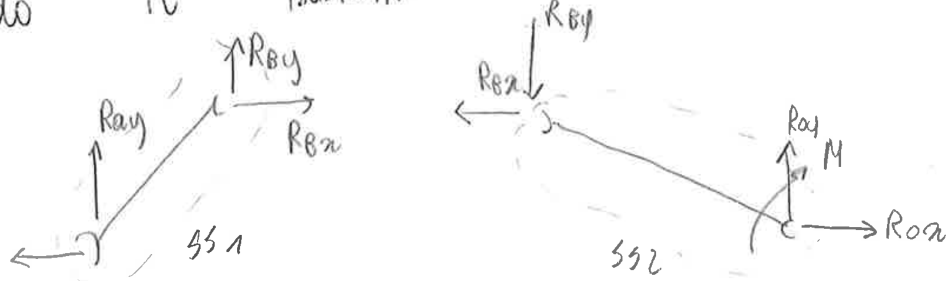


impedisce x e y e dunque esercita R_x e R_y



inserisco TUTTE le $\vec{F}$ 33

3) confrontare il numero di incognite con il numero di equazioni disponibili. Se mancano equazioni disegno altri diagrammi di corpo libero spezzando il sistema

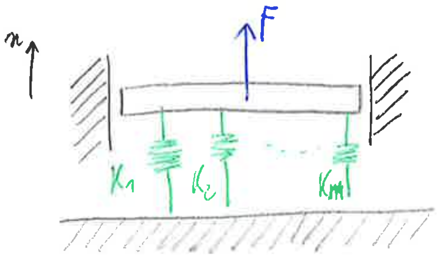


4) scrivere le EQ. DI EQUILIBRIO

5) risolvere il SISTEMA ALGEBRICO LINEARE (n eq in n incognite). La soluzione è un insieme di forze e momenti.

NOTA: risolvere il sistema prima in forma letterale possibilmente effettuando un controllo dimensionale

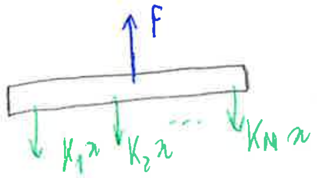
- COMBINAZIONE DI MOLLE



GUIDA PRISMATICA

* Due molle si dicono in PARALLELO quando hanno lo stesso spostamento (non lo stesso $\vec{F}$)

DCL



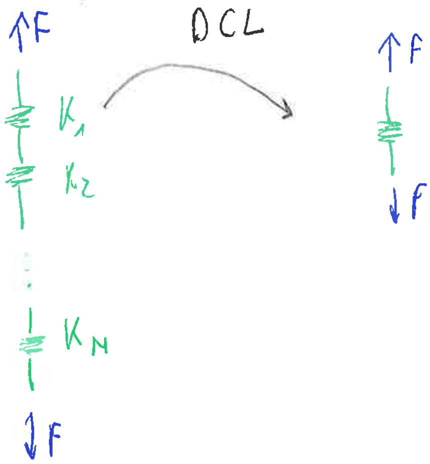
$$\uparrow \quad F - K_1 x - K_2 x - \dots - K_N x = 0$$

$$F = \sum_{i=1}^{N} K_i x = x \sum_{i=1}^{N} K_i = x K_{eq}$$

$$\boxed{K_{eq} = \sum_{i=1}^{N} K_i}$$

RIGIDEZZA EQUIVALENTE

* Due molle si dicono in SERIE quando hanno la stessa forza



$$F = K_1 \Delta x_1 \rightarrow \Delta x_1 = \frac{F}{K_1}$$

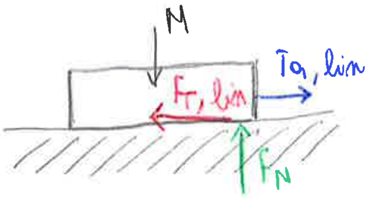
$$\Delta x = \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i$$

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{M} \frac{F}{K_i} = F \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{K_i} = \frac{\cancel{K}F}{K_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{K_{eq}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i}}$$

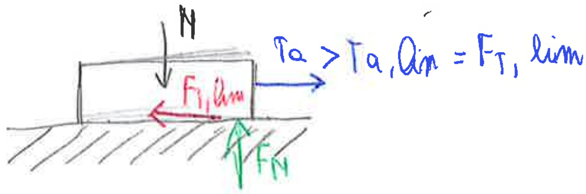
CEDEVOLEZZA EQUIVALENTE

c) aumentiamo T_a
$\Rightarrow$ siamo in $\boxed{\text{condizioni di aderenza limite}}$



F_N ancora più spostata rispetto al punto b

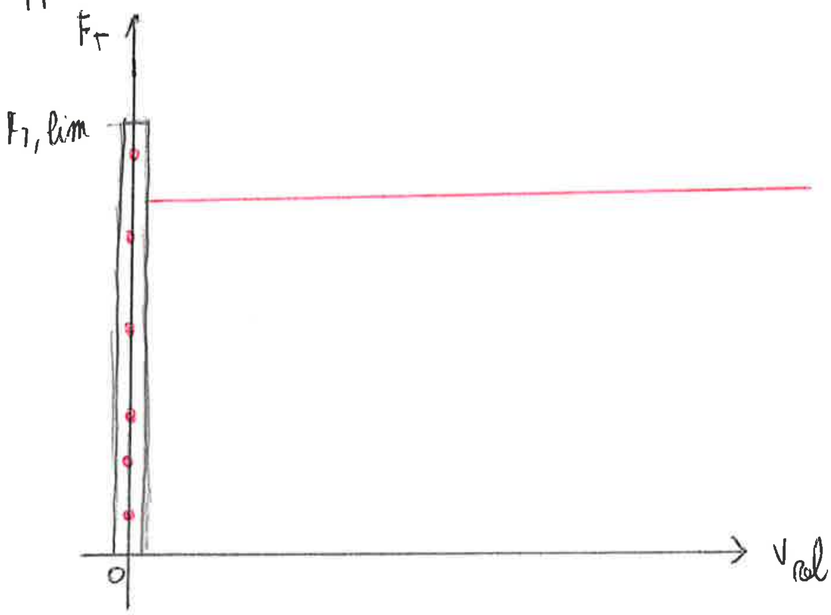
d) se superiamo $T_{a,lim}$ $\rightarrow$ si innesca il moto



nasce uno squilibrio di forze che determina il moto

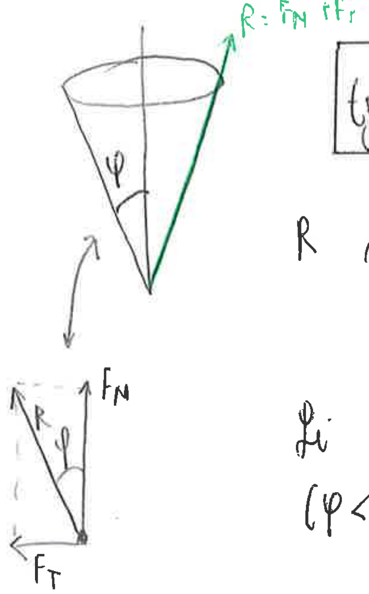
Si osserva che per mantenere il moto a velocità costante è necessaria una forza minore di $T_{a,lim}$ (una volta superato!)

Rappresentiamo modello di attrito coulombiano



CONO DI ATTRITO

In condizioni di ATTRITO



$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = f}$

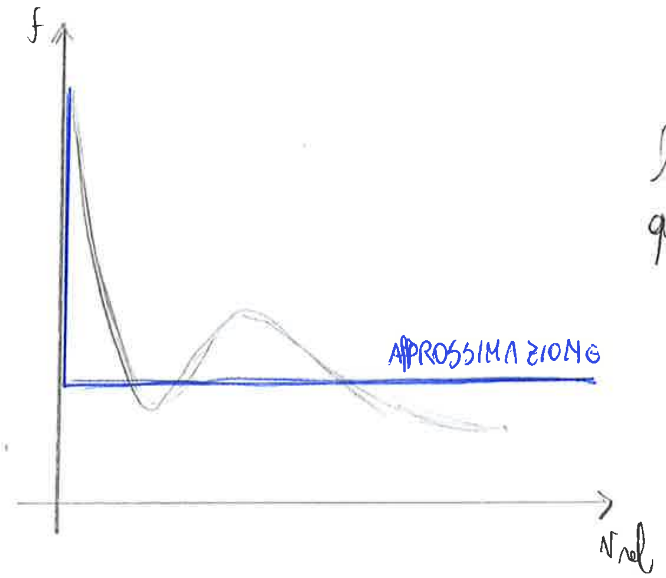
R si deve trovare sul cono di attrito

Si osserva sperimentalmente che $f < f_a$

$(\varphi < \varphi_a) \rightarrow f < f_a$

f dipende da molteplici fattori, (specialmente dalla coppia di materiali a contatto)

Realmente anche dalla velocità



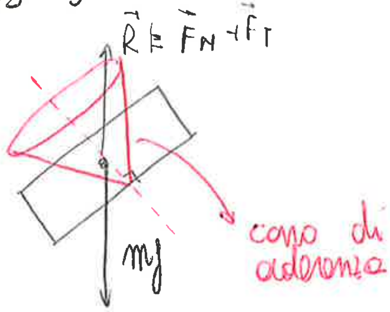
la si approssima con quella blu

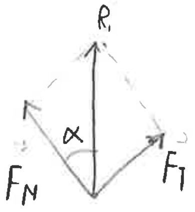
41

• se $\beta = 0$

$$f_{a,min} = \frac{|S - mg \sin\alpha|}{mg \cos\alpha}$$

• se $S = 0$





$\vec{R}$ interno al cono di aderenza

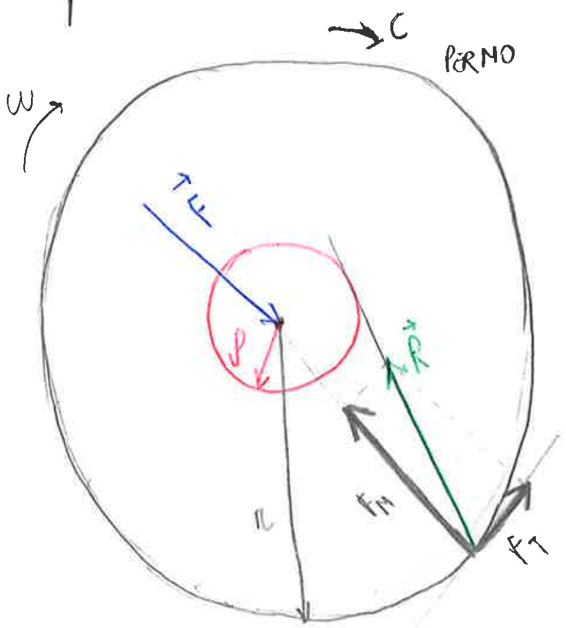
$$\frac{F_T}{F_N} = tg\,\alpha \leq tg\,\varphi_a = f_a \quad \text{aderenza}$$

$$\boxed{\alpha \leq \varphi_a}$$

<u>oss</u> F_T contrasta la causa motrice ($mg \sin\alpha$) e infatti ha cambiato verso

$\boxed{\rho \overset{def}{=} r \sin \varphi}$ è detto RAGGIO DEL CERCHIO D'ATTRITO

Questo discorso lo si può estendere a qualsiasi $\vec{F}$ con qualsiasi direzione



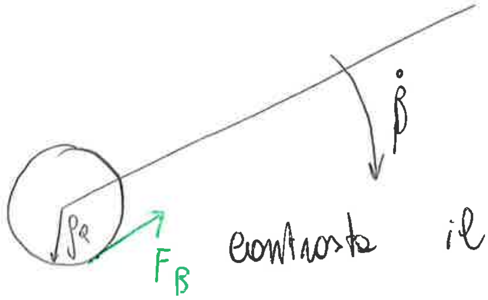
$C = F\rho = F_T\, r$

R è tangente al cerchio di attrito

Non è necessario disegnare il dettaglio di perno e boccola, ma

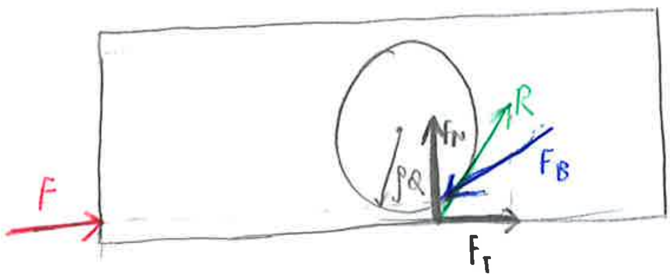
1) si disegna il cerchio di attrito $\rightarrow \rho_p = r_p \sin(\varphi_p)$
2) si determina il verso del moto relativo (verso di ω)
3) si disegna la forza di reazione tangente al cerchio in modo che si opponga al moto

ATTRITO AL PERNO



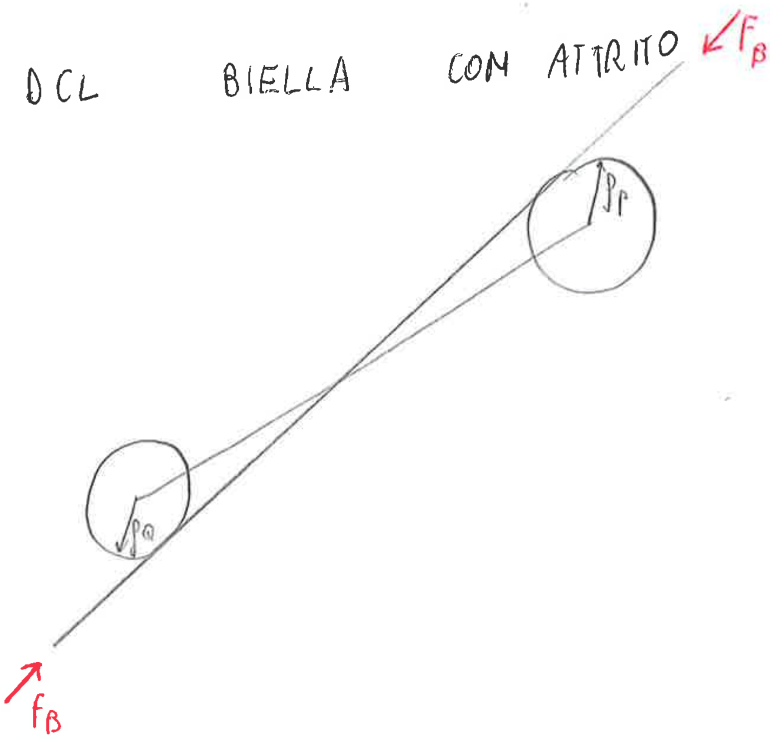
contrasta il moto, non la si può mettere sopra perché agevolerebbe il moto (era una coppia concorde a $\dot{\beta}$, invece la deve essere opposta)

DCL PIEDE DI BIELLA



le forze devono passare tutte per lo stesso punto

DCL BIELLA CON ATTRITO



applicata alla biella e si oppone al moto della biella

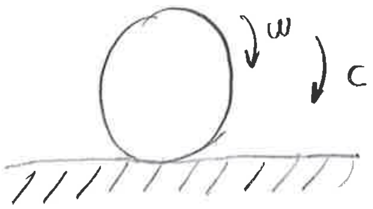
ATTRITO E ADERENZA NEI CORPI ROTOLANTI

velocità costante

Alcune situazioni tipiche:

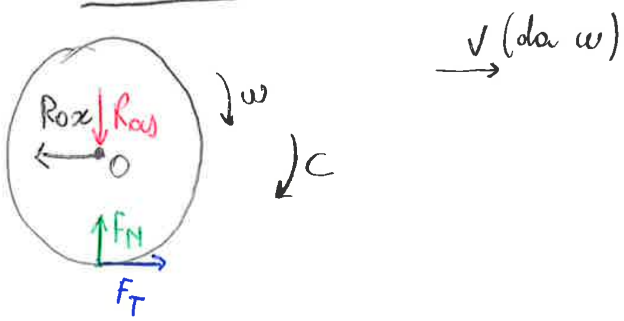
1) RUOTA MOTRICE

è una ruota a cui si applica una coppia motrice



DCL

ADERENZA

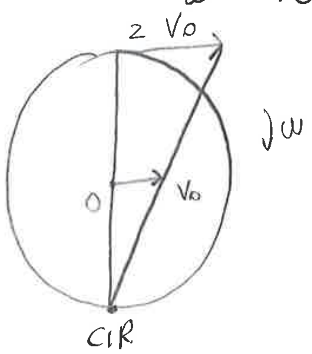


F_T è l'unica forza in grado di "opporsi" a C

$C = F_T \cdot R$

⚠ F_T ha lo stesso verso di v

$\frac{F_T}{F_N} \leq f_a$ siamo in aderenza: il pt. di contatto è il CIR

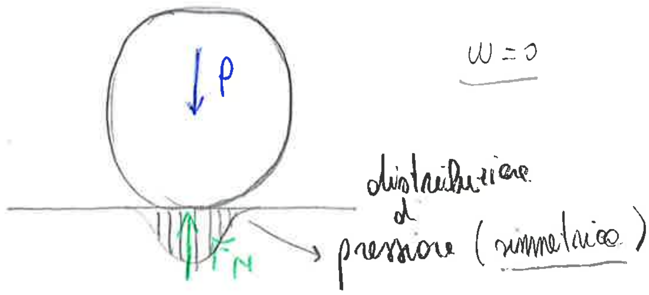


$V_0 = \omega R$

$V_{rel} = 0$

RESISTENZA AL ROTOLAMENTO : attrito volvente

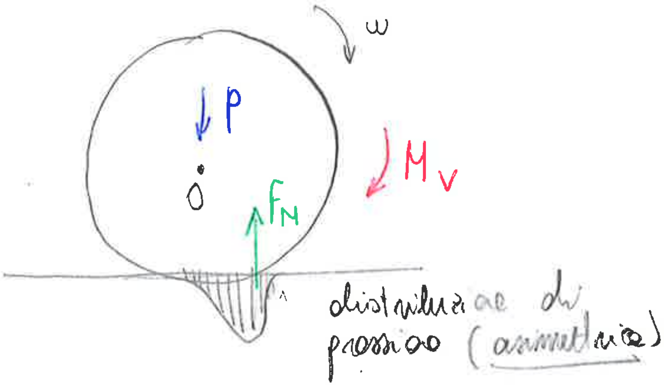
(49)



Si osserva sperimentalmente che per avere $\omega \neq 0$ bisogna vincere la resistenza al rotolamento : $M > M_V = \mu F_N$

$\boxed{\mu}$ PARAMETRO DI ATTRITO VOLVENTE (aumenta all'aumentare del raggio)

DCL



F_N spostata in avanti (rispetto alla generatrice ideale di contatto) nel verso del moto

$\vec{F}_N$ è una RESISTENZA!

$\vec{F}_N$ produce un momento rispetto O che ostacola il moto (ω)

In alternativa si definisce il COEFFICIENTE DI ATTRITO VOLVENTE

$$\boxed{f_V = \frac{\mu}{r}}$$

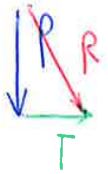
dove r = raggio della ruota (diminuisce all'aumentare del raggio)

$O \circlearrowleft \quad F_N\, u - F_T\, R = 0$

$$\frac{F_T}{F_N} = \frac{u}{R} \overset{def}{=} f_v \leq f_a$$

2) RUOTA TRASCINATA
ATTRITO COULOMBIANO
ATTRITO VOLVENTE
ATTRITO AL PERNO

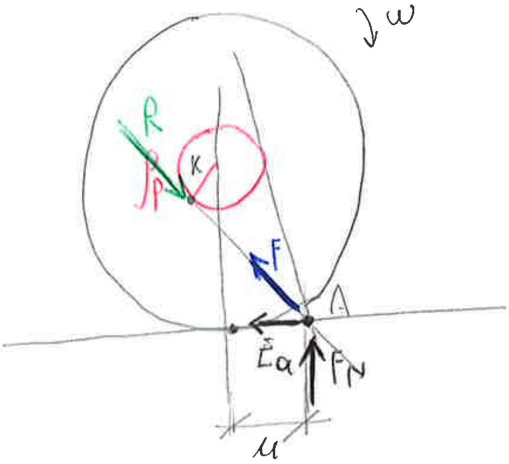
$\vec{P} + \vec{T}$ deve essere tangente al cerchio di attrito (non è necessario disegnare perno e boccola)



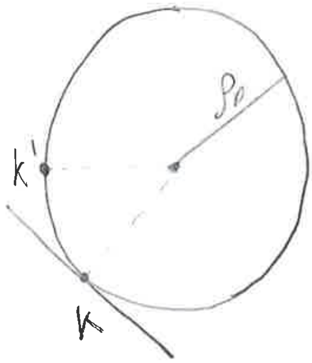
teoria dei cerchi di attrito
- disegno il cerchio
- determino i versi
- disegno $\vec{R}$ tangente in modo che si opponga al lato

$f_p \Rightarrow \varphi_p = \arctan(f_p)$

$\rho_p = R_p \sin(\varphi_p)$ (con 2/3 c.s.)

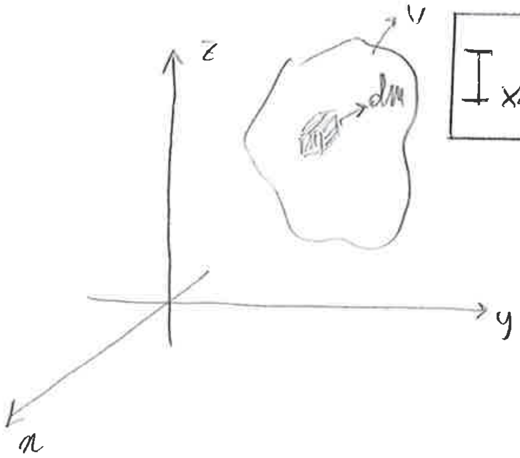


zoom di ρ_p



$\rho_p \ll R$ (almeno un ordine di grandezza)
$\Rightarrow K' \simeq K$

MOMENTI DI INERZIA (come la massa è distribuita rispetto al baricentro)



$$\boxed{I_{xx} = \int_V (y^2+z^2)\,\rho\, dV}$$

$$I_{yy} = \int_V (x^2+z^2)\,\rho\, dV$$

$$I_{zz} = \int_V (x^2+y^2)\,\rho\, dV$$

servono per studiare le rotazioni
sempre POSITIVI

MOMENTI CENTRIFUGHI (prodotti d'inerzia)

$$\boxed{I_{xy} = \int_V xy\,\rho\, dV = I_{yx}}$$

$$I_{yz} = \int_V yz\,\rho\, dV = I_{zy}$$

$$I_{xz} = \int_V xz\,\rho\, dV = I_{zx}$$

possono essere POSITIVI o NEGATIVI

NOTA se $I_{xy} = 0 \Rightarrow$ asse x o asse y o entrambi sono ASSI DI SIMMETRIA

se $I_{xy} = I_{yz} = I_{xz} = 0$ la terna di riferimento si dice PRINCIPALE (DI INERZIA)

In modo equivalente si può assegnare il RAGGIO DI INERZIA ρ

$$\boxed{I = m\rho^2} \longrightarrow \rho_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{m}}$$

Il raggio di inerzia è la distanza a cui dovremmo calcolare il corpo (punti fermo) per avere lo stesso momento di inerzia

APPROCCIO ALLA D'ALEMBERT

$\vec{F} = m\vec{a}$

$\vec{F} - m\vec{a} = \vec{0}$

$\boxed{\vec{F}' \overset{def}{=} -m\vec{a}_G}$ FORZA DI INERZIA

$M'_G = -I_G \dfrac{d\vec{\omega}}{dt}$ COPPIA DI INERZIA BARICENTRICA

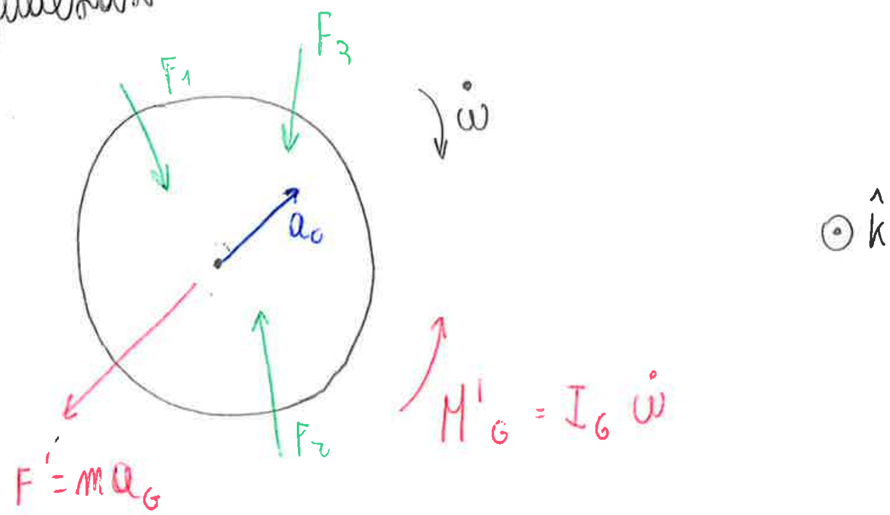
Posso trattare un problema di dinamica come se fosse un problema di statica usando $\underline{\vec{F}'}$ e $\underline{\vec{M}'_G}$

NOTA: le $\vec{F}'$ (forze di inerzia) sono forze che si originano quando un corpo si muove con velocità non costanti (uniformi)

EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum \vec{F}_e + \vec{F}^I = \vec{0} \quad (1) \\ \sum \vec{M}_e + \vec{M}^I = \vec{0} \quad (2) \end{array}}$$

Nel piano la (2) vale rispetto ad un polo qualsiasi



applicare $\vec{F}^I$ nel baricentro in verso opposto al moto del corpo $\vec{a}_G$ al baricentro e M^I_G (sempre opposto a $\dot{\omega}$)

Detta tale operazione RIDUZIONE DELLE AZIONI DI INERZIA.

Questo schema va trattato come se fosse un CASO STATICO

$$\boxed{\vec{M}^I_P = I_G \dot{\omega} \hat{k} + \vec{PG} \wedge \vec{F}^I}$$

momento risultante delle forze di inerzia rispetto a P

$\vec{PG} \wedge \vec{F}^I$ momento DELLA risultante delle forze di inerzia di inerzia al baricentro

2) la maggior parte degli studenti lo applica impropriamente

IMPULSO LINEARE & QUANTITÀ DI MOTO

$$\sum \vec{F}_e = m\vec{a} = \frac{d}{dt}[m\vec{v}]$$

$$\boxed{\vec{Q} \stackrel{def}{=} m\vec{v}}$$ quantità di moto

$$\boxed{\sum \vec{F}_e = \frac{d\vec{Q}}{dt}}$$

Nel piano $\begin{cases} \sum F_{ex} = \dfrac{dQ_x}{dt} \\ \sum F_{ey} = \dfrac{dQ_y}{dt} \end{cases}$

Per un sistema di particelle $\vec{Q} = m_{TOT} \vec{v}_G$

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_e \, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{Q}}{\cancel{dt}} \cancel{dt} = \vec{Q}_2 - \vec{Q}_1$$

teorema dell'impulso (lineare)

nelle $\vec{F}_e$ NON metto le $\vec{F}'$ (inerzia)

È approccio alternativo al DCL

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{K}_A}{dt} + \vec{V}_A \wedge \vec{Q} \qquad \left(= \sum \vec{M}_e \right)$$

Per l'approccio alla D'Alembert

$$\vec{M}_A - \frac{d\vec{K}_A}{dt} - \vec{V}_A \wedge \vec{Q} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A + \vec{M}'_A = \vec{0}$$

definisco $\vec{M}'_A = -\frac{d\vec{K}_A}{dt} - \vec{V}_A \wedge \vec{Q}$

Si semplifica quando

- $A \equiv O$ (punto fisso)

  $\vec{M}'_O = -\frac{d\vec{K}_O}{dt} \rightarrow \vec{V}_O = \vec{0}$

- $A \equiv G$ (baricentro)

  $\vec{V}_G \wedge \vec{Q} = \vec{V}_G \wedge \cancel{m\vec{V}_G} = \vec{0}$

  $\vec{M}'_G = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}$

$$\boxed{\vec{M}'_{O/G} = -\frac{d\vec{K}_{O/G}}{dt}}$$

Generalmente nello spazio si sceglie O fisso oppure G (baricentro) se $\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{F}_e \, dt = \vec{0} \Rightarrow \vec{Q} = \text{cost}$

teorema di conservazione della quantità di moto

se $\int_{t_1}^{t_2} \sum \vec{M}_{e_0} \, dt = \vec{0} \Rightarrow \vec{K} = \text{cost}$

teorema di conservazione del momento della quantità di moto

TERNA CENTRALE D' INERZIA (TCI)

PRINCIPALE : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ mom. centrifughi

+

BARICENTRICA : I calcolato con riferimento terna cartesiana centrata in G

=

CENTRALE DI INERZIA (*) baricentrica + principale

indicata da tre versori $\hat{\lambda}, \hat{\mu}, \hat{\nu}$ che vanno cercati (risolvere problemi di autovalori)

$$\vec{K}_G = I_\lambda \omega_\lambda \hat{\lambda} + I_\mu \omega_\mu \hat{\mu} + I_\nu \omega_\nu \hat{\nu}$$

dove

$$\begin{cases} \omega_\lambda = \vec{\omega} \cdot \hat{\lambda} = P \\ \omega_\mu = \vec{\omega} \cdot \hat{\mu} = Q \\ \omega_\nu = \vec{\omega} \cdot \hat{\nu} = R \end{cases}$$ prodotti scalari

$$\omega_\lambda = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{\lambda} = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{j}_1 = (\omega \hat{i}_1 + \Omega \hat{i}) \cdot \hat{j}_1 = -\Omega \sin\alpha \quad (P)$$ 65

$$\omega_\mu = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{\mu} = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{k}_1 = (\omega \hat{i}_1 + \Omega \hat{i}) \cdot \hat{k}_1 = 0 \quad (Q)$$

$$\omega_\nu = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{\nu} = \vec{\omega}_{TOT} \cdot \hat{i}_1 = (\omega \hat{i}_1 + \Omega \hat{i}) \cdot \hat{i}_1 = \omega + \Omega \cos\alpha \quad (R)$$

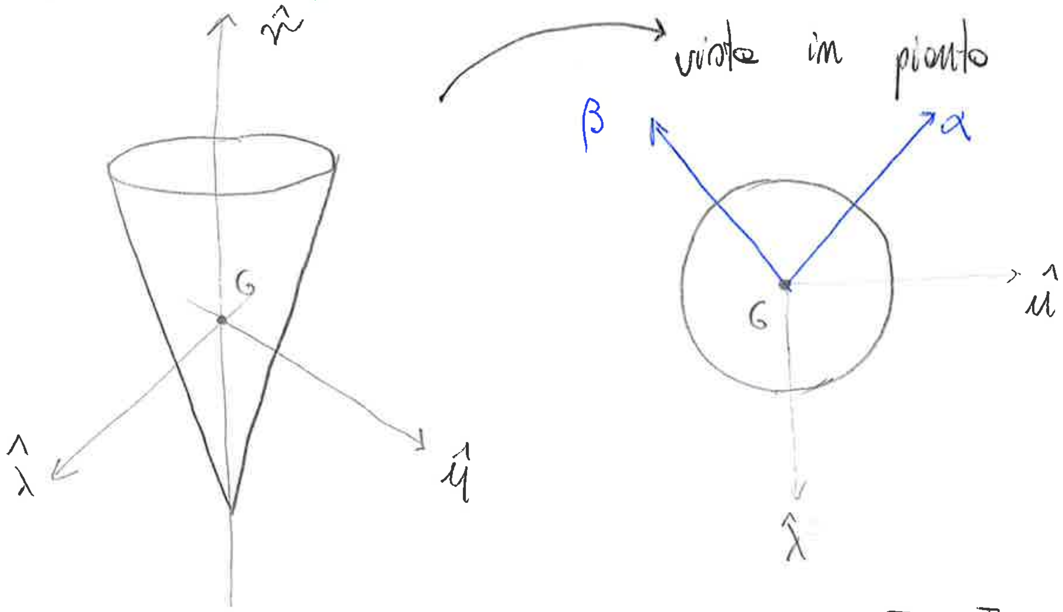
$$\vec{K}_G = I_\nu (\omega + \Omega \cos\alpha) \hat{i}_1 - I_\lambda \Omega \sin\alpha \, \hat{j}_1$$

ω, Ω, α cost

I_ν = cost

$\hat{i}_1$ e $\hat{j}_1$ ruotano alla velocità Ω

SOLIDO GIROSCOPICO



$$I_\lambda = I_\mu = I_\alpha = I_\beta$$

$$\frac{d\hat{i}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{i}_1 \qquad \text{(per Poisson)}$$

$$\frac{d\hat{j}_1}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{j}_1 \qquad \text{(per Poisson)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 214

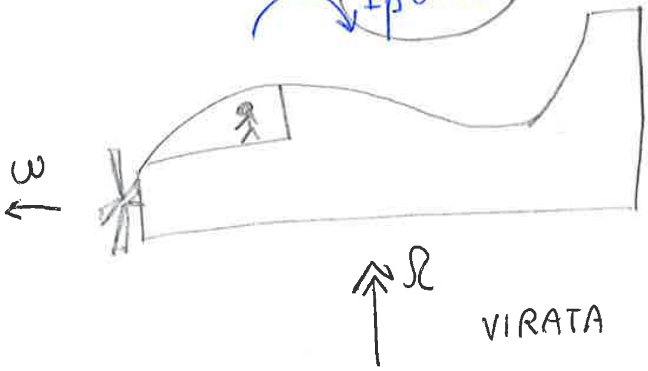
APPLICAZIONI FENOMENI GIROSCOPICI AEROSPACE

<u>esempio</u>: ELICA MULTIPALA AEREO

n° pale > 3

masse

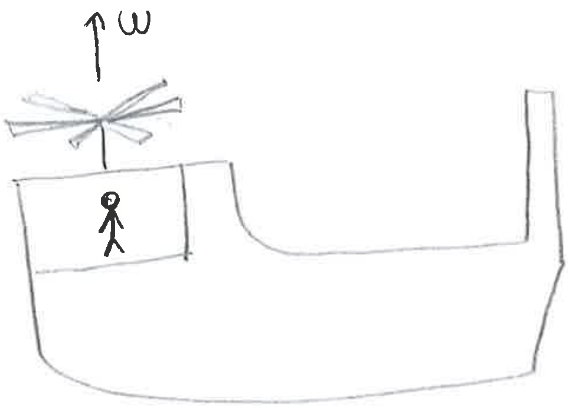
$I_p \omega \Omega$ ha EFFETTO CABRANTE



VIRATA

<u>esempio</u>: ROTORE PRINCIPALE ELICOTTERO

n° pale > 3



$I_p \omega \Omega$ produce ROLLIO

$\odot\ \Omega$ PICCHIATA

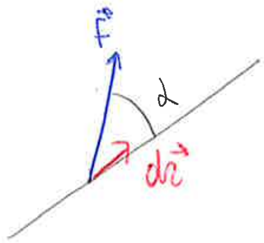
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 214

LAVORO ED ENERGIA

Esistono metodi ENERGETICI (al posto di quelli vettoriali)

LAVORO INFINITESIMO

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cos\alpha \, dr$$

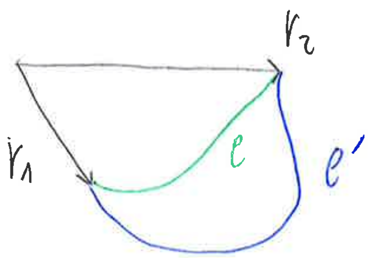


Nel caso di una coppia $dL = C d\theta$

LAVORO

$$L = \int dL \qquad [J]$$

Se il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e finale la forza si dice conservativa



$$\int_{\ell} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = \int_{\ell'} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r}$$

$$\oint \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = 0$$

In questo caso si definisce ENERGIA POTENZIALE

$$\mathcal{L}_{1,2} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{cons} \cdot d\vec{r} = U_1 - U_2 = -\Delta U$$

POTENZA

$$W \overset{def}{=} \frac{dL}{dt} \qquad [W] = \frac{J}{s}$$

COPPIA	FORZA
$C\frac{d\theta}{dt} = C\omega$	$F\frac{dr}{dt} = Fv$

prodotto de ...

LAVORO RISULTANTE - ENERGIA CINETICA

sappiamo

$$\Sigma \vec{F}_e = m\frac{d\vec{v}}{dt} \qquad \forall t$$

$$\int_1^2 \Sigma F_e \, d\vec{r} = \int_1^2 m\frac{d\vec{v}}{dt}\, d\vec{r} = \int_1^2 m v \, d\vec{v} = \int_1^2 d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m v_2^2 - \frac{1}{2}m v_1^2 = \Delta E_c$$

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m v^2} \quad (=T)$$

$$\int_1^2 \Sigma \vec{F}_e \cdot d\vec{r} = \Delta E_c$$

teorema dell'energia cinetica (o delle F vive)

Per un corpo rigido nello spazio

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}m v_G^2 + \left[\frac{1}{2}I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2}I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2}I_r \omega_r^2\right]}$$

- se assegno m con asta omogenea di lunghezza l

$$\boxed{I_G = \frac{1}{12} m L^2}$$

- momento polare di un disco omogeneo $\boxed{I_p = \frac{1}{2} m R^2}$
- momento diametrale di un disco sottile $\boxed{I_d = \frac{1}{4} m R^2}$

EQUAZIONE DELL' ENERGIA

Per un sistema meccanico vale la seguente equazione

$$d\mathcal{L}_e + d\mathcal{L}_i = dE_c + dE_g + dE_{el}$$

oppure in termini finite

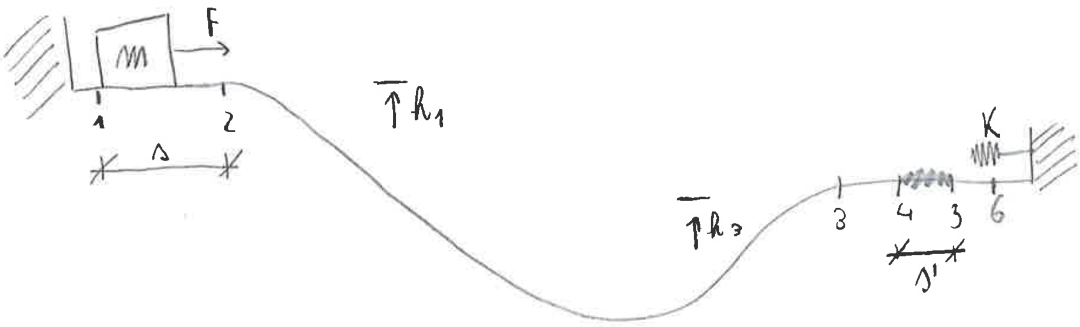
$$\boxed{\mathcal{L}_e + \mathcal{L}_i = \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_{el}}$$

$\mathcal{L}_e$ = LAVORO COMPIUTO DALLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL SISTEMA DI INTERESSE (esclusa la forza peso e le forze di inerzia)

$\mathcal{L}_i$ = LAVORO DELLE FORZE INTERNE AL SISTEMA (attriti, azioni elettromagnetiche)

Se i vincoli interni sono privi di attrito
$\Rightarrow \mathcal{L}_i = 0$

esempio:



Dati: m, $V_1=0$, $F=$ cost che agisce solo tra 1 e 2 (tratto s), h_1, h_3, f attrito solo tra 4 e 5 (tratto s'), k

Determinare: Δx

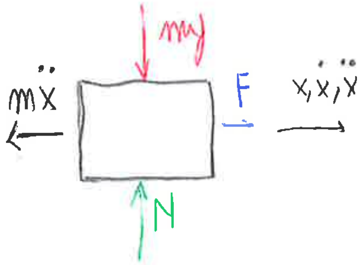
da 1 a 2

$$\mathcal{L}_e + \cancel{\mathcal{L}_i} = \Delta E_c + \cancel{\Delta E_g} + \cancel{\Delta E_{el}}$$

stessa quota   nessuna molla

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_e = \Delta E_c \\ &\mathcal{L} = F\cdot s \\ &\Delta E_c = \tfrac{1}{2} m V_2^2 - \cancel{\tfrac{1}{2} m V_1^2} \end{aligned}\right\} \rightarrow F\cdot s = \frac{1}{2} m V_2^2$$

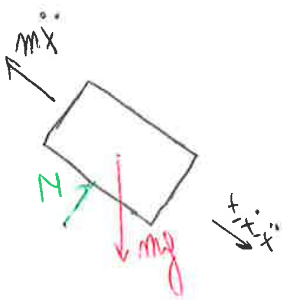
$\Rightarrow V_2 > 0$



da 2 a 3

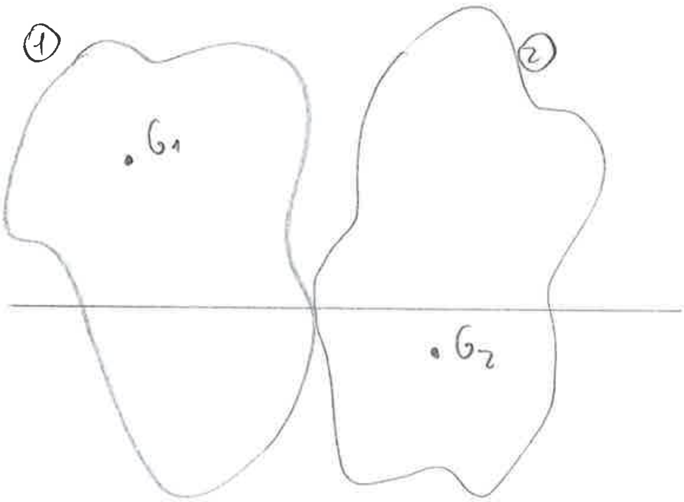
$$\cancel{\mathcal{L}_e} + \cancel{\mathcal{L}_i} = \Delta E_c + \Delta E_g + \cancel{\Delta E_{el}}$$

$$\frac{1}{2} m V_3^2 - \frac{1}{2} m V_2^2 + mg(h_3 - h_1) = 0 \quad \Rightarrow V_3 > V_2$$



URTI

Fenomeno che coinvolge due corpi aventi inizialmente velocità differente e che vengono a contatto per un tempo molto breve: si ha una variazione molto rapida della velocità.



LINEA D'URTO ($\perp$ sup. di contatto)

URTO CENTRALE linea d'urto passa per i due baricentri, altrimenti si ha un urto eccentrico

URTO CENTRALE
- **DIRETTO**: velocità iniziali // alla linea d'urto
- **OBLIQUO**: velocità iniziali <u>non</u> // alla linea d'urto

URTO CENTRALE DIRETTO

$$e = -\frac{\Delta v^+}{\Delta v^-} = -\frac{V_A^+ - V_B^+}{V_A^- - V_B^-}$$

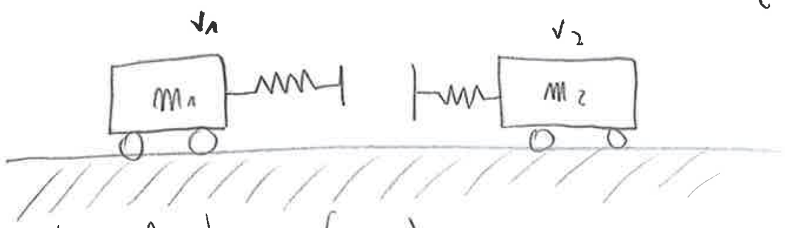
COEFFICIENTE DI RESTITUZIONE

$e = 1 \rightarrow$ urto ELASTICO $(\Delta E_c = 0)$

$e = 0 \rightarrow$ urto ANELASTICO $(\Delta E_c < 0)$

esempio CARRELLI FERROVIARI

$(V_2^- < V_1^-)$



- urto elastico $(e = 1)$

$Q^+ = Q^- \qquad m_1 V_1^+ + m_2 V_2^+ = m_1 V_1^- + m_2 V_2^-$

$$e = -\frac{V_1^+ - V_2^+}{V_1^- - V_2^-} = 1$$

equivale a $\frac{1}{2} m_1 (V_1^+)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^+)^2 = \frac{1}{2} m_1 (V_1^-)^2 + \frac{1}{2} m_2 (V_2^-)^2$

- urto anelastico $(e = 0)$

$Q^+ = Q^-$

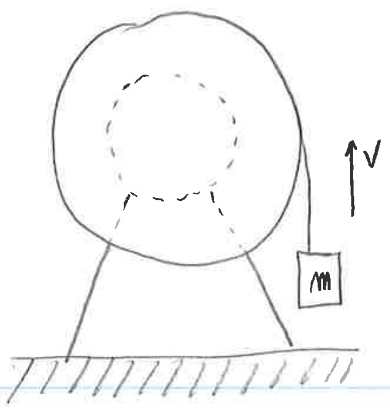
$$e = -\frac{V_1^+ - V_2^+}{V_1^- - V_2^-} = 0 \rightarrow V_1^+ = V_2^+ = V^+$$

$$m_1 V_1^- + m_2 V_2^- = (m_1 + m_2) V^+ \rightarrow V^+ = \frac{m_1 V_1^- + m_2 V_2^-}{m_1 + m_2}$$

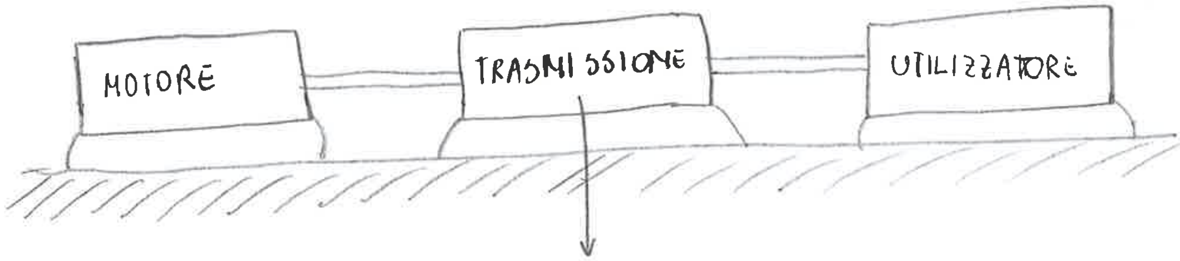
$$\Delta E_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(V^+)^2 - \frac{1}{2} m_1 (V_1^-)^2 - \frac{1}{2} m_2 (V_2^-)^2$$

esempio ARGANO

sollevamento



TRASMISSIONE

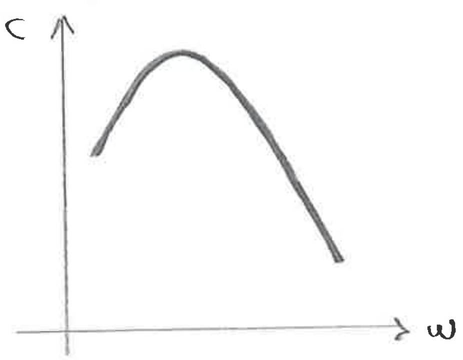


giunti, frizioni, riduttori

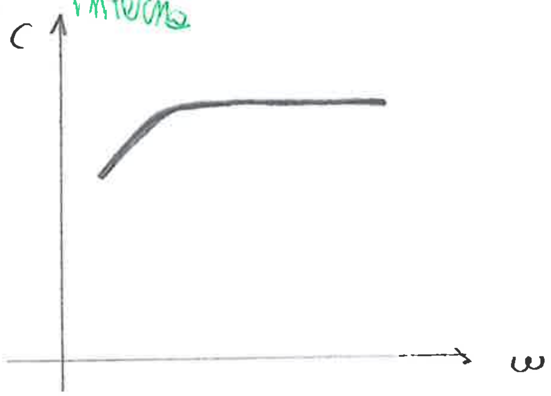
CARATTERISTICA MECCANICA MOTORE

Coppia in funzione della velocità di rotazione
(Coppie (F,v) per i motori lineari)

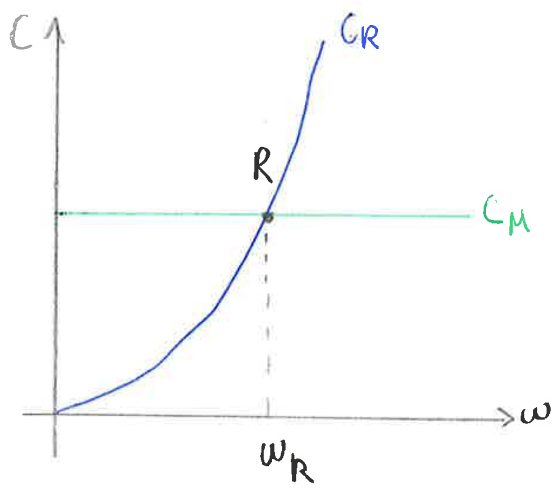
motori a combustione interna

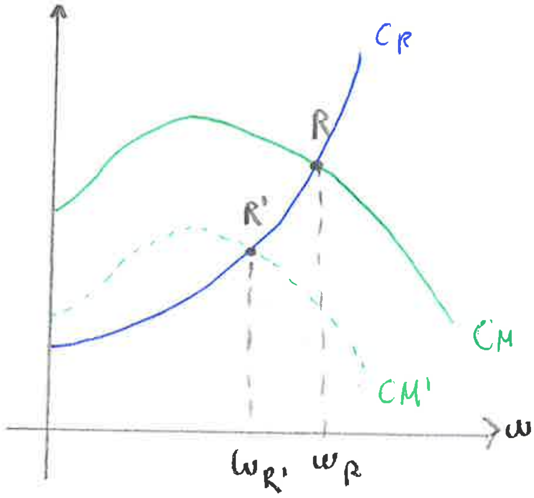


(OTTO)



(DIESEL)



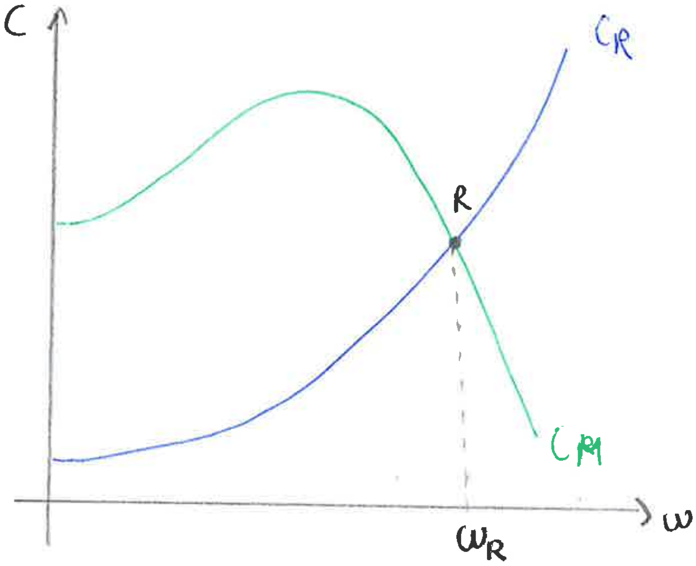


posso variare la coppia motrice (C_M)

$W = C_M \cdot \omega_R$

$W' = C_M' \omega_R' < W$

PUNTI DI FUNZIONAMENTO STABILI



è STABILE, ovvero dopo una perturbazione ritorna a ω_R

se $\omega > \omega_R \rightarrow C_R > C_M$ $\quad C_M - C_R = I\dot{\omega}$

$\dot{\omega} = \frac{C_M - C_R}{I} < 0 \Rightarrow \omega$ diminuisce e ritorna a ω_R

Si definisce RAPPORTO DI TRASMISSIONE

$$\boxed{\tau = \frac{\omega_{OUT}}{\omega_{IN}} = \frac{\omega_2}{\omega_1}} < 1 \text{ (RIDUTTORE)}$$

a volte si usa anche

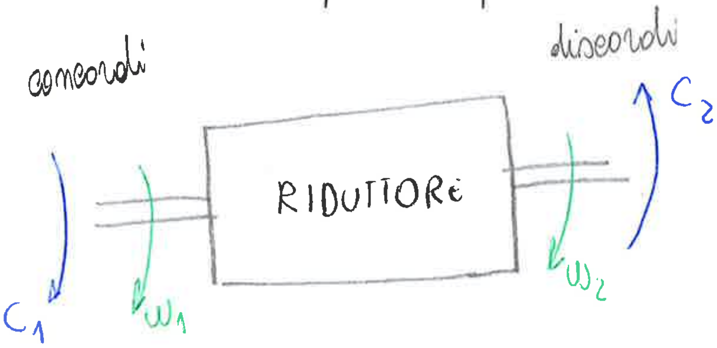
$i = \frac{\omega_{IN}}{\omega_{OUT}}$ detto anche RAPPORTO DI TRASMISSIONE

da $C_1 \omega_1 = C_2 \omega_2$

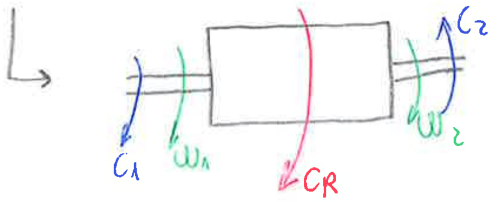
$$C_2 = \frac{C_1 \omega_1}{\omega_2} = \frac{C_1}{\tau} > C_1$$

è richiesta una coppia motrice minore rispetto all'accoppiamento diretto

$\Rightarrow$ motori più piccoli, meno pesanti, meno costosi



DCL

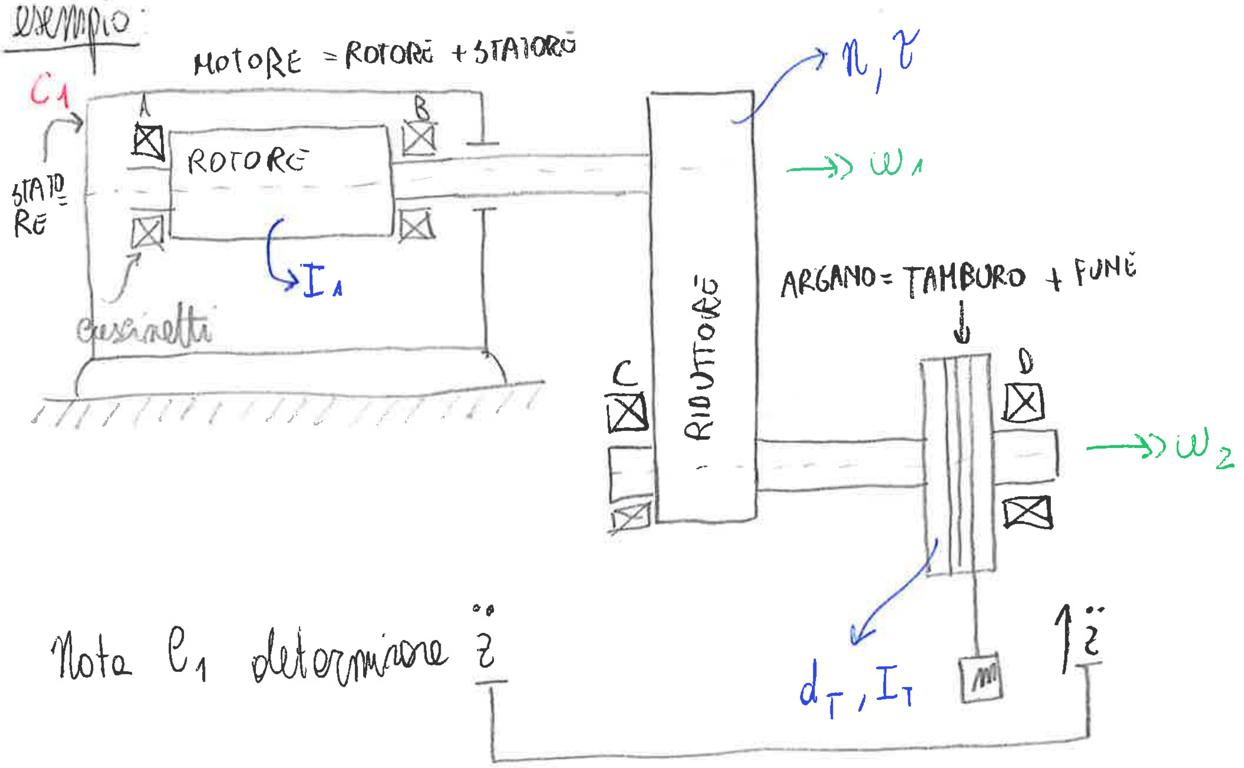


$$\boxed{C_R + C_1 = C_2}$$

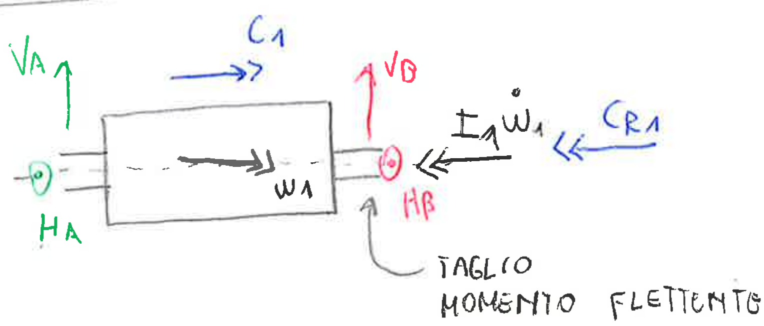
PERCORSO DI CARICO

è una successione di diagrammi di corpo libero in una trasmissione meccanica

esempio:



• DCL rotore



$$\rightarrow \boxed{C_1 - I_1 \dot\omega_1 - C_{R_1} = 0 \qquad (1)}$$

$\Rightarrow$ Prendo le eq. e sottolineo incognite ogni volta che le trovo

(1) $C_1 - I_1 \underline{\dot{\omega}_1} - \underline{C_{R1}} = 0$

(2) $\underline{C_{R2}} = \dfrac{C_{R1}\, \eta}{\tau}$

(3) $C_{R2} - I_T \underline{\dot{\omega}_2} - mg \dfrac{d_T}{2} - m\underline{\ddot{z}} \dfrac{d_T}{2} = 0$

5 incognite, 3 eq $\Rightarrow$ mi servono 2 eq

$$\boxed{\ddot{z} = \frac{d_T}{2} \dot{\omega}_2 \qquad (5)}$$

da FUNE INESTENSIBILE SENZA STRISCIARE

$\tau = \dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \text{cost} \longrightarrow \boxed{\tau = \dfrac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} \qquad (4)}$

$$\begin{pmatrix} \omega_2 = \tau \omega_1 \\ \dfrac{d\omega_2}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\tau\, \omega_1) \\ \dot{\omega}_2 = \tau\, \dot{\omega}_1 \end{pmatrix}$$

Due approcci

1) <u>RIDUZIONE ALL' UTILIZZATORE $(\dot{\omega}_2)$</u>

dalla (1) $C_{R1} = C_1 - I_1 \dfrac{\dot{\omega}_2}{\tau}$

nella (2) $C_{R2} = \dfrac{\eta}{\tau}\left(C_1 - I_1 \dfrac{\dot{\omega}_2}{\tau}\right)$

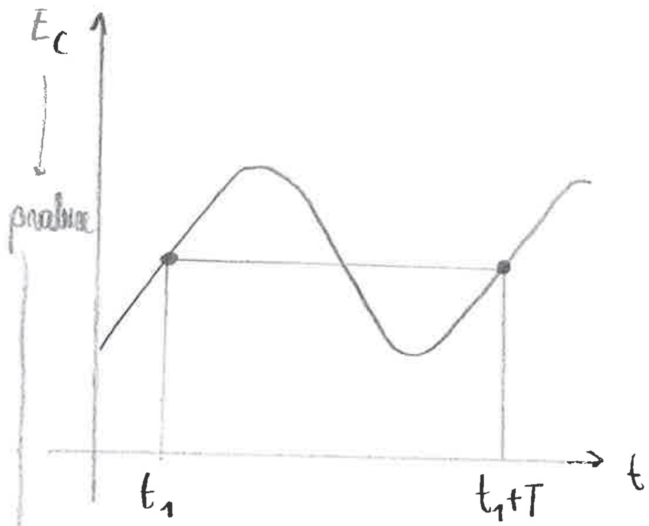
nella (3) con (4) e (5) ottengo $\rightarrow$

La REGOLA è al contrario per la riduzione all'utilizzatore

SISTEMI A REGIME PERIODICO

C_M e/o C_R sono periodiche

$\Rightarrow$ $\boxed{E_C \text{ è periodica}}$



$$E_C(t_1) = E_C(t_1+T) \quad \forall t_1$$

(ad esempio → motori a combustione interna)

↳ SOLLECITAZIONI DINAMICHE ⇒ da ridurre

$\Rightarrow$ lo si fa aggiungendo un VOLANO (corpo con grande momento di inerzia) capace di immagazzinare l'E_C e restituirla nel momento più opportuno ⇒ fluttuazioni meno ampie

Distinguiamo due fasi:

A) $0 < \vartheta < \vartheta_1$

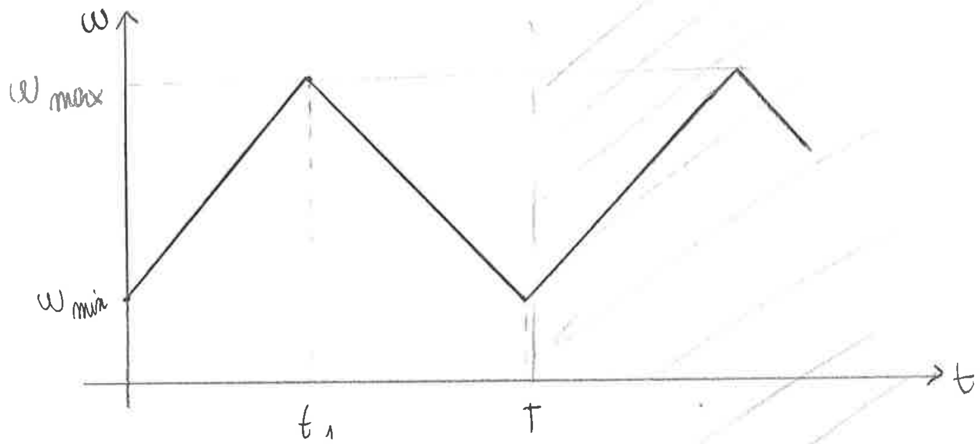
$$C_{MAX} - C_R = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{C_{max} - C_R}{I} > 0 \implies$$ ω aumenta linearmente nel tempo

B) $\vartheta_1 < \vartheta < \Phi$

$$-C_R = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = -\frac{C_R}{I} < 0 \implies$$ ω decresce linearmente nel tempo



$\vartheta(t_1) = \vartheta_1$

$\vartheta(T) = \Phi$

$$\omega_{medio} = \frac{1}{T}\int_0^T \omega(t)\,dt$$

in questo caso $\omega_{medio} = \dfrac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2}$

In generale si definisce $\boxed{\omega_{medio} = \dfrac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}}$

In generale, quando C_M e/o C_R non sono costanti, detto ϑ_1 l'angolo fino al quale $C_M > C_R$

$$\varepsilon = \frac{\int_0^{\vartheta_1} (C_M - C_R)\, d\vartheta}{I\, \omega^2_{medio}}$$

Permette di

1) ricavare ε
2) calcolare I (motore, conico + volano) per ottenere un certo ε

EQUILIBRAMENTO (o equilibratura)

ROTORE un corpo rotante collegato ad un albero

Esistono sempre degli squilibri (equilibramento → ridurre lo squilibrio)

Si applicano l'EQ. CARDINALI DELLA DINAMICA

$$\boxed{\begin{cases} \sum \vec{F}_e + \vec{F}' = \sum \vec{F}_e - m\vec{a}_G = \vec{0} & (1) \\ \sum \vec{M}_{eG} + \vec{M}'_G = \sum \vec{M}_{eG} - \dfrac{d\vec{K}_G}{dt} = \vec{0} & (2) \end{cases}}$$