appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2357A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Alma De Luca

MATERIA: Esercizio Biomeccanica dei Fluidi - Prof. Morbiducci

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

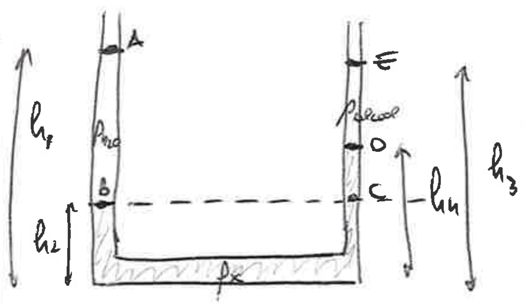
ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 42

ESERCITAZIONE 1

1) $h_1 = 40\,cm$ $\quad h_2 = 16\,cm$ $\quad h_3 = 32\,cm$ $\quad h_4 = 21\,cm$ $\quad \rho_{H_2O} = 1000\,kg/m^3$ $\quad \rho_{alcool} = 780\,kg/m^3$

ρ_x? se $g' = \frac{1}{6} g$ come cambia ρ_x



$$p_B = p_A + \rho_{H_2O}\, g\, (h_1 - h_2)$$

$$p_B = p_C = p_E + \rho_a g (h_3 - h_4) + \rho_x g (h_3 - h_2)$$

$$p_A = p_E = p_0$$

$$\cancel{p_A} + \rho_{H_2O} \cancel{g} (h_1 - h_2) = \cancel{p_E} + \rho_a \cancel{g} (h_3 - h_4) + \rho_x \cancel{g} (h_3 - h_2)$$

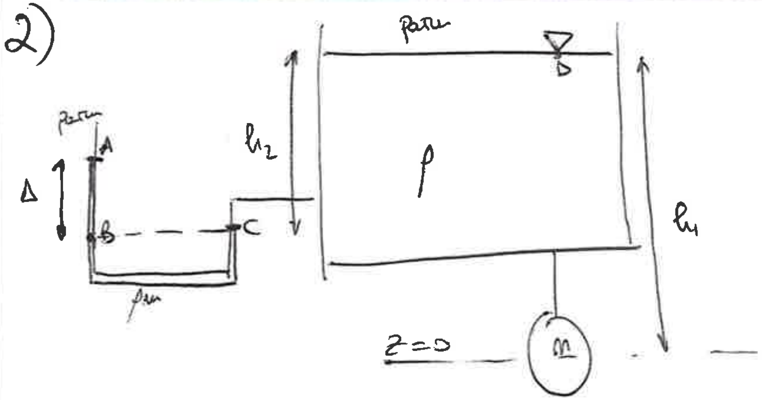
$$\rho_{H_2O}(h_1 - h_2) = \rho_a (h_3 - h_4) + \rho_x (h_3 - h_2)$$

$$\rightarrow \rho_x = \frac{\rho_{H_2O}(h_1 - h_2) - \rho_a (h_3 - h_4)}{h_3 - h_2} = 3084\,kg/m^3$$

NON cambia se $g' = \frac{1}{6} g$!

---

2)



$\gamma = 8825\,N/m^3$ $\qquad h_1 = 18\,m$

$\gamma_m = 133362\,N/m^3$ $\qquad h_2 = 13\,m$

Δ? $\quad p_M$?

$$p_A = p_D = p_{atm}$$

$$p_B = p_A + \gamma_m \Delta \qquad p_C = p_B = p_D + \gamma h_2 \implies \cancel{p_A} + \gamma_m \Delta = \cancel{p_D} + \gamma h_2$$

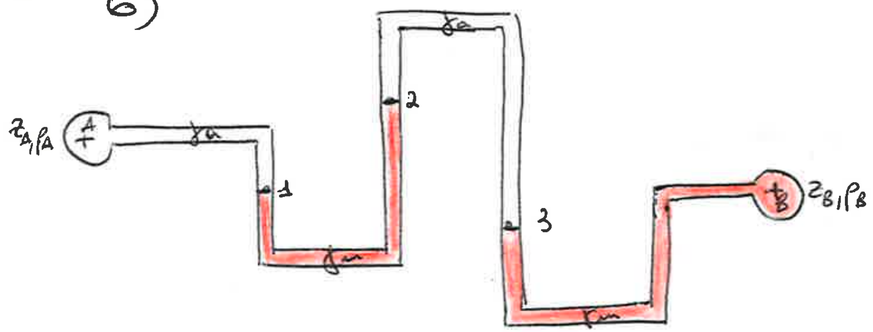
$$\Delta = \frac{\gamma}{\gamma_m} h_2 = 0{,}86\,m$$

$$p_M = p_D + \gamma h_1 = 260\,kPa$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 42

6)



$(p_A - p_B)$?

$z_A = 1{,}6\ m \quad z_1 = 0{,}7\ m \quad z_2 = 2{,}1\ m \quad z_3 = 0{,}9\ m \quad z_B = 1{,}8\ m$

$\gamma_a = 9806\ N/m^3 \qquad \gamma_m = 133360\ N/m^3$

$p_1 = p_A + \gamma_a (z_A - z_1) \implies p_A = p_1 - \gamma_a (z_A - z_1)$

$p_2 = p_1 - \gamma_m (z_2 - z_1)$

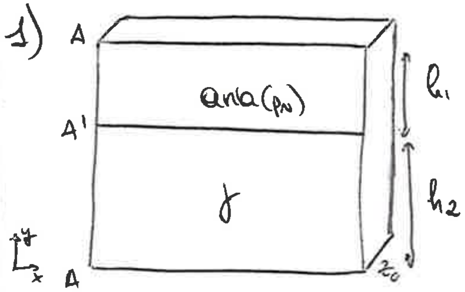
$p_3 = p_2 + \gamma_a (z_2 - z_3)$

$p_B = p_3 - \gamma_m (z_B - z_3)$

$p_A - p_B = p_1 - \gamma_a (z_A - z_1) - p_3 + \gamma_m (z_B - z_3) = p_1 - \gamma_a (z_A - z_1) + \gamma_m (z_B - z_3) - p_2 - \gamma_a (z_2 - z_3) = \cancel{p_1} - \gamma_a (z_A - z_1 + z_2 - z_3) + \gamma_m (z_B - z_3) - \cancel{p_1} + \gamma_m (z_2 - z_1) = -\gamma_a (z_A - z_1 + z_2 - z_3) + \gamma_m (z_B - z_3 + z_2 - z_1) = 286{,}1\ kPa$

ESERCITAZIONE 2

1)



$p_N = 7\ bar = 700\ kPa$

F_{AA} ? Distribuzione pressione ? pci ?

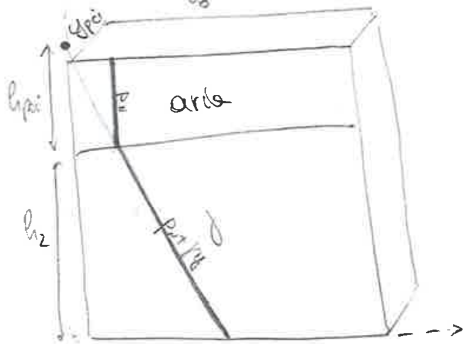
$z_0 = 1\ m \quad h_1 = 2\ m \quad h_2 = 3\ m \quad \gamma = 9806\ N/m^3$

$0 \le y \le h_2$

$F_{AA'} = \int_A^{A'} p_{AA'}\, dS_{AA'} = \int_{AA'} (p_N + \gamma y)\, dS = \int_{AA'} (p_N + \gamma y)\, dy\, dz = \int_0^{h_2} (p_N + \gamma y) z_0\, dy = z_0 \left[p_N y + \gamma \frac{y^2}{2} \right]_0^{h_2} = z_0 \left(p_N h_2 + \gamma \frac{h_2^2}{2} \right) = 2144{,}1\ kPa$

$F_{A'A} = p_N \cdot S_{A'A} = p_N \cdot (h_1 \cdot z_0) = 1400\ kPa$

$\implies F_{AA} = F_{AA'} + F_{A'A} = 3544{,}1\ kPa$



$p_{pci} = 0 \implies p_{pci} = p_N - \gamma h_{pci} = 0$

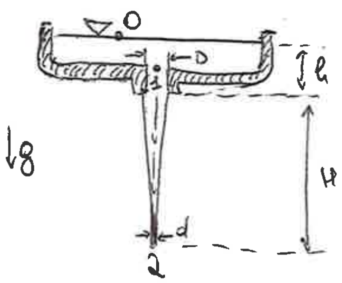
$h_{pci} = \frac{p_N}{\gamma} = 71{,}4\ m$

$y_{pci} = h_{pci} + h_2 = 74{,}4\ m$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 42

4)



$h = 0{,}1\,m \quad H = 1{,}5\,m \quad D = 0{,}1\,m \quad d?$

(*) Bernoulli tra 1 e 2

$$\cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$$

$$v_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}v^2 + g(z_1 - z_2)\right)2} = \sqrt{v_1^2 + 2g\underbrace{(z_1 - z_2)}_{H}} = 5{,}6\ m/s$$

Conservazione portata $\quad Q_1 = Q_2$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\cancel{\pi}\frac{D^2}{\cancel{4}}}{\cancel{\pi}\frac{d^2}{\cancel{4}}} v_1 = \frac{D^2}{d^2} v_1$$

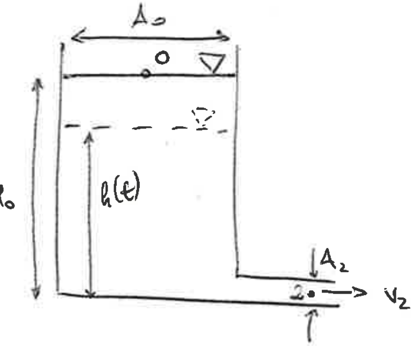
$$\Rightarrow d = \sqrt{D^2 \frac{v_1}{v_2}} = 0{,}05\ m$$

(*) Bernoulli tra 0 e 1

$$\cancel{p_0} + \frac{1}{2}\rho \cancel{v_0^2}^{\to 0} + \rho g z_0 = \cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g\underbrace{(z_0 - z_1)}_{h}} = 1{,}4\ m/s$$

---

5)



$t_{svuotamento}$?

Conservazione portata (massica)

$\dot{M}_0 = -\dot{M}_2 \quad$ (ciò che scende $\Rightarrow$ esce)

$$\dot{M}_0 = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = \rho\frac{dV}{dt} = \rho\frac{d(A_0 \cdot h)}{dt} = \rho A_0 \frac{dh}{dt} = \rho A_0 \frac{dh(t)}{dt}$$

$$\dot{M}_2 = \rho v_2 A_2$$

$$\Rightarrow \rho A_0 \frac{dh(t)}{dt} = -\cancel{\rho} v_2 A_2$$

$$dh(t) = -\frac{v_2 A_2}{A_0} dt \quad , \quad dt = -dh(t) \cdot \frac{A_0}{v_2 A_2} \Rightarrow \int_0^{t^*} dt = \int_{H_0}^{0} -\frac{A_0}{v_2 A_2} dh(t) \Rightarrow t^* = -\frac{A_0}{A_2} \cdot \int_{H_0}^{0} \frac{dh(t)}{\sqrt{2gh(t)}} =$$

perché scende

$$= -\frac{A_0}{A_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot \int_{H_0}^{0} \frac{dh(t)}{\sqrt{h(t)}} =$$

$$= -\frac{A_0}{A_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2g}} \cdot 2\sqrt{H_0}$$

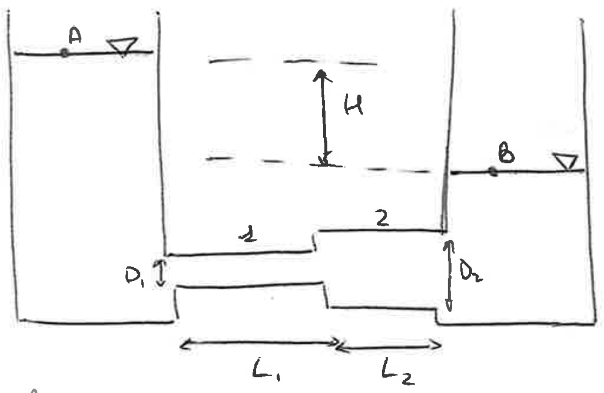
Bernoulli tra 0 e 2

$$\cancel{p_0} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_0^2}^{\to 0} + \rho g z_0 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g(z_0 - z_2)} = \sqrt{2g\,h(t)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 42

2)



$D_1 = 5\,cm = 0{,}05\,m$ $\quad D_2 = 10\,cm = 0{,}1\,m$

$L_1 = 180\,cm = 1{,}8\,m$ $\quad L_2 = 90\,cm = 0{,}9\,m$

$H = 6\,m$

$\varepsilon = 0{,}2\,mm$ $\quad \nu = 0{,}9 \cdot 10^{-6}\,m^2/s$

Q_{12} (vol.) ?

Bernoulli tra A e B

$$\cancel{p_A} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_A^2}^{\to 0} + \rho g z_A = \cancel{p_B} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_B^2}^{\to 0} + \rho g z_B + \Delta p_f \implies \Delta p_f = \rho g (z_A - z_B) = \rho g H$$

$\Delta p_f = \Delta p_c + \Delta p_d \quad \to$ uso $L_{eq} \implies \Delta p_c$ come distribuita

$$\Delta p_f = \lambda_1 \frac{v_1^2 (L_1 + L'_{eq})}{2D_1} \rho + \lambda_2 \frac{v_2^2 (L_2 + L''_{eq})}{2D_2} \rho$$

$$\implies \cancel{\rho} g H = \lambda_1 \frac{v_1^2 (L_1 + L'_{eq})}{2D_1} \cancel{\rho} + \lambda_2 \frac{v_2^2 (L_2 + L''_{eq})}{2D_2} \cancel{\rho}$$

(1) $D_1 = 0{,}05\,m$
allargamento 1-2 $\implies L'_{eq} = 1\,m$
$(D_2/D_1 = 2)$

(2) $D_2 = 0{,}1\,m$
sbocco = allargamento $(1\text{-}4)$ $\implies L''_{eq} = 4\,m$

Conservazione portata $\implies Q_1 = Q_2$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \implies v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{D_1^2}{D_2^2} v_1$$

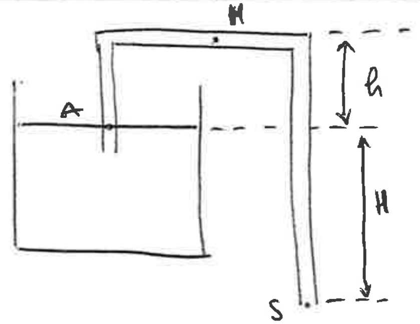
$$\implies gH = \lambda_1 \frac{v_1^2 (L_1 + L'_{eq})}{2D_1} + \lambda_2 \frac{(L_2 + L''_{eq})}{2D_2} \cdot \frac{D_1^4}{D_2^4} v_1^2$$

$$gH = v_1^2 \left[\lambda_1 \frac{L_1 + L'_{eq}}{2D_1} + \lambda_2 \frac{D_1^4}{D_2^4} \cdot \frac{L_2 + L''_{eq}}{2D_2} \right] \implies v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\lambda_1 \frac{L_1 + L'_{eq}}{D_1} + \lambda_2 \frac{D_1^4}{D_2^4} \frac{L_2 + L''_{eq}}{D_2}}}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 42

3)



$\gamma = 8825\ N/m^3$ $\quad h = 2m \quad D = 0{,}075m$

Q? se varia $H \Rightarrow Q_{max}$? $\quad H = 3m$

Bernoulli tra A e S

$\cancel{p_A} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_A^2} + \rho g z_A = \cancel{p_s} + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s$

$v_s = \sqrt{2g(z_A - z_s)} = \sqrt{2gH} = 7{,}67\ m/s \Rightarrow Q = A v = 0{,}034\ m^3/s$

Q_{max} (in S) $\rightarrow$ se in M non ho liquido (esce tutto)

$\Rightarrow p_M = 0$

Bernoulli tra M e S

$\cancel{p_M} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_M^2} + \rho g z_M = p_S + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_s^2} + \rho g z_s$ $\quad$ ($v_M = v_s$ per conservazione Q e stessa area)

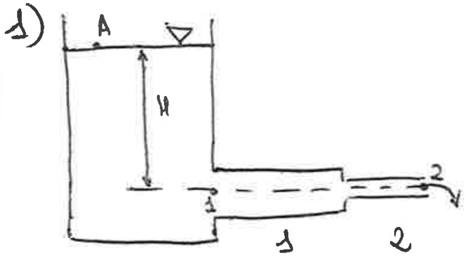
$p_S = \rho g(z_M - z_s) = \gamma(h + H')$

$H' = \frac{p_S}{\gamma} - h$

$Q_{MAX} = A \cdot \sqrt{2g\left(\frac{p_s}{\gamma} - h\right)} = \pi \frac{D^2}{4}\sqrt{2g\left(\frac{p_s}{\gamma} - h\right)} = 0{,}06\ m^3/s$ $\quad p_S = p_0 = 101325\ Pa$

ESERCITAZIONE 4

1)



$H = 1{,}5m \quad D_1 = 25cm = 0{,}25m \quad D_2 = 12{,}5cm = 0{,}125m \quad L_1 = 3m \quad L_2 = 1m$

$\varepsilon = 0{,}5mm \quad \mu = 1cP$ (10^{-3} Pa·s) $\quad \rho = 1000\ kg/m^3$

V_2? p_1? (relativa)

caso senza & con perdite distribuite

- senza perdite

Bernoulli tra A e 2

$\cancel{p_A} + \frac{1}{2}\cancel{\rho v_A^2} + \rho g z_A = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2$

$V_2 = \sqrt{2g(z_A - z_2)} = \sqrt{2gH} = 5{,}42\ m/s$

Conservazione portata

$Q_1 = Q_2$

$A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{D_2^2}{D_1^2} v_2 = 1{,}36\ m/s$

Bernoulli tra 1 e 2

$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \cancel{\rho g z_1} = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \cancel{\rho g z_2}$

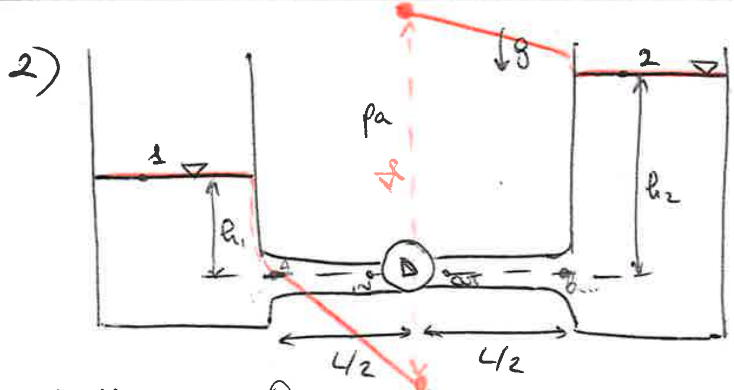
$p_1 = \cancel{p_2} + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)$ → trascuro! perché voglio p_1 relativa!

$\Rightarrow p_1 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = 13{,}8\ kPa$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 42

2)



solo perdite distribuite $[P = Q \cdot \Delta p]$

- linea piezometrica ?
- P_{ASS} IN ?
- P_{ASS} OUT ?
- Potenza resa al fluido ?

$Q = 0{,}63\ m^3/s$ $\quad h_1 = 10m$ $\quad h_2 = 20m$ $\quad L = 20km = 20 \cdot 10^3 m$

$D = 1m$ $\quad \varepsilon = 2mm$ $\quad \rho = 10^3 kg/m^3$ $\quad \nu = 10^{-6} m^2/s$

$Q = A v_{IN} = A v_{OUT} \Rightarrow v_{IN} = v_{OUT} = \dfrac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} = 0{,}8\ m/s$

Bernoulli tra 1 e 2

$\underset{\text{p}\times\text{la pompa}}{\Delta p} + \cancel{p_1} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2}^{\,0} + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2}^{\,0} + \rho g z_2 + 2\Delta p_f \Rightarrow \Delta p = 2\Delta p_f + \rho g (z_2 - z_1)$

$\Delta p_f = \lambda_1 \dfrac{v_{IN}^2 L/2}{2D}\rho = \lambda_2 \dfrac{v_{OUT}^2 L/2}{2D}\rho$

$\lambda_1 \begin{cases} Re = \dfrac{v_{IN} D}{\nu} = 8 \cdot 10^5 \\ \varepsilon/D = 0{,}002 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0{,}023 \Rightarrow \Delta p_f = 73600\ Pa$

$\Rightarrow \Delta p = 2\Delta p_f + \rho g (h_2 - h_1) = 245{,}3\ kPa$

Bernoulli tra 1 e IN

$p_1 + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2}^{\,0} + \rho g z_1 = p_{IN} + \frac{1}{2}\rho v_{IN}^2 + \rho g z_{IN} + \Delta p_f$

$P_{IN\,ASS} = p_1 + \rho g \underbrace{(z_1 - z_{IN})}_{h_1} - \frac{1}{2}\rho v_{IN}^2 - \Delta p_f = 125{,}5\ kPa$ $\qquad \Delta p = p_{OUT} - p_{IN}$

$P_{OUT\,ASS} = \Delta p + p_{IN} = 370{,}9\ kPa$

$P_{OT} = \Delta p \cdot Q = 154{,}5\ kW$

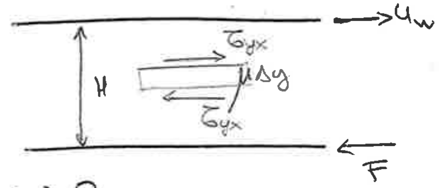
P cost. sul pelo libero
p diminuisce lungo : 2 pezzi di condotto (secondo una retta) con un salto dovuto a Δp
imbocco-sbocco $\Rightarrow$ non so come diminuisce la P $\Rightarrow$ ---

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 42

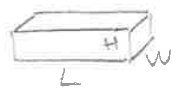
ESERCITAZIONE 5

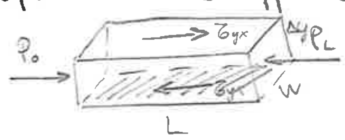
1)



Dati $H, u_w, \rho, \mu, P_0, P_L, L$

flusso laminare completamente sviluppato ($\Rightarrow$ μ = cost. → Newtoniano; v = cost.)





a_ $v(y)$?

EQUILIBRIO FORZE

$$\left(\tau_{yx}\big|_y - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right) L\cancel{W} + (P_0 - P_L)\cancel{W}\,\Delta y = 0$$

$$\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = \frac{P_L - P_0}{L}$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} -\frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$-\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L}$$

Integro $\quad \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$

Per fluido Newtoniano

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv(y)}{dy}$$

$$-\mu \frac{dv(y)}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$$

$$\frac{dv(y)}{dy} = -\frac{P_0 - P_L}{\mu L} y - \frac{C_1}{\mu}$$

Integro $\quad v(y) = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2$

Condizioni al contorno

$$\begin{cases} v(y=0) = 0 \implies C_2 = 0 \\ v(y=H) = u_w \end{cases}$$

$$v(y=H) = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} H^2 - \frac{C_1}{\mu} H = u_w$$

$$C_1 = -\frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H}$$

$$\Rightarrow \tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y - \frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H} =$$

$$= \frac{P_0 - P_L}{L}\left(y - \frac{H}{2}\right) - \frac{u_w \mu}{H}$$

$$v(y) = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y^2 + \frac{P_0 - P_L}{2L\mu} H + \frac{u_w}{H} =$$

$$= \frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\left(H - y^2\right) + \frac{u_w}{H}$$

b_ $\tau_{yx}(y=0) / \tau_{yx}(y=H)$

$$\tau_{yx}(y=0) = -\frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H}$$

$$\tau_{yx}(y=H) = \frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H}$$

$$\frac{\tau_{yx}(y=0)}{\tau_{yx}(y=H)} = \frac{-\frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H}}{\frac{P_0 - P_L}{2L} H - \frac{u_w \mu}{H}} = \frac{\frac{(-P_0 + P_L) H^2 - u_w \mu 2L}{\cancel{2LH}}}{\frac{(P_0 - P_L) H^2 - u_w \mu 2L}{\cancel{2LH}}} =$$

$$= \frac{(P_L - P_0) H^2 - u_w \mu 2L}{(P_0 - P_L) H^2 - u_w \mu 2L}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 42

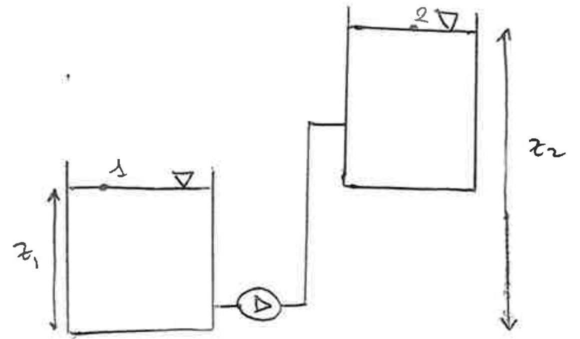
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 42

2)

$C = 3000\ l$ $\quad t = 12h$ $\quad \rho = 1000\ kg/m^3$ $\quad \mu = 1cP\ (10^{-3} Pa \cdot s)$ $\quad D = 50\ mm$ $\quad \varepsilon = 150 \mu m$

$z_1 = 10\ m$ $\quad z_2 = 25\ m$ $\quad L = 24\ m$

- senza perdite $\Rightarrow$ Δp (prevalenza)? [Pa]
- con perdite $\Rightarrow$ Δp ? [Pa]
  distribuite e concentrate
  $\xi_{gomito} = 0,5$ $\quad \xi_{imbocco} = 1$ $\quad \xi_{sbocco} = 1$



- senza perdite
  Bernoulli tra 1 e 2

$$\Delta p + \cancel{p_1} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2}_{\to 0 \text{ (trascuro)}} + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2}_{\to 0 \text{ (trascuro)}} + \rho g z_2$$

$$\Delta p = \rho g (z_2 - z_1) = 147150\ Pa = 147,2\ kPa$$

- con perdite
  Bernoulli tra 1 e 2

$$\Delta p + \cancel{p_1} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2}^{\,0} + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2}^{\,0} + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$$\Delta p_f = \Delta p_c + \Delta p_d$$

$$\Delta p_c = \Sigma \xi \rho \frac{V^2}{2} = (2\xi_{gomito} + \xi_{imbocco} + \xi_{sbocco}) \rho \frac{V^2}{2} = \frac{3}{2}\rho V^2$$

$$Q = \frac{C}{t} = \frac{3000 \cdot 10^{-3}\ m^3}{12 \cdot 60 \cdot 60\ s} = 69,4 \cdot 10^{-6}\ m^3/s$$

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi D^2} 4 = 0,03537\ m/s \Rightarrow \Delta p_c = \frac{3}{2}\rho V^2 = 1,87\ Pa$$

$$\Delta p_d = \lambda \frac{\rho V^2 L}{2D}$$

$$\lambda \begin{cases} Re = \frac{\rho V D}{\mu} = 1769 < 2000 \Rightarrow \text{moto laminare} \quad \lambda = \frac{64}{Re} = 0,036 \Rightarrow \Delta p_d = 1,1\ Pa \\ \varepsilon = 150 \mu m \end{cases}$$

$$\Delta p_f = \Delta p_c + \Delta p_d = 2,97\ Pa$$

$$\Delta p = \Delta p_f + \rho g (z_2 - z_1) = 147153\ Pa = 147,2\ kPa$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 42

d – Q_v ? a 42 dall'imbocco

$$Q_v = \langle v \rangle A = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^R v_z \overbrace{r\,dr\,d\theta}^{dS}}{\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta} \cdot \cancel{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^R v_z\, r\,dr\,d\theta = 2\pi \int_0^R v_z r\,dr = 2\pi \int_0^R \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}(R^2 - r^2)\, r\,dr = 2\pi \left[\int_0^R \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} R^2 r\,dr - \int_0^R \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu} r^3\,dr\right]$$

$$= 2\pi \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}\left[\int_0^R R^2 r\,dr - \int_0^R r^3\,dr\right] = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu}\left[\left[R\frac{r^2}{2}\right]_0^R - \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R\right] = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha}{2\mu}\left[\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}\right] = \frac{\pi \rho g \operatorname{sen}\alpha}{8\mu} R^4$$

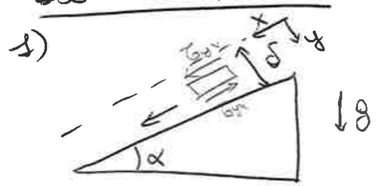
e – α ? per massimizzare τ_{rz} a parete $(r=R)$ e $\langle v \rangle$

$$\tau_{rz\,max}(r=R) \Rightarrow v_z(r=R) = 0 \Rightarrow \frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{4\mu}(R^2 - r^2) = 0$$

$$\operatorname{sen}\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$ (anche $\langle v \rangle$ dipende da $\alpha \rightarrow$ max anche lei)

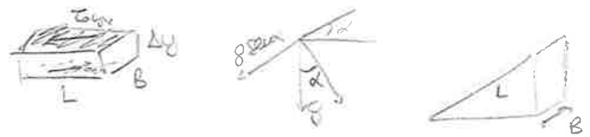
ESERCITAZIONE 6

1)



Dati: δ, B, L, μ, α, ρ, τ_0

Fluido alla Bingham



a – $v_x(y)$?

$$\left(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}\right) LB + F_{peso} = 0$$

$$F_{peso} = \rho \cdot Vol \cdot \vec{g} = \rho g \operatorname{sen}\alpha\, LB\Delta y$$

$$\left(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}\right) \cancel{LB} + \rho g \operatorname{sen}\alpha\, \cancel{LB}\Delta y = 0$$

$$\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = -\rho g \operatorname{sen}\alpha$$

$$-\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\rho g \operatorname{sen}\alpha$$

Integro $\quad \tau_{yx} = \rho g \operatorname{sen}\alpha\, y + C_1$

BC1 $\quad \tau_{yx}(y=0) = 0$

$$C_1 = 0$$

$$\tau_{yx} = \rho g \operatorname{sen}\alpha\, y$$

Fluido alla Bingham

$$\tau_{yx}(y) = \tau_0 - \mu \frac{dv_x}{dy}$$

$0 \le y \le y_0 \qquad y_0 < y \le \delta$

• $y_0 \le y \le \delta$

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{\tau_{yx}(y) - \tau_0}{\mu}$$

$$v_x = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha\, y + \tau_0}{\mu} y + C_2$$

$$v_x = -\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu} y^2 + \frac{\tau_0}{\mu} y + C_2$$

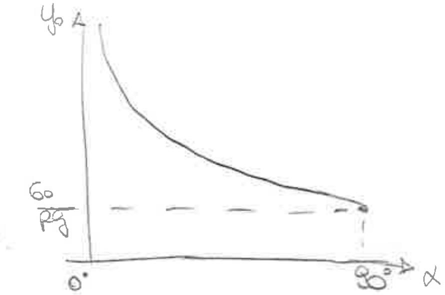
BC2 $\quad v_x(y=\delta) = 0$

$$C_2 = +\frac{\rho g \operatorname{sen}\alpha}{\mu}\delta^2 - \frac{\tau_0}{\mu}\delta$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 42

d_ Rappresentare y_0 in funzione di $\alpha = [0°; 90°]$, con $\tau_{yx}(y=y_0) = \tau_0$



$$\tau_{yx}(y=y_0) = \rho g \operatorname{sen}\alpha\, y_0 = \tau_0$$

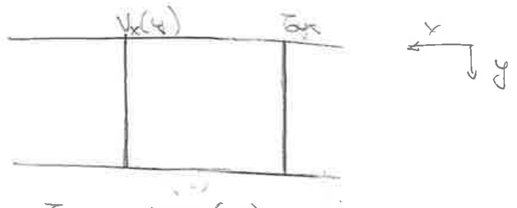
$$y_0 = \frac{\tau_0}{\rho g \operatorname{sen}\alpha}$$

$\alpha = 0° \Rightarrow y_0 \to \infty$

$\alpha = 90° \Rightarrow y_0 = \frac{\tau_0}{\rho g}$

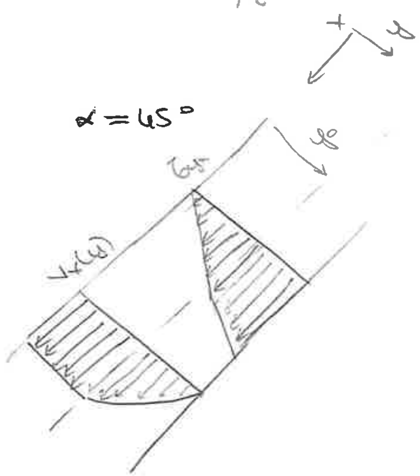
e_ Rappresentare $\tau_{yx}(y)$ e $V_x(y)$ per:

$\alpha = 0°$



$\tau_{yx} = \rho g \operatorname{sen}(0°)\, y = 0$

$V_x(y) = \frac{\tau_0}{\mu}(y-\delta) \rightarrow$ essendoci solo forze di pressione $\rightarrow$ flusso fermo



$\tau_{yx} = \rho g \operatorname{sen}(45°)\, y =$

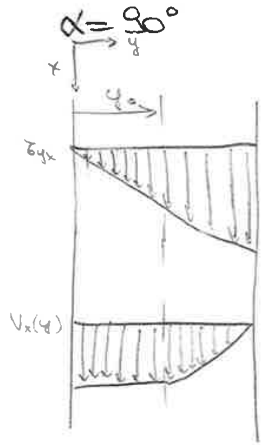
$= \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g y$

$y = y_0 \Rightarrow \tau_{yx} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g y_0$

$y = \delta \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g \delta$

$y = 0 \Rightarrow \tau_{yx} = 0$

$V(y=\delta) = 0$



$\tau_{yx} = \rho g \operatorname{sen}(90°)\, y = \rho g y$

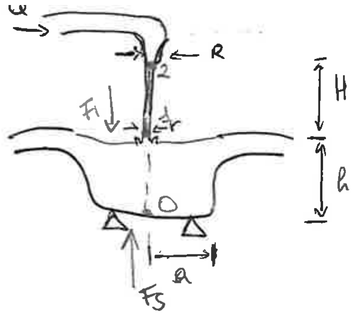
$\tau_{yx}(y=\delta) = \rho g \delta$

$V(y=\delta) = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 42

3)



Fluido ideale incompressibile
(moto quasi unidimensionale)

$r = ?$

F sul recipiente ?

$Q = 0{,}1\ \ell/s = 0{,}1 \cdot 10^{-3}\ m^3/s$ $\quad R = 1\ cm = 0{,}01\ m$ $\quad H = 10\ cm = 0{,}1\ m$ $\quad h = 6\ cm = 0{,}06\ m$ $\quad a = 5\ cm = 0{,}05\ m$

Bernoulli tra 1 e 2

$$\cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \rho g z_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$Q_1 = Q_2 \implies A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2 = \frac{R^2}{r^2} v_2$$

$$v_2 = \frac{Q_2}{\pi R^2} = \frac{Q}{\pi R^2} = 0{,}318\ m/s$$

$$\implies \frac{1}{2}\cancel{\rho}\left(\frac{R^2}{r^2} v_2\right)^2 + \cancel{\rho} g z_1 = \cancel{\rho} g z_2 + \frac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r^2} v_2\right)^2 = \frac{1}{2} v_2^2 + gH$$

$$\frac{\cancel{R^4}}{r^4} = \frac{1}{R^4} + \frac{2gH}{R^4 v_2^2}$$

$$r = \sqrt[4]{\frac{1}{\frac{1}{R^4} + \frac{2gH}{R^4 v_2^2}}} = 0{,}47\ cm$$

$v_1 = 1{,}439\ m/s$

$F_S = \underbrace{\text{pressione getto}}_{\text{contributo cinetico}} \cdot \text{area} + \underset{\text{(volume di controllo)}}{\text{forza peso}} \cdot \underset{\text{(acqua nel contenitore)}}{\text{volume}} = p_1 A_1 + \rho g \cdot V = (\rho v_1^2)(\pi r^2) + \rho g(\pi a^2 \cdot h) = 4{,}77\ N$

↳ recipiente cilindrico

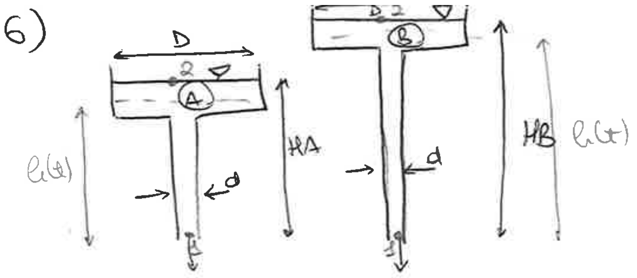
$$\boxed{p = \rho \cdot v^2}$$

$$F_1 = -F_S = -4{,}77\ N$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 42

1.6)



$H_A = 50\,m \qquad D = 1\,m$

$H_B = 100\,m$

$\varepsilon = 0,1\,mm$

$d = 100\,mm = 0,1\,m$

$\nu_{acqua} = 10^{-6}\,m^2/s = 1\,cSt$

Quale serbatoio si svuota x primo?

⟹ guardo quale v_1 è >

(A)

Bernoulli tra 1 e 2

$$\Delta p_f + \cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2} + \rho g z_2$$

$$\Delta p_f = \Delta p_d + \Delta p_c = \lambda_1 \frac{v_1^2 L \rho}{2D} + \Sigma \xi \frac{v_1^2 \rho}{2}$$

$$\frac{\lambda_1 v_1^2 L \cancel{\rho}}{2D} + \xi \frac{v_1^2 \cancel{\rho}}{\cancel{2}} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = 2\rho g H_A$$

$$v_1^2 \left(\frac{\lambda_1 L}{D} + \xi + 1\right) = 2gH$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH_A}{1 + \xi + \frac{\lambda_1 L}{D}}} \qquad L = H_A$$

Metodo iterativo $\qquad \xi = 0,5$ (restringimento)

$v_1^I = \sqrt{2gH_A} = 31,3\,m/s$

$\lambda_1^I \begin{cases} Re = \rho \frac{v_1^I D}{\mu} = \frac{v_1^I D}{\nu} = 3,1 \cdot 10^7 \\ \varepsilon/D = 0,0001 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1^I = 0,013$

$v_1^{II} = 21,36\,m/s \Rightarrow \varepsilon\% = \left|\frac{v_1^{II} - v_1^I}{v_1^I}\right| \simeq 31,7\%$ NO!

$v_1^{II} = 21,36\,m/s$

$\lambda_1^{II} \begin{cases} Re = \frac{v_1^{II} D}{\nu} = 2,1 \cdot 10^7 \\ \varepsilon/D = 0,0001 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1^{II} = 0,014$

$v_1^{III} = 21,12\,m/s \Rightarrow \varepsilon\% = 1,1\%$ ✓

$\Rightarrow v_1^{(A)} = 21,12\,m/s$

(B)

Bernoulli tra 1 e 2

$$\Delta p_f + \cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2} + \rho g z_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH_B}{1 + \xi + \frac{\lambda_2 L}{D}}} \qquad L = H_B$$

Metodo iterativo

$v_1^I = \sqrt{2gH_B} = 44,3\,m/s$

$\lambda_2^I \begin{cases} Re = \frac{v_1^I D}{\nu} = 4,4 \cdot 10^7 \\ \varepsilon/D = 0,0001 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2^I = 0,013$

$v_1^{II} = 26,47\,m/s \Rightarrow \varepsilon\% = 40\%$ NO!

$v_1^{II} = 26,47\,m/s$

$\lambda_2^{II} \begin{cases} Re = \frac{v_1^{II} D}{\nu} = 2,6 \cdot 10^7 \\ \varepsilon/D = 0,0001 \end{cases} \Rightarrow \lambda_2^{II} = 0,0135$

$v_1^{III} = 26,24\,m/s \Rightarrow \varepsilon\% = 0,86\%$ ✓

$\Rightarrow v_1^{(B)} = 26,24\,m/s$

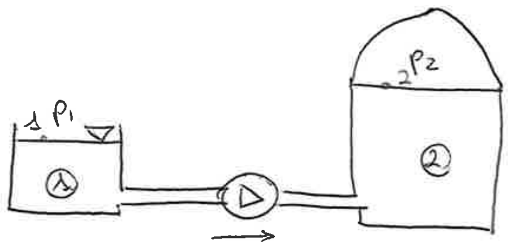
$v_1^{(B)} > v_1^{(A)} \Rightarrow t_{(B)} < t_{(A)}$

(B)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 42

1.9)



$p_1 = 1 bar = 100 kPa$
$p_2 = 2,5 bar = 250 kPa$
$\dot{M} = 3 kg/s$
$D = 0,05 m$ $L = 8 m$
$\varepsilon/D = 0,01$

dimensionare ?
(cioè trovare Δp)
$\mu = 1 cP$

Bernoulli tra 1 e 2 $Q_1 = Q_2 \Rightarrow v_1 = v_2$

$$\Delta p + p_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2} + \rho g z_1 = p_2 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2} + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$$\Delta p_f = \lambda \frac{v_2^2 (L + L_{eq})}{2D}\rho$$

$L_{eq,tot} = L_{eq}' + L_{eq}'' = 2,7 m$
imbocco $L_{eq}' = 1 m$
allargamento 1-4 $L_{eq}'' = 1,7 m$

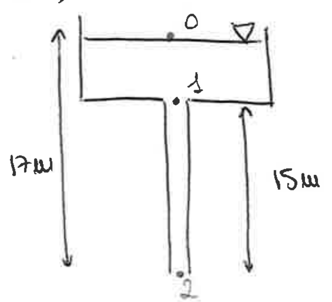
$\dot{M} = Q_m = \rho A \cdot v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\dot{M}}{\rho A} = \frac{\dot{M}}{\rho \cdot \pi \frac{D^2}{4}} = 1,53 m/s$

$\lambda \begin{cases} Re = \frac{\rho v_2 D}{\mu} = 7,6 \cdot 10^4 \\ \varepsilon/D = 0,01 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0,038$

$\Rightarrow \Delta p_f = 9518,1 Pa$

$\Delta p = p_2 - p_1 + \rho g \cancel{(z_2 - z_1)} + \Delta p_f = 1,6 bar$

1.10)



$V = 5 m^3$
$D = 0,1 m$
$\varepsilon/D = 0 \Rightarrow$ liscio
t? svotarsi completamente

$$\boxed{Q = \frac{V}{t}}$$

Bernoulli tra 0 e 2

$$\cancel{p_0} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_0^2} + \rho g z_0 = \cancel{p_2} + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 + \Delta p_f$$

$$\Delta p_f = \lambda \frac{v_2^2 L \rho}{2D} + \xi \frac{v_2^2 \rho}{2} \qquad \xi = 0,5 \text{ (restringimento)}$$

$$\cancel{\rho} g z_0 = \tfrac{1}{2}\cancel{\rho} v_2^2 + \cancel{\rho} g z_2 + \lambda \frac{v_2^2 L \cancel{\rho}}{2D} + 0,5 \frac{v_2^2 \cancel{\rho}}{2}$$

$$g(z_0 - z_2) = v_2^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda L}{2D} + \frac{0,5}{2} \right)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{9,81 \cdot 17}{0,75 + \frac{\lambda L}{2D}}} = \sqrt{\frac{166,77}{0,75 + \lambda 75}}$$

metodo iterativo $v_2^I = 14,9 m/s$

$\lambda^I \begin{cases} Re = \frac{\rho v_2^I D}{\mu} = 1,5 \cdot 10^6 \\ \varepsilon/D = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^I = 0,011$

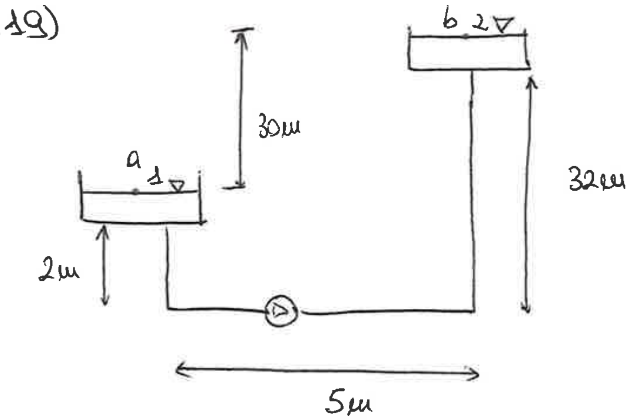
$v_2^{II} = 10,3 m/s \Rightarrow \varepsilon \% = 31\%$ NO!

$\lambda^{II} \begin{cases} Re = \frac{\rho v_2^{II} D}{\mu} = 1 \cdot 10^6 \\ \varepsilon/D = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda^{II} = 0,0118$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 42

1.19)



$d = 50mm = 0{,}05\,m$

$\dot{M} = 3kg/s$

$\Delta p?\ \ P?$

$\varepsilon = 150\mu m$

$\mu = 10^{-3}\ Pa\cdot s$

$\dot{M} = \rho A V = \rho \pi \frac{d^2}{4} V$

$\Rightarrow V = \frac{\dot{M}}{\rho \pi \frac{d^2}{4}} = 1{,}53\, m/s$

$\xi_{imbocco} = 1$

$\xi_{sbocco} = 1$

$\xi_{gomito} = 0{,}5 \Rightarrow \sum \xi = 1 + 1 + 2\cdot 0{,}5 = 3$

Bernoulli tra 1 e 2

$\Delta p + \cancel{p_1} + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = \cancel{p_2} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2} + \rho g z_2 + \Delta p_f$

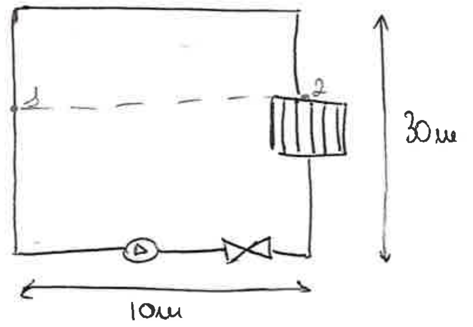
$$\Delta p_f = \lambda \frac{v^2 L_{tot} \rho}{2d} + \sum \xi \frac{v^2 \rho}{2} \qquad L_{tot} = 2+5+32$$

$Q = \pi \frac{d^2}{4} v = 0{,}003\ m^3/s$

$$\lambda \begin{cases} Re = \frac{\rho v d}{\mu} = 7{,}6\cdot 10^4 \\ \varepsilon/D = 0{,}003 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0{,}0279 \Rightarrow \Delta p_f = 28982{,}7\ Pa$$

$\Delta p = \Delta p_f + \rho g(z_2 - z_1) = 323283\ m^2/s^2$ $\qquad P = Q \cdot \Delta p = 970W$

1.20)



$V = 0{,}75\, m/s$

$\varepsilon = 10\mu m$

$\dot{M} = 0{,}06 kg/s \quad (T = 66°C)$

$d?\ \Delta p?\ P?$

$\xi_{valvole} = 2 \qquad \xi_{reuosifone} = 3$

$\dot{M} = \rho A V \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4\dot{M}}{\rho \pi V}} = 0{,}01008\ m = 10{,}08\ mm$

$\xi_{gomito} = 0{,}5 \Rightarrow \sum \xi = 4\ 0{,}5 + 2 + 3 = 7$

$Q = \pi \frac{d^2}{4} \cdot V = 59\cdot 10^{-6}\ m^3/s$

Bernoulli tra 1 e 2

$\Delta p + \cancel{p_1} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_1^2} + \cancel{\rho g z_1} = \cancel{p_2} + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_2^2} + \cancel{\rho g z_2} + \Delta p_f$

$$\Delta p_f = \lambda \frac{V^2 L_{tot}}{2d}\rho + \sum \xi \frac{V^2 \rho}{2} \qquad L_{tot} = 10+30+10+30$$

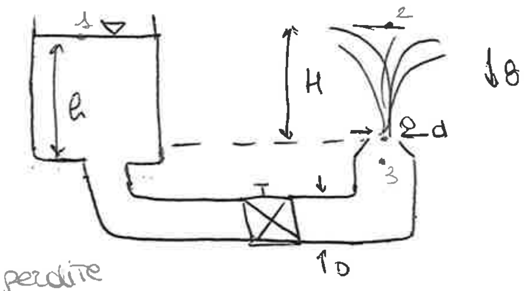
$$\lambda \begin{cases} Re = \frac{\rho v d}{\mu} = 7{,}5\cdot 10^3 \\ \varepsilon/d = 0{,}001 \end{cases} \Rightarrow \lambda = 0{,}0345 \Rightarrow \Delta p_f = 79593{,}75 Pa \Rightarrow \Delta p = 79594\ m^2/s^2$$

$P = 4{,}7\,W$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 42

1.22)



$h = 10\,m$ $\quad D = 0{,}05\,m$ $\quad d = 0{,}025\,m$ $\quad L = 4\,m$

$\xi_v = 4{,}5 \quad \xi_k = 0{,}25$

$\varepsilon = 75\,\mu m$

$\rho = 1000\,kg/m^3$ $\quad \mu = 10^{-3}\,Pa \cdot s$

4 CONDOTTI!

$\Delta p_g \approx 0$

Q_u ? H?

se $\Delta p_g \Longrightarrow Q_u$? H?

• senza perdite

Bernoulli tra 1 e 0

$$\cancel{p_1} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2}^{\,0} + \rho g z_1 = \cancel{p_0} + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0$$

$$v_0 = \sqrt{2gh} = 14\ m/s$$

Bernoulli tra 0 e 2

$$\cancel{p_0} + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 = \cancel{p_2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2}^{\,0} + \rho g z_2$$

$$\tfrac{1}{2}\rho v_0^2 = \rho g H \quad \Rightarrow \quad H = \frac{v_0^2}{2g} = 9{,}99\ m$$

$$Q_u = A_0 v_0 = \pi \frac{d^2}{4} v_0 = 0{,}00687\ m^3/s = 6{,}87\ dm^3/s$$

• con perdite

Bernoulli tra 1 e 0

$$\cancel{p_1} + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_1^2}^{\,0} + \rho g z_1 = \cancel{p_0} + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 + \Delta p_g$$

$$\Delta p_g = \lambda \frac{v_3^2 L \rho}{2D} + \Sigma\xi \frac{v_3^2 \rho}{2}$$

$$Q_0 = Q_3 \Rightarrow A_0 v_0 = A_3 v_3 \Rightarrow v_3 = \frac{A_0}{A_3} v_0 = \frac{d^2}{D^2} v_0$$

$$\Rightarrow \Delta p_g = \lambda \frac{\left(\frac{d^2}{D^2} v_0\right)^2 L \rho}{2D} + \Sigma\xi \frac{(d^2 v_0)^2 \rho}{2D^4}$$

$$\Rightarrow \rho g z_1 = \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 + \frac{\lambda d^4 v_0^2 \rho L}{2D^5} + 5\,\frac{d^4 v_0^2 \rho}{2D^4}$$

$$\Sigma\xi = 4{,}5 + 2 \cdot 0{,}25 = 5$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{\rho g (z_1 - z_0)}{\frac{1}{2}\rho + \frac{\lambda d^4 \rho L}{2D^5} + 5\,\frac{d^4 \rho}{2D^4}}} = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \frac{\lambda d^4 L}{D^5} + 5\frac{d^4}{D^4}}} = \sqrt{\frac{196{,}2}{1 + 0{,}3125 + \lambda 5}}$$

Metodo iterativo

$v_0^{I} = 12{,}3\ m/s \quad (\lambda = 0)$
$\hookrightarrow \lambda = 0$

$$\lambda^{I} \begin{cases} Re = \dfrac{\rho v_0^{I} D}{\mu} = 7 \cdot 10^{-} \\ \varepsilon/D = 0{,}0015 \end{cases} \Longrightarrow \lambda^{I} = 0{,}0228$$

$v_0^{II} = 11{,}74\ m/s$

$$\varepsilon\% = \left| \frac{v_0^{II} - v_0^{I}}{v_0^{I}} \right| = 4\%$$

$v_0 = 11{,}74\ m/s$

Bernoulli tra 0 e 2

$$p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 = p_2 + \cancel{\tfrac{1}{2}\rho v_2^2}^{\,0} + \rho g z_2$$

$$\tfrac{1}{2} v_0^2 = g(z_2 - z_0)$$

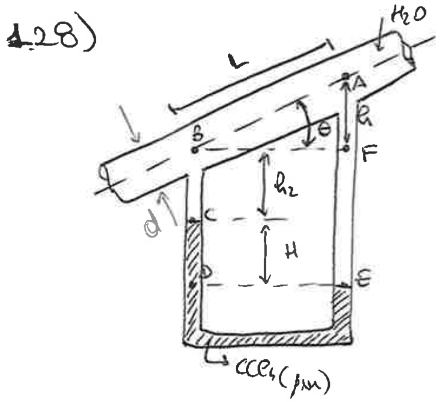
$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 7\,m$$

$$Q_u = A_0 v_0 = 5{,}7\ dm^3/s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 42

1.28)



$h = L \sin\theta$
$L = 3\,m$
$H = 2{,}5\,cm = 0{,}025\,m$
$Q?$
$\rho_A = 1000\,kg/m^3 \quad \mu_A = 1\,cP = 10^{-3}\,Pa \cdot s$
$\rho_m = 1594\,kg/m^3$
$d = 0{,}25\,mm = 0{,}25 \cdot 10^{-3}\,m$
moto laminare $\Rightarrow \lambda = \frac{64}{Re}$
non serve $\theta \rightarrow$ perché? perché le pressioni non dipendono da h

perdite di carico distribuite

$p_E = p_D$

$$= \begin{cases} p_E = p_A + \rho_A g (H + h + h_2) \\ p_D = p_B + \rho_m g H + \rho_A g h_2 \end{cases} \Longrightarrow p_A = p_B + \rho_m g H + \rho_A g h_2 - \rho_A g (H + h + h_2)$$

$Q_A = Q_B \rightarrow v_A = v_B$

Bernoulli tra A e B

(2) $p_A + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_A^2} + \rho g z_A = p_B + \cancel{\frac{1}{2}\rho v_B^2} + \rho g z_B + \Delta p_f$

$$\Delta p_f = \lambda \frac{v_B^2 L \rho}{2d} = \frac{64}{Re} \cdot \frac{v_B^2 L \rho}{2d} = \frac{64\mu}{\rho v_B d} \cdot \frac{v_B^2 L \rho}{2d} = \frac{64 \mu v_B L}{2d^2}$$

(1) $\cancel{p_B} + \rho_m g H + \cancel{\rho_A g h_2} - \rho_A g H - \cancel{\rho_A g h} - \cancel{\rho_A g h_2} = \cancel{p_B} - \cancel{\rho_A g h} + \Delta p_f$

$$\Delta p_f = \rho_m g H - \rho_A g H = 145{,}68\,Pa$$

$$145{,}68 = \frac{64 \mu v_B L}{2d^2}$$

$$v_B = \frac{2d^2 \cdot 145{,}68}{64 \mu L} = 9{,}48 \cdot 10^{-5}\,m/s$$

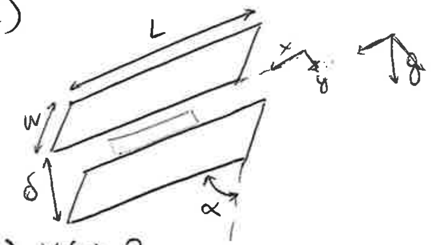
$$Q = \Delta V = 4{,}66 \cdot 10^{-12}\,m^3/s = 4{,}66\,\mu m^3/s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 42

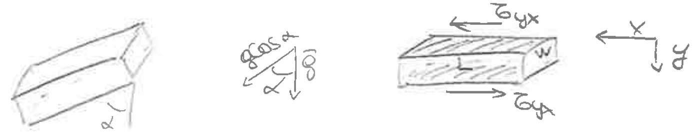
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 42

ESERCIZI BILANCI QDM

1)



Fluido Newtoniano
Flusso laminare completamente sviluppato



a_ $V_x(y)$?

Equilibrio Forze

$$\left(\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}\right) LW + \rho g \cos\alpha \cdot LW\Delta y = 0$$

$$\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} = -\rho g \cos\alpha$$

$$\cancel{-}\frac{d\tau_{yx}}{dy} = \cancel{+}\rho g \cos\alpha$$

$$\tau_{yx} = \rho g \cos\alpha\, y + C_1$$

Fluido Newtoniano $\quad \tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$

$$-\mu\frac{dv_x}{dy} = \rho g \cos\alpha\, y + C_1$$

$$\frac{dV_x}{dy} = -\frac{\rho g \cos\alpha}{\mu} y - \frac{C_1}{\mu}$$

$$V_x = -\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

BC1 $\quad V_x(y=0) = 0 \implies C_2 = 0$

BC2 $\quad V_x(y=\delta) = 0 \implies -\frac{\rho g \cos\alpha}{2\cancel{\mu}}\delta^{\cancel{2}} - \frac{C_1}{\cancel{\mu}}\cancel{\delta} = 0$

$$C_1 = -\frac{\rho g \cos\alpha\,\delta}{2}$$

$$\Rightarrow V_x(y) = -\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu} y^2 + \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta y$$

b_ V_{max}?

$V_{max} \to$ per $\tau_{yx} = 0$

$$\tau_{yx} = \rho g \cos\alpha\, y - \frac{\rho g \cos\alpha}{2}\delta = \rho g \cos\alpha\left(y - \frac{\delta}{2}\right)$$

$$\tau_{yx} = 0 \implies y = \delta/2$$

$$V_{max} = -\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\frac{\delta^2}{4} + \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta\frac{\delta}{2} = \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{\rho g \cos\alpha}{8\mu}\delta^2$$

c_ Q_v?

$$Q_v = \langle v\rangle A = \int_0^W\int_0^\delta v_x(y)\,dy\,dz = W\int_0^\delta v_x(y)\,dy =$$

$$= W\int_0^\delta\left[-\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}y^2 + \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta y\right]dy =$$

$$= W\left[\int_0^\delta -\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}y^2\,dy + \int_0^\delta \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta y\,dy\right] =$$

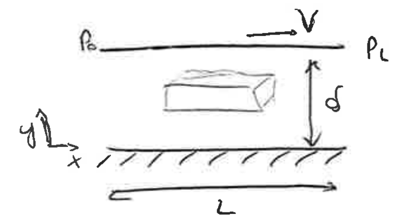
$$= W\left[-\frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^\delta + \frac{\rho g \cos\alpha}{2\mu}\delta\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^\delta\right] =$$

$$= \frac{W\rho g \cos\alpha}{2\mu}\left[-\frac{\delta^3}{3} + \frac{\delta^3}{2}\right] = \frac{W\rho g \cos\alpha}{12\mu}\delta^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 42

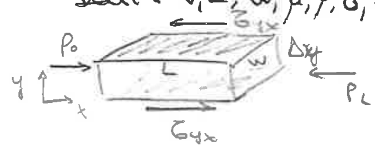
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 42

2)



Fluido Newtoniano

Dati: $V, L, W, \mu, \rho, \delta, P_L, P_0$



a_ $v_x(y)$?

EQ FORZE

$$\left(+\tau_{yx}\big|_y - \tau_{yx}\big|_{y+\Delta y}\right) LW + (P_0 - P_L) W \Delta y = 0$$

$$\frac{\tau_{yx}|_y - \tau_{yx}|_{y+\Delta y}}{\Delta y} + \frac{(P_0 - P_L)}{L} = 0$$

$$-\frac{d\tau_{yx}}{dy} = -\frac{P_0 - P_L}{L}$$

$$\tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$$

Fluido Newtoniano $\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$

$$-\mu \frac{dv_x}{dy} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + C_1$$

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{P_0 - P_L}{\mu L} y - \frac{C_1}{\mu}$$

$$v_x(y) = -\frac{P_0 - P_L}{2\mu L} y^2 - \frac{C_1}{\mu} y + C_2$$

BC1 $v_x(y=0) = 0 \implies C_2 = 0$

BC2 $v_x(y=\delta) = V \implies -V = +\frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\delta^2 + \frac{C_1}{\mu}\delta$

$$C_1 = \left[-V - \frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\delta^2\right] \mu/\delta$$

$$v_x(y) = \frac{P_L - P_0}{2\mu L} y^2 + \frac{y}{\delta}\left[V + \frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\delta^2\right] =$$

$$= \frac{P_L - P_0}{2\mu L} y^2 + \left(\frac{V}{\delta} - \frac{P_L - P_0}{2\mu L}\delta\right) y$$

b_ τ_{yx}?

$$\tau_{yx} = \frac{P_0 - P_L}{L} y + \left[-V - \frac{P_0 - P_L}{2\mu L}\delta^2\right]\frac{\mu}{\delta} =$$

$$= \frac{P_0 - P_L}{L} y - \frac{\mu V}{\delta} - \frac{P_0 - P_L}{2L}\delta =$$

$$= \frac{P_0 - P_L}{L}\left(y - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\mu V}{\delta}$$

c_ y? per v_{max}

$v_{max} \Rightarrow \tau_{yx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{P_0 - P_L}{L}\left(y - \frac{\delta}{2}\right) - \frac{\mu V}{\delta} = 0$$

$$\frac{P_0 - P_L}{L} y - \frac{P_0 - P_L}{L}\frac{\delta}{2} = \frac{\mu V}{\delta}$$

$$y = \frac{\frac{\mu V}{\delta} + \frac{P_0 - P_L}{L}\frac{\delta}{2}}{\frac{P_0 - P_L}{L}} =$$

$$= \frac{L\mu V}{(P_0 - P_L)\delta} + \delta/2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 42

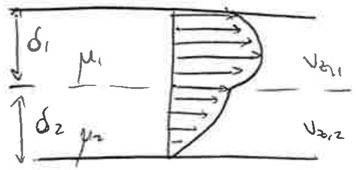
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 42

3- Sulla base dei profili riportati, si può escludere che A e B siano fluidi plastici?

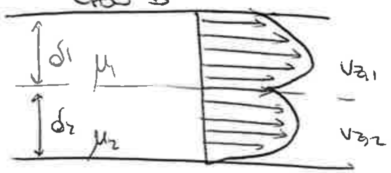
Si possono escludere perché se no avrei un profilo piatto di velocità → FALSO

6)

CASO A



CASO B



1- Per ciascun profilo, dire se la situazione è possibile.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 42

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 42

se i 2 fluidi scorressero in verso opposto $\Rightarrow$ aggiungo F x mantenere in equilibrio il setto

$$\tau_{yx_1} WL + \tau_{yx_2} WL + F = 0$$

τ_{yx_1}, τ_{yx_2} sforzi agenti sul setto

b- Q_1, Q_2 ?

$$Q_1 = \int_0^W \int_0^{+H_1} v_{x_1}(y)\,dy\,dz = W \int_0^{+H_1} v_x(y)\,dy = W \int_0^{+H_1} -\frac{P_0-P_L}{2\mu L}(y^2 - H_1 y) = -W \frac{P_0-P_L}{2\mu L} \left\{ \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{H_1} - H_1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{H_1} \right\} =$$

$$= -W \frac{P_0-P_L}{2\mu L}\left[\frac{+H_1^3}{3} - \frac{H_1^3}{2}\right] = +W \frac{P_0-P_L}{12\mu L} H_1^3$$

$$Q_2 = \int_0^W \int_0^{H_2} v_{x_2}(y)\,dy\,dz = W \frac{P_0-P_L}{2\mu L} \int_0^{H_2} (H_2 y - y^2)\,dy = W \frac{P_0-P_L}{2\mu L} \left\{ H_2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{H_2} - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{H_2} \right\} =$$

$$= W \frac{P_0-P_L}{2\mu L}\left[\frac{H_2^3}{2} - \frac{H_2^3}{3}\right] = W \frac{P_0-P_L}{12\mu L} H_2^3$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 42