



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2354A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Trabace Maddalena

MATERIA: Gasdinamica - Prof. Iuso

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Testi: "Modern Compressive Flow" - Anderson
 "Elements of Gasdynamics"

02/10/2017
 LEZ 1

Trattiamo flussi COMPRESSIBILI:

Fluidodinamica { GASDINAMICA → scienza "AERODINAMICA"
IDRODINAMICA

Nei problemi di alta velocità si considerano fenomeni di aerotermodinamica:

$H = h + \frac{v^2}{2}$ "ENTALPIA TOTALE"

se $M = \frac{v}{a} \Rightarrow$, allora $\frac{v^2}{2} \Rightarrow h$

- STRUTTURA di UN GAS \Rightarrow elementi costituenti { Molecole, Atomi, ioni, elettroni se dissociazioni }
 in continua AGITAZIONE MOLECOLARE

- Non hanno volume e forma proprie, ma sono fortemente COMPRESSIBILI.

- Numero di Mach: $M = \frac{v}{a}$, $a = a(T, p)$ "VELOCITÀ DEL SUONO"

$a = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

Def) PARTICELLA FLUIDA: insieme di molecole che occupa un certo volume, (quasi puntiforme)

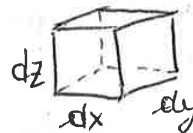
È possibile stabilire solo statisticamente le proprietà del fluido in ogni punto

Sufficientemente grande da contenere un numero elevato di molecole

FLUSSO CONTINUO: può descrivere con continuità tutte le proprietà del fluido.

Dimensione associata al differenziale

\Rightarrow Davante molecole esistono nel volumetto?



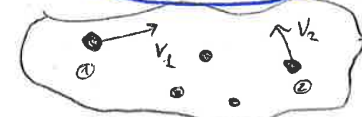
RICHIAMI:

- Mole (piccola) ^{mol} contiene un num. di molecole pari ad $N_A = 6.023 \cdot 10^{23}$ molecole (mol)
- Mole (grande) \Rightarrow Mol o kmol contiene 10^3 piccole moli, cioè $6.023 \cdot 10^{26}$ molecole

Volume occupato da una mole (1 Mol) - grande - 1 mol

$T = 0^\circ C$
 $p = 760 \text{ mmHg}$
 $\Rightarrow V = 22,4 \text{ m}^3$
 EQ. STATO

Moto microscopico si "sovrappone" a quello macroscopico:



Cgni molecola ha la propria velocità

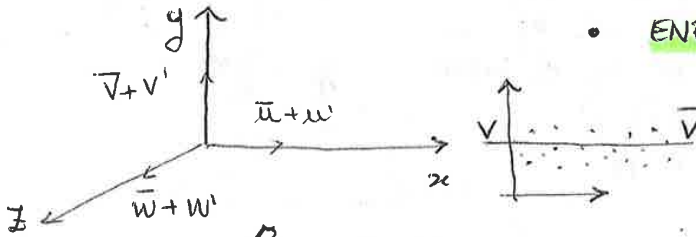
$$v_i = \bar{v} + v_i'$$

Velocità Media baricentrica

Moto caotico, quindi v_i di agitazione termica

Valore medio statistico valutato su un insieme enorme di molecole

Consideriamo un gas in movimento e un SRF cartesiano:



ENERGIA CINETICA TRASLATORIA di una molecola di massa (m)

$$E = \frac{1}{2} m (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)$$

$$\vec{V} = (u, v, w)$$

COMPONENTI di V

$$\bar{u}^2 = (\bar{u} + u')(\bar{u} + u')$$

* media d'insieme *

$$= \bar{u}^2 + u'u + \bar{u}u' + u'u'$$

* media della somma = somma delle medie *

$$= \bar{u}^2 + \bar{u'u} + \bar{\bar{u}u'} + \bar{u'u'}$$

$$= \bar{u}^2 + \bar{u'u'}$$

$\bar{u'u'} = 0$ fluttuazione attorno alla media

per definizione

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m [\bar{u}^2 + \bar{u'u'} + \bar{v}^2 + \bar{v'v'} + \bar{w}^2 + \bar{w'w'}]$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} m [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2] + \frac{1}{2} m [\bar{u'u'} + \bar{v'v'} + \bar{w'w'}]$$

E_c media macroscopica (legata al moto baricentrico)

E_c media caotica dell'insieme di molecole

$$E_t$$

ENERGIA LEGATA ALE FLUTTAZIONI MOLECOLARI (sempre traslazionale)

$$[E_t] = \frac{J}{mol}$$

$$E_t = \frac{1}{2} m [\bar{u'u'} + \bar{v'v'} + \bar{w'w'}]$$

$$E_t = \frac{1}{2} m v_{at}^2$$

v_{at}^2 : velocità di agitazione termica

$$v_{at} = \sqrt{\bar{u'u'} + \bar{v'v'} + \bar{w'w'}}$$

$$v_{at} = \sqrt{\frac{2E_t}{m}}$$

legame fra energia cinetica e temperatura:

"CONSTANTE DI BOLTZMANN":

$$\left[\begin{array}{l} R = 8314 \frac{J}{Mol \cdot K} \\ N_A = 6.023 \cdot 10^{23} mol \end{array} \right]$$

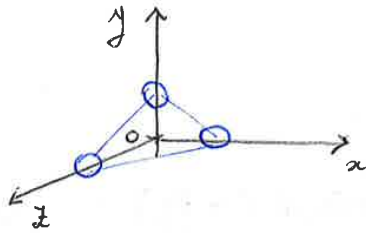
$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.380 \cdot 10^{-23} \frac{J}{molecola \cdot K}$$

La quantità di energia che serve a una molecola per aumentare la sua T di 1 K

NB. A una direzione preferenziale fra x, y, z , ma l'energia si divide "equamente" (PRINCIPIO DI EQUIPARTIZIONE)

- GRADI DI LIBERTÀ TRASLAZIONALI

$L_t = 3$ $\forall n$

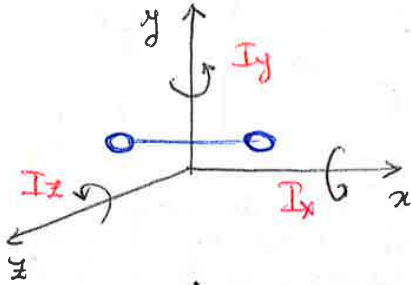


- GRADI DI LIBERTÀ ROTAZIONALI

L_r (consideriamo $n=2$)

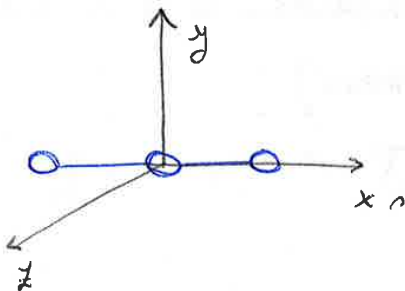
$I_x \ll I_y, I_z$, quindi

$n=2 \Rightarrow L_r = 2$



Se $n=3$ e gli atomi sono allineati, si ha comunque $L_r = 2$

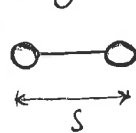
Es: CO_2



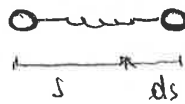
Se $n \geq 3$, allora $L_t = 3$, che avranno a sommare a quelli traslazionali

Per $T < 1000^\circ K$: $L = L_t + L_r$
 $\left\{ \begin{array}{l} n=2 \Rightarrow L = 3+2 = \underline{5} \\ n=3 \Rightarrow L = 3+2 = \underline{5} \text{ (Allineati)} \\ n \geq 3 \Rightarrow L = 3+3 = \underline{6} \end{array} \right.$

Per $T > 1000^\circ K$ intervengono i vibrazionali :



$T \uparrow$



Accumulo di energia elastica [cambia la dist. interatomica]

Aria : $\approx 80\% N_2$, $20\% O_2$

$n=2$ $n=2$
 [in camera a energia allo stesso modo]

$\Rightarrow L = L_t + L_r = 3+2 = 5$ fino a $1000^\circ K$

- ENERGIA di UNA MOLECOLA :

contutti i grad che competono alla molecola

$E_L = L \left(\frac{1}{2} k_B T \right)$, $[E_L] = J$ molecola

- ENERGIA INTERNA MOLARE ed ENTALPIA MOLARE :

$\Rightarrow N_A = 6.023 \cdot 10^{26}$ molecole/mol

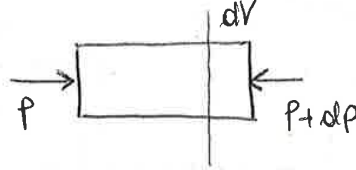
$\bar{C} = N_A E_L = L \frac{1}{2} \underbrace{N_A k_B T}_R$

- COMPRESSIBILITA'
 - I liquidi sono incompressibili in quanto ρ costante
 - Per i gas $\Delta p \uparrow$;

Consideriamo un volume di controllo:

Applico una differenza di pressione positiva \rightarrow COMPRESSIONE

* Fluido in quiete *



$$+dp \Rightarrow -dV$$

- Variazione percentuale della riduzione di volume: $\frac{dV}{V}$

(Def)

COMPRESSIBILITA' :

$$\beta = -\frac{dV}{V} \frac{1}{dp}$$

$$[\beta] = Pa^{-1}$$

Ipotizziamo T costante $\Rightarrow \beta = 10^{-10} \frac{m^2}{N}$ LIQUIDI

$\beta_T = 10^{-5} \frac{m^2}{N}$ GAS

- Variazione percentuale sulla densità: $\frac{d\rho}{\rho} \rightarrow +dp$

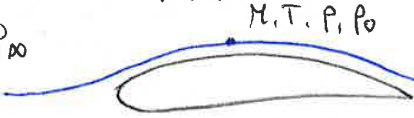
$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$-\frac{dV}{V} \frac{1}{dp} \frac{\text{massa}}{\text{massa}} = \beta \Rightarrow \beta = -\rho \frac{d(\frac{1}{\rho})}{dp}$$

$$\Rightarrow \beta = -\rho \frac{-\frac{1}{\rho^2} d\rho}{dp} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \beta dp$$

* Gas in movimento *

$M_\infty, \rho_\infty, p_\infty$



$$\rightarrow \Delta M \rightarrow \Delta p \rightarrow \Delta \rho$$

$$p = p_0 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Se Mach è piccolo (0.1, 0.2) la densità cambia poco \Rightarrow INCOMPRESSIBILI
 Se Mach è 0.7, 0.8 cambia la pressione statica

La corrente viene accelerata sul dorso \Rightarrow aumento di Mach \Rightarrow Creazione ONDE DI URTO [aumento di pressione e temperatura]

GAS CALORICAMENTE

PERFETTI

C_p
 C_v costanti $\Rightarrow \gamma$

$T < 1000K$

Flusso di qdai : VISCOSITA' DINAMICA (μ)
 Flusso di energia (interna) : CONDUCEBILITA' (λ)
 Flusso di massa : DIFFUSIVITA' (D)

PROPRIETA' di TRASPORTO

ESERCITAZIONE ①

RICHIAMI



"m" massa
 "M" massa molare
 "V" volume

- **EQ. DI STATO:**
 - a) $pV = \frac{mRT}{M}$, $R = 8314 \frac{J}{mol \cdot K}$
 - b) $p = \rho \frac{RT}{M} \Rightarrow \rho = \frac{pM}{RT}$
 - c) $pV = nRT$, N numero di moli, $N = \frac{m}{M}$
 $\Rightarrow p = nRT$, con $n = \frac{N}{V}$ densità volumica

ES: Condizioni normali $\left\{ \begin{array}{l} T = 0^\circ C \\ p = 101325 Pa \\ \Rightarrow V = 22.4 m^3 \text{ (grande mole)} \end{array} \right.$
 1 Mole di gas

ESERCIZIO ①

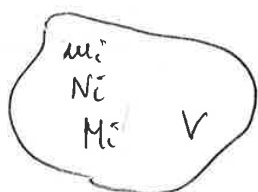
$V = 0.4 m^3$ di NH_3 gassosa
 $t = 50^\circ C$
 $p = 4.9 \cdot 10^5 Pa$

$N = 17 \frac{kg}{mol}$
 Q? Vcostante fino a $t_{fin} = 100^\circ C$

$Q = m c_v (T_{fin} - T)$; $pV = nRT \Rightarrow n = \frac{pV}{RT}$
 $c_v = ? \left\{ \begin{array}{l} \frac{c_p}{c_v} = \gamma \\ c_p - c_v = R \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c_p = \gamma c_v \\ c_v(\gamma - 1) = R \end{array} \right. \rightarrow c_v = \frac{R}{\gamma - 1}$

$Q = M n \cdot c_v (T_{fin} - T) = M \cdot \frac{pV}{RT} \cdot \frac{R}{\gamma - 1} (T_{fin} - T)$
 ($NH_3 \rightarrow \gamma = 4$) = kJ

• **EQ. DI STATO PER MISCELA**



$m_T = \sum m_i$ massa totale
 $N_T = \sum N_i$ num. di moli totali
 $M_{misc} = \frac{m_T}{N_T}$ Massa molare totale

- **CONCENTRAZIONI PONDERALI:** $c_i = \frac{m_i}{m_T}$; $\sum c_i = 1$.

- **FRAZIONE MOLARE:** $X_i = \frac{N_i}{N_T}$

$\Rightarrow M_{misc} = \frac{m_T}{N_T} = \frac{m_T}{\sum N_i} = \frac{m_T}{\sum \frac{m_i}{M_i}} = \frac{1}{\sum c_i / M_i}$

$Q_{misc} = ?$ $t = 58^\circ C$ nella stessa miscela

$$\alpha_{misc} = \sqrt{\gamma_{misc} \frac{R T}{M_{misc}}}; \quad \gamma_{misc} = \frac{\sum (x_i (L_i + 2))}{\sum x_i L_i} = 1.352$$

$$\alpha_{misc} = 368.3 \frac{m}{s}$$

ESERCIZIO (3)

Miscela $\left\{ \begin{array}{l} He \\ NH_3 \end{array} \right.$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} V &= 45.9 m^3 \\ P &= 1.962 \cdot 10^5 Pa \\ T &= 300 K \end{aligned}$$

$Q = 10350 kJ \rightarrow V \text{ costante}$

$\rightarrow \Delta T = 150 K$

$\mu_{He} ? \mu_{NH_3} ? M_{misc} ?$

$$Q = N_T \cdot C_{V,misc} \Delta T; \quad N_T = \frac{PV}{RT} = 3.6 \text{ mol}$$

$$C_{V,misc} = \frac{Q}{N_T \Delta T} = 10110 \frac{J}{\text{mol} \cdot K}$$

$$\begin{cases} C_{V,He} X_{He} + C_{V,NH_3} X_{NH_3} = C_{V,misc} \\ X_{He} + X_{NH_3} = 1 \end{cases}; \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_{V,He} &= \frac{L}{2} R \quad (L = \dots) \\ C_{V,NH_3} &= \frac{L}{2} R \end{aligned}$$

$$\mu_{He} = 6.76$$

$$\mu_{NH_3} = 32.66$$

$$M_{misc} = 10.92 \text{ kg}$$

06/10/2017
LEZ 3

PROPRIETA' DI TRASPORTO DEI FLUIDI

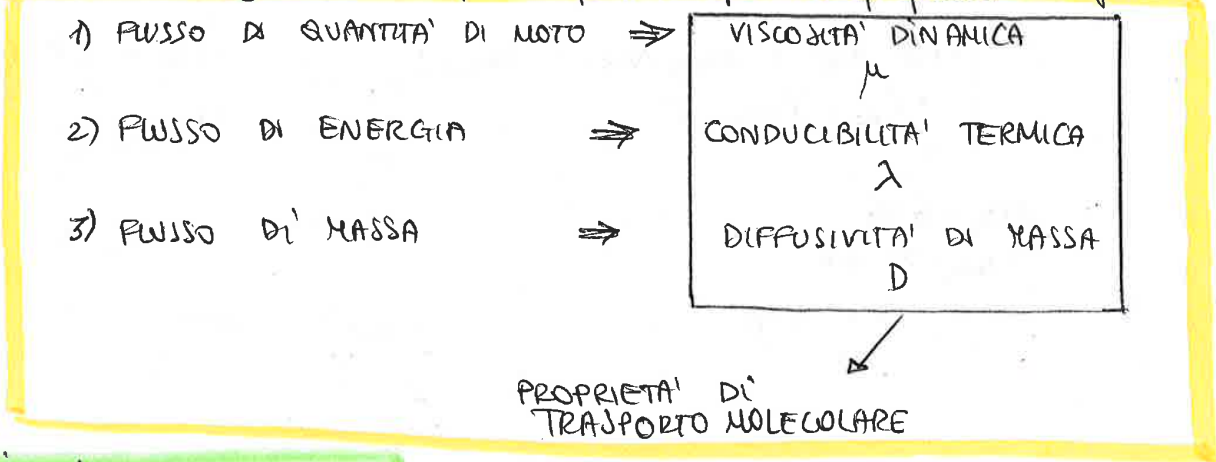
- Ogni molecola di ogni specie chimica nel suo moto macroscopico è caratterizzata da

- QUANTITA' DI MOTO
 - ENERGIA
 - MASSA
- } trasportate dalle singole molecole

In un campo di moto non uniforme si generano flussi → $\frac{\text{grandezza}}{\text{superficie} \cdot \text{tempo}}$

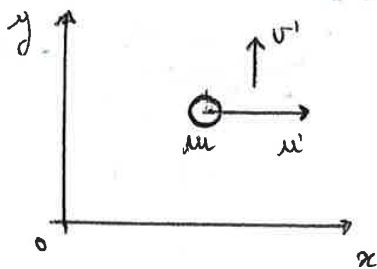
nelle correnti gassose ⇒ $\begin{cases} \text{di velocità} \\ \text{di temperatura} \\ \text{di massa} \end{cases}$

- Alle tre fenomenologie di trasporto fanno capo tre proprietà dei fluidi:



① VISCOSITA' DINAMICA : μ

Gli sforzi viscosi si generano in presenza di gradienti di velocità. Cerchiamo il legame fra trasporto delle fluttuazioni molecolari, gradiente di velocità e sforzo viscoso.



$\rho dm_x = m \cdot v' \rightarrow$ qdm trasportata dalle fluttuazioni lungo l'asse x.

Sarà trasportata anche lungo l'asse z della fluttuazione w'

- Nella direzione y, la qdm trasportata per effetto di v' sarà data dalla media d'insieme che compete della densità molecolare n presente:

$$\int_n m \cdot v' \cdot dn = \overline{\rho v' v'} = \frac{F}{S} \Rightarrow \rho \cdot dn = dp$$

è uno spazio diretto lungo x

FLUSSO DI QDM nell'unità di tempo nella direzione x trasportata attraverso una superficie unitaria che ha per normale l'asse y.

- Lo sforzo τ_{xy} nasce per effetto del gradiente di velocità medio connesso alla presenza delle fluttuazioni molecolari. Esso è positivo in quanto la cross-relazione \overline{uv} è negativa.

In assenza di gradienti di velocità medio lo sforzo è solo normale alla superficie ed è pari alla pressione (p).

OSS: μ dipende solo dalla TEMPERATURA:

$$\mu = m \overline{u^2} = m \frac{1}{d^3 n} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{m k_B T}{d^4}}$$

Nei gas: $\mu \propto \sqrt{T}$ (non dipende dalla pressione)
 Nei liquidi: $\mu \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$

Def: VISCOSITA' CINEMATICA: $\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow [\nu] = \frac{m^2}{s}$

• CALCOLO della VISCOSITA' DINAMICA μ :

① FORMULA di SUTHERLAND:

$$\mu = S \frac{T^{\frac{3}{2}}}{Z + T}$$

Costanti specifiche del gas

NB: $\begin{cases} \text{A bassissime temperature:} \\ T \ll Z \Rightarrow \mu \propto T^{\frac{3}{2}} \\ \text{Ad alte temperature:} \\ T \gg Z \Rightarrow \mu \propto T^{\frac{1}{2}} \end{cases}$

ES: ARIA:
 $Z = 110 \text{ K}$
 $S = 1.46 \cdot 10^{-6} \frac{kg}{m s K^{0.5}}$

② FORMULA MONOMIA (faccio riferimento ad una certa temperatura):

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^{w(T)}$$

ES: ARIA:
 $T_{ref} = 300 \text{ K}$
 $w = 0.75$

• NUMERO DI REYNOLDS: governa il comportamento dei fluidi viscosi:

$$Re = \frac{\rho V L}{\mu}$$

con V velocità della corrente e L lunghezza caratteristica del problema in esame.

• Moltiplicando num e den per V :

$$Re = \frac{\rho V^2 L}{\mu V} = \frac{\rho V^2}{\frac{\mu V}{L}} \Rightarrow Re = \frac{\text{Forza inerzia}}{\text{Forza viscosa}}$$

- Nel caso di una corrente fluida che lambisce una parete, il Num. di Reynolds governa tutto il campo di moto che si sviluppa nelle immediate vicinanze della parete, detto STRATO LIMITE.

② CONDUCEBILITÀ: λ

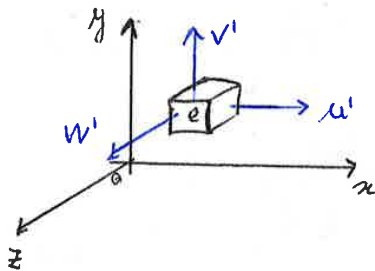
È coinvolta nella generazione dei flussi di calore in presenza di gradienti di temperatura. È anch'essa legata all'agitazione termica delle molecole.

- Consideriamo energia interna media caotica dell'insieme di molecole per unità di volume:

• Teoria cinetica dei gas:

$$e = e_t + e_i$$

\swarrow TRASLAZIONALE \searrow INTERNA



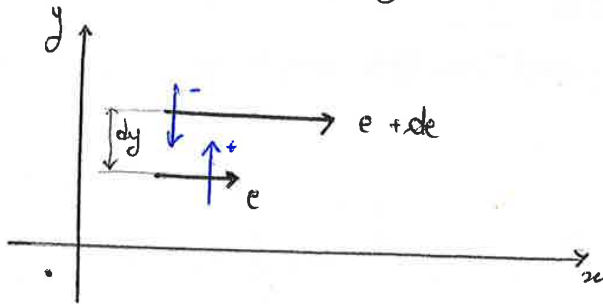
$$e / \Delta V = \rho \left(e_i + \frac{u'u' + v'v' + w'w'}{2} \right)$$

ed è trasportata nelle tre direzioni dalle fluttuazioni caotiche u', v', w' (per effetto delle collisioni molecolari)

Flussi:

$$\begin{cases} q_x = \rho \left(e_i + \frac{u'u' + v'v' + w'w'}{2} \right) u' = \rho \bar{e} u' \\ q_y = \rho \bar{e} v' \\ q_z = \rho \bar{e} w' \end{cases}$$

I flussi si manifestano solo in presenza di gradienti di energia interna macroscopica. Consideriamo la seguente situazione nel piano xy :



Flusso netto: differenza fra flusso di energia trasportato verso il basso e quello verso l'alto:

$$q_{netto} = -m(\bar{e} + d\bar{e})n v_{at} + m\bar{e}n v_{at} = -m d\bar{e} n v_{at} = q_y$$

Analogamente a prima: $d\bar{e} = \frac{d\bar{e}}{dy} dy = \frac{d\bar{e}}{dy} l$; con $\bar{e} = c_v T$

$$\Rightarrow q_y = -m \frac{d\bar{e}}{dy} l n v_{at} \Rightarrow q_y = -m n v_{at} \left(c_v l \frac{dT}{dy} \right)$$

Confrontando con la legge di Fourier: $q_y = -\lambda \frac{dT}{dy}$ } $\lambda = m n c_v l v_{at} \Rightarrow$

RICHIANI LEZ. PREC:

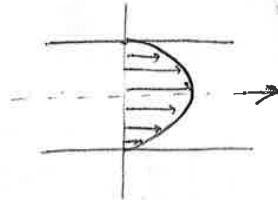
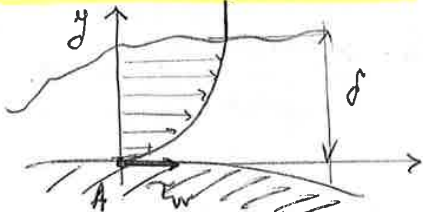
09/10/2017
LEZ 4

Proprietà di trasporto molecolare

- μ : flusso di pdm, solo se vi sono grad di velocità $\rightarrow \tau_{ij}$
- λ : flusso di energia, " " " " temperatura $\rightarrow q_T$

$\lambda = \underbrace{\rho \nu l}_{\mu} c_v \approx \mu c_v$; $\mu \rightarrow Re = \frac{\rho V L}{\mu}$ \rightarrow forze inerziali
 $\mu \rightarrow$ forze visose

STRATO LIMITE CINEMATICO

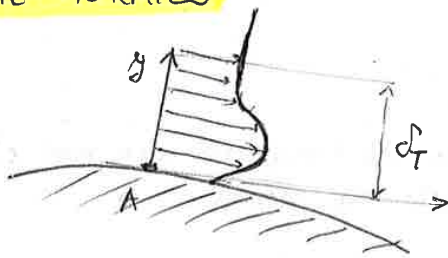


$\lambda \rightarrow$ "Prandtl" $\rightarrow Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\mu \rho c_p \nu}{\lambda} \rightarrow Pr = \frac{\nu}{\kappa} \Rightarrow$

$\Downarrow Pr = \frac{\text{diffusione viscosa}}{\text{diffusività termica}}$

La pdm diffonde, per effetto della viscosità

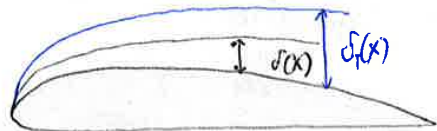
STRATO LIMITE TERMICO



• Ipotezziamo un certo valore di temperatura a parete T_w

• All'esterno deve "sfumare" l'effetto della conducibilità.

- Se $Pr = 1$ allora $\delta = \delta_T \Rightarrow \nu = \kappa$ (strato limite termico e cinematico diffondono allo stesso modo)
- Per i gas viscosi, $Pr < 1$, cioè gli effetti diffusivi termici sono + rilevanti di quelli



$Pr \begin{cases} \text{LAMINARE} \\ \text{TURBOLENTO} \end{cases}$

Pr in funzione di gamma (L) \Rightarrow

LEGGE di EUCKEN :

$Pr = \frac{2L+4}{2L+9}$

Usando $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

$\Rightarrow Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma-5}$

$Re = \frac{VL\rho}{\mu}$; $M = \frac{v}{a}$; $Kn = \frac{e}{L}$; $Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}$

RELAZIONE fra Kn , Re e Kn ?

$\frac{M}{Re} = \frac{\mu}{\rho a L \rho} = \frac{\rho \nu a L}{\rho a L} = \frac{\sqrt{3RT}}{\sqrt{\gamma RT}} Kn \Rightarrow$

$\frac{M}{Re} = \sqrt{\frac{3}{\gamma}} Kn$

RICHIAMI : SIST. TERMODINAMICO

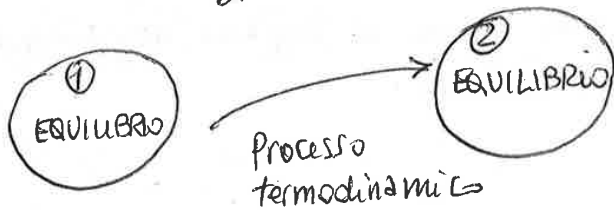


interazione con l'ambiente circostante $\left\{ \begin{array}{l} dq \text{ scambio di calore} \\ dL \text{ scambio di lavoro} \end{array} \right.$

SIST. ISOLATO è in equilibrio termodinamico assoluto se $V=0$ allora sussiste eq. termodinamico.

$$\left\{ \begin{array}{l} dq = 0 \text{ TERMICO} \\ dL = 0 \text{ MECCANICO} \\ + \text{ eq. CHIMICO} \end{array} \right.$$

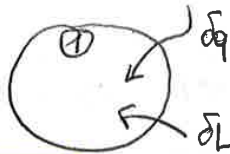
$V \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{UNIFORME } (T, M, V) \Rightarrow \text{eq. TERMODINAMICO} \\ \text{F.D. } (T, V, M) \Rightarrow \text{DISEQUILIBRIO TERMODINAMICO} \end{array} \right.$



↳ se avviene attraverso stati infinitesimi di equilibrio

1° PRINCIPIO

Sist. in condizioni di eq. termodinamico ①



Scambio di calore e Lavoro

$$de = dq + dL$$

Variazione di energia interna \Rightarrow



• dq e dL non sono differenziali esatti, perché dipendono dal tipo di processo (V costante, p costante, ecc)

• dE è un differenziale esatto perché dipende solo dalla condizione iniziale e finale

\rightarrow ENERGIA INTERNA per ud.u. ($e = e_t + e_i$)

$$e = c_v T \Rightarrow de = c_v dT$$

PROCESSI $\left\{ \begin{array}{l} \text{REVERSIBILI} \rightarrow \text{formando indietro, tornano esattamente nelle condiz. iniziali} \\ \text{IRREVERSIBILI} \text{ (la maggior parte dei processi è irreversibile)} \end{array} \right.$

↳ tornano ad uno stato iniziale con aumento di entropia (avvergono in presenza di gradienti, che sono dissipativi)

Calcolo della variazione di entropia

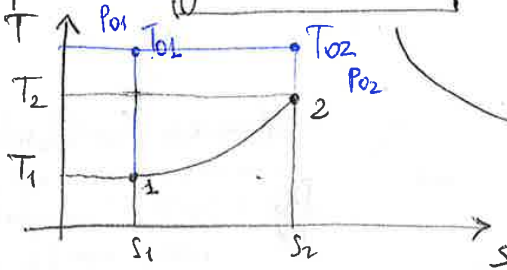
- Proc. REVERIBILE $\Rightarrow dL = -pdv$
- 1° + 2° : $Tds = de + pdv$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet dp = c_v dT \\ \bullet \int \frac{1}{T} \\ \bullet \text{eq. di STATO : } pv = \frac{RT}{M} \end{array} \right\} \Rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{pdv}{T} \Rightarrow ds = c_v \frac{dT}{T} + \frac{R}{M} \frac{dT}{v}$$

Integrando : $s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{v_2}{v_1}$
 $s_2 - s_1 = c_v \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{R}{M} \ln \frac{p_1}{p_2}$

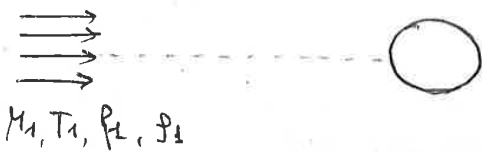
Partendo da $Tds = dh - vdp \Rightarrow$ Analogamente : $s_2 - s_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$
 (vale anche x transf. irreversibile)

- Salto entropico con grandezze totali :



\exists una corrente gassosa che evolve con una certa velocità verso lo Stato ②.

si radduzano quando la corrente viene arrestata (ISENTROPICAMENTE)



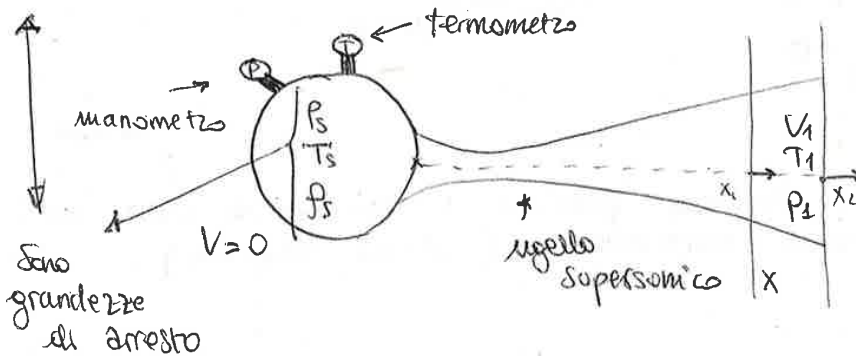
lungo una l.d.c. : $h + \frac{v^2}{2} = \text{costante}$
 $p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{costante}$

$$s_2 - s_1 = s_2^0 - s_1^0 = c_p \ln \frac{T_2^0}{T_1^0} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2^0}{p_1^0}$$

$$s_2^0 - s_1^0 = c_p \ln \frac{T_2^0}{T_1^0} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_1^0}{p_2^0}$$

$T_2^0 = T_1^0$ nei processi ISENTROPICI (e REVERIBILI)

- CONDIZIONI di SERBATOIO



Arresto in un' asissa x

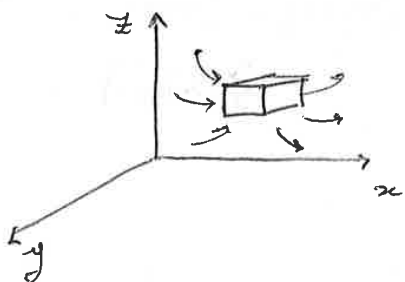
$$T_0 = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) = T_s$$

$$p_0 = p_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = p_s$$

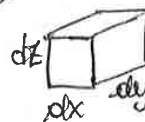
sono grandezze di arresto

EQUAZIONI IN FORMA DIFFERENZIALE →

EULERIANA



osservo tutto ciò che passa nel volume fermo nello spazio



infinitesimo
 $dV = dx dy dz$

13/10/2017
 LEZ 6

- Volume finito → differenziale ⇒ volume → 0 ;
- Integrali → vanno trasformati tutti nello stesso tipo.

1) $\int_S \rightarrow \int_{Vol} =$ Teorema di Gauss

\vec{A} vettore → $\int_S (\vec{A} \cdot \vec{n}) dS = \int_{Vol} (\nabla \cdot \vec{A}) dV$ (DIVERGENZA)

Quindi : $\int_S \rho \cdot \vec{n} dS = \int_{Vol} \nabla \rho dV$ (GRADIENTE)

⇒ BILANCIO DI MASSA :

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho dV = - \int_S \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dS \stackrel{T.G.}{=} - \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV ;$

$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} \rho dV + \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 ;$ // Il volume è fisso //

$\int_{Vol} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{Vol} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 ;$

$\int_{Vol} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) \right) dV = 0$

L'unico modo per annullare l'integrale e, in tutto il volume arbitrario, annullare la funzione integranda :

⇒ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right)$

EULERIANA DIFFERENZIALE → FORMA CONSERVATIVA

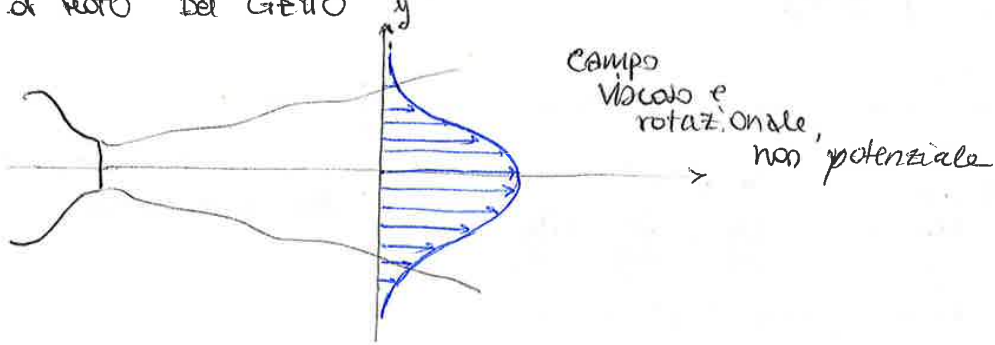
Supponiamo di passare alla forma LAGRANGIANA → derivazione

⇒ $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(v \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 ;$

$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = - \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$

Derivata LAGRANGIANA

CAMPO di MOTO Del GETTO



- Eq. ENERGIA DIFF. EULERO

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = - \nabla \cdot (p \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

↓ LAGRANGE

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = - \nabla \cdot (p \vec{v}) + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v})$$

⇒ forma con entalpia totale H

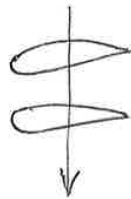
$$\underbrace{e + \frac{p}{\rho}}_h + \frac{v^2}{2} = H ; \quad h = c_p T$$

(statica)

$$\rho \frac{DH}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \dot{q} + \rho (\vec{f} \cdot \vec{v}) + \square + \square + \square \dots$$

oss: • $\frac{\partial p}{\partial t} \neq 0$ abbiamo un fenomeno non stazionario

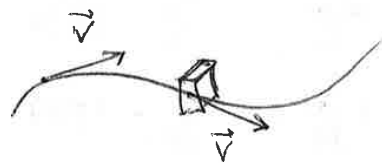
- \dot{q}
- $\vec{f} \cdot \vec{v}$



es: palette di una turbomacchina

se flusso STAZIONARIO :

$$\begin{cases} \dot{q} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \\ \vec{f} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$



$$H = \text{costante} = h + \frac{v^2}{2} = h_0$$

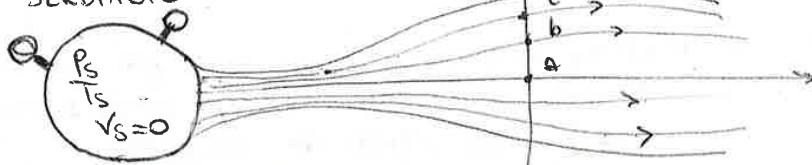


$$H_0 = H = h_{\infty} + \frac{v_{\infty}^2}{2} \quad h_a + \frac{v_a^2}{2} = h_b + \frac{v_b^2}{2} = H_0$$

"ENTALPIA di ARRESTO"

$$H_0 = H = H_s$$

CONDIZIONI di SERBATOIO

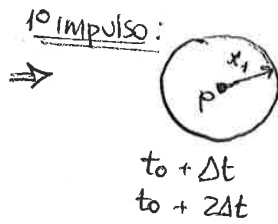
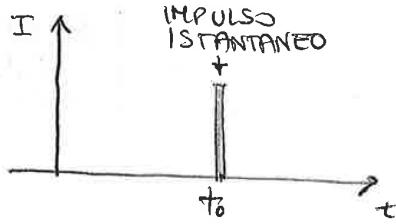


↓ CAMPO ORIENTALPICO

23/10/2017
LEZ 10

$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \rightarrow$ Meccanismo delle collisioni molecolari:

$V=0$



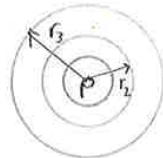
$r_1 = a\Delta t$

Onda sferica con centro in P

Per impulsi successivi

\Rightarrow fronti d'onda sferici e concentrici

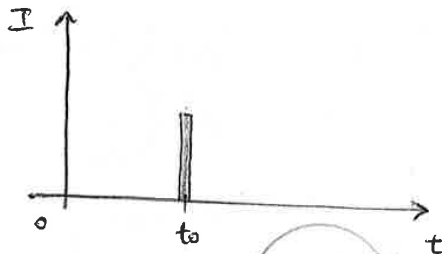
$r_1 = a\Delta t$
 $r_2 = 2a\Delta t$
 $r_3 = 3a\Delta t \dots$



\rightarrow la perturbazione raggiunge i punti che giacciono sulle sfere concentriche

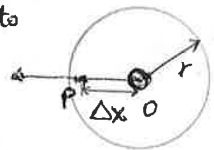
$V \neq 0$

$V < a$ (subsonico)



$\Delta t?$

1° impulso:

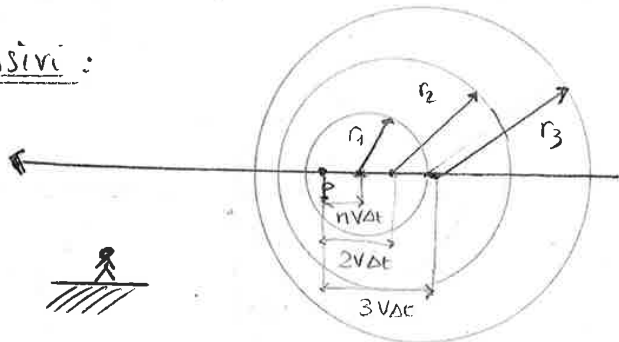


direzione di spostamento della sorgente

$\Rightarrow \Delta x < r$ perché $V < a$

Impulsi successivi:

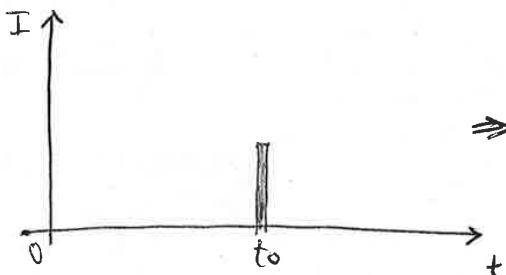
$r_1 = a\Delta t$
 $r_2 = 2a\Delta t$
 $r_3 = 3a\Delta t$
 \vdots



I punti raggiunti dalla perturbazione all'istante $n\Delta t$ si trovano sulla superficie sferica di raggio $n a \Delta t$ e centro a una distanza $nV\Delta t$

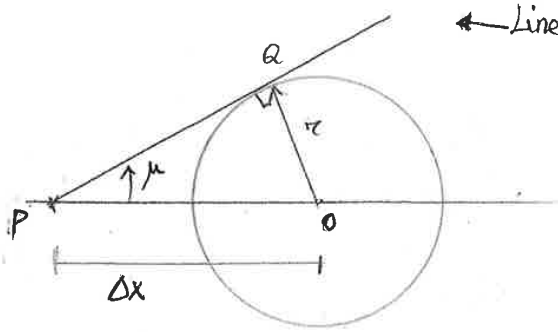
un osservatore sente prima il suono e poi la sorgente

$V = a$



Consideriamo sorgente di piccole perturbazioni immersa in un fluido in quiete, che si muove con velocità V
[per valutare gli effetti della compressibilità]

$\Delta t \begin{cases} \Delta x = V\Delta t \\ r = a\Delta t \end{cases} \Rightarrow V = a$
 \Downarrow
 $\Delta x = \lambda$

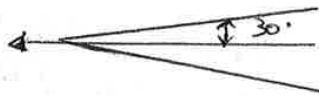


$$\begin{cases} r = a \Delta t \\ \Delta x = PO = v \Delta t \end{cases}$$

$$\sin \mu = \frac{r}{\Delta x} = \frac{a \Delta t}{v \Delta t}$$

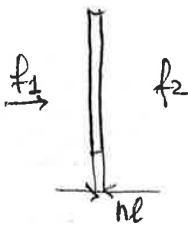
$\Rightarrow \mu = \arcsin \frac{1}{M} \rightarrow$ definizione caratteristica

- CASO SONICO $\Rightarrow M=1 \Rightarrow \mu = 90^\circ$ (sfere con tangente verticale in Comune)
- CASO SUPERSONICO $\Rightarrow M=2 \Rightarrow \mu = 30^\circ$



Per Mach che aumenta, l'angolo si stringe.

GRANDI PERTURBAZIONI \Rightarrow URTO RETTO
(PROPAGAZIONE DI UN'ONDA D'URTO NORMALE)

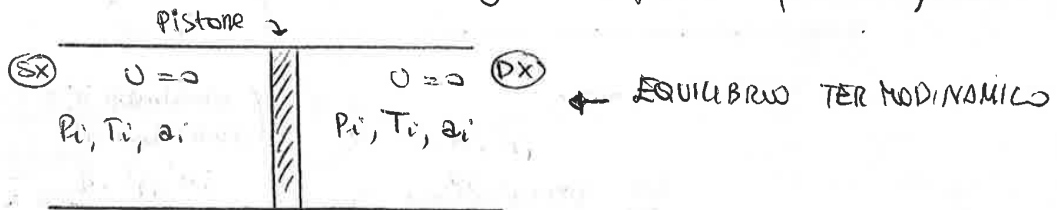


Quando l'onda d'urto attraversa un campo, genera notevoli variazioni delle grandezze, come ad esempio la pressione.

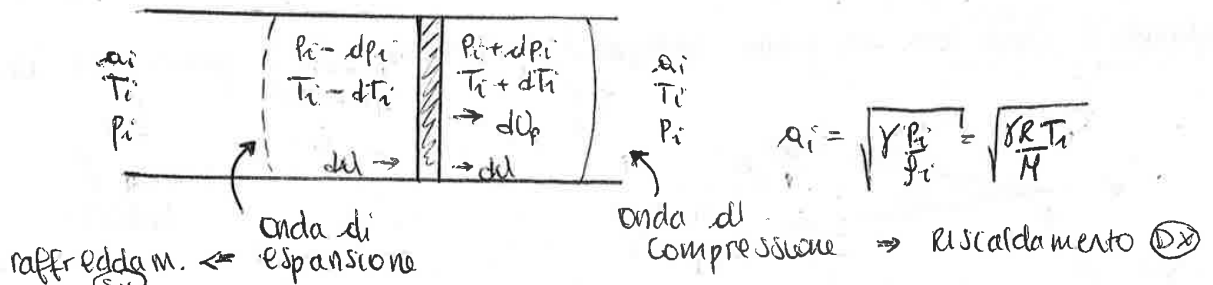
\rightarrow La spessore dell'onda d'urto è dell'ordine del libero cammino medio molecolare.

Perché si genera un'onda d'urto? $\left\{ \begin{array}{l} \text{TUBO D'URTO} \\ \text{PROFILO ALARE} \end{array} \right.$

① TUBO D'URTO (al cui interno si generano flussi supersonici)

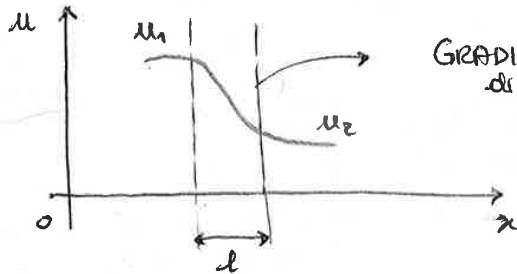
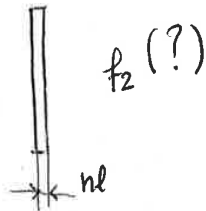


1° IMPULSO:



$$a_i = \sqrt{\frac{\gamma P_i}{\rho_i}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_i}{M}}$$

raffreddam. \leftarrow Onda di espansione \rightarrow Onda di compressione \rightarrow riscaldamento \otimes



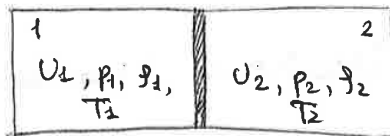
GRADIENTE di VELOCITÀ

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow$$

nascono τ_{xx} viscosi,

responsabili delle dissipazioni.

ESQUAZIONI URTO RETTO (pto di vista EULERIANO, moto STAZIONARIO)



1, 2 campi uniformi

↳ eq. TERMODINAMICO

TRASFORMAZIONE ADIABATICA

$$\updownarrow$$

$$q = 0$$

Dobbiamo ricavare: $\frac{p_2}{p_1} = g(M_1)$ (?)

• $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$ BILANCIO MASSA

• $p_1 + \rho_1 u_1^2 = p_2 + \rho_2 u_2^2$ BILANCIO QDM

• $h_1 = h_2$ BILANCIO ENERGIA

↳ $h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$; $h = c_p T$, c_p costante & T costante

- $\frac{QDM}{MASSA}$: $\frac{p_1 + \rho_1 u_1^2}{\rho_1 u_1} = \frac{p_2 + \rho_2 u_2^2}{\rho_2 u_2} \Rightarrow \frac{p_1}{\rho_1 u_1} + u_1 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} + u_2$

$\Rightarrow u_1 - u_2 = \frac{p_2}{\rho_2 u_2} - \frac{p_1}{\rho_1 u_1}$

- $a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}$ \Rightarrow SOSTITUISCO $u_1 - u_2 = \frac{a_2^2}{\gamma u_2} - \frac{a_1^2}{\gamma u_1}$ (*)
 $\hookrightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma}$

- Altra via: EQ. ENERGIA \Rightarrow Cons. entalpia totale

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} (a^*)^2$$

Velocità del suono in condizioni critiche

$$a^2 = \frac{\gamma + 1}{2} (a^*)^2 - \frac{\gamma - 1}{2} u^2$$

ESERCITAZIONE

CALCOLO DELLA VISCOSITÀ DINAMICA

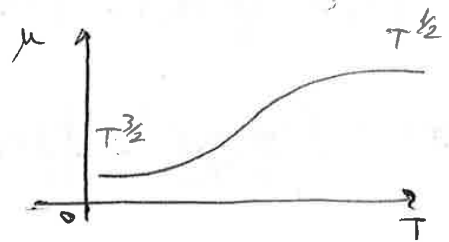
- GAS MONOCOMPONENTE

• Formula di Sutherland :

$$\mu = S \frac{T^{3/2}}{273 + T}$$

costanti per l'ARIA

$$\begin{cases} S = 1.46 \cdot 10^{-6} \text{ kg/musk}^{0.5} \\ X = 110 \text{ K} \end{cases}$$



• Formula Monomia

$$\frac{\mu}{\mu_{ref}} = \left(\frac{T}{T_{ref}} \right)^\omega, \quad \omega = \omega(T)$$

$$\begin{aligned} T_{ref} &= 300 \text{ K} \\ \omega &= 0.75 \end{aligned}$$

① Calcolo della μ dell'aria :

$$u_1^2 - u_2^2 = \left(\frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \left(\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_2} \right) = \frac{1}{\rho_1} (p_2 - p_1) + \frac{1}{\rho_2} (p_2 - p_1);$$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (*)$$

- Per altra via : $u_1^2 - u_2^2$ sfruttando la conservazione dell'entalpia totale :

ADIAB $\Rightarrow H = \text{cost} = c_p T + \frac{u^2}{2} \Rightarrow H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{RT}{M} + \frac{u^2}{2}$

$\frac{\gamma R}{\gamma-1 M} \Rightarrow H = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2}$
 eq. di stato

① $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1}$

$$\Rightarrow u_1^2 - u_2^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right] \quad \text{da uguagliare con (*)}$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{\rho_1} \left(p_2 - p_1 \right) \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) = \left[\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left[\frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right] \right] \frac{p_2}{\rho_1} \Rightarrow$$

$$\frac{2\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{p_2}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} \right) = \left(\frac{p_2}{\rho_1} - 1 \right) \left(\frac{p_2}{\rho_1} + 1 \right) \quad \text{Esplicito } \frac{p}{\rho} = f\left(\frac{p_2}{\rho_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{p_2}{\rho_1}} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{p_2}{\rho_1} = \frac{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_1} + 1}{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} + \frac{p_2}{\rho_1}}$$

→ RELAZIONI DI RANKINE-HUGONOT

ES. L'auto è adiabatico ma non isentropico (per via delle dissipazioni) Variazioni di pressione provocano ≠ variazioni di densità.

• Rapporto $\frac{p_2}{\rho_1}$. Tengo conto che $\rho u = \text{costante}$ (continuità)

$$\frac{p_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \cdot \frac{u_1}{\rho_1} = \frac{u_1^2}{(\rho_1 u_1)^2} = (M_1^*)^2 = f(M_1^2);$$

$$\frac{p_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{2+(\gamma-1)M_1^2} \Rightarrow \frac{p_2}{\rho_1} = f(M_1)$$

- Se $M_1 > 1$ allora $\frac{p_2}{\rho_1} > 1$ (L'aria si comprime attraverso l'auto)

EFFETTI DISSIPATIVI → ENTROPIA.



Vale sempre $S_2 - S_1 > 0$

$$ds = \frac{\delta q}{T} + ds_{irr} \quad (\text{ADIAB., NON REV})$$

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow S_2 - S_1 = C_p \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} (M_1^2 - 1) \right] \frac{2 + (\gamma-1)M_1^2}{(\gamma+1)M_1^2} - \frac{R}{M} \ln \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1) \right]$$

$f(M_1)$ $f(M_1)$

$S_2 - S_1 > 0$ se $M_1 > 1$

Se $M_1 = 1$ allora $S_2 = S_1 \rightarrow$ Linea di Mach
 Se $M_1 < 1$ allora $S_2 < S_1$, non accettabile.

La relazione si può esprimere anche con le grandezze totali;

$$S_2 - S_1 = S_2^0 - S_1^0 \Rightarrow S_2^0 - S_1^0 = C_p \ln \frac{T_2^0}{T_1^0} - \frac{R}{M} \ln \frac{P_2^0}{P_1^0}$$

$$S_2^0 - S_1^0 = C_p - \frac{R}{M} \frac{P_2^0}{P_1^0} \quad (> 0)$$

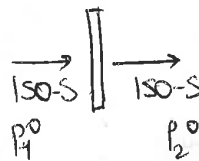
(si conserva la T_0)

oss $P_2^0 < P_1^0$. C'è stata una caduta di press. totale, per le dissipazioni dovute alle T viscos.

$$\frac{P_2^0}{P_1^0} = e^{-\frac{(S_2^0 - S_1^0)M}{R}}$$

se è nota la variazione di entropia totale.

Rapporto $\frac{P_2^0}{P_1^0} = f(M_1)$



$$P_1^0 = P_1 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$P_2^0 = P_2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\Rightarrow \frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

$f(M_1)$

$$\Rightarrow \frac{P_2^0}{P_1^0} = \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma-1} (M_1^2 - 1) \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{(\gamma+1)M_1^2}{2 + (\gamma-1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

- Rapporto $\frac{P_2}{P_1}$ (da conservaz. energia)

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2 \quad ; \quad \text{Ma} \quad \rho u^2 = \rho \alpha^2 M^2 = \frac{\rho \gamma P}{\rho} M^2$$

$$\hookrightarrow \rho u^2 = \gamma P M^2$$

$$P_1 + \gamma P_1 M_1^2 = P_2 + \gamma P_2 M_2^2 ;$$

$$\Rightarrow \frac{P_2 - P_1}{P_1} = \frac{\gamma (P_1 M_1^2 - P_2 M_2^2)}{P_1} ;$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} - 1 = \gamma M_1^2 - \frac{P_2}{P_1} \gamma M_2^2 ;$$

$$\Rightarrow \frac{P_2}{P_1} (1 + \gamma M_2^2) = 1 + \gamma M_1^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2}} = f(M_1, M_2)$$

- Rapporto $\frac{T_2}{T_1}$:

Eq. stato : $\frac{T_2}{T_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{\rho_1}{\rho_2}$

Bilancio massa : $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$
 $\hookrightarrow \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{u_2}{u_1}$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{u_2}{u_1}$$

$\downarrow u = Ma$

$$a = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{M_2 a_2}{M_1 a_1}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{M_2}{M_1} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} ;$$

$$\Rightarrow \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{M_2}{M_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{M_2}{M_1}\right)^2} = f(M_1, M_2)$$

- Rapporto $\frac{\rho_1}{\rho_2}$:

Eq. stato : $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P_1} \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} \cdot \frac{(1 + \gamma M_2^2)^2}{(1 + \gamma M_1^2)^2} \cdot \frac{M_1^2}{M_2^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \gamma M_2^2}{1 + \gamma M_1^2} \cdot \frac{M_1^2}{M_2^2}}$$

- Rapporto pressioni totali : $\frac{P_2^0}{P_1^0}$

$$P^0 = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{P_2}{P_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

Dobbiamo ricavare la pendenza $\frac{dT}{ds}$ in ogni punto e anche $\frac{du}{ds}$:

- EQ. CONTINUITA'
- BILANCIO QDM
- EQ. STATO
- EQ. SALTO ENTROPICO

$$\frac{dT}{ds} = \frac{I}{\varphi} \frac{\gamma M^2 - 1}{M^2 - 1} ; \quad \frac{du}{ds} = - \frac{u}{\varphi} \frac{1}{M^2 - 1}$$

- Ingresso supersonico: $M_1 > 1 \Rightarrow M^2 - 1 > 0$

• $\frac{dT}{ds} > 0$ quando $\gamma M^2 - 1 > 0 \Rightarrow M^2 > \frac{1}{\gamma} \Rightarrow M > \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$

• $\frac{dT}{ds} < 0$ quando $\gamma M^2 - 1 < 0 \Rightarrow M < \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \Rightarrow M < 1 \Rightarrow$ **NO**
 Contraddizione Hp. Supersonica

• $\frac{dT}{ds} \rightarrow \infty$ quando $M^2 - 1 = 0 \Rightarrow M \rightarrow 1$ (Valore sonico)

quando viene fornita una precisa quantità di calore

$q^* = q_{max}$
(Per $M > 1$)

in uscita si sono verificate le condizioni critiche

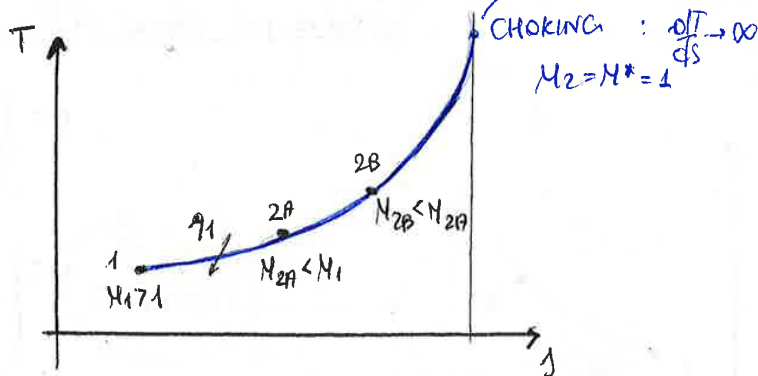
p^*, T^*, ρ^*, M^*

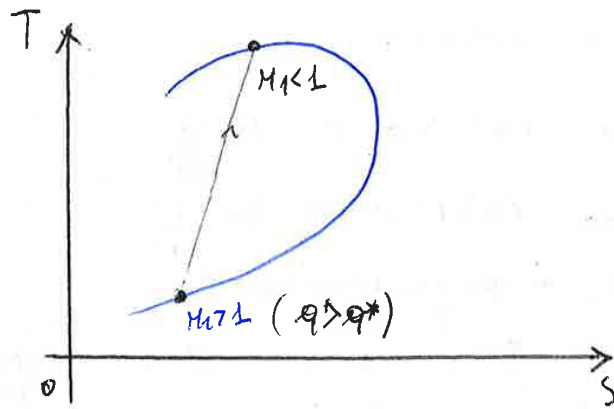
CONDIZIONE SONICA
CONDIZIONE di CHOKING

- Cosa fa la velocità? $\rightarrow \frac{du}{ds} = - \varphi \frac{1}{M^2 - 1}$ ($M_1 > 1$)

• $\frac{du}{ds} < 0 \Rightarrow$ il flusso decelera

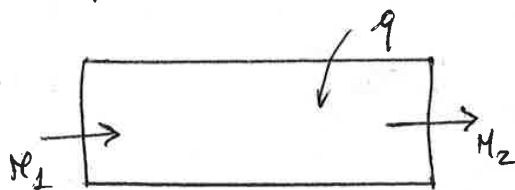
$q^* = f(M_1, M_2)$





Procedimenti operativi

30/10/2017 LEZ 13



1) $\frac{p_2}{p_1} = g(M_1, M_2)$

2) $\frac{p}{p^*}$ (riferite alle condizioni critiche)

$\hookrightarrow \frac{p}{p^*} = g(M)$

[metodo + efficace + rapido]

Procedimento ①

- si conoscano le condizioni del flusso a monte e anche la quantità di calore somministrato.

$q = c_p(T_2^0 - T_1^0)$, $T_2^0 > T_1^0$

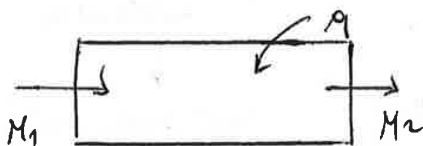
- il campo è in condizioni isentropiche : $T_2^0 = T_1^0 + \frac{q}{c_p}$
con $T_1^0 = T_1(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2)$;

- $\frac{T_2^0}{T_1^0} = g(M_1, M_2) \Rightarrow$ l'incognita è $M_2 \Rightarrow$ si procede per tentativi.
Nota M_2 ricavato tutti gli altri rapporti.

- $S_2 - S_1 = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{R}{M} \ln \frac{p_2}{p_1}$ dove conosco i rapporti.

Procedimento ②

Dobbiamo definire le condizioni critiche (quando posto in condizioni soniche la sezione di uscita) \rightarrow fornisce una q massima per quel Mach in ingresso

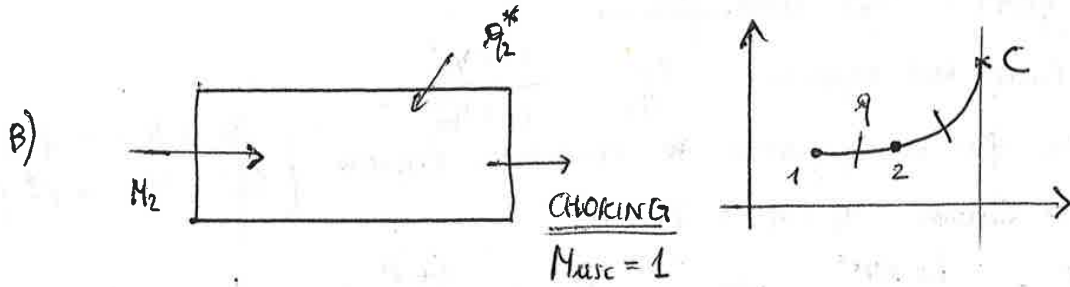


- $M_1 > 1$

$q_{MH}^* \rightarrow M_2 = M^* = 1$

(dipende da M_1)

- $M_1 < 1$
 $q_{MH}^* \rightarrow M_2 = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} p^* \\ \rho^* \\ T^* \end{array} \right.$

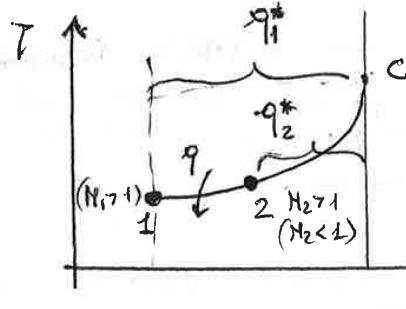


I valori delle grandezze sono identici

$q \quad T_2^0 = T_1^0 + \frac{q}{c_p} \Rightarrow d) \frac{T_2^0}{T_0^*} = f(M) \rightarrow \text{TAB 3} \rightarrow \text{da DX a SX} \rightarrow M_2$

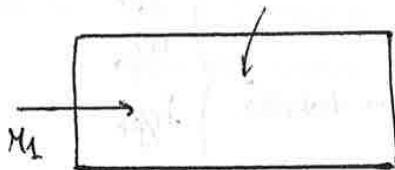
Legame fra $|q|$, q_1^* e q_2^*

- a) $M_1 > 1 \rightarrow q \rightarrow M_2 > 1$; $M_2 < M_1$
- b) $M_1 > 1 \rightarrow q_1^* \rightarrow M_2 = M^* = 1$



$q_1^* > q_2^* \Rightarrow q_1^* - q = q_2^*$
 appartengono a 2 condotti diversi

Se il condotto è assegnato : $q_1^* ?$



$q = c_p(T_2^0 - T_1^0)$

$M_1 > 1$ assegnato. $\Rightarrow T_1^0 = \square$

$q_1^* = c_p(T_0^* - T_1^0)$, con T_0^* dalla tabella 3.

Per un assegnato flusso in ingresso ($M < 1$ o $M > 1$) le condizioni del flusso in uscita dipendono dalla lunghezza L del condotto che determina l'entrata delle forze attrito sulle

ASSUNZIONI

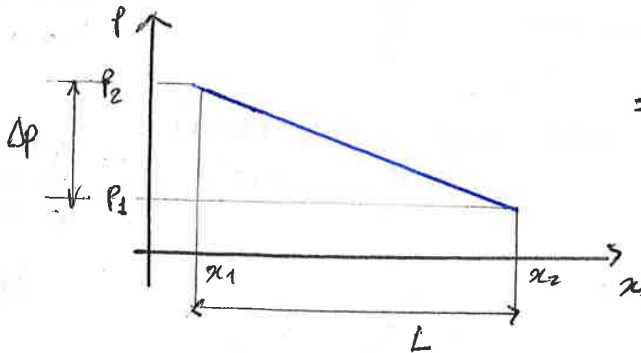
- ADIABATICO $\rightarrow q = 0$
- VISCOSO $\rightarrow T \neq 0$
- STAZIONARIO $\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Sezione costante A ;
- c_p, c_v costanti

se flusso incompressibile $\Rightarrow \rho$ costante (e τ_w non dipende più da x):

$$P_2 - P_1 = - \frac{4}{D}$$

$$\frac{\Delta p}{\Delta x} = \frac{\Delta P}{L} = - \frac{4}{D} \tau_w$$

\Rightarrow l'attrito è l'unico responsabile della variazione di pressione



$$\lambda = \frac{dp}{dx} = - 4 C_f \frac{1}{2} \rho u^2 / D$$

"friction coefficient" [LOCALE]
con $\lambda = \lambda(Re)$

• FLUSSO LAMINARE ($Re \leq 2300$)

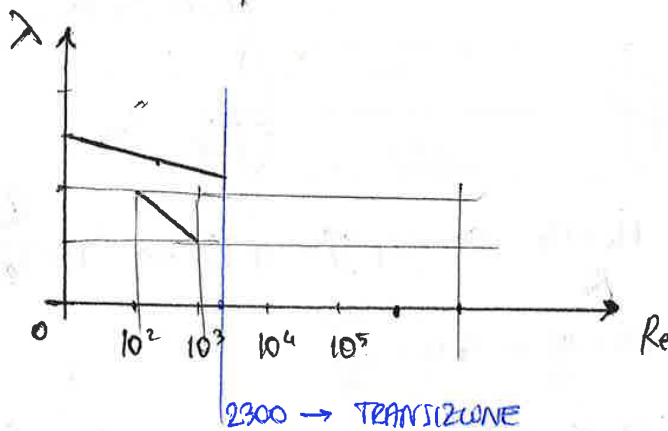
$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

• FLUSSO TURBOLENTO

$$\lambda = \frac{0.32}{Re^{1/4}}$$

Scale logaritmiche

↑ aumento per sfuocatura a parete



• FORMA DIFFERENZIALE $\left\{ \begin{array}{l} \cdot dp \\ \cdot d(\rho u^2) \end{array} \right.$ ecc.

$$\rightarrow dp + d(\rho u^2) = - \frac{4}{D} \tau_w(x) dx$$

↓
(continuità: ρu costante $\rightarrow d(\rho u^2) = \rho u du$)

$$\rightarrow dp + \rho u du = - \frac{4}{D} \frac{1}{2} \rho u^2 C_f dx$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \quad \square$$

► RAPPORTO DENSITA'.

↳ Partiamo dall'equazione di stato: $\rho = \frac{P}{RT}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{R}{M} T_1 \\ \frac{P_2}{\rho_2} = \frac{R}{M} T_2 \end{cases} \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \quad \Rightarrow \text{Sfrutto le relazioni precedenti:}$$

$$\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \cdot \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}}$$

► RAPPORTO PRESSIONI TOTALI

↳ Moltiplico e divido per P_2 e P_1 il rapporto:

$$\frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{P_2^0}{P_2} \cdot \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_1}{P_1^0} \quad \text{calcolato}$$

nota: $P^0 = P \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$

$$\Rightarrow \frac{P_2^0}{P_1^0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2}} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}}$$

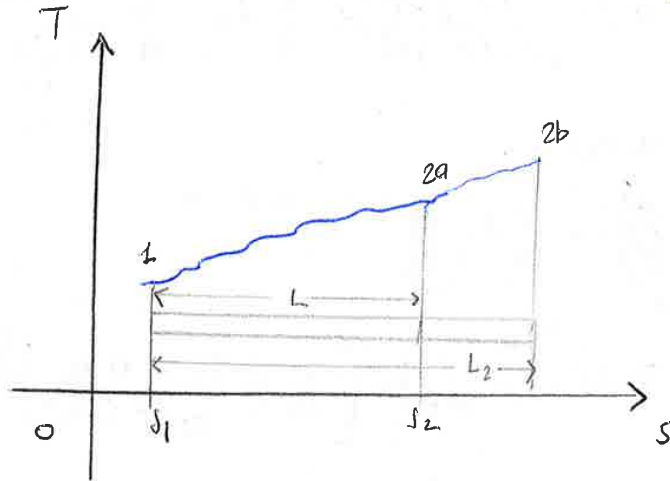
$$\frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{M_1}{M_2} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left(\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{M_1}{M_2} \cdot \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1} - \frac{1}{2}} \quad \left(= \frac{2\gamma - \gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

- Per un'assegnata condizione in ingresso e per una certa L del condotto, sul piano $T-s$ si può riportare qualitativamente la condizione ②
 - ↳ L'entropia aumenta sempre (PROCESSO DISSIPATIVO)
 - ↳ La corrente può accelerare o decelerare in base a M_1 .

- curva di Fanno -

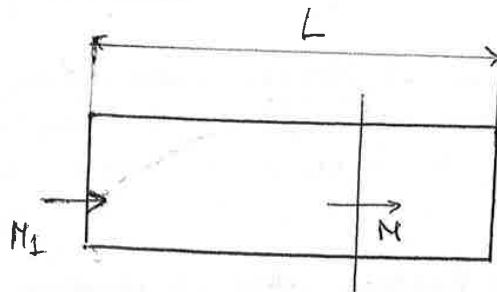


→ Ogni punto sulla curva è rappresentativo di un certo valore di L

• EVOLUZIONE SUL PIANO $T-s$;

- Dobbiamo considerare le derivate dt/ds e du/ds che per questo flusso assumono le seguenti espressioni (ANALISI DEL SEGNO:)

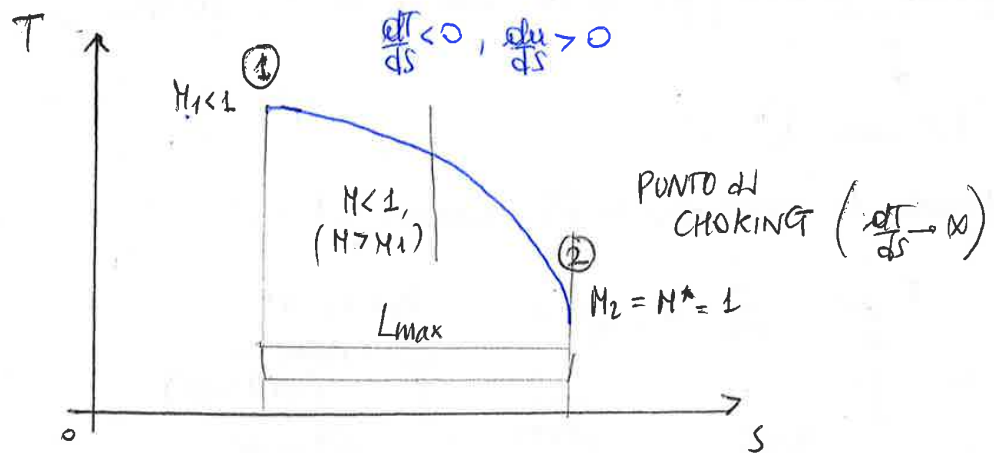
$$\frac{dt}{ds} = \frac{T}{C_v} \frac{M^2}{M^2 - 1} ; \quad \frac{du}{ds} = - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{T}{u} \frac{M^2}{M^2 - 1}$$



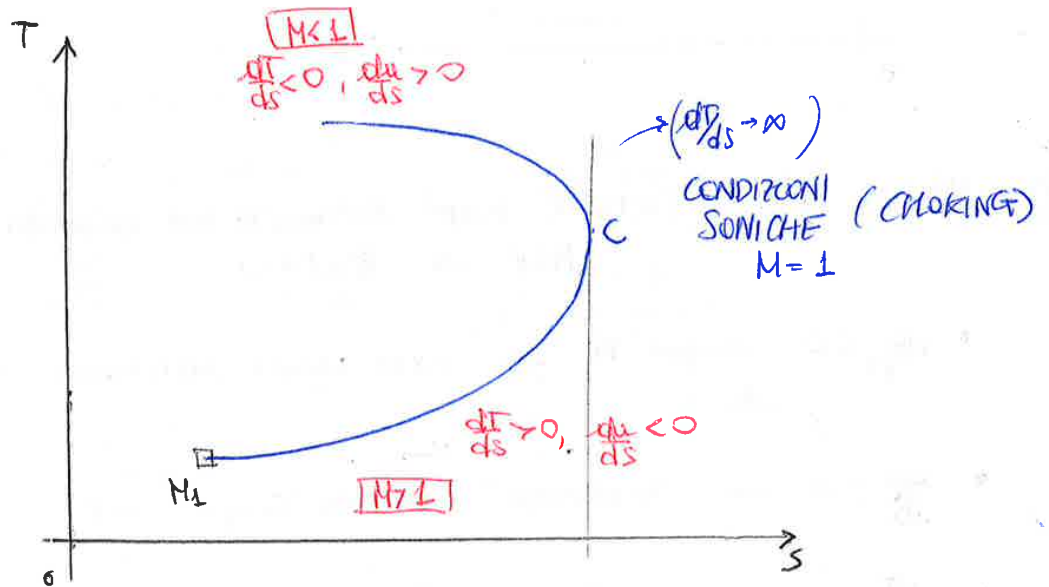
- Due possibilità di flusso in ingresso : supersonico e subsonico.

① $M_1 > 1$ → Supersonica (in ogni sezione a valle la corrente è ancora $M > 1 \Rightarrow M^2 - 1 > 0$)

- $dt/ds > 0$ sempre $\forall L \Rightarrow$ curva sempre crescente.
- $du/ds < 0 \rightarrow$ La velocità si riduce sempre lungo il condotto.
- $dt/ds \rightarrow \infty$ quando $M \rightarrow 1 \Rightarrow$ punto C di massima entropia [CHOKING]



CURVA DI FANNO COMPLETA (Ramo Subsonico + Ramo Supersonico)



• CALORE SVILUPPATO PER DISSIPAZIONE DI E_k :

$$q = \int_{s_1}^{s_2} T ds \quad \equiv \quad \text{area sottesa dall'integrale}$$

↳ La dissipazione è operata dagli sforzi viscosi. Essa confluisce nel termine di entalpia statica h in modo che risulti

$$h_1 = h_2 = \text{costante}$$

per l'adiabaticità del flusso.

- **RAPPORTI CRITICI NEL FLUSSO DI PANNICO** : Si ricavano dai rapporti precedentemente calcolati facendo riferimento alle grandezze critiche :

$$\begin{cases} M_1 = 1 \\ M_2 = M \text{ generico} \end{cases}$$

▷ **RAPPORTO T/T^*** :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2}{2 + (\gamma - 1)M_2^2} \Rightarrow \frac{T}{T^*} = \frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2}$$

▷ **RAPPORTO P/P^*** :

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{M_1}{M_2} \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \Rightarrow \frac{P}{P^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{1 + \gamma}{2 + (\gamma - 1)M^2}}$$

▷ **RAPPORTO ρ/ρ^*** :

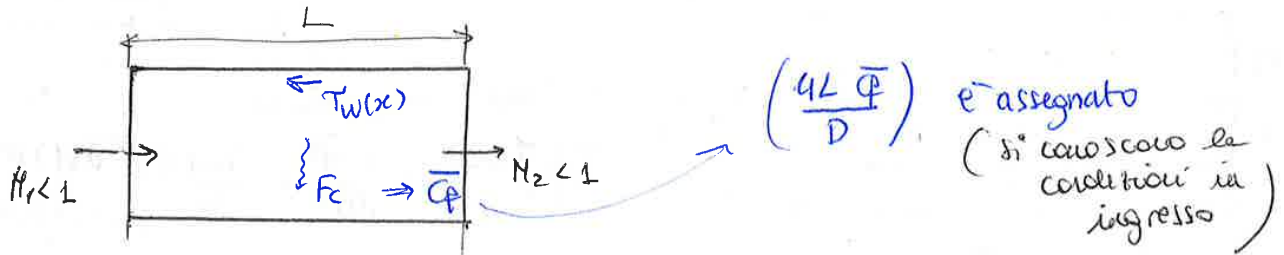
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{\rho}{\rho^*} \cdot \frac{T^*}{T} \Rightarrow \frac{\rho}{\rho^*} = \frac{1}{M} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma}}$$

▷ **RAPPORTO P^0/P^0*** :

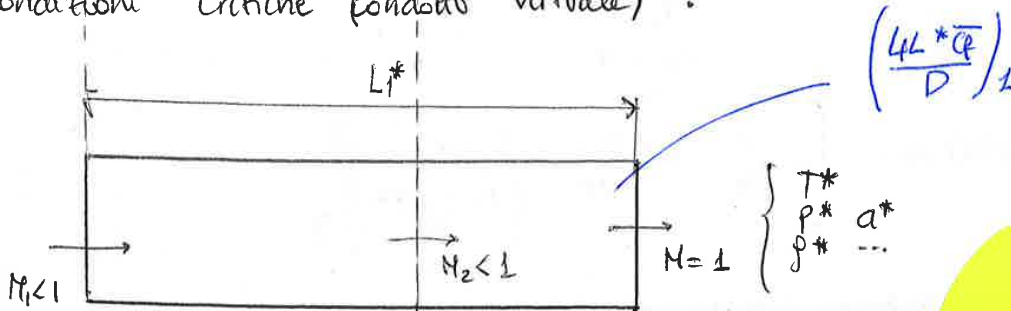
$$\frac{P_2^0}{P_1^0} = \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M_2^2}{2 + (\gamma - 1)M_1^2} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \Rightarrow \frac{P^0}{P^0*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{1 + \gamma} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

- **CONCLUSIONI** : Al variare del Mach generico variano tutti i rapporti critici (TABELLA 4)

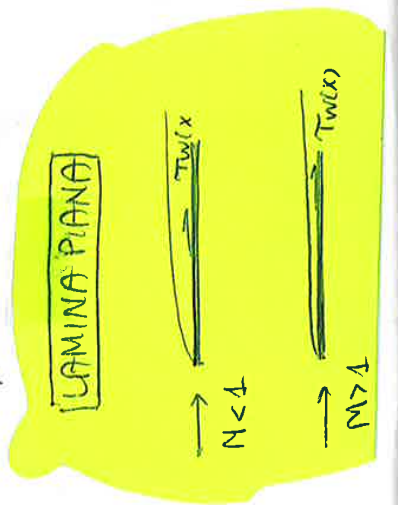
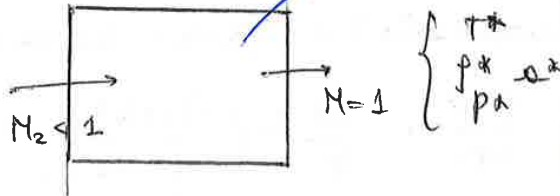
- Supponiamo flusso subsonico : $M_1 < 1$.



- Portiamo il condotto alla lunghezza L_1^* che mi porta la corrente in condizioni critiche (condotto virtuale) :



- Condotta virtuale se l'ingresso fosse M_2 : $(\frac{4L^* \bar{C}_p}{D})_2$



⇒ Tra i gruppi dimensionali vale la relazione :

$$\frac{4L \bar{C}_p}{D} = \left(\frac{4L^* \bar{C}_p}{D} \right)_1 - \left(\frac{4L^* \bar{C}_p}{D} \right)_2 \quad (*)$$

⇒ PROCEDIMENTI DI CALCOLO DEL CAMPO IN USCITA

- condizioni del condotto assegnate : $M_1, T_1, p_1, \rho_1, D, L, \bar{C}_p$.

① → calcolo $\frac{4L \bar{C}_p}{D}$

- Entro in tabella 4 con input $M = M_1$: (leggo da SX a DX)

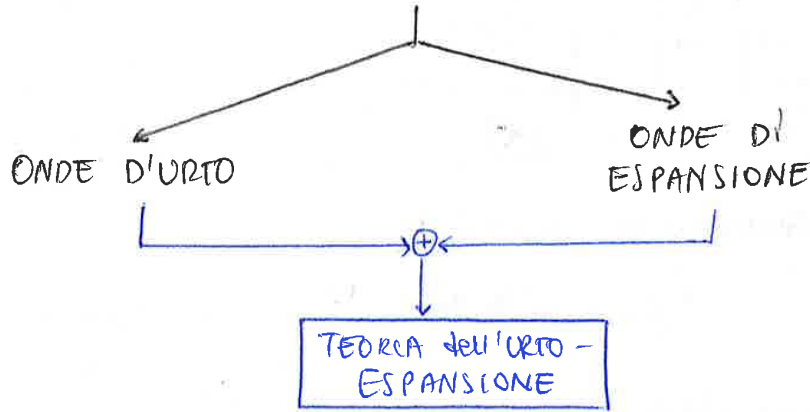
②

M	p/p^*	ρ/ρ^*	T/T^*	$\frac{p_0}{p_0^*}$...	$\frac{4L \bar{C}_p}{D}$
M_1	x	x	x	x	x	x → $(\frac{4L^* \bar{C}_p}{D})_1$

- Dalla relazione (*) si trova $(\frac{4L^* \bar{C}_p}{D})_2$ ③

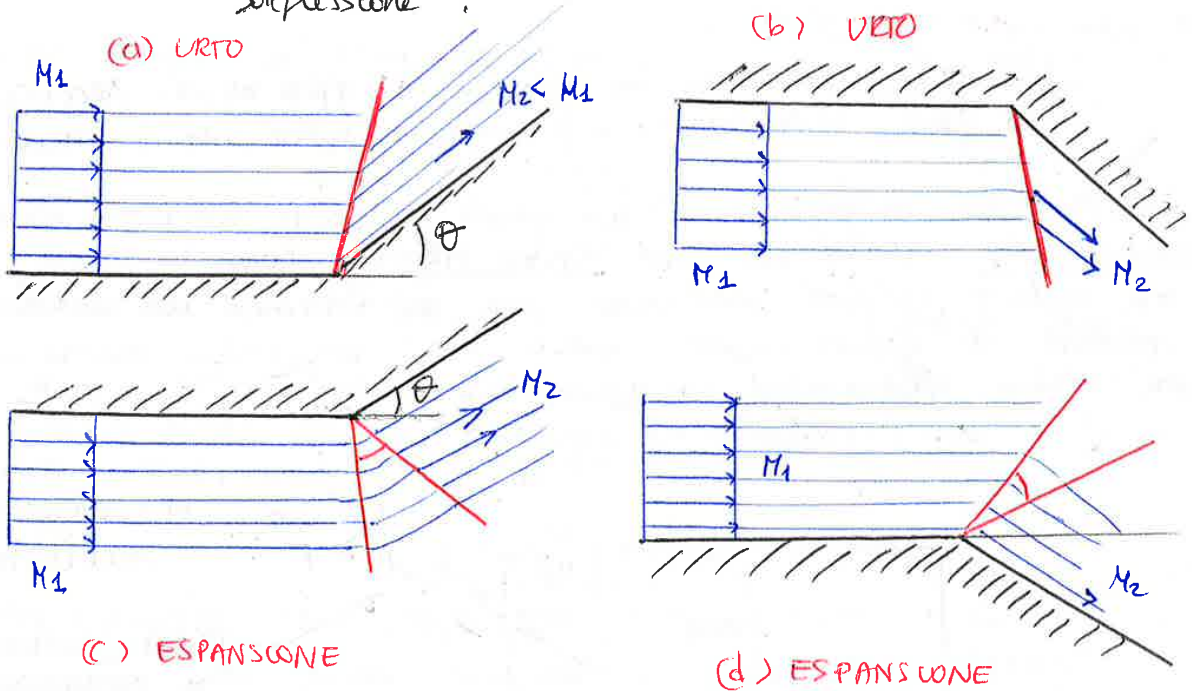
ONDE OBLIQUE

si generano solo in presenza di flussi SUPERSONICI
- M > 1 -



Stiamo facendo l'assunzione di fluido INVISCIDO $\rightarrow \mu = 0$
 \rightarrow la corrente segue la regola della TANGENZA (e non dell'aderenza)

- Concetto: Esiste una parete che a un certo punto presenta una deflessione:



- \rightarrow Si verifica un urto ogni volta che la deflessione della parete è tale da riportare la corrente verso monte (casi (a) e (b)). Un urto è un processo adiabatico (si conserva l'entalpia totale).
- \rightarrow Si verifica un'espansione ogni volta che la deflessione della parete indirizza la corrente verso valle (casi (c) e (d)). Un'espansione è un processo adiabatico e isentropico (si conserva la temperatura totale).

⇒ Conclusione : il flusso netto di massa è quello fra le facce (a) e (d), ad opera della sola componente normale all'orto.

► BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO : $\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) ds = - \int_S \vec{p} \cdot \hat{n} ds$
(ho solo forze di pressione)

L'equazione è vettoriale e va proiettata lungo \hat{t} e lungo \hat{N} :

(N) OSS : Nell'integrale $\int_S \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \hat{n}) ds$
 è l'unica coinvolta nella proiezione : $\vec{V} \cdot \vec{N} = u$
 dipende dalla faccia considerata

L'equazione lungo \hat{N} diventa :

⇒ $\left[\overset{(a)}{p_1 u_1 (-u_1) A_a} + \overset{(d)}{p_2 u_2 (u_2) A_d} \right] + \left[\overset{(f)}{p_1 u_1 (-w_1) A_f} + \overset{(b)}{p_1 u_1 (+w_1) A_b} \right] +$
 $\left[\overset{(e)}{p_2 u_2 (-w_2) A_e} + \overset{(c)}{p_2 u_2 (w_2) A_c} \right] = - \left(-p_1 A_a + p_2 A_d \right)$ *rispetto al vettore \hat{N}*
 ⇒ $-p_1 u_1^2 + p_2 u_2^2 = p_1 - p_2 \Rightarrow$
 $p_1 + p_1 u_1^2 = p_2 + p_2 u_2^2 \Rightarrow p + \rho u^2 = \text{costante}$ lungo \hat{N}

(t) In questo caso $\vec{V} \cdot \hat{t} = w$

⇒ $\left[\overset{(a)}{p_1 w_1 (-u_1) A_a} + \overset{(d)}{p_2 w_2 (u_2) A_d} \right] + \left[\overset{(f)}{p_1 w_1 (-w_1) A_f} + \overset{(b)}{p_1 w_1 (w_1) A_b} \right] +$
 $\left[\overset{(e)}{p_2 w_2 (-w_2) A_e} + \overset{(c)}{p_2 w_2 (w_2) A_c} \right] = - \left(-p_1 A_b - p_2 A_c + p_2 A_e + p_1 A_f \right)$

⇒ $-p_1 u_1 w_1 + p_2 u_2 w_2 = -(-p_1 - p_2 + p_2 + p_1)$;
 $-p_1 u_1 w_1 + p_2 u_2 w_2 = 0$; $p_1 u_1 w_1 = p_2 u_2 w_2$;

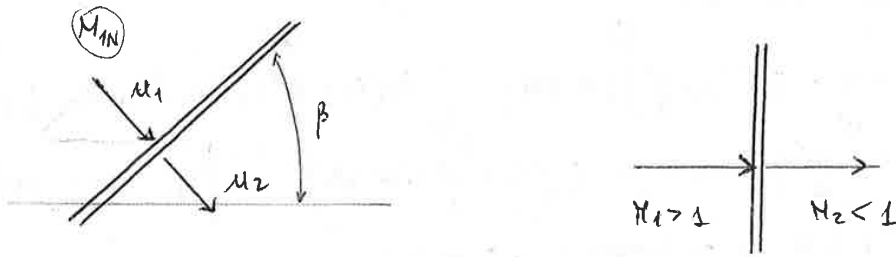
Ma per l'equazione di continuità : $\rho u = \text{costante}$:

⇒ $\rho_1 u_1 w_1 = \rho_2 u_2 w_2 \Rightarrow w_1 = w_2$ lungo \hat{t}

⇒ Conclusione : Anche in questo caso il flusso netto utile è dovuto solo alle facce (a) e (d). Si osserva che lungo la direzione normale all'orto si conserva l'impulso delle p.d.m., mentre la componente tangenziale della velocità resta invariata.

CALCOLO DEL CAMPO ② A VALLE DELL'URTO

OSS. Nel momento in cui considereremo unicamente le componenti normali delle velocità u_1 e u_2 , l'urto obliquo si comporta come urto retto:



• È noto tutto il campo ① + ②;

• Per l'urto retto è risultato: $\begin{cases} p_2/p_1 = g(M_1) \\ M_2 = g(M_1) \end{cases} \Rightarrow$ Noto M_1 , troviamo tutto quello che compete a valle dell'urto retto.

• Quindi per l'urto obliquo risulterà: $\begin{cases} p_2/p_1 = g(M_{1N}) \\ M_2 = g(M_{1N}) \end{cases}$

• Quindi deduciamo le relazioni dell'urto retto, con l'accorgimento di considerare la componente normale del numero di Mach:

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1)M_{1N}^2}{(\gamma-1)M_{1N}^2 + 2} \quad ; \quad \left. \begin{matrix} M_{1N} = \frac{u_1}{a_1} = \frac{V_1 \sin \beta}{a_1} = M_1 \sin \beta \end{matrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma(M_{1N}^2 - 1)}{\gamma+1} \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 \sin^2 \beta - 1)$$

$$\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right) \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right) = [\quad] [\quad] = f(M_1, \beta)$$

(eq. stato)

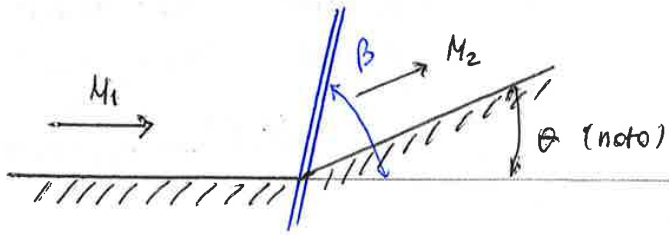
$$\Rightarrow \frac{T_1^0}{T_2^0} = 1 \rightarrow \text{TRASF. ADIABATICA} \quad \text{ma} \quad \frac{p_2}{p_1} < 1 \quad \left[\begin{matrix} \text{Dissipazione energia} \\ \text{meccanica} \Rightarrow \uparrow \text{S IRREVERS.} \end{matrix} \right]$$

• Il flusso è uniforme sia in ① che in ② e l'evoluzione è ISENTROPICA:

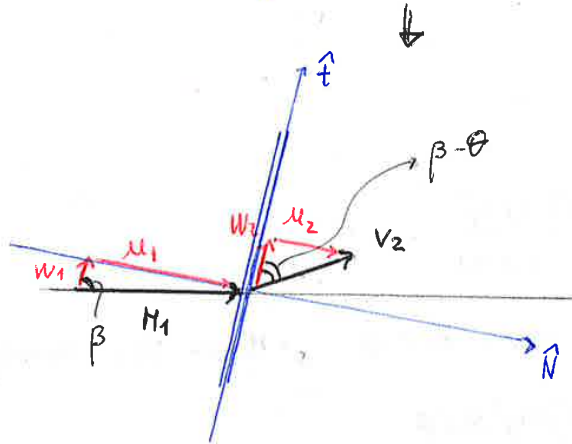
$$\Rightarrow \frac{p_2^0}{p_1^0} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \text{con } M_2 = f(M_1, \theta).$$

10/11/2017
LEZ. 17

Determinazione del LEGAME fra $\beta - \theta - Mach$



← SITUAZIONE FISICA di urto obliquo



Abbiamo visto che:

$$M_2^2 = f(\beta, \theta, M_1) \text{ e}$$

per il flusso a valle ho 2

Soluzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_2 > 1, \quad M_2 < M_1 \\ M_2 < 1 \quad (\text{il flusso diventa Subsonico}) \end{array} \right.$$

Gli angoli u_1/w_1 per questa trasformazione sono β e $(\beta - \theta)$:

•) A monte : $\tan \beta = \frac{u_1}{w_1}$

•) A valle : $\tan(\beta - \theta) = \frac{u_2}{w_2}$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{u_2}{w_2} \cdot \frac{w_1}{u_1}$$

Ma dal bilancio della massa abbiamo visto che $w = \text{costante}$,

in più sappiamo che

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \quad (\text{urto retto})$$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{2 + (r-1)M_{1n}^2}{(r+1)M_{1n}^2}$$

$$\downarrow \quad (M_{1n} = M_1 \sin \beta)$$

$$\frac{\tan(\beta - \theta)}{\tan \beta} = \frac{2 + (r-1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(r+1)M_1^2 \sin^2 \beta}$$

↓ Manipolando con le formule trigonometriche

$$\tan \theta = \frac{2}{\tan \beta} \left[\frac{M_1^2 \sin^2 \beta - 1}{M_1^2 (r + \cos 2\beta) + 2} \right]$$

Quindi assegnati M_1 e θ posso ricavare β , e quindi valutare M_2 e le altre grandezze a valle:

1) sfruttando la formula $M_2^2 = \dots = f(\beta, M_1)$

2) Ho urto retto, passando per il calcolo di M_{1n} e $M_{2n} \rightarrow M_2$

- Aumentando M_1 , la curva si allarga verso sinistra e il punto di massimo aumenta:

$$\boxed{\uparrow M_1 \rightarrow \mu \downarrow \rightarrow \theta_{max} \uparrow \rightarrow \beta(\theta_{max}) \downarrow}$$

- M_2 sulla curva diminuisce con θ (è punto sonico \neq punto di max)

$$\boxed{M_2 \downarrow \text{ se } \theta \uparrow}$$

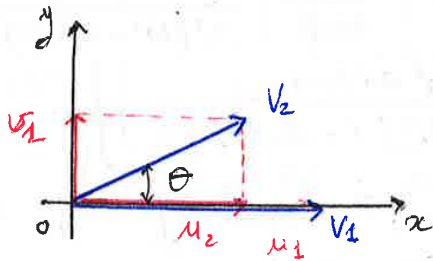
- A θ costante, aumentando di M_1 risulta che:

$$\left. \begin{array}{l} \theta \text{ cost} \\ \uparrow M_1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \beta \downarrow \text{ TRATTO DEBOLE} \\ \beta \uparrow \text{ TRATTO FORTE } (\beta \rightarrow \pi/2) \end{array}$$

- Ramo estremo: $M_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \mu = 0$.

PIANO ODOGRAFICO.

È un piano cartesiano definito dalle componenti delle velocità orizzontale e verticale, nel piano fisico del moto $x-y$:



$$\begin{cases} \vec{V}_2 = \mu_2 \hat{x} + v_2 \hat{y} \\ \vec{V}_1 = \mu_1 \hat{x} \end{cases}$$

⇒ Sul piano odografico, la curva si chiama POLARE dell'URTO (o SHOCK POLAR)

esprime un legame fra le componenti di velocità a monte e a valle.

Il modo più efficace che consente di rappresentare anche le situazioni a $M_1 \rightarrow \infty$ è normalizzare le componenti rispetto alle condizioni critiche:

Omettiamo la dimostrazione:

$$v_2^2 = (V_1^2 - \mu_2^2) \frac{V_1 \mu_2 - (a^*)^2}{\frac{2}{\gamma+1} V_1^2 - V_1 \mu_2 + (a^*)^2} \quad / (a^*)^2 \text{ per adimensionaliz.}$$

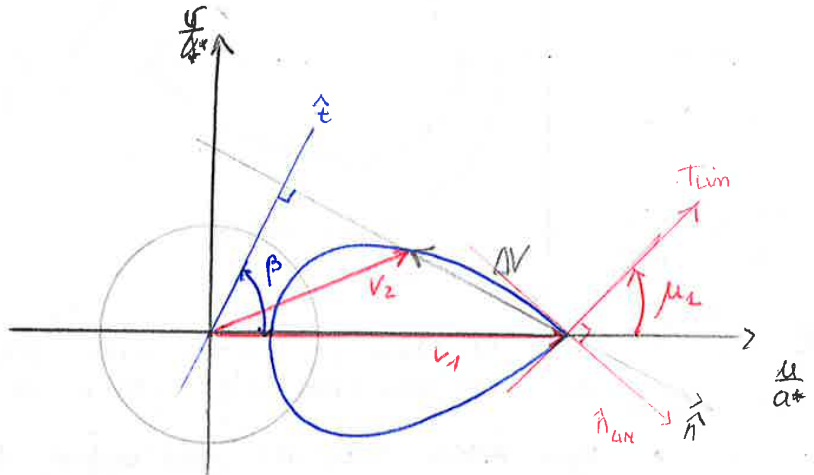
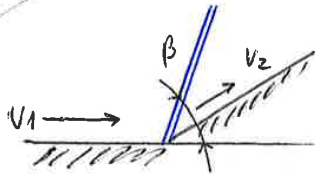
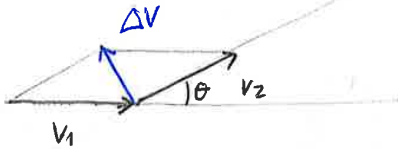
$$\left(\frac{v_2}{a^*} \right)^2 = \left(M_1^* - \frac{\mu_2}{a^*} \right)^2 \frac{M_1^* \frac{\mu_2}{a^*} - 1}{\frac{2}{\gamma+1} M_1^* - M_1^* \frac{\mu_2}{a^*} + 1} = f \left(M_1^*, \frac{\mu_2}{a^*} \right)$$

$\left. \begin{array}{l} \frac{v_2}{a^*} = \pm \sqrt{\dots} \end{array} \right\} \rightarrow$ ogni curva è simmetrica rispetto all'asse orizzontale

LETTURA di β :

OSS : $v_2 - v_1 = (v_{N2} + v_{N1}) - (v_{T1} + v_{T2})$; Ma le componenti tangenziali sono uguali (conservazione p.d.m.)

$\hookrightarrow v_2 - v_1 = v_{N2} - v_{N1} \Rightarrow \Delta v$ è diretta lungo la direzione normale all'urto



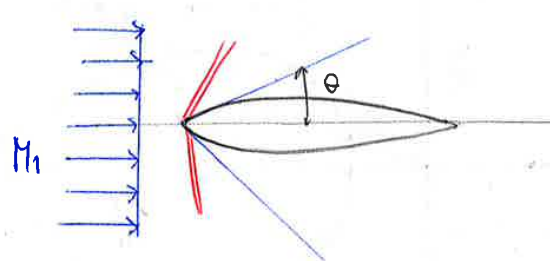
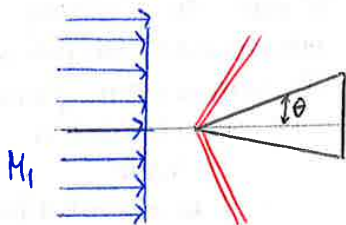
Quindi, traccia la normale alla direzione di Δv , che interseca l'angolo β .

OSS : Se $dV = \Delta v$ (variazione infinitesima) allora la direzione di Δv , quindi \hat{n} , tende alla tangente nel punto di cuspidè \hookrightarrow otteniamo (μ_1) (nell'intorno di M_1^*)

Nelle considerazioni fatte finora abbiamo considerato onde d'urto OBLIQUE PIANE e ATTACATE. Esse

13/11/2017
LEZ 18

possono generarsi non solo quando una corrente supersonica incontra una parete deviata, ma anche nel caso del moto, ad esempio, di un cuneo o di un profilo alare :



NB. Siamo in condizioni $\theta < \theta_{max}$

Il profilo alare supersonico ha il bordo d'attacco a cuspidè, quindi esiste un angolo θ che induce l'onda d'urto

- 4) Aumentando la distanza y (più + lontani dalla parete) $\tan \beta$ diminuisce $\rightarrow \beta$ diminuisce $\rightarrow \theta$ aumenta fino a θ_{max} e poi diminuisce \rightarrow
 SUBITO A VALLE DELL'URTO ALL'AUMENTARE DI y LA VELOCITÀ AUMENTA.



CONDIZIONI SONICHE nel punto D ($M_2=1$)

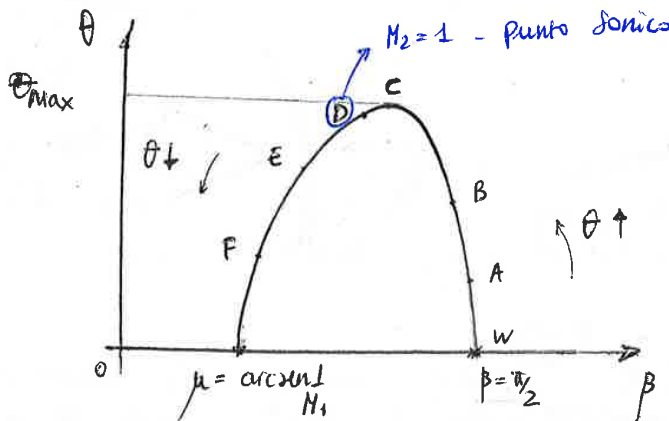
- 5) Oltre D \rightarrow flusso supersonico

- 6) Oltre una certa distanza, l'urto diventa così debole da assumere connotazioni di ONDA DI MACH (punto G)



$\theta=0, \beta=\mu = \arcsin \frac{1}{M_1}$

- ANALISI SUL PIANO $\beta-\theta$ FISSATO IN CERTO M_1 :



EVOLUZIONE FLUSSO ADIABATICA $\Rightarrow H$ costante (assenza gradi entalpia) totale

Teorema di Crocco:

$$\vec{V} \times (\nabla \times \vec{V}) = \nabla H - T \nabla s$$

$= 0$

$\nabla H = 0$

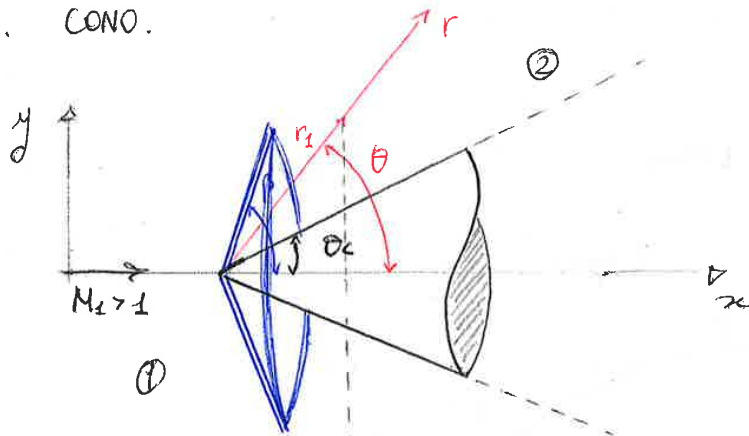
$\Rightarrow \nabla \times \vec{V} \neq 0 \Rightarrow$ le linee di corrente si incurvano

Ogni filotto fluido è caratterizzato da un urto di intensità diverso \rightarrow diverse dissipazioni

oss. L'entropia è diversa da una l.c. a un'altra ma è la stessa sulla stessa linea di corrente.



②. CONO.



- CONO SEMI-infinito;
- URTO ATTACCATO (hp: $\theta_c \leq \theta_{max, M_1}$)

(*) Il flusso a valle è tutto in comunicazione [EFFETTO TRIDIMENSIONALE]

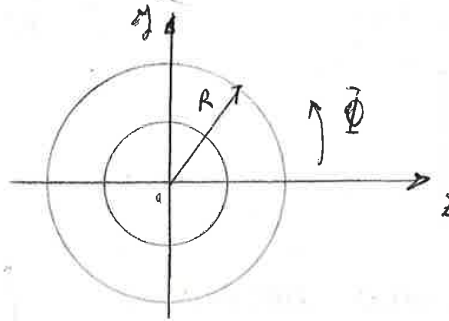
- SIST. COORDINATE CILINDRICHE: r, θ, ϕ

$\alpha = 0$
⊕
SIMMETRIA rispetto
asse x



MOTO ASSIALSIMMETRICO
rispetto asse x

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} = 0 \end{array} \right.$$



PROPRIETA' COSTANTI lungo la l.c.

⇒ Le uniche variazioni possibili sono legate a θ

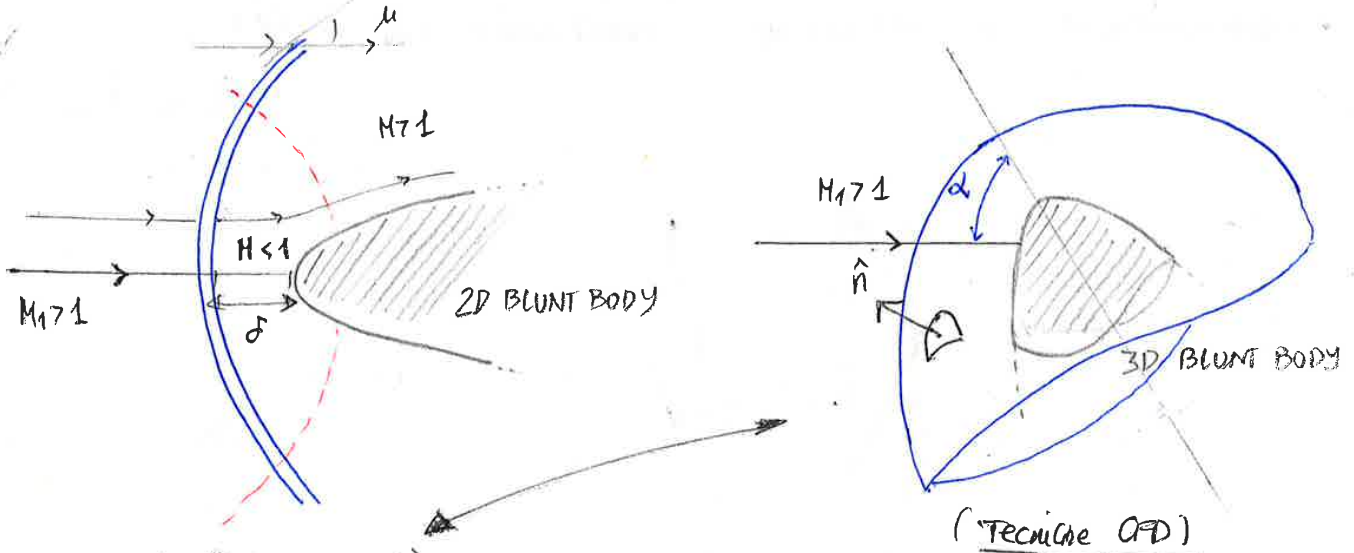
- OSS.
- 1) Il campo perturbato è limitato a monte solo dal vertice del cono e illimitato a valle
 - 2) Flusso non uniforme subito a valle dell'urto attaccato [altimenti noi si rispetterebbe la condizione di continuità]
 - 3) La l.c. subito dopo l'urto deve incurvarsi (CONDIZIONE DI TANGENZA)
 - 4) Da una l.c. sull'altra cambiano le proprietà del flusso solo in funzione di θ
 - 5) Immediatamente a valle dell'urto valgono le relazioni dell'urto obliquo.

(*) CONFRONTO CON FLUSSO ATTORNO A CONO :

A parità di θ_c , nel cono l'urto è meno intenso :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\text{cono}} > P_{\text{cono}} \\ P_{\text{cono}} > P_{\text{cono}} \\ P_{\text{w cono}} > P_{\text{w cono}} \end{array} \right. \Rightarrow$$

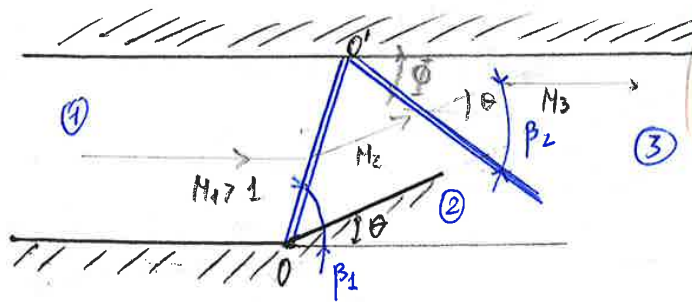
RESISTENZA del
CONO è
MINORE.



Problemi di questo tipo si risolvono per via numerica determinando la forma delle superfici dell'urto, una volta assegnati M_1 , δ e la forma del corpo. \rightarrow Calcolo del campo a valle (immediatamente a valle dell'urto - curvo le trattazioni 2D) usate per l'urto obliquo vanno ancora bene.

REFLESSIONI E INTERAZIONI DI URTI

- REFLESSIONE REGOLARE. Stiamo considerando una corrente supersonica all'interno di un condotto in cui la parete superiore è orizzontale e quella inferiore presenta una deflessione θ .



Siamo nelle condizioni di

$$\theta < \theta_{max, M_1}$$

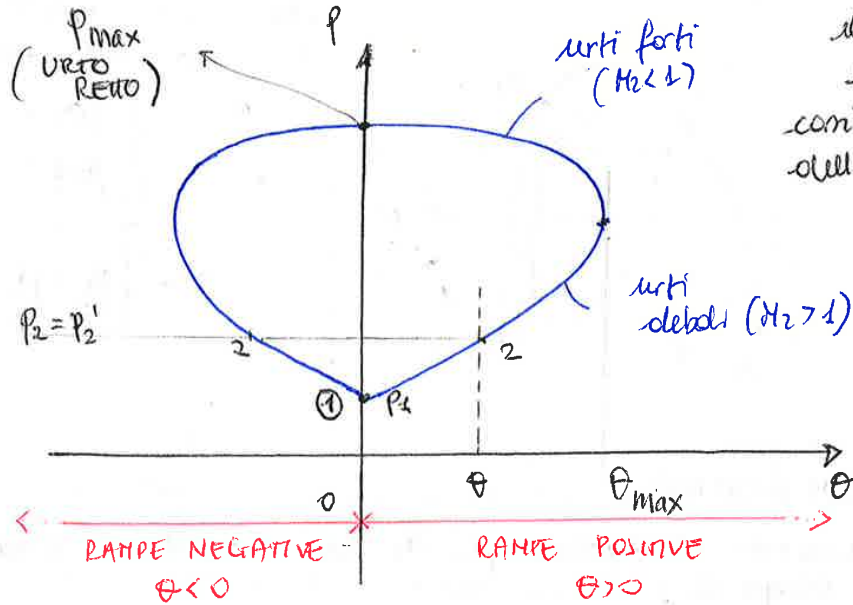
quindi l'urto che si genera è

OBLIQUO e PIANO (oltre che attaccato)

- \rightarrow urto in O \Rightarrow corrente deflessa di θ in campo (2).
- \rightarrow Riflessione su parete orizzontale \Rightarrow secondo urto in O' \Rightarrow corrente deflessa di $-\theta$ per rispettare la condizione di tangenza in campo (3).
- \rightarrow L'inclinazione dell'urto β_2 è riferita alla direzione della corrente in campo (2), così come la deflessione θ .

(OSS) : $\beta_1 \neq \beta_2$. Dalla teoria dell'urto obliquo risulta che $M_2 < M_1 \Rightarrow \frac{\beta_3}{\beta_2} < \frac{\beta_2}{\beta_1}$

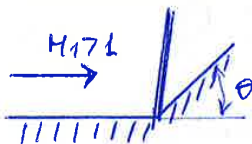
→ GRAFICO:



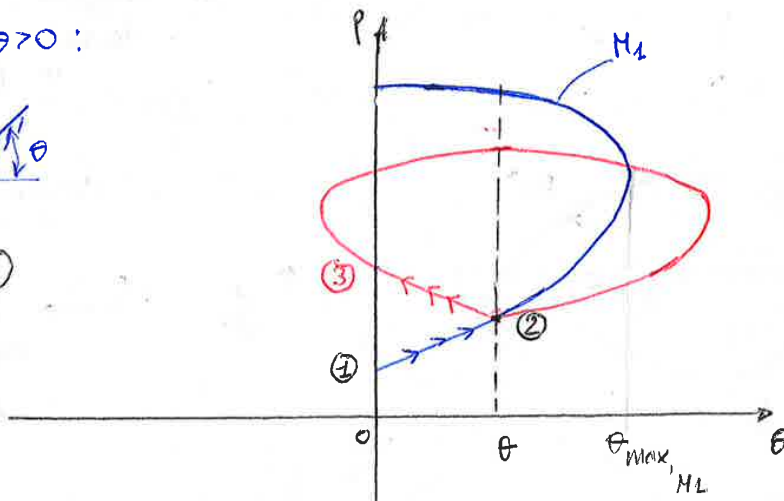
- Assegno un valore di θ e individuo il punto ② leggendo il corrispondente valore della pressione

→ RIFLESSIONE REGOLARE - PIANO θ - p

SOLUZIONE $\theta > 0$:



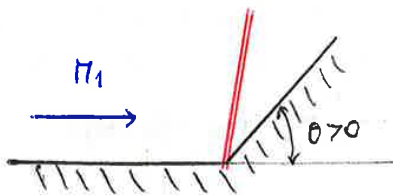
θ noto → ②



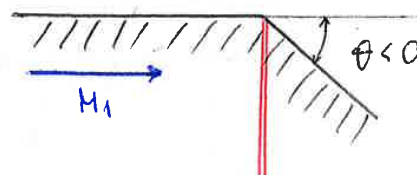
- Analogamente a prima, la curva si "ricostituisce" scegliendo il punto ② come "origine"
- Il punto ③ è sempre in corrispondenza di $\theta = 0$

• INTERSEZIONI DI URTI DI FAMIGLIE OPPOSITE

↓
CLASSIFICAZIONE



1^a FAMIGLIA
(Left Running)



2^a FAMIGLIA
(Right Running)

• **SLIPLINE** : è una linea di corrente che si genera fra i campi Φ e Φ' e risulta inclinata di Φ , quindi definisce la direzione comune delle correnti a valle

CONTACT SURFACE

↳ Fa in modo che le correnti si "uniformino":



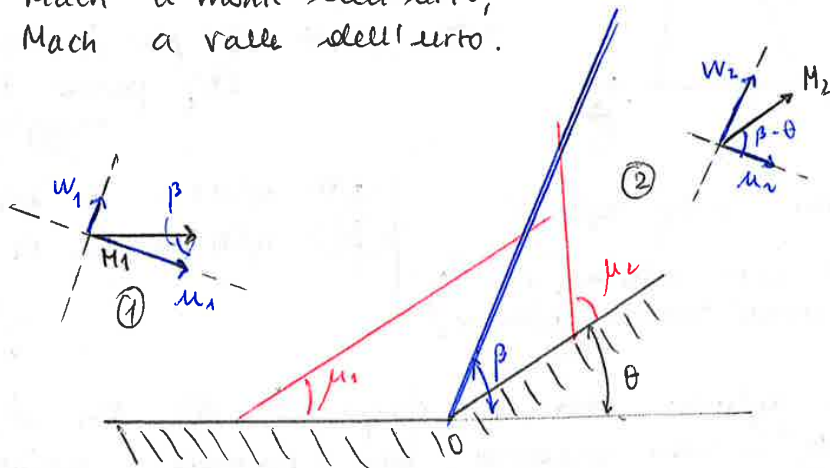
17/11/2017

• **INTERSEZIONI FRA ONDE DELLA STESSA FAMIGLIA.**

① interazione fra urto e linea di Mach.

↳ Le velocità vengono scomposte lungo la direzione t_θ e n all'urto.

- Corrente supersonica che incide su una rampa inclinata di θ dando origine ad un urto obliquo;
- Onda di Mach a monte dell'urto;
- Onda di Mach a valle dell'urto.



▶ Onda di Mach in ① $\rightarrow \mu_1 = \arcsen \frac{1}{M_1} = \arcsen \frac{a_1}{V_1}$

$\Leftrightarrow \text{sen } \mu_1 = \frac{a_1}{V_1}$

▶ Urto obliquo $\rightarrow V_1 \text{sen } \beta = u_1 \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{u_1}{V_1}$

oss: $\Rightarrow \text{sen } \beta > \text{sen } \mu_1 \Rightarrow \beta > \mu_1$

\Rightarrow LINEA DI MACH A MONTE e URTO si INTERSECANO.

▶ Onda di Mach in ② $\rightarrow \mu_2 = \arcsen \frac{1}{M_2} \Rightarrow \text{sen } \mu_2 = \frac{a_2}{V_2}$

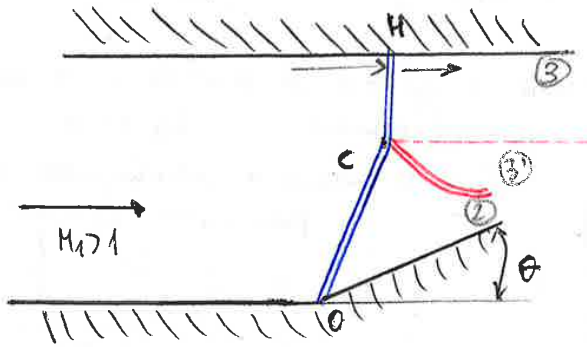
$u_2 = V_2 \text{sen}(\beta - \theta) \Rightarrow \text{sen}(\beta - \theta) = \frac{u_2}{V_2}$

Ma $u_2 < a_2$ (velocità a valle urto urto SEMPRE subsonica)

$\rightarrow \text{sen}(\beta - \theta) < \text{sen}(\mu_2) \rightarrow \beta < \theta + \mu_2$

RIFLESSIONE DI MACH:

A diff. della riflessione regolare, risulta stavolta:



$$\theta_{max2} < \theta < \theta_{max1}$$

slip line

• Si genera urto obliquo in O

• Non più urto riflesso, ma urto retto in corrispondenza della parete orizzontale

[La corrente due manto
nervi orizzontale x la
tangenza.]

SUBSONICA

ONDA D'URTO CURVA RIFLESSA (per rispettare i campi 3 e 3')

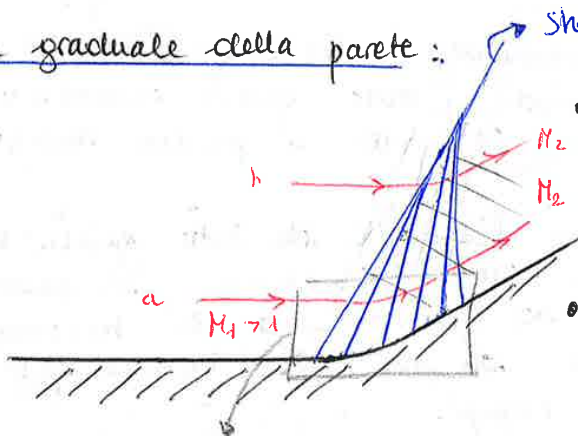
► Deve esserci un RACCORDO fra urto retto e obliquo → punto C

- ① Monte dell'urto HC e OC
- ② Valle dell'urto OC
- ③ Valle dell'urto HC

Non possono coesistere (provenienti da urti diversi)

INTERAZIONE DI ONDE DI COMPRESSIONE (flusso non viscoso)

- Deflessione graduale della parete:



• Ogni onda di compressione è una linea di Mach:

$$\mu = \arcsin \frac{1}{M}$$

• A valle di ogni onda la corrente si comprime e rallenta con continuità

(deboli variazioni di ogni proprietà)

↓
La pendenza aumenta progressivamente

PROCESSO = COMPRESSIONE ISENTROPICA

oss. Vista la convergenza delle linee di Mach le variazioni da M_1 a M_2 lungo la l.c. (b) avviene su una distanza minore rispetto alla l.c. (a) → vicino alla parete

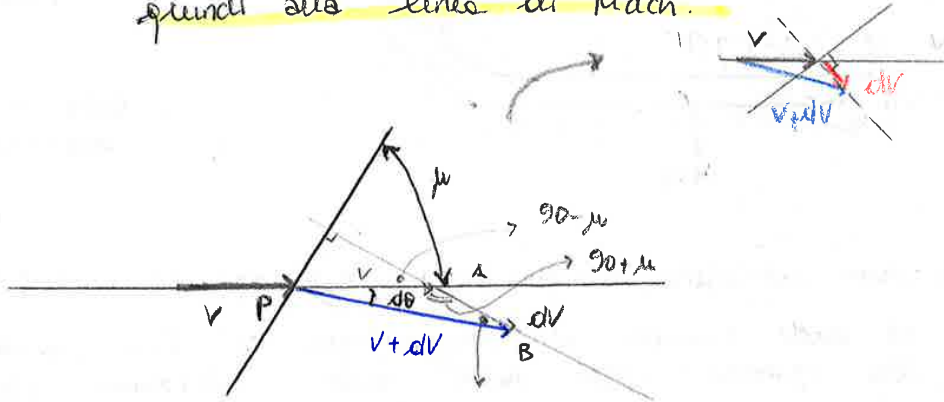
$$\rightarrow \text{grad}(f)_b > \text{grad}(f)_a$$

umentano con la distanza a parete.

(gradiente ↑↑ man mano che ci si avvicina alla zona di compattazione)

Consideriamo una singola linea di Mach appartenente al fascio di espansione:

- OSS :
- 1) Per effetto dell'attraversamento della l.m. si genera una dV dovuta a $d\theta$;
 - 2) Sappiamo che le dV sono sempre \perp all'onda stessa, quindi alla linea di Mach.



Applichiamo il Teorema dei SENI al triangolo PAB:

$$\begin{aligned} 180 - (90 + \mu) - d\theta &= \\ 90 - \mu - d\theta &= \\ 90 - (\mu + d\theta) & \end{aligned}$$

$$\frac{v+dV}{\sin(90+\mu)} = \frac{v}{\sin(90-(\mu+d\theta))} \Rightarrow \frac{v+dV}{v} = \frac{\cos \mu}{\cos(\mu+d\theta)}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dV}{v} = \frac{\cos \mu}{\cos \mu \cos d\theta - \sin \mu \sin d\theta} = \frac{1}{\cos d\theta - \tan \mu \sin d\theta}$$

ASSUMIAMO $d\theta$ piccolo \rightarrow $\sin d\theta \sim d\theta$
 $\cos d\theta \sim 1$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dV}{v} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \mu}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{dV}{v} = 1 + d\theta \tan \mu$$

$$\Leftrightarrow d\theta = \frac{dV/v}{\tan \mu}$$

Si presenta nella forma:
 $y = \frac{1}{1-x} \xrightarrow{\text{SVILUPPO DI TAYLOR}} 1 + x + x^2 + x^3 \dots$
 con $x = d\theta \tan \mu$

Quindi: ESPANSIONE $\Rightarrow d\theta > 0 \Rightarrow dV > 0 \Rightarrow$ CORRENTE ACCELERATA

Obiettivo: esprimere tutto in funzione del numero di Mach: $\theta = \theta(M)$

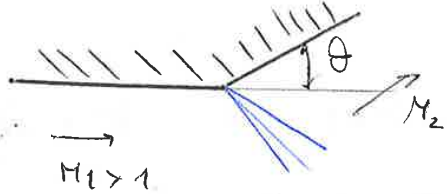
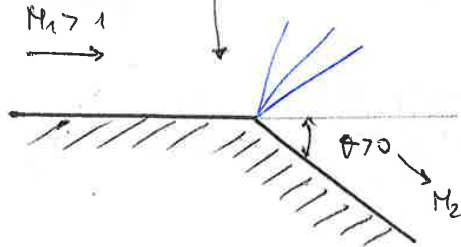
$$\rightarrow \begin{cases} \sin \mu = \frac{1}{M} \\ \cos \mu = \sqrt{1 - \frac{1}{M^2}} = \frac{1}{M} \sqrt{M^2 - 1} \end{cases} \Rightarrow \tan \mu = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}$$

Quindi: $d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \cdot \frac{dV}{v}$

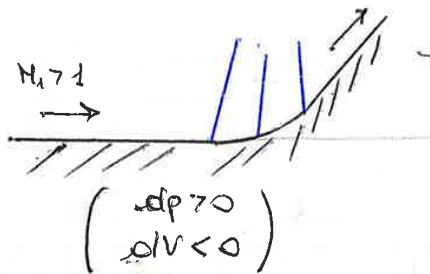
Se volessimo valutare la pressione \Rightarrow EULERO: $dp = -\rho v dv$

$$d\theta = \sqrt{M^2 - 1} \frac{dV}{V} \Rightarrow d\theta = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \cdot \frac{dM}{M}$$

In realtà la formula del $d\theta$ avrebbe bisogno del doppio segno (\pm). Infatti, sul piano fisico:



La situazione (*) -compete anche alle -compressioni:



COMPRESSIONE $\Rightarrow d\theta < 0 \Rightarrow dV < 0$

$$(*) \quad d\theta = - \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$$

Integriamo quindi la forma differenziale:

$$\Rightarrow \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = \int_{M_1}^{M_2} \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M} = V(M_2) - V(M_1)$$

avendo posto $V(M) = \int \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \frac{dM}{M}$

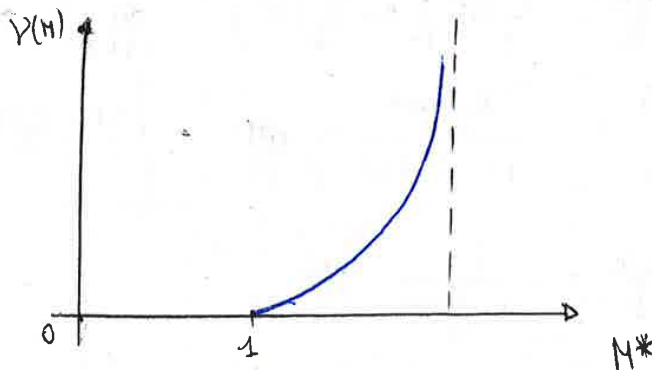
Se $\theta_1 = 0$, allora:

$$\theta_2 = V(M_2) - V(M_1) \quad (*)$$

Dalla (*) risulta: $V(M) = \left[\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \cdot \arctan \left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} (M^2 - 1)} \right) - \arctan \left(\sqrt{M^2 - 1} \right) \right] + \text{cost}$

da cui si osserva che, se $M=1$, allora $V(M=1) = 0$

\Rightarrow RELAZIONE DI PRANDTL - MAYER



• Per $M \rightarrow \infty$, $V(M) \rightarrow \infty$
($M^* \rightarrow$ valore finito)

• $V(M) > 0$ sempre.

ES. La procedura è analoga nel caso della COMPRESSIONE ISOBENTRO PICA, con l'accortezza di dare il segno negativo a θ_2 e osservare che $\nu(M_2) < \nu(M_1)$.

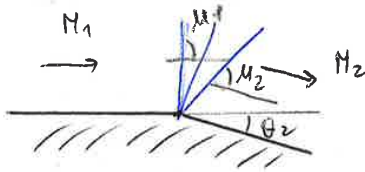
ESEMPIO NUMERICO

Espansione:

$$\begin{cases} \theta_2 = 20^\circ \\ M_1 = 2 \end{cases}$$

TAB 5:

$$\nu(M_1) = 26.3798^\circ$$



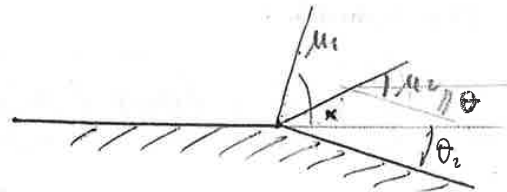
$$\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1) \Rightarrow \nu(M_2) = +20^\circ + 26.3798^\circ = 46.3798^\circ$$

TAB 5: $\nu(M_2) \approx 46.3675 \rightarrow M_2 = 2.83$

AMPIEZZA FASCIO DI ESPANSIONE:

$$\mu_1 = \arcsin \frac{1}{M_1} = 30^\circ$$

$$\mu_2 = \arcsin \frac{1}{M_2} = 20.69^\circ$$



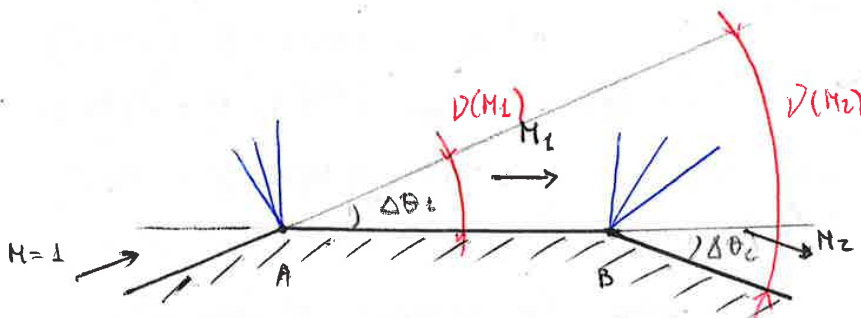
AMPIEZZA = $\mu_1 - \theta$

$$\theta = \mu_2 - \theta \Rightarrow \text{ampiezza} = \mu_1 - \mu_2 + \theta$$

In questo caso: ampiezza fascio = $30^\circ - 20.69^\circ + 20^\circ = 29.31^\circ$

SIGNIFICATO di $\nu(M_1)$: sarebbe la deflessione che dovrebbe subire una corrente SONICA pu portarsi in direzione orizzontale:

Consideriamo l'espansione virtuale di una corrente SONICA ($M=1$)



ESP. (A)

$$\Delta\theta_1 = \nu(M_1) - \nu(\infty)$$

(Ma $\nu(M=1) = 0$)

quindi

$$\Delta\theta_1 = \nu(M_1)$$

ESP. (B)

$$\Delta\theta_2 = \nu(M_2) - \nu(M_1)$$

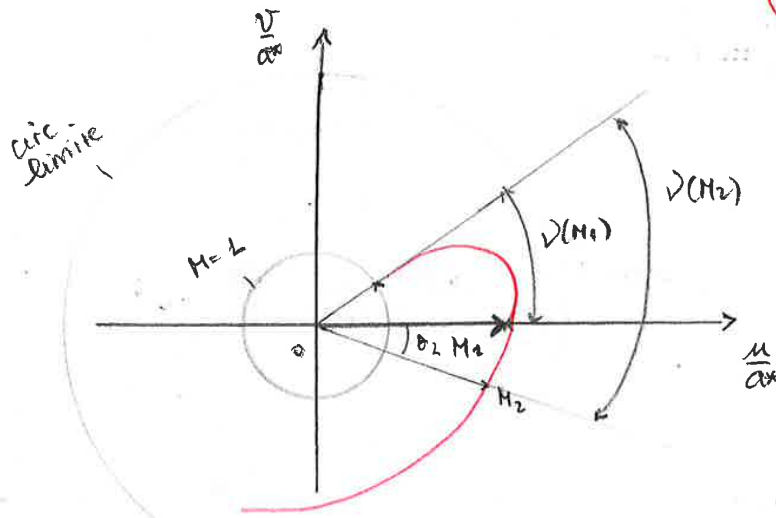
$$= \nu(M_2) - \Delta\theta_1$$

$$\Rightarrow \nu(M_2) = \Delta\theta_2 + \Delta\theta_1$$

• L'epicloide tende alla circonferenza LIMITE :

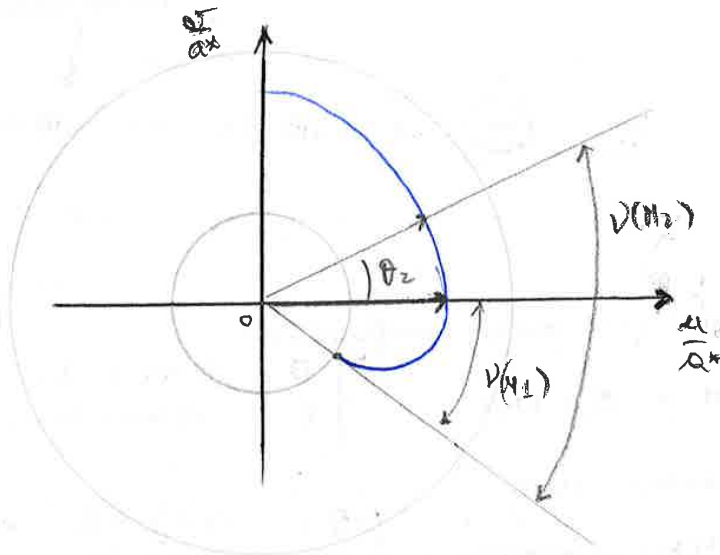
$$\frac{V}{a^*} = \sqrt{\left(\frac{V_{\text{ein}}}{a^*}\right)^2 + \left(\frac{u_{\text{ein}}}{a^*}\right)^2}$$

1) EPICicloIDE DELLA 1^a FAMIGLIA → C^- → $\theta = -\nu(N) + K_-$



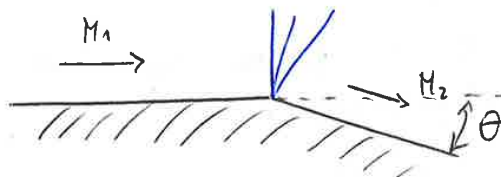
$$\begin{aligned} & \nu(N=L) \\ \bullet \quad 0 &= -\nu(M_2) + K_- \\ \hookrightarrow \nu(M_2) &= K_- \\ & (\nu(M_2) > 0) \end{aligned}$$

2) EPICicloIDE DELLA 2^a FAMIGLIA → C^+ → $\theta = \nu(N) + K_+$



$$\begin{aligned} & \nu(N=L) \\ \bullet \quad 0 &= \nu(M_2) + K_+ \\ \hookrightarrow \nu(M_2) &= -K_+ \\ & (\nu(M_2) < 0) \end{aligned}$$

ES:



$$\begin{aligned} \theta &= 20^\circ & \nu(M_2) &= \\ M_2 &= 2 \rightarrow \text{TABS} \rightarrow & 26.3798^\circ & \\ \nu(N_2) &= \theta + \nu(M_2) = & 46.3798^\circ & \end{aligned}$$

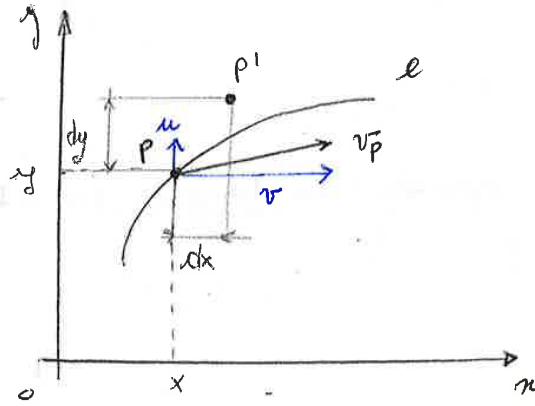
EPICicloIDE : C^- → $\theta = -\nu(N) + K_-$

22/11/2017

DIREZIONI CARATTERISTICHE

- Non sono delle linee di corrente, in quanto la velocità dei punti non è tangente;
- Sono riferite a curve caratteristiche (tangenti a talw curve).

PIANO RISICO x-y:



- $PE \rightarrow P(x, y)$
 - $\vec{v}_P = u\hat{u}_x + v\hat{u}_y$;
 - Mi sposto in un punto $P' \notin e$, ma abbastanza vicino (di dx e dy fuori dalla linea)
- ↓
- $P'(x+dx, y+dy)$

Problema: È possibile calcolare $v_{P'}$ a partire dalla conoscenza di v_P ?

Esprimiamo le componenti con sviluppo in serie, arrestandoci al primo termine:

$$(*) \begin{cases} u(P') = u(P) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy; \\ v(P') = v(P) + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy; \end{cases}$$

simbolismo:

Indichiamo con ϕ la funzione POTENZIALE (2D) per cui:

$$u = \phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \phi_{xx}.$$

Analogamente:

$$\phi_y = v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (\dots)$$

$$\phi_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

A questo punto ricorriamo all'EQUAZIONE DEL POTENZIALE DELLA VELOCITA', mettendoci nel caso 2D e scrivendola nella forma DIMENSIONALE, in modo da far comparire le componenti della velocità:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2uv}{a^2} \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Lungo la curva è tutto noto, quindi ci mettiamo in un caso particolare \rightarrow retta verticale passante per x_0