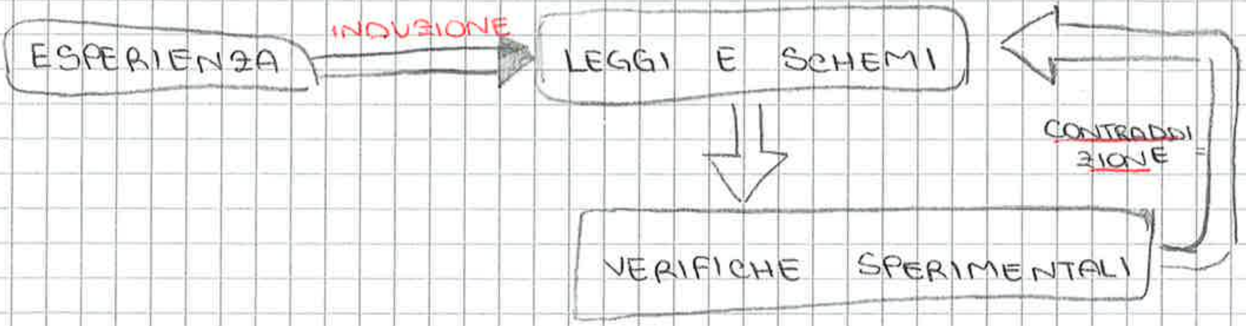
NUMERO: 2353A ANNO: 2018

A P P U N T I

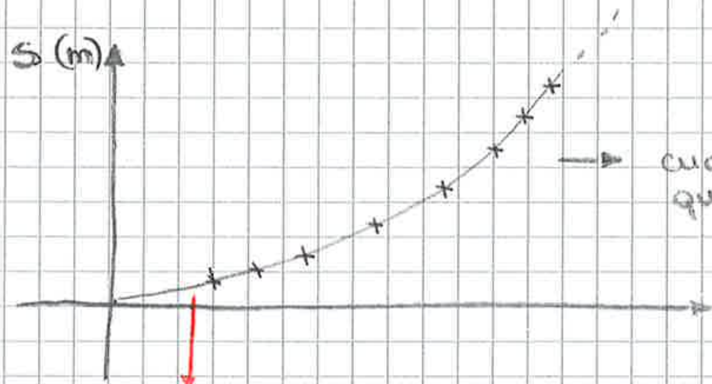
STUDENTE: Petroselli Diletta

MATERIA: Fisica I - Prof. Gliozzi



ciclo iterativo fino a quando non trovo nessun evento che lo contraddica

$\boxed{\text{Es}}$



→ curva quadratica quindi $s \propto t^2$

linea di Best fit (che meglio approssima i dati sperimentali)

$$s \propto t^2 \rightarrow s = \underbrace{k}_{\frac{1}{2}a} t^2$$

METODO SCIENTIFICO

1 – osservazione sperimentale di un fenomeno
- riconoscimento degli elementi caratteristici
- formulazione di un'ipotesi

2/→

1

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 362

$[A] = [L]^2$ Area

$[\text{accelerazione}] = [L][T]^{-2}$

$[\text{Volume}] = [L]^3$

$[F] = [MLT^{-2}]$ Forza = m a

$t = s^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$

$[T] = [L]^{\alpha} [M]^{\beta} \underbrace{[L]^{\gamma} [T]^{-2\gamma}}$ → g è un'accelerazione

$$\begin{cases} \beta = 0 & \rightarrow \text{non compare la massa} \\ \alpha + \gamma = 0 & \rightarrow \text{non compare L (quindi } \alpha + \gamma = 0) \\ -2\gamma = 1 & \rightarrow \text{a sx T è elevato a 1} \end{cases}$$

a dx è elevato a -2γ

$$\begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\gamma = \frac{1}{2} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow t = s^{1/2} \cdot m^0 \cdot g^{-1/2}$

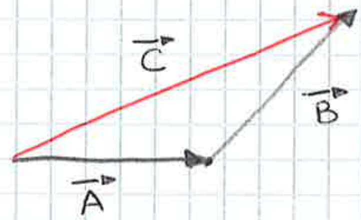
$s \propto g t^2$

2

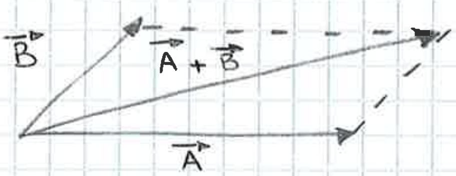
SOMMA DI VETTORI

① Traslo rigidamente $\vec{B}$ fino alla punta di $\vec{A}$

→ il vettore somma è il vettore che unisce la coda di $\vec{A}$ con la punta di $\vec{B}$



② Regola del parallelogramma



* Vettore è un SEGMENTO ORIENTATO caratterizzato da
- direzione
- verso
- modulo

PRODOTTO DI UN VETTORE PER UNO SCALARE

Dati uno scalare c e un vettore $\vec{v}$, si definisce il prodotto $\vec{u} = c \cdot \vec{v}$

Se $c>0$ → cambio solo il modulo

Se $c<0$ → cambio il modulo e il verso

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \vec{v} = (v_x, v_y)$$

$$v_y = |\vec{v}| \sin \rho$$

$$v_x = |\vec{v}| \cos \rho$$

$$\rho = \arctan \frac{v_y}{v_x}$$

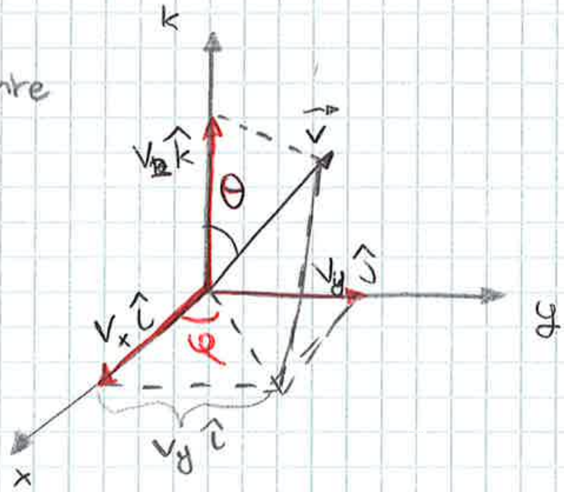
Nello spazio

$$\vec{v} = v_x \cdot \hat{i} + v_y \cdot \hat{j} + v_z \hat{k}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

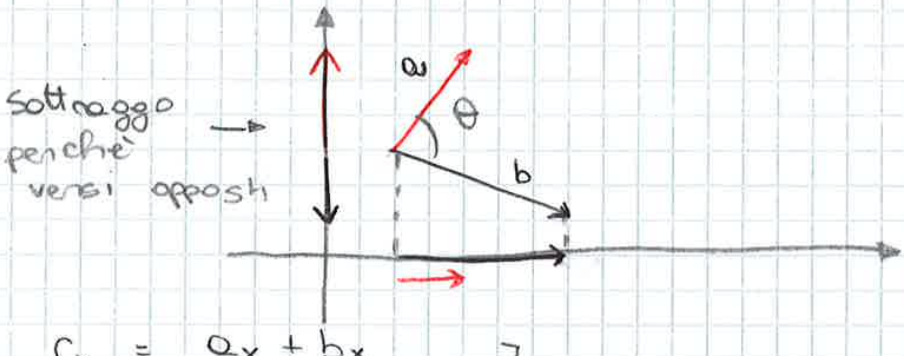
$$\theta = \arccos \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$ ← angolo adiacente

$$\varphi = \arctan \frac{v_y}{v_z}$$



Somma di due vettori

posso sommare le componenti sull'asse x e sull'asse y dei due vettori iniziali



$$C_x = a_x + b_x$$
$$C_y = a_y + b_y$$
→ modulo di c_x e c_y

$$|\vec{c}| = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$$

SCOMPOSIZIONE DI VETTORI

consideriamo 2 rette orientate di versori u_1 e u_2

Un qualsiasi vettore $\vec{a}$ complanare con gli altri 2 può essere descritto come somma di 2 vettori componenti diretti come le 2 rette date

$$\vec{a} = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2$$

a_1, a_2 → parti scalari, le componenti di $\vec{a}$ lungo $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$

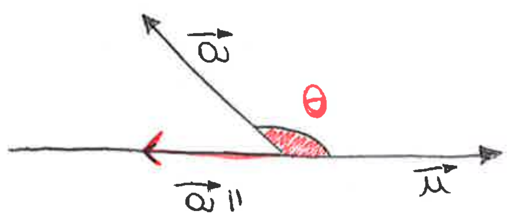
N.B. → IL COMPONENTE è un vettore $a_1\vec{u}_1$

LA COMPONENTE è scalare a_1

Se u_1 e u_2 sono perpendicolari, le componenti sono chiamate ORTOGONALI

* $\vec{a} \cdot \vec{a} = |a|^2$ → prodotto scalare di un vettore con se stesso è il quadrato del modulo

*



$$\vec{a}_{\parallel} = \cancel{xxx}\; a_u \cdot \vec{u}$$

dove $a_u = \vec{a} \cdot \vec{u} = |a| \cdot \overset{(1)}{|u|} \cdot \cos\theta = |a| \cdot \cos\theta$

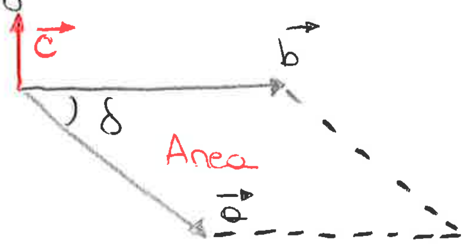
Questa proiezione può essere positiva, negativa o nulla

PRODOTTO VETTORIALE → il risultato è un vettore

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C}$$

- $|\vec{C}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\varphi$

$\delta < 180°$



- direzione perpendicolare al piano individuato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

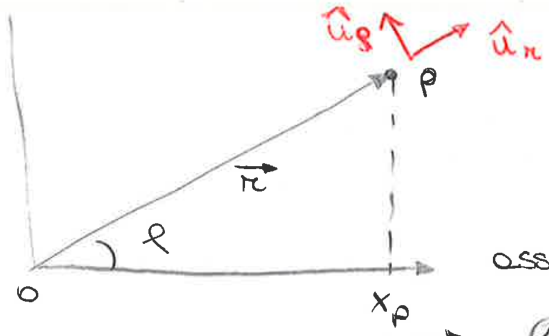
- verso regola della mano destra
  - pollice lungo il primo vettore
  - indice : secondo vettore
  - medio individua il verso

PROPRIETÀ

* Modulo = Area del parallelogramma individuato
* nullo se $\theta = 0$

$\vec{a} \times \vec{a} = 0$ $\quad\quad$ $\vec{a} \times (\lambda \vec{a}) = 0$

* $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$



asse ~~polare~~ polare

$\vec{r} = \hat{u}_r \cdot r$

r → modulo

$\hat{u}_r$ → direzione e verso

La direzione

$\hat{u}_r$ = versore ~~del~~ nella direzione radiale

$\hat{u}_\varphi$ = versore ~~direzio~~ perpendicolare a $\hat{u}_r$ nella direzione delle φ crescenti

(r, φ)

$$\begin{cases} x_P = r\cos\varphi \\ y_P = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \dfrac{y_P}{x_P} \end{cases}$$

Velocità MEDIA

$$\bar{V}_{1,2} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

$$V_M = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Se la velocità è minore di zero significa che la distanza dall'origine sta diminuendo

N.B Al numeratore metto la posizione finale e iniziale e NON lo spazio percorso

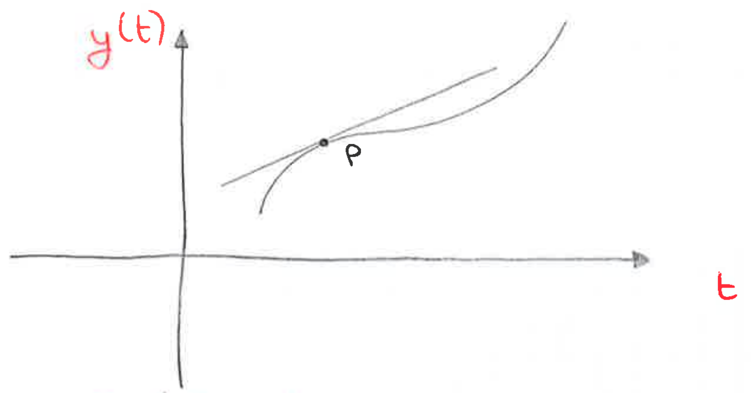
Velocità ISTANTANEA

* La derivata di una funzione è un concetto puntuale, cioè si calcola punto per punto. È la pendenza della tangente al grafico in quel punto

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$\frac{dx}{dt}$ NON posso ~~dividere~~ separare dx e dx



$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_P$$

$\downarrow$

è riferita ad un punto

Velocità istantanea : tangente della curva in quel punto = derivata della ~~funz~~ legge oraria in quel punto

$x(t) = \sin(kt)$ $\qquad v = \frac{dx}{dt} = ~~kcos~~ \ k\cos(kt)$

$x = x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = v(t)$$

$$\frac{dv}{dt} = a(t)$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt \quad *$$

$* \quad x(t_0) = x_0$

$$\int_{t_0}^{t} \underbrace{\frac{dx}{dt}}_{v(t) = \frac{dx}{dt}} dt = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

POSIZIONE $x(t)$	$\underbrace{x(t)}_{\text{spazio percorso}} = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$
VELOCITÀ $v(t) = \frac{dx}{dt}$	velocità istantanea (se sostituisco t con un numero) $\boxed{v(t)} = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$
ACCELERAZIONE $a(t) = \frac{dv}{dt}$	$* \quad \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}v_0^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 362

MOTO RETTILINEO UNIFORME

$$v = \frac{dx}{dt} = \text{costante} \qquad a(t) = 0$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = x_0 + v\,(t - t_0)$$

v è una costante

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$dv = a(t)\,dt$$

$$\Delta v = \underbrace{\int_{v_0}^{v} 1 \cdot dv}_{v(t) - v_0} = \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$

* per eliminare la dipendenza dell'accelerazione dal tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,v(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v} = \cancel{v\,\frac{dv}{dt}}$$

moltiplico e divido per dx

MOTO VERTICALE (moto rettilineo uniforme)

Trascurando l'attrito dell'aria, un corpo libero di cadere si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g = 9,8 \ m/s^2$

con questo sistema di riferimento, l'accelerazione è NEGATIVA

$x_0 = h$

$V_0 = 0$

$t = t_0 = 0$

$v(t) = V_0 - g \cdot t = V_0 + a(t - t_0)$

$V(x) = \sqrt{2g(h-x) + V_0^2}$ $\quad V^2 = V_0^2 + 2a(x - x_0)$

qui è invertito perché $a = -g$

$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

$$= h + \int_{t_0}^{t} (-gt)\,dt$$

$$= h - g\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t_0}^{t}$$

$$= h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$$

$t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ → tempo di caduta

$V_c = \sqrt{2hg}$ → velocità al suolo

N.B. Uso le formule del moto rett. uniformemente accelerato con $a = g$ oppure $a = -g$

* A causa dell'attrito dell'aria le gocce d'acqua raggiungono una velocità limite costante

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 362

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ → perchè dopo $\frac{2\pi}{\omega}$ il seno torna 0

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ Hertz frequenza: numero di oscillazioni al secondo

T : periodo del moto

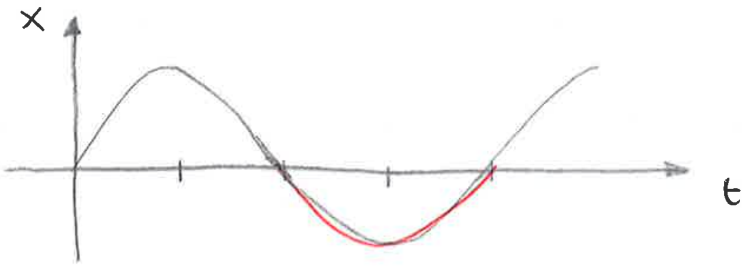
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ per trovare la $v(t)$ derivo $x(t)$

$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\cos(\omega t + \varphi) \cdot \omega$

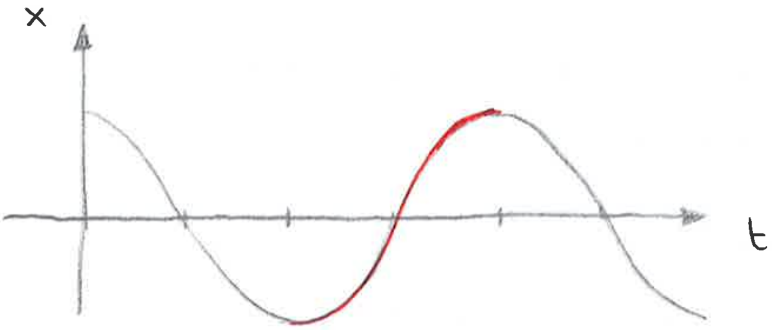
per trovare $a(t)$ derivo $v(t)$

$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\underbrace{A\sin(\omega t + \varphi)}_{x(t)} \cdot \omega^2$

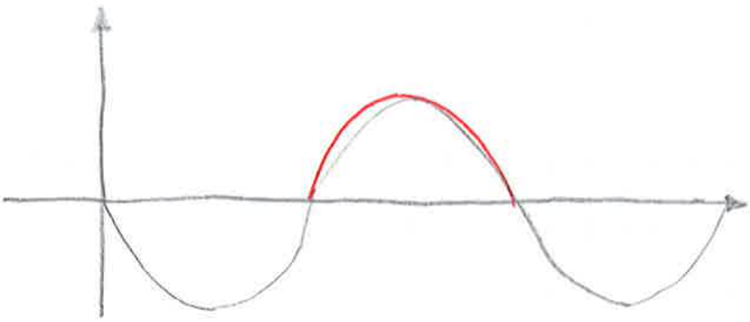
$= -\omega^2 \cdot x(t)$



posizione $\sin(\omega t)$



velocità $\cos(\omega t)$



accelerazione $-\sin(\omega t)$

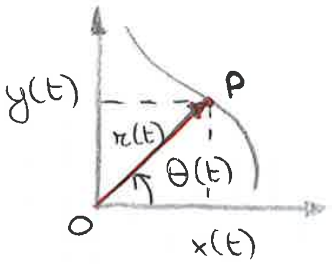
MOTO NEL PIANO

POSIZIONE

del punto P può essere individuata dal raggio vettore

$$\vec{r}(t) = OP = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j}$$

$\hat{i}\,,\ \hat{j} \to$ versori degli assi cartesiani



Velocità vettoriale $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u}_T \cdot v$

considero 2 posizioni occupate da P al tempo t e al tempo $t+\Delta t$. Le 2 posizioni sono $\vec{r}(t)$ e $\vec{r}(t+\Delta t)$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \to \text{velocità vettoriale} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$$

derivata del raggio vettore rispetto a t

L'incremento $d\vec{r}$ del raggio vettore è tangente alla traiettoria nel punto P e in modulo uguale a ds (spostamento infinitesimo lungo la traiettoria)

$$d\vec{r} = \vec{u}_T \cdot ds$$

$\vec{u}_T \to$ versore che ha la direzione tangente alla traiettoria

$$\vec{v} = \vec{u}_T \cdot \underbrace{ds \cdot \frac{1}{dt}}_{\frac{ds}{dt} = v} = \vec{u}_T \cdot v$$

14

Moto nel piano : composizione di 2 moti unidimensionali su assi ortogonali, indipendenti

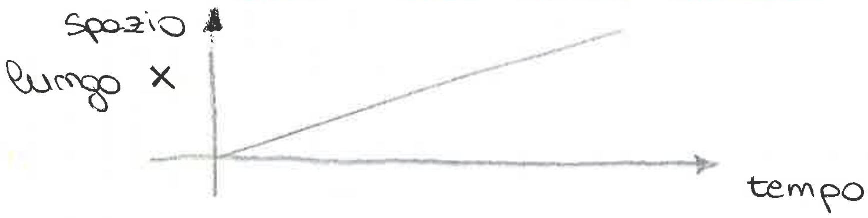
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

MOTO PARABOLICO

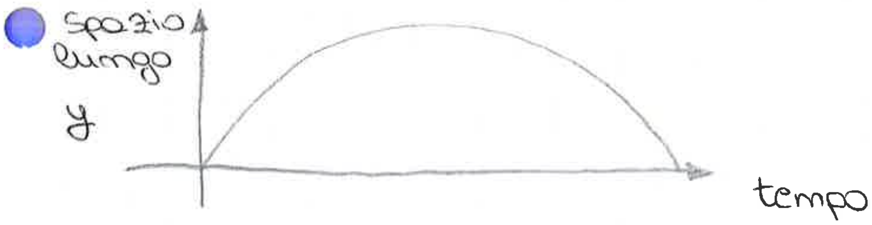
lungo x → velocità è sempre la stessa

lungo y cambia la velocità

EQUAZIONE DEL MOTO LUNGO GLI ASSI



moto rettilineo uniforme



moto rettilineo uniform. accelerato

$a = g$

$$\begin{cases} x = x(t) = V_{0x}\, t \\ y = y(t) = ct^2 + bt + a \\ \quad = -\frac{1}{2}gt^2 + V_{0y}t \end{cases}$$

→ equaz. di una parabola

Equazione della traiettoria $y(x)$ 2

$$\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta \, t \\ y(t) = V_0 \sin\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ricavo il tempo

$$\begin{cases} t = \dfrac{x}{V_0 \cos\theta} \\ y(x) = V_0 \sin\theta \cdot \left(\dfrac{x}{V_0 \cos\theta}\right) - \dfrac{1}{2} g \left(\dfrac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2 \\ \quad = \operatorname{tg}\theta \, x - \dfrac{g}{2 V_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2 \end{cases}$$

GITTATA MASSIMA

Pongo $y_G = 0$

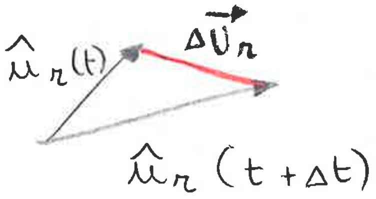
$$y_G = 0 = \operatorname{tg}\theta \, x_G - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2\theta} x_G^2$$

$$= x_G \left(\operatorname{tg}\theta - \frac{g \, x_G}{2 V_0^2 \cos^2\theta} \right)$$

$$x_{G_1} = 0 \qquad x_{G_2} = \frac{2 \operatorname{tg}\theta \cos^2\theta \, V_0^2}{g}$$

$$= \frac{2 \sin\theta \cdot \cos\theta \, V_0^2}{g}$$

DERIVATA DI UN VETTORE



$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)}{\Delta t}$$

VETTORE DERIVATA

direzione → perpendicolare a $\vec{u}_r$, direzione di $\hat{u}_\theta$

modulo → circa la lunghezza della corda: $|\Delta \hat{u}_r| \approx \underbrace{\Delta S}_{\text{corda}}$

$$\Delta S = \Delta\theta \cdot \underbrace{|\hat{u}_r|}_{\text{è un versore}} = \Delta\theta \cdot 1$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta\theta}{\Delta t}}_{} \cdot \hat{u}_\theta = \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$$

$\Delta\theta = \hat{u}_r(t+\Delta t) - \hat{u}_r(t)$

COMPONENTI POLARI DELLA VELOCITÀ

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{u}_r + r \cdot \frac{d\hat{u}_r}{dt}$$

$$\to \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{\hat{u}_r}_{\text{versore}} + \underbrace{r \cdot \frac{d\theta}{dt}}_{\text{modulo}} \cdot \underbrace{\hat{u}_\theta}_{\text{versore}} = \vec{V}_r + \vec{V}_\theta$$

* la velocità si scompone in 2 componenti

velocità ~~rda~~ radiale $\vec{V}_r$

11

Derivata di un versore $\hat{u}_r$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \underbrace{\hat{u}_\theta}_{\text{direzione perpendicolare a } \hat{u}_r} \cdot \underbrace{\frac{d\theta}{dt}}_{\text{modulo}}$$

$\vec{v}$ velocità

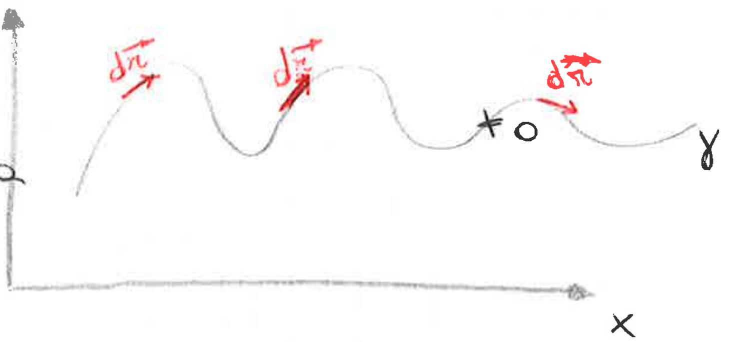
(1) $\vec{v} = \frac{dr}{dt} \cdot \hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{u}_\theta$ coordinate polari

(2) $\vec{v} =$ ~~...~~ $v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y$ coordinate cartesiane

COORDINATE INTRINSECHE

$s(t)$: legge oraria del moto

$\vec{r}(s)$: traiettoria

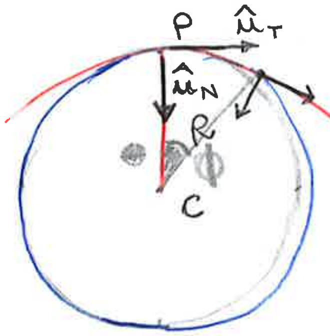


Moto su ~~...~~ una traiettoria nota : scegliendo una opportuna ascissa curvilinea (data dalla lunghezza della traiettoria misurata da un punto fisso O) sulla curva γ , la legge oraria può essere descritta tramite una sola funzione scalare $s(t)$

La curva è approssimabile con tanti spostamenti rettilinei $d\vec{r} = \underbrace{ds}_{\text{coordinata curvilinea}}\,\underbrace{\hat{u}_t}_{\text{versore tangente alla curva}}$

(3) $\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\text{velocità}} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_T$

$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_T = v \cdot \hat{u}_T$ (velocità scalare: $\frac{ds}{dt}$)



$R \equiv$ raggio di curvatura

CERCHIO OSCULATORE

C = centro di curvatura della traiettoria in P

$$\boxed{ds = d\phi R} \rightarrow R = \frac{ds}{d\phi}$$

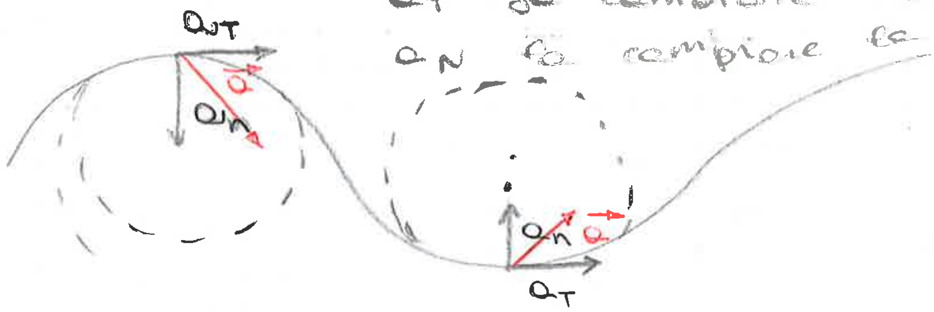
$$\frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{ds}}_{\frac{1}{R}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{1}{R} \cdot v \qquad \phi(s(t))$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{R}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \hat{u}_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat{u}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N}$$

a_T fa cambiare il modulo di v

a_N fa cambiare la direzione



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Accelerazione tangenziale : cambia il modulo di v

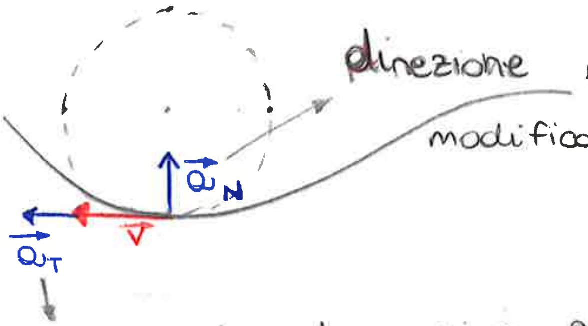
" normale o centripeta : cambia la direzione di velocità

19

MOTO NEL PIANO

	coordinate cartesiane	polari	Intrinseche
VELOCITÀ $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\frac{dx}{dt} \cdot \hat{u}_x + \frac{dy}{dt} \hat{u}_y$	$\frac{dr}{dt} \cdot \hat{u}_r + r\frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$	$\frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_T = V \hat{u}_T$
ACCELERAZIONE $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	$\boxed{1}$ $\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \hat{u}_y$	$\boxed{2}$ $\hat{u}_r \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] + \hat{u}_\theta \left[2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$ $\vec{a}_r$ radiale + $\vec{a}_\theta$ trasverso	
		$\boxed{3}$ Intrinseche $\frac{dv}{dt} \cdot \hat{u}_T + \frac{v^2}{R} \hat{u}_N$ $\vec{a}_T$ tangenziale + $\vec{a}_N$ normale	

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 362

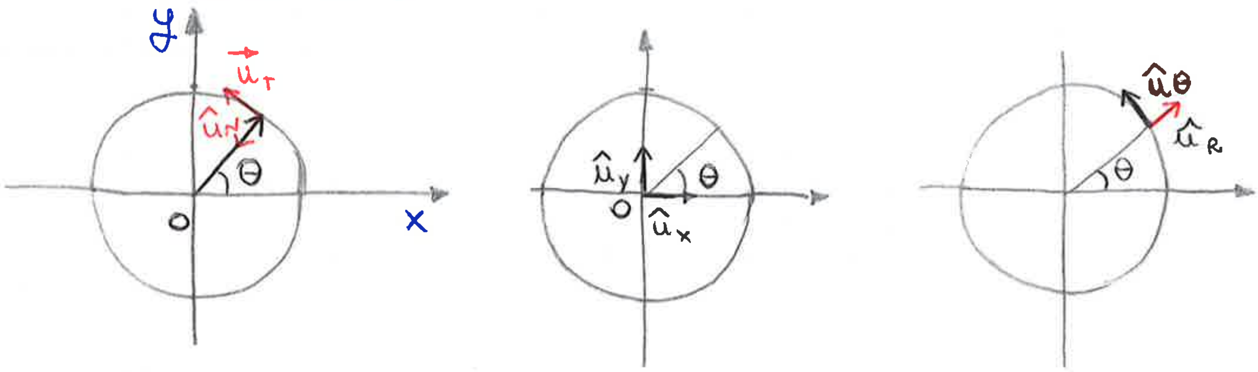


direzione perpendicolare alla $\vec{v}$
modifica la direzione

accelerazione tangenziale ha la stessa direzione di v e modifica il modulo di v

MOTO CIRCOLARE

- La traiettoria è una circonferenza



(1) COORDINATE CARTESIANE $x(t)$, $y(t)$

~~COORDINATE POLARI~~

$|\vec{r}| = R$

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

R è costante , $\theta = \theta(t)$ → l'angolo è funzione del tempo

$$\vec{a} = \left[-R\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left[R\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha}\right]\hat{u}_\theta =$$

$\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt}$ accelerazione angolare derivata della velocità angolare

accelerazione centripeta · acc. tangenziale

$$\Rightarrow \vec{a} = -R\omega^2 \cdot \hat{u}_r + R\alpha \cdot \hat{u}_\theta$$

NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME $\rightarrow$ $\boxed{R\alpha \cdot \hat{u}_\theta = 0}$

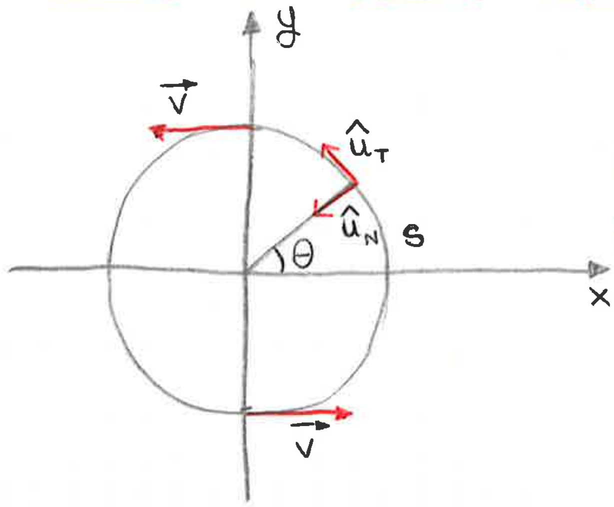
L'ACCELERAZIONE non è nulla, c'è solo la a radiale

la velocità in modulo non cambia, quindi

ω è costante e $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$

Legge oraria	Angolo, velocità angolare e accelerazione angolare
$\theta(t)$ angolo	$\theta = \theta_0 + \int_{t_0}^{t} \omega(t)\,dt$
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$	$\omega = \omega_0 + \int_{t_0}^{t} \alpha(t)\,dt$
$\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$	$\alpha = \alpha(t)$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$$s(t) = s_0 + vt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

- il vettore $\vec{v}$ NON varia in modulo ma in direzione
- accelerazione è solo normale, centripeta

$$\vec{a} = R\cancel{\frac{d\omega}{dt}}\,\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\cdot\hat{u}_N$$

↓ ω è costante

$$\boxed{|\vec{a}|} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R}$$

- Moto periodico con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORMEMENTE ACCELERATO

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad s(t) = s_0 + vt + \frac{1}{2}at^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

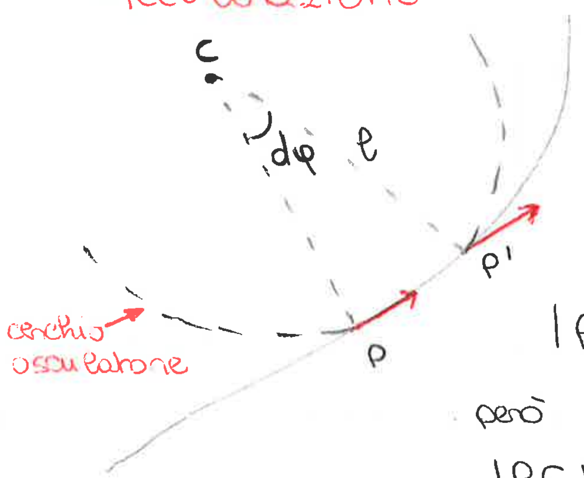
$$\vec{a} = \underbrace{R\frac{d\omega}{dt}}_{\text{accelerazione tangenziale}}\hat{u}_T + \underbrace{\frac{v^2}{R}}_{\text{acc. centripeta}}\cdot\hat{u}_N$$

α è costante

a_T è costante

$$a_N = \omega^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 \cdot R$$

Accelerazione



velocità tangente alla traiettoria $s(t)$

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt} \cdot \hat{u}_T$$

$$|PC| \neq |P'C|$$

però per $\Delta t \to 0 \to \Delta t = dt$

$$|PC| \simeq |P'C| = \rho$$

quindi con dt infinitesimo arco di traiettoria $\widehat{PP'}$ si confonde con arco di circonferenza centrato in C e di raggio ρ → approssimo il moto con un moto circolare

* il CERCHIO OSCULATORE varia da punto a punto lungo la traiettoria
* φ crescente → mi sposto nel verso fissato positivo lungo la traiettoria

RIASSUNTO COMPONENTI

(1) CARTESIANE $\{x, y\}$

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y + z(t)\,\hat{u}_z$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{dy}{dt}\cdot\hat{u}_y + \frac{dz}{dt}\cdot\hat{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt}\,\hat{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt}\cdot\hat{u}_y + \frac{d^2z(t)}{dt}\cdot\hat{u}_z$$

(2) POLARI

$\{\vec{u}_r$ diretto come il raggio vettore, $\vec{u}_\theta$ perpendicolare al raggio vettore $\}$

il vettore $\vec{r} = r\cdot\hat{u}_r$

$\hat{u}_r \rightarrow$ versore diretto con $\vec{r}$

$\hat{u}_\theta \rightarrow$ versore $\perp$ a $\hat{u}_r$

* base polare $\{\hat{u}_r, \hat{u}_\theta\}$

* dalle cartesiane alle polari

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ $\quad x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta$

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt}\,\hat{u}_r + r\cdot\frac{d\theta}{dt}\,\hat{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\hat{u}_r + \left(\frac{r\,d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)\hat{u}_\theta$$

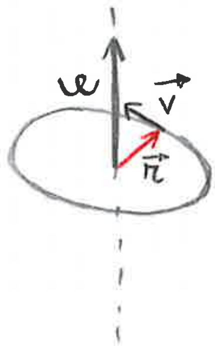
~~Rico~~ COORDINATE CILINDRICHE

$\rightarrow$ individuate dai vettori della base polare ai quali si aggiunge $\hat{u}_z$ ortogonale al piano polare

IL VETTORE ω, vettore velocità angolare

- direzione: perpendicolare al piano della circonferenza
- verso dato dalla regola della mano destra
- modulo $|\vec{\omega}| = \dfrac{d\theta}{dt}$

$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}}$ $\rightarrow$ $\vec{v}$ è ortogonale ad $\vec{\omega}$ e $\vec{r}$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v} =$$

$$= \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$\vec{\alpha}$: stessa direzione di ω

$$\vec{\omega} = \frac{d\theta}{dt}\, \hat{u}_\omega$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}\, \hat{u}_\omega$$ $\rightarrow$ non lo derivo perché non cambia direzione

$$\alpha \cdot \hat{u}_\omega = \vec{\alpha}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\text{acc. tangenziale}} + \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})}_{\text{acc. normale o centripeta}}$$

DINAMICA DEL PUNTO

Si basa su 3 principi

① principio d' inerzia

OSSERVAZIONE : un oggetto che si muove su un piano in assenza di attrito, tende a mantenere la sua velocità

"Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ossia rimane in quiete se già lo era o si muove di moto rettilineo uniforme" (1° legge di Newton) *

* L' assenza di forza non implica l' assenza di moto ma NON varia la velocità.

* la variazione di velocità in modulo o direzione è dovuto all' azione di una forza

Accelerazione $\Rightarrow$ Presenza di una forza

FORZA : grandezza che esprime

* forza è un VETTORE

* Applicando ~~...~~ ~~...~~ FORZE DIVERSE su uno STESSO CORPO, le accelerazioni risultanti sono proporzionali al modulo della forza

$$F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 \ldots$$

* STESSA FORZA produce a diverse su corpi diversi

~~F/a~~

$$\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$$

MASSA INERZIALE

- non dipende dalla forma ma dalla quantità di materia
- proprietà di opporsi alla variazione di velocità
- si misura confrontando le accelerazioni di due corpi soggetti alla stessa forza
- 2 corpi con la stessa massa inerziale, misurata dinamicamente, posti sui piatti di una bilancia la mantengono in equilibrio (relaz. tra massa inerziale e massa gravitazionale)
- la massa inerziale rappresenta il fattore di proporzionalità tra peso e $\vec{g}$

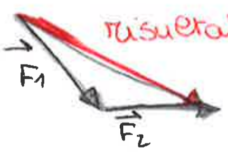
FORZA RISULTANTE $\vec{R}$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = \frac{1}{m}\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n\right)$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i$$

① Se un corpo è in quiete la $\vec{R}$ è nulla



risultante = somma vettoriale di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$

6 REGOLE per risolvere un problema di dinamica

1. disegno che schematizza la situazione
2. si isola il corpo e si disegna il ~~diagr~~ diagramma del corpo libero, indicando ogni forza che agisce
   - più corpi → ~~ant~~ per ognuno un disegno
3. si sceglie un sistema di coordinate
4. si scrive la 2° legge di Newton scomponendola lungo gli assi

$$\begin{cases} F_{RIS_x} = m a_x \\ F_{RIS_y} = m a_y \end{cases}$$

5. si risolvono simbolicamente le equazioni
6. si inserisco i valori numerici e le unità di misura

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITA' DI MOTO

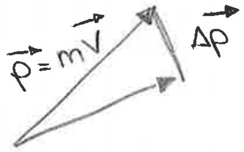
$$\sum \vec{F}_i = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$\downarrow$

$\vec{p}$ è costante nel tempo

N.B. Forza TOTALE agente sul corpo è la derivata della q.d.m

* la quantità di moto si conserva se NON ci sono forze che agiscono sull'oggetto



$\longrightarrow$ se ho la variazione della $\vec{p}$ posso conoscere la forza agente

IMPULSO

L'impulso di una forza applicata ad un punto materiale provoca la variazione della sua quantità di moto

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad d\vec{p} = \vec{F}\,dt$$

La forza istantanea totale agente sul sistema è la derivata rispetto al tempo della q.d.m

$$\cancel{\int_{t_0}^{t} d\vec{p}} \cancel{=} \cancel{\int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt} \cancel{\neq} \cancel{\vec{p}(t)} - \cancel{\vec{p}(t_0)}$$

se conosco $\vec{F}(t)$ posso integrare la funzione

IMPULSO $\left[\; \vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_0 = \Delta\vec{p} \right.$

$\longrightarrow$ area della forza

Teorema dell'impulso $\quad \vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt$

Dice qual è l'effetto complessivo dell'applicazione di una forza in un intervallo di tempo finito

CLASSIFICAZIONE DELLE FORZE

Le interazioni in natura sono dovute a pochi tipi di interazioni principali:

- interazione gravitazionale 10^{-38}
- interazione elettromagnetica 10^{-2}
- interazione nucleare debole: responsabile delle forze che intervengono nei decadimenti nucleari 10^{-7}
- interazione nucleare forte 1

Ponendo uguale a 1 l'interazione forte presente fra 2 protoni a contatto superficiale allora le altre interazioni hanno rispetto a questa le proporzioni 10^{-38}...

TIPI DI INTERAZIONE

Gravitazionale → determina la forza di gravità sulla terra e l'attrazione dei pianeti

elettromagnetica → responsabile delle proprietà chimiche degli atomi (interazione tra ioni positivi e negativi) e della struttura delle MOLECOLE

nucleare forte → dotata di una proprietà definita carica di colore, tiene uniti i quark, costituenti elementari dei protoni e dei neutroni

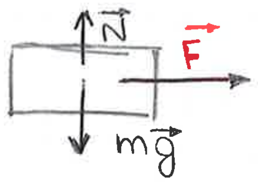
- è la forza più intensa fra quelle conosciute

* Secondo la teoria quantistica dei campi, le particelle che costituiscono la materia interagiscono attraverso lo scambio di uno o più bosoni di gauge, particelle elementari mediatrici di forza

Interazione	mediatore	Raggio d'azione
forte	gluone	$1,2 \cdot 10^{-15}$ m
elettromagnetica	fotone	∞
debole	bosoni W e Z	$1,2 \cdot 10^{-18}$ m
gravitazionale	gravitone	∞

FORZA DI ATTRITO

Attrito radente statico



$$\vec{F} + \vec{f}_{as} = 0$$

* Le forze di attrito radente hanno origine dalle forze di coesione tra 2 materiali

* La forza di attrito statico è esattamente uguale alla forza che si applica, NON ha un valore predefinito

$$|\vec{F}| = |\vec{f}_{AS}|$$

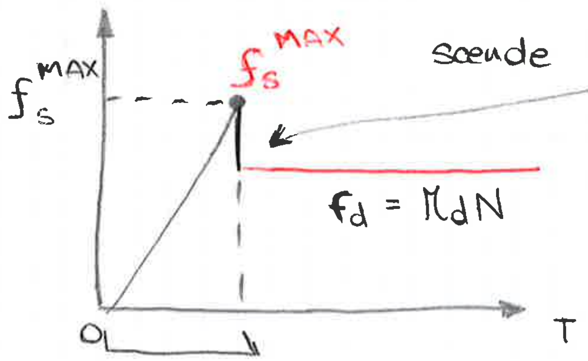
* Quando l'oggetto inizia a muoversi, sparisce ~~[illegible]~~ la forza di attrito statico

$$|f_s^{MAX}| = \mu_s |\vec{N}|$$ → La forza che devo applicare affinché l'oggetto inizi a muoversi

μ_s → coefficiente di attrito statico

→ dà un valore della rugosità delle superfici: più è grande, più la superficie è rugosa

Forza di attrito dinamico



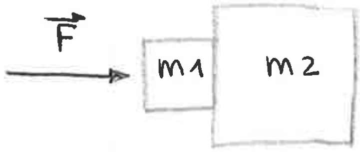
$\mu_d < \mu_s$

f_d è costante

$$|f_d| = \mu_d \cdot |\vec{N}|$$

f_s cresce con la forza e arriva fino a un massimo

Esercizio ①



$m_1 = 5\,kg$

$m_2 = \cancel{10}\ 15\,kg$

$|\vec{F}| = 20\ N$

$M = m_1 + m_2 = \cancel{15}\ 20\,kg$

$|\vec{F}| = M \cdot |\vec{a}| \Rightarrow \quad |\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{M} = 1\ m/s^2$

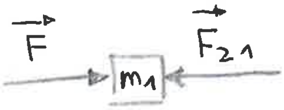
$\boxed{m_2}$ sente e' azione di una forza F_{12} (forza di 1 su 2)

$|\vec{F}_{12}| = m_2 \cdot |\vec{a}| = 15\ N$

$\vec{a} = \vec{a}_1 = \vec{a}_2$

stesso modulo

m 1

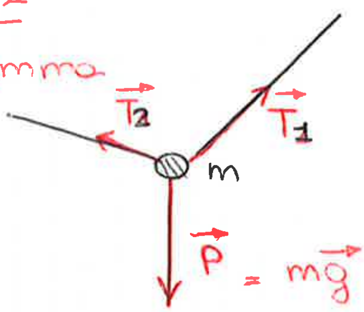


$F - F_{21} = m_1 \cdot a = 5 \cdot 1 = 5\ N$

$F - F_{21} = 5 \quad \rightarrow \quad -F_{21} = 5 - 20 = 15\ N$

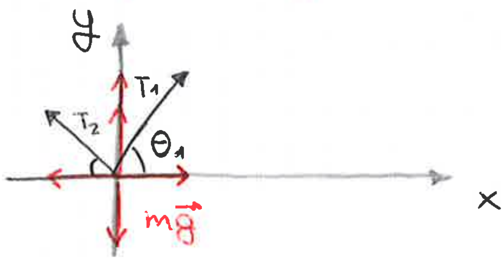
ES 2

diagramma di corpo libero



massa appesa con 2 fili

$$\begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

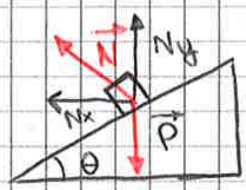


$T_{1x} = |\vec{T}| \cdot \cos\theta_1$

$T_{1y} = |\vec{T}| \cdot \cancel{\cos\theta_1}\ \sin\theta_1$

$T_{2x} = |\vec{T}| \cdot \cos\theta_2$

$T_{2y} = |\vec{T}| \cdot \cancel{\cos\theta}\ \sin\theta_2$

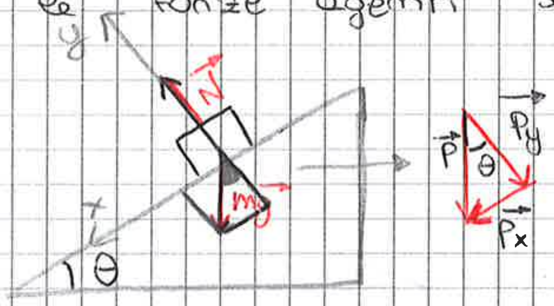


$\vec{N}$
Ny
Nx
$\vec{P}$
θ

~~Dis~~ Dinamica ~~del~~ sul PIANO INCLINATO

ES

Una cassa di legno di massa 10 Kg è posta su un piano inclinato di $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Considerare le forze agenti sulla cassa



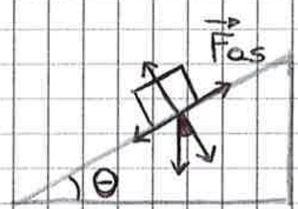
① Senza attrito

$$|\vec{P}_y| = mg\cos\theta$$
$$|\vec{P}_x| = mg\sin\theta$$

$y: \quad N - mg\cos\theta = 0$ ho accelerazione nulla lungo l'asse delle y

$x: \quad mg\sin\theta = m\cdot\vec{a}_x$ $a_x = g\sin\theta$

② Con Attrito Statico



$y: \quad N - mg\cos\theta = 0$

$x: \quad mg\sin\theta - f_s = 0$ $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F}_{as} = 0$

la forza di attrito statico non ha una formula, non so il valore

$$mg\sin\theta_{MAX} - f_s^{MAX} = 0$$

$$\begin{cases} mg\sin\theta^{MAX} - \mu_s N = 0 \\ N - mg\cos\theta = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mg\sin\theta^{MAX} - \mu_s mg\cos\theta^{MAX} = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\mu_s = \tan\theta^{MAX}$$

Dinamica per forze che dipendono dalla velocità

FORZA DI ATTRITO VISCOSO

è la resistenza che un fluido oppone quando un corpo tenta di muoversi all'interno di esso

$$\vec{F} = -\beta \vec{v}$$

Se l'oggetto cade verticalmente in un fluido viscoso

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$+mg - \beta \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

Equazione differenziale non omogenea a coefficienti costanti

(Orale: perché di tutti i tipi di attrito)

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m\vec{g} - \underbrace{mk}_{\beta}\vec{v} = m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Il moto ha luogo solo lungo l'asse verticale y

$$y: \frac{dv}{dt} = g - kv \rightarrow \frac{dv}{g-kv} = dt \quad \text{separo le variabili}$$

$$\int_{v_0}^{v} \frac{dv}{g-kv} = \int_{t_0}^{t} dt \rightarrow -\frac{1}{k}\left[\ln(g-kv)\right]_{v_0}^{v} = t - t_0$$

$$\rightarrow \cancel{-\frac{1}{k}}\ \ln \frac{(g-kv)}{g-\cancel{kv_0}} = -kt \rightarrow v(t) = \frac{g}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)$$

$v_0 = 0$

$$\begin{cases} N\sin\theta = m \cdot \frac{v^2}{R} \\ N\cos\theta - mg = 0 \end{cases} \rightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} \qquad \frac{\cancel{m}g}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = \cancel{m}\frac{v^2}{R}$$

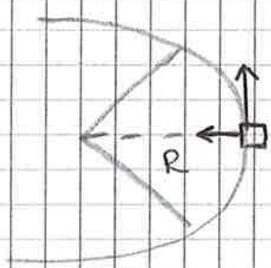
$$tg\theta = \frac{v^2}{gR}$$ → se questa equazione è soddisfatta mi sto muovendo su quella traiettoria

↓

fissato l'angolo θ questa equazione stabilisce la velocità che deve essere tenuta per restare sulla traiettoria circolare di raggio r.

COMPONENTE CENTRIPETA DELLA FORZA:

CURVE PIANE



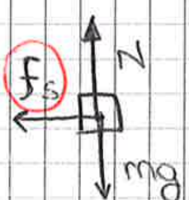
$$F_N = f_s = \frac{v^2}{R} \cdot m$$ la forza di attrito statico è la componente centripeta della forza

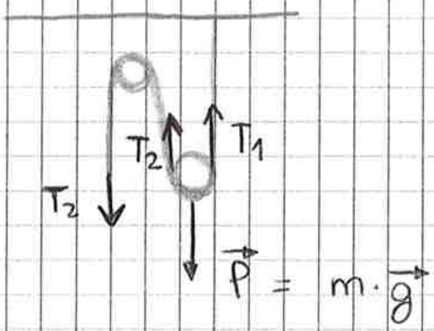
$$\rightarrow \mu_s \cdot N = f_s^{MAX} = \frac{v^2_{MAX}}{R} \cdot m$$

$N = mg$ (sto sul piano) $\qquad \mu_s \cancel{m} \cdot g = \cancel{m} \cdot \frac{v^2_{MAX}}{R}$

$$\Rightarrow V_{MAX} = \sqrt{\mu_s \cdot R \cdot g}$$

* Nelle curve piane, la FORZA DI ATTRITO STATICO è responsabile della forza centripeta

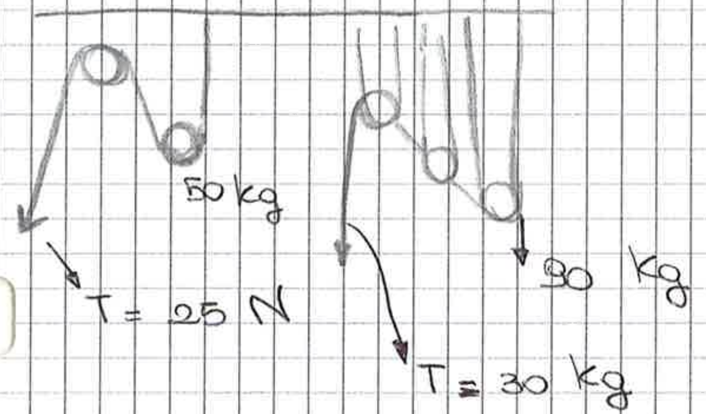




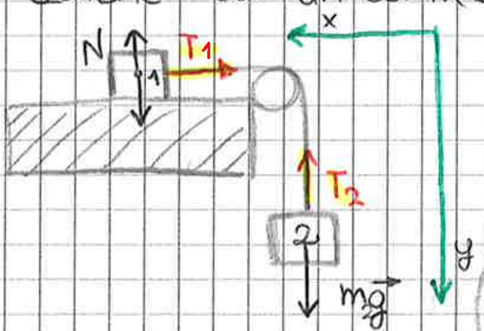
$T_1 = T_2$

$|\vec{P}| = |2T_1|$

$T_1 = \dfrac{|\vec{P}|}{2}$



CARRUCOLA FISSA : corpo trascinato da un filo per azione di un contrappeso



$$\begin{cases} m_1\vec{g} + \vec{T_1} + \vec{N} = m_1\vec{a_1} \\ m_2\vec{g} + \vec{T_2} = m_2\vec{g} \end{cases}$$

→ equazioni con i vettori

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a_1 & x \text{ per } 1 \\ N = m_1 g & y \text{ per } 1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 & y \text{ per } 2 \end{cases}$$

$T_1 = T_2$ → massa trascurabile del filo

$a_1 = a_2$ → filo inestensibile

$$\begin{cases} T_1 = m_1 a_1 \\ m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \\ a_1 = a_2 \\ T_1 = T_2 \end{cases}$$

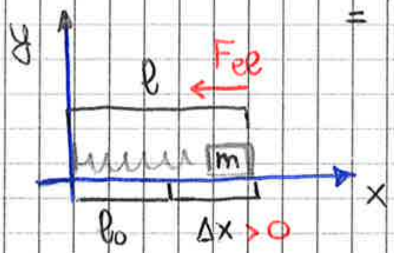
LA FORZA ESERCITATA SU UNA MOLLA

$\vec{F}_x$ Applicata $= k\vec{x}$

$\vec{F}_x$ molla $= -k\vec{x}$

$= -k(\ell - \ell_0)$ → lunghezza a riposo

* $\vec{F}_{elas}$ ha la direzione dello spostamento Δx ma verso opposto



Felastica → forza di richiamo, si oppone alla modifica della lunghezza della molla
- sempre opposta allo spostamento

- deformazione della molla $\Delta x = x - x_0$

Legge di Hooke $\vec{F} = -k\vec{\Delta x}$

Equazione del moto sull'asse d'azione della molla

$\cancel{-kx} = \cancel{m}$ $\quad \vec{F} = m \cdot \vec{a}$

$$-kx = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ → equazione dell'accelerazione nel moto armonico

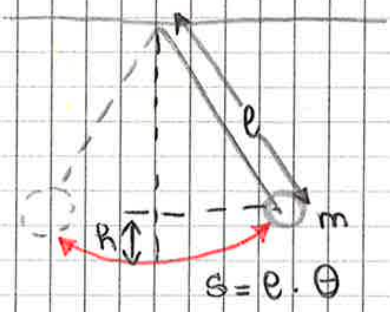
$x(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$ → A e φ date dalle condizioni iniziali

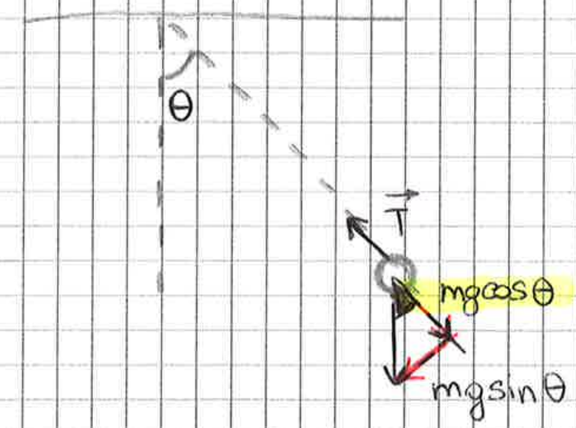
Il corpo si muove di moto armonico semplice con pulsazione che dipende dalla costante elastica della molla.

→ nel punto di massimo allungamento e massima compressione, l'accelerazione è massima e la velocità è nulla (il corpo sta invertendo il verso del moto)

→ Nel punto di equilibrio, l'accelerazione è NULLA e la velocità massima

IL PENDOLO SEMPLICE





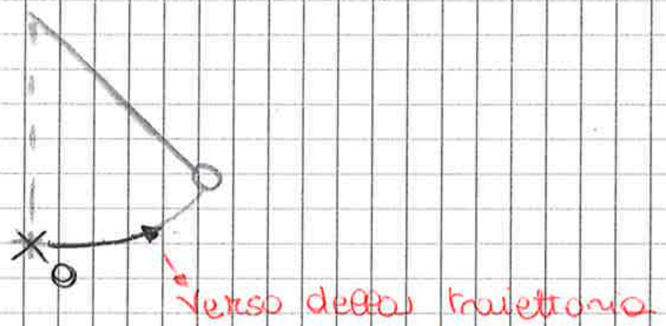
$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m a_N = m\dfrac{v^2}{L} \\ -mg\sin\theta = m a_T = mL\alpha \end{cases}$$

$a_T = R\alpha$

$mg\cos\theta \rightarrow$ direzione normale

$mg\sin\theta \rightarrow$ direzione tangenziale

* Do ~~una direzione~~ un verso della traiettoria nel verso in cui l'angolo aumenta



$$\begin{cases} T - mg\cos\theta = m a_N = m\dfrac{v^2}{L} \\ -mg\sin\theta = m \cdot a_T = m \cdot \alpha \cdot L = \cancel{m} \cdot L \cdot \dfrac{d^2\theta}{dt^2} \end{cases}$$

$$-g\sin\theta = L \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

TAYLOR

$$\sin\theta \approx \theta - \cancel{\frac{\theta^3}{3!}}$$

$$\frac{g}{L} = \omega^2$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\cdot\theta = 0 \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

LAVORO

Consideriamo una traiettoria curvilinea e $\vec{F}$ è la risultante delle forze agenti sul punto

LAVORO di $\vec{F}$ compiuto durante lo spostamento del punto dalla posizione A alla posizione B

la quantità scalare : $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F\cos\theta\, ds$

$$= \int_A^B F_T\, ds$$

* il lavoro è l'integrale di linea della forza cioè è dato dalla somma di infiniti contributi

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_T \cdot ds$

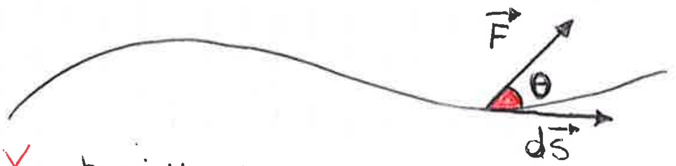
* Si ha lavoro quando una forza F produce uno spostamento $\vec{s}$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$= (F_T \cdot \hat{u}_T + F_N \cdot \hat{u}_N) \cdot d\vec{s} = F_T \cdot ds =$$

$$= |\vec{F}| \cdot \cos\theta \cdot ds$$

θ angolo tra la forza e la traiettoria



γ → traiettoria

$L_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{A\gamma}^{B} F\cos\theta\, ds$] → si tratta di dare la somma di tanti piccoli vettori che compongono la traiettoria

→ γ è molto importante perchè il lavoro dipende dalla traiettoria

PRINCIPIO DI AZIONE SIMULTANEA

Sapendo che:

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = m \cdot \vec{a} = \sum m \cdot \vec{a}_i$$

$$L_{AB} = \int_{A\gamma}^{B} \vec{R} \cdot d\vec{s} = \int_{A\gamma}^{B} \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{s} =$$

$$= \sum_i \int_{A\gamma}^{B} \vec{F}_i \cdot d\vec{s} = \sum_i L^i_{AB} = L_i + \dots + L_n$$

→ Il lavoro totale è uguale al lavoro fatto dalle singole forze sull'oggetto

POTENZA

$P = \dfrac{dL}{dt}$ → la potenza è il lavoro fatto nell'unità di tempo

$$P = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{s})}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad \text{Potenza istantanea}$$

$$= F_T \cdot v$$

considero la forza costante

$P_{medio} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{v} = \dfrac{\Delta L}{\Delta t}$ Potenza media

rapporto tra il lavoro totale e il tempo per il quale viene svolto

* Unità di misura

$$[L] = [F][\text{spostamento}] = \underset{\text{massa}}{[M]}\underset{\text{lungh}}{[L]}\underset{\text{tempo}}{[T^{-2}]}\underset{\text{lung}}{[L]}$$

$$= [M][L^2][T^{-2}]$$

$$= \underbrace{N}_{\text{Newton}} \cdot \underbrace{m}_{\text{metri}} = \text{Joule}$$

$[\text{Potenza}] = [\text{Lavoro}] / [T] = J/s = \text{Watt}$

Joule e Watt sono grandezze derivate

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 362

Il teorema dell'energia cinetica o delle forze vive può essere utilizzato in 2 modi:

(1) conoscendo la velocità iniziale e il lavoro fatto si ricava la velocità finale

(2) Conoscendo la velocità di un corpo in 2 punti si ricava il lavoro totale compiuto sul corpo

↓

questo NON implica la conoscenza della traiettoria

* questo teorema ci mostra che è possibile sottrarre energia cinetica ad un corpo per produrre lavoro (corsi d'acqua per produrre lavoro meccanico)

ENERGIA CINETICA E QUANTITÀ DI MOTO

$E_K = \frac{1}{2} m v^2$ $\vec{p} = m\vec{v}$

$E_K = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m}$; $p = \sqrt{2 m E_K}$

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -kx\,\hat{u}_x$$

Il lavoro di Fel per uno spostamento sull'asse x vale:

$$L_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B -kx\,\hat{u}_x \cdot dx\,\hat{u}_x =$$

$$= \int_A^B -kx\cdot dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

$$\boxed{L_{A\to B} = -(E_{p,B} - E_{p,A}) = -\Delta E_p}$$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2$ Energia potenziale elastica

N.B.

FORZA PESO
- LAVORO $-mg(\Delta h)$
- En. potenziale mgh

FORZA ELASTICA
- Lavoro $-\frac{1}{2}k\Delta x^2$
- En. potenziale $\frac{1}{2}k\Delta x^2$

$$-dE_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot dz$$

$$F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$$

$$\vec{F} = F_x \cdot \hat{u}_x + F_y \cdot \hat{u}_y + F_z \cdot \hat{u}_z$$

$$= \underbrace{-\frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot \hat{u}_x - \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot \hat{u}_y - \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot \hat{u}_z}$$

$$\downarrow$$

$$-\vec{\nabla} E_p \qquad \text{GRADIENTE}$$

$$\boxed{\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p}$$ $\Rightarrow$ esiste un legame tra ~~un~~ la forza e l'energia potenziale

GRADIENTE

Il gradiente di una funzione scalare V è un $\boxed{\text{vettore}}$ diretto lungo la direzione di massima variazione (per unità di spostamento) della funzione $V(r)$.

→ modulo : valore della derivata direzionale V di $V(r)$ lungo tale direzione

→ direzione : massima variazione ...

→ verso : ~~i~~ ~~val~~ verso i valori crescenti di V

FORZE CONSERVATIVE

Forza peso $L_{A \to B} = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A})$

$E_p = mgy$ en. potenziale della forza peso

Forza elastica $L_{A \to B} = -\Delta E_p$

$E_p = \frac{1}{2} k x^2$

Una forza si dice conservativa se:

1. il lavoro NON dipende dal percorso
2. la circuitazione della forza è nulla $\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$
3. Esiste una funzione scalare $E_p(\vec{r})$ detta energia potenziale tale che $L_{AB} = E_p(\vec{r}_A) - E_p(\vec{r}_B)$ indipendentemente dalla linea su cui il lavoro è calcolato

SE HO SOLO FORZE CONSERVATIVE

$$L_{A \to B} = -\Delta E_p = E_p(A) - E_p(B)$$

$$L_{A \to B} = \Delta E_k = E_k(B) - E_k(A)$$

$$E_p(A) - E_p(B) = E_k(B) - E_k(A)$$

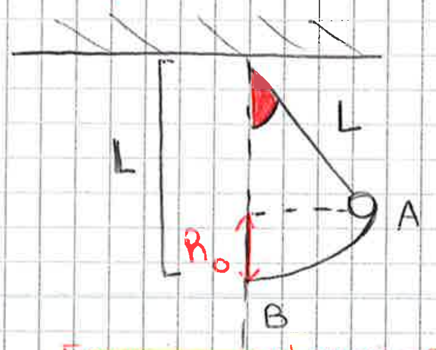
$$\boxed{E_p(A) + E_k(A) = E_k(B) + E_p(B)}$$

→ Se siamo in presenza di forze conservative, in qualunque punto, la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica è la stessa

$E_{meccanica} = E_k + E_p = \text{costante}$ in presenza di sole forze conservative

→ si chiamano forze conservative perché conservano l'energia meccanica

APPLICAZIONE DEL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA MECCANICA AL CASO DI UN PENDOLO



$$L - L\cos\theta = h_0$$

	Energia potenziale	Energia cinetica	E. meccanica
A	$mgh_0 = mgL(1-\cos\theta_0)$	0	$mgL(1-\cos\theta_0)$
B	0	$\frac{1}{2}mV_0^2$	$mgL(1-\cos\theta_0)$

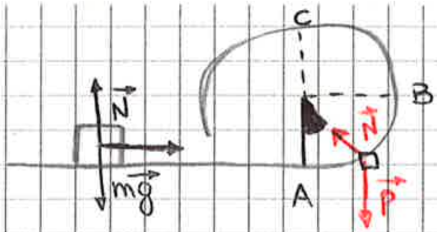
$$mgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mV_0^2 + 0$$

$$V_{0B} = \sqrt{2gL(1-\cos\theta_0)}$$

	Energia potenziale	E. cinetica	E. meccanica
Punto generico	$mgL(1-\cos\theta)$	$\frac{1}{2}mv^2$	$mgL(1-\cos\theta)$

$$mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2 = mgL(1-\cos\theta_0)$$

$$v = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$



Un punto si muove su un asse orizzontale liscio con velocità ~~va~~ v_0. Nella posizione A inizia a salire su una guida circolare di raggio R

① All'inizio $E_K = \frac{1}{2}mV_0^2$

$E_p = 0$ perché l'altezza è zero

Quindi $E_m = E_K + E_p = \frac{1}{2}mV_0^2$

$$\rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR$$

$$N - mg\cos\theta = \frac{V^2}{R}m$$

accelerazione centripeta

Ⓐ $\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_A^2$

$$N_a - mg = \frac{V_A^2}{R} \cdot m$$

$$N_A = mg + \frac{V_A^2}{R} m = mg + \frac{mV_0^2}{R}$$

Ⓑ $\frac{1}{2}mV_0^2 = \frac{1}{2}mV_B^2 + mgR$

$$V_B = \sqrt{V_0^2 - 2gR} < V_A$$

$$N_B = m\frac{V_B^2}{R} = \frac{mV_0^2}{R} - 2gm$$

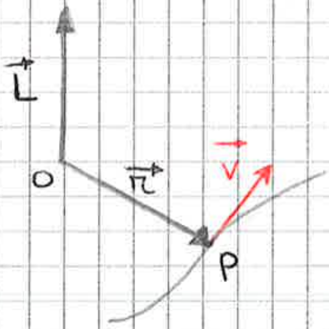
Ⓒ Se $N_C = 0 \rightarrow$ c'è il DISTACCO

$$\frac{1}{2}mV_C^2 + m \cdot g \cdot 2R = \frac{1}{2}mV_0^2$$

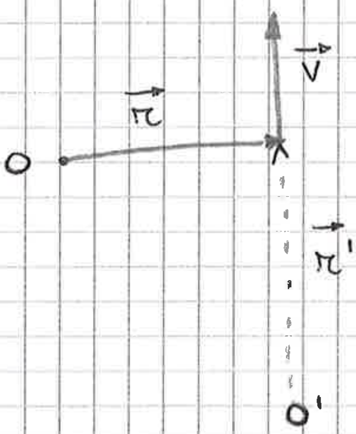
$$\cancel{m}V_C^2 + 4mgR = \cancel{m}V_0^2 \rightarrow V_C^2 = V_0^2 - 4gR$$

MOMENTO ANGOLARE O MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

(momento del vettore quantità di moto)



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
$$\vec{L}' = \vec{r}\,' \times \vec{p}$$

$\Rightarrow$ il momento angolare cambia a seconda del polo rispetto a cui lo calcolo

In coordinate polari

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} =$$
$$= \vec{r} \times m\,(v_r \cdot \hat{u}_r + v_\theta \cdot \hat{u}_\theta) =$$
$$= \vec{r} \times m\,\underline{v_\theta \hat{u}_\theta} = \quad (\vec{r} \times \hat{u}_r = 0 \text{ perché } \operatorname{sen} 0 = 0)$$
$$= \vec{r} \times m \cdot R \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \hat{u}_\theta$$

DIMOSTRAZIONE

distanza dal polo

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) =$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

$$= \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}_{=0 \text{ perché } \vec{v} \parallel \vec{v}} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

N.B. Se il polo coincide con l'origine degli assi ed è fermo $\vec{r}$ coincide proprio con il raggio vettore e quindi posso scrivere che $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$

CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

Quando la forza è nulla oppure forza e vettore ~~...~~ posizione sono paralleli

$$\vec{M} = 0 \quad ; \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \vec{L} \text{ costante}$$

FORZE CENTRALI

* forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

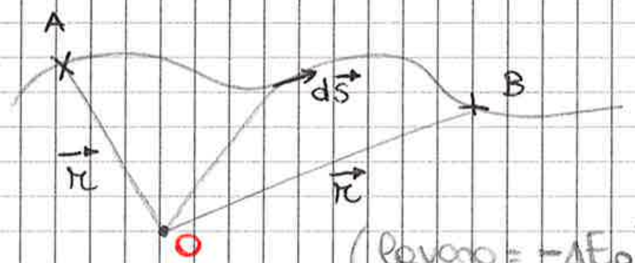
① per qualunque posizione del punto materiale P che subisce la forza, la direzione della forza passa sempre per un punto fisso dello spazio, detto CENTRO DELLA FORZA CENTRALE

② modulo della forza è funzione solo della distanza del punto materiale P con il centro.

$$\boxed{\vec{F} = F(r) \cdot \hat{u}_r}$$

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F(r) \cdot \hat{u}_r \cdot d\vec{s} =$$

$$d\vec{s} = dr\,\hat{u}_r + dr\,\hat{u}_\theta$$



$$= \int_A^B F(r) \cdot dr =$$

$$(L_{lavoro} = -\Delta E_p) = E_p(A) - E_p(B)$$

Moto di un punto materiale sotto l'azione di una forza centrale

* Il momento di una forza centrale valutato rispetto al centro della forza è nullo, infatti braccio e forza sono paralleli

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_o \qquad \frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \longrightarrow \underline{\vec{L}} = \text{costante}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \underbrace{m\vec{v}}_{\vec{p}}$$

$\vec{L}$ si mantiene costante in direzione, significa che $\vec{r}$ e $\vec{v}$ rimangono sullo stesso piano

* Le forze centrali sono CONSERVATIVE
* La presenza di una forza centrale genera una variazione dello spazio detto CAMPO DI FORZE

Esempi di FORZE CENTRALI

(1) $$\vec{F} = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \hat{u}_r = -G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \rightarrow \hat{u}_r$$

FORZA DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

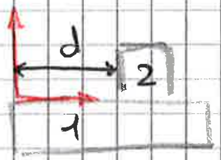
(2) FORZA DI COULOMB

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \hat{u}_r$$

(3) FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -kx\hat{i}$$

$$x = d + \frac{1}{2} a' t^2$$



$$a' = a_2 - a_1$$

$$x = d + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) t^2$$

$$0 = d + \frac{1}{2}(a_2 - a_1) t^2$$

Se sto sopra il corpo 1 quando 2 cade la posizione di 2 diventa 0

d → è la posizione iniziale

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 107 di 362

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{0'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_{0'} + \vec{a}'$$

$\vec{a}_{0'}$ → accelerazione del sistema in movimento rispetto a quello inerziale

FORZE DI INERZIA

$V_{0'} \neq$ costante

$$\vec{F}' = m\vec{a}' = m(\vec{a} - \vec{a}_{0'}) = \vec{F} - \underbrace{m\vec{a}_{0'}}_{\downarrow \ \vec{F}\ \text{inerziale o fittizia}}$$

L'osservatore in O' osserverà una forza differente, addirittura nel caso in cui in O si osserva $\vec{F} = 0$ e in O' si osserva $\vec{F}' \neq 0$

Osservazione del moto di una pallina fatto da 2 osservatori: inerziale e sul treno

Sul treno con moto costante: caduta di un grave, verticale

v_0 → pallina

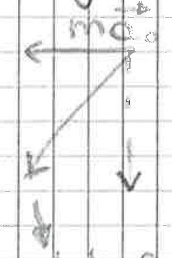
$v_0 + a_0 t$ → treno

quindi esiste una forza apparente

la pallina sembra che torna indietro

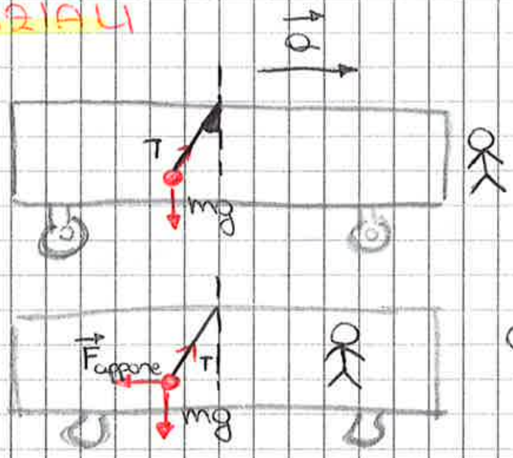
$$\vec{F} = -m\vec{a}_0$$

$$\vec{F}' = m\vec{g} - m\vec{a}_0$$



sembra che la pallina fa questo movimento

FORZE APPARENTI IN SISTEMI NON INERZIALI



OSSERVATORE INERZIALE

OSSERVATORE NON INERZIALE

MOTO DI PRECESSIONE

Se vettore di modulo costante $\vec{r}$ descrive un moto rotatorio con angolo fisso attorno all'asse centrale lungo cui giace ω.
Anche $\vec{v}$ compie lo stesso genere di moto

FORMULA DI POISSON

In generale si può dire che se il vettore A ha modulo costante e compie un moto di precessione con velocità angolare ω, la sua derivata temporale può essere scritta come:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{A}$$

CONDIZIONE PER AVERE UN MOTO DI PRECESSIONE

1. vettori ~~.....~~ di modulo costante
2. moto rotatorio con velocità angolare ω
3. mantenere costante l'angolo tra $\vec{r}$ e l'asse di rotazione

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{V} = \frac{d\vec{OO'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} =$$

$$= \left[\frac{dx_{O'}}{dt}\cdot\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\cdot\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\cdot\hat{u}_z\right] + \quad \frac{d\vec{OO'}}{dt}$$

$$+ \frac{dx'}{dt}\cdot\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\cdot\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\cdot\hat{u}_{z'} + x'\cdot\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\cdot\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\cdot\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt} \rightarrow \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}_{x'} \qquad \frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} = \vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}}$$

formule di Poisson

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{V}' + \vec{\omega}\times\hat{u}_{x'}\cdot x' + \vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}\cdot y' + \vec{\omega}\times\hat{u}_{z'}\cdot z'$$

$$= \vec{V}' + \vec{\omega}\times\underbrace{(x'\cdot\hat{u}_{x'} + y'\cdot\hat{u}_{y'} + z'\cdot\hat{u}_{z'})}_{\vec{r}'}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\times(x'\cdot\hat{u}_{x'} + y'\cdot\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'})$$

$$\boxed{\vec{V} = \vec{V}_{O'} + \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'}$$

TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

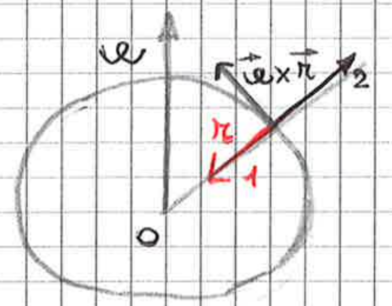
VELOCITA' DI TRASCINAMENTO

$$\vec{V}t = \vec{V} - \vec{V}' = \vec{V}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

è la differenza tra le velocità misurate nei 2 sistemi di riferimento

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

$$\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}}_{=\,0} \times \vec{r}\,' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$



① $\omega \times (\omega \times r)$

Forza centripeta → forza vera

② $\omega \times (\omega \times r)$

forza centrifuga → forza apparente

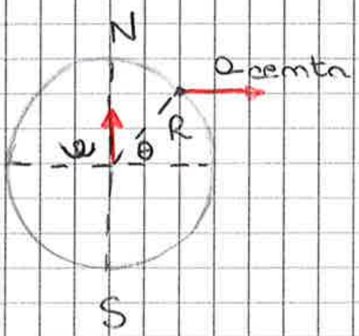
MOTO DELLA TERRA: conseguenze sull' accelerazione di gravità

$$\vec{g} = \vec{g}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}\,') + 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$$

$\vec{g}$ → acc. di gravità per un sistema inerziale

$\vec{g}\,'$ → acc. di gravità rispetto a un sistema terrestre

$\vec{v}\,'$ → velocità di un oggetto rispetto al sistema terrestre



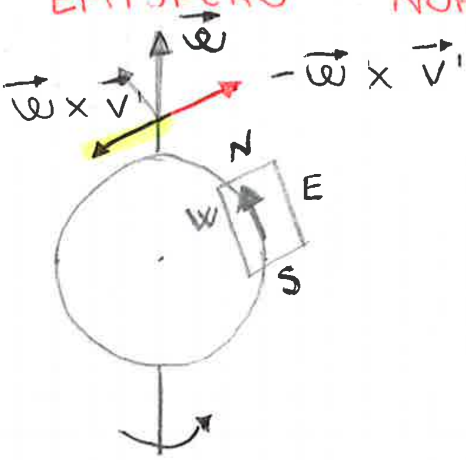
$$\vec{g}\,' = \vec{g} \underbrace{- \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}\,')}_{\text{forza centrifuga}} \underbrace{- 2\vec{\omega} \times \vec{v}\,'}_{\text{forza di coriolis}}$$

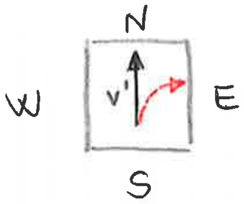
$$\underline{\vec a} = \underline{\vec a'} + \vec a_0 + \frac{d\vec\omega}{dt} \times \underline{\vec r'} + \vec\omega \times (\vec\omega \times \underline{\vec r'}) + \cancel{dt}$$

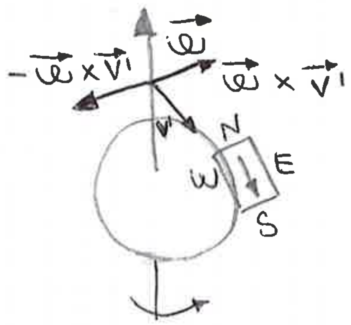
$$+ 2\vec\omega \times \underline{\vec v'}$$

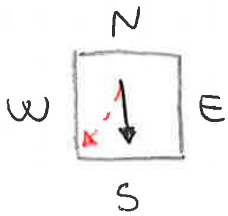
Sottolineo quelli NON inerziali

EMISFERO NORD

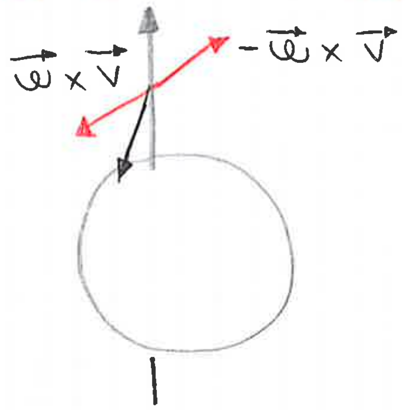


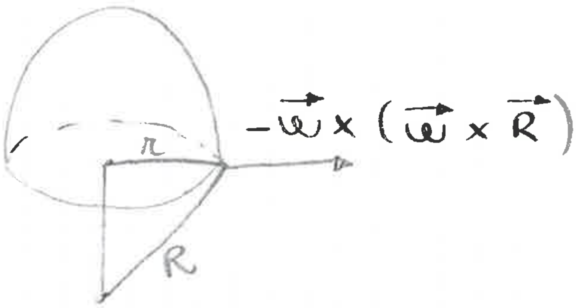






EMISFERO SUD

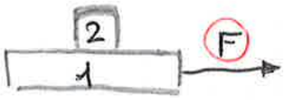




tolgo $\vec a_0$ perché c'è solo rotazione e NON traslazione

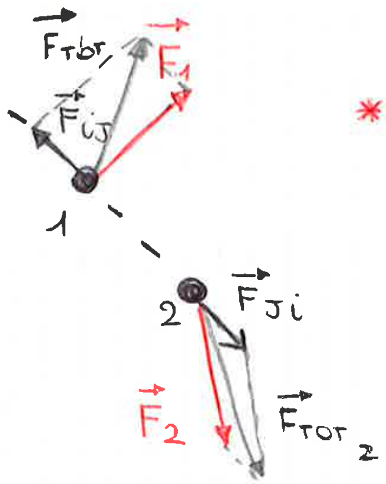
$$\vec a' = \vec a + \vec a_0 - \vec\omega \times (\vec\omega \times \vec r) - 2(\vec\omega \times \vec v')$$

$$\vec g' = \vec g + 0 + -$$



$$F - \mu_D \cdot N = m_1 a_1$$
$$\mu_D \cdot N = m_2 a_2$$

$\vec{F}$ è una forza esterna



* forze esterne

PER UNA SINGOLA PARTICELLA

Posizione	velocità	accelerazione
$\vec{r}_i$	$\vec{v}_i$	$\vec{a}_i$
Quantità di moto	Momento angolare	Energia cinetica
$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$	$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$	$E_{cin,i} = \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2}$

PER UN SISTEMA DI N PARTICELLE

Quantità di moto totale del sistema

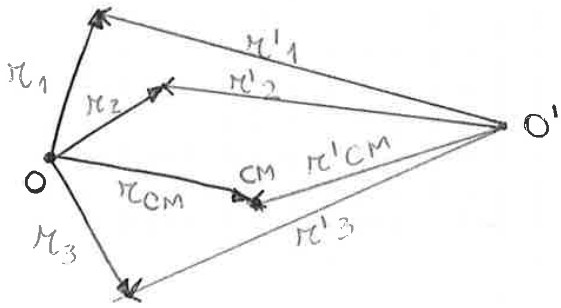
$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \vec{P}_t = \sum_i \vec{p}_i$$

Momento angolare totale

$$\sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{L}_i = \vec{L}$$

Energia cinetica totale

$$\sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{\,2} = E_{cin}$$



OO' → distanza tra le 2 origini

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 123 di 362

Equazione del moto del centro di massa

$$\vec{R}^{(e)} = \left(\sum_i m_i\right) \cdot \vec{a}_{CM} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

* Il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema su cui agisce la risultante delle forze esterne

* N.B. le forze esterne hanno come punto di applicazione le singole particelle nei vari punti i del sistema, ma l'effetto totale, facendone la somma è quello di produrre un'accelerazione del centro di massa

$$\vec{P} = m_1 \cdot \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = 0$$

$$m_1 = - m_2 \cdot \frac{V_2}{V_1}$$

misura dinamica della massa

URTO FRA DUE CORPI

$$\vec{P}_{prima} = \vec{P}_{dopo}$$

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

Nell' URTO agiscono solo forze interne

ESEMPI

[1] Quando un proiettile esplode in numerosi frammenti, il centro di massa del sistema costituito dai frammenti, segue la stessa traiettoria parabolica che avrebbe seguito il proiettile se non fosse ~~esploso~~ esploso

[2] Fenomeno del rinculo

* Un cannone di massa m_c spara un proiettile di massa m_0 a una velocità v_p.
* La quantità di moto del sistema è nulla perché il cannone e il proiettile hanno velocità nulla all'inizio
* La quantità di moto si conserva.

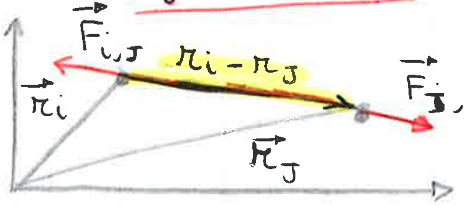
$$m_c V_c + m_0 V_0 = 0$$

$$m_c V_c = - m_0 V_0$$

N.B. NON posso togliere il termine $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(int)}$ perché le Fint sono moltiplicate per r_i e quindi $\sum F_i \neq 0$

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(esterne)} + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(interne)}$$

$$\boxed{\sum_i \vec{r}_i \times F_i = 0}$$



$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,J}^{(int)} + \vec{r}_J \times \vec{F}_{J,i}^{(int)}$$

forza interna su i dovuta a J

$$\vec{F}_{i,J} = -\vec{F}_{J,i}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{i,J} - \vec{r}_J \times \vec{F}_{i,J} = (\vec{r}_i - \vec{r}_J) \times \vec{F}_{i,J}$$

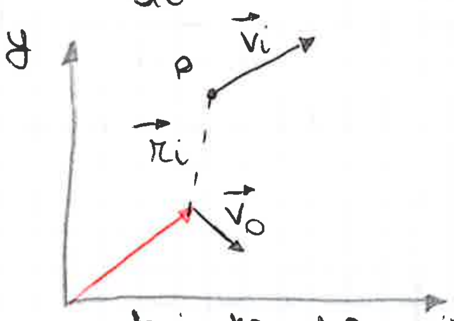
questi sono nella stessa retta d'azione quindi il prodotto vettoriale è 0

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \sum \vec{r}_i \times F_i^{(esterne)} = \vec{M}_{TOT}^{(esterne)}}$$

Polo si muove con una velocità

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{OP}_i}{dt} = \vec{V}_i - \vec{V}_0$$

$\vec{V}_0$ → velocità del polo



$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}$ — $r_i \times m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt}$

derivata del primo termine — derivata del 2° termine

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{V}_i - \vec{V}_0) \times m_i \cdot \vec{V}_i + \sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - \vec{V}_0 \times \sum_i m_i \cdot \vec{v}_i$$

$$\vec{r}'_{CM} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}'_i}{m_i} = 0 \quad \text{in } O'$$

questo perché il CM coincide con l'origine

$\sum m_i \cdot \vec{r}'_i = 0$ in **sistema di riferimento CENTRO DI MASSA**

~~deriva~~

la derivata di una quantità nulla è nulla

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \cdot \vec{r}'_i = \boxed{\sum m_i \cdot \vec{v}'_i = 0}$$

$$\boxed{\vec{p}' = 0}$$

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

Per 1 punto, polo O fermo	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
N punti, polo O fermo	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \vec{M}^{(e)}$
N punti polo O in moto con velocità V_0	$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{(e)} - \vec{V}_0 \times \vec{V}_{CM} \sum_i m_i$

Il momento angolare si conserva

① Sistema isolato, cioè le forze esterne sono nulle

(in questo caso si conserva anche la quantità di moto)

② Se il momento delle forze esterne è nullo rispetto al polo scelto

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

[Quando il polo è fisso o coincide con il centro di massa]

LE FORZE NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO del CM

- il sistema di riferimento CM è non inerziale

Accelerazione del singolo punto $\vec{a}'_i = \vec{a}_i - \vec{a}_{cM}$

- il singolo punto ha:

$$F'_i = m_i \vec{a}'_i = m_i (\vec{a}_i - \vec{a}_{O'}) = m_i(\vec{a}_i - \vec{a}_{cM})$$

$$m_i \cdot \vec{a}_i - m_i \cdot \vec{a}_{cM} = \vec{F}_i - m_i \cdot \vec{a}_{cM} =$$

$$= \vec{F}_i^{(e)} + \vec{F}_i^{(int)} - m_i \cdot \vec{a}_{cM}$$

Sommando su tutti i punti del sistema si ha:

$$\underbrace{\vec{R}^{(e)} - (\Sigma m_i) \cdot \vec{a}_{cM}}_{= 0} = \boxed{\Sigma m_i \cdot \vec{a}'_i} \boxed{= 0}$$

L'effetto delle forze esterne è quello di accelerare il centro di massa, per cui in O' non ne vedo l'effetto

SISTEMA DI RIFERIMENTO CM

MOMENTO ANGOLARE

Ho il momento angolare rispetto al CM (cioè con polo nel CM) ha lo stesso valore sia nel sistema inerziale sia nel sistema del CM non inerziale.

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \cdot (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \cdot \vec{v}_i'}_{} + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \underbrace{\left(\sum_i m_i \, r_i' \right)}_{0} \times \vec{v}_{CM}$$

Nel sistema di riferimento del CM

- la posizione del CM r'_{CM} è nulla
- la quantità di moto totale P' è nulla
- il momento angolare totale non è nullo e la sua derivata temporale vale:

$$\frac{dL'}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt} \left(\vec{r}_i' \times m_i \cdot \vec{v}_i' \right) = \vec{M}'^{(e)}$$

Cioè il teorema del momento angolare totale vale anche nel sistema (non inerziale) del CM purché come polo si assuma l'origine, cioè il CM.

IL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CM

$P' = 0$

$R^{(E)} = m \cdot \vec{a}_{CM} \rightarrow \sum_i m_i \cdot a'_i = 0$

$M^{(e)} = M' = M'^{(e)}$

$L = L'$

$\frac{dL'}{dt} = M'$

$$\vec{L}_0 = \vec{L}' + \vec{L}_{CM}$$

$\vec{L}_{CM}$: Contributo del moto "medio": moto del CM

$\vec{L}'$: contributo del moto interno, cioè il moto del sistema rispetto al CM

RIASSUMENDO ...

Per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa **NON** riassume le proprietà del sistema, a differenza di ~~quanto~~ ~~stabilito~~ ~~riguar~~ $\vec{P}$ e $\vec{R}^e$

→ il moto globale e il moto medio coincidono solo per quanto riguarda la quantità di moto (che è nulla nel moto interno) mentre per quanto riguarda $\vec{L}$ e $\vec{E}_k$ abbiamo contributi sia del moto medio che del moto interno

Determinare L, L', L_{cm}, E_k, E'_k, $E_{k,cm}$

1) 

$O \equiv CM$

Se il polo O coincide con il CM

CM ha velocità nulla

$$L_{CM} = M \cdot \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_{CM}$$

$$L = L' = 0$$

$$E_{k,cm} = 0 \qquad v_{cm} = 0$$

$$E_k = E'_k = \sum_i m_i \frac{1}{2}(\vec{v}_i)^2 = m \cdot \frac{1}{2} v^2 + m \cdot \frac{1}{2} v^2 = mv^2$$

2) 

$O \equiv CM$ CM ha velocità nulla

$$L = L' = \sum m_i \vec{r}_i\,' \times \vec{v}_i = \cancel{m_1 \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) \cdot (-v) + m_2 \left(\frac{d}{2}\right)}$$

$$= m_1 \cdot \left(-\frac{d}{2}\right) \cdot (-v) + m_2 \cdot \left(\frac{d}{2} \cdot v\right) =$$

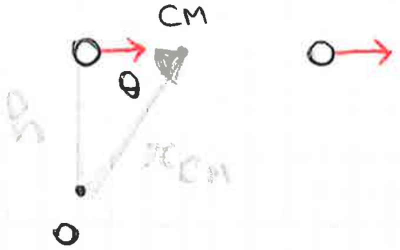
$$= mdv$$

$$E_k = \sum_i m_i \frac{1}{2}(v_i^2) = m \frac{1}{2} v^2 + m \frac{1}{2} v^2 = m v^2$$

$$E_{k,cm} = M \cdot \frac{1}{2} (v_{cm})^2 = 2m \cdot \frac{1}{2} V^2 = m V^2$$

$$E_k' = 0$$

d)



$h = r_{cm} \cdot \sin\theta$

θ angolo compreso tra $\vec{r}_{cm}$ e $\vec{V}_{cm}$

Il centro di massa si muove con velocità v e rimane in posizione intermedia tra i 2 punti

$L' = 0$ (la velocità è nulla nel sistema di riferimento CM)

$$L = L' + L_{CM}$$

$$\boxed{\vec{L}_{cm} = \vec{r}_{cm} \times M \vec{v}_{cm}} = r_{cm} \cdot V_{cm} \cdot \frac{h}{r_{cm}} \cdot 2m$$

$$|\vec{L}_{cm}| = h \cdot v \cdot 2m$$

URTO

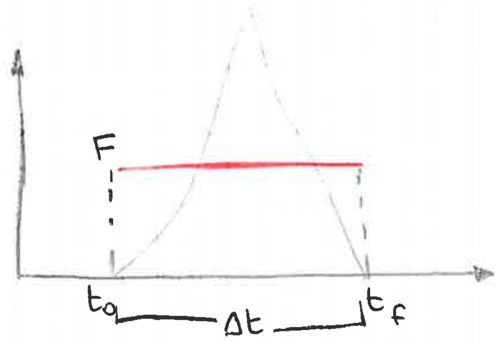
- Le forze che si manifestano durante l'urto sono FORZE INTERNE per il sistema formato dalle 2 MASSE

- L'urto avviene in un lasso di tempo trascurabile per cui si può considerare che la posizione dei corpi ~~non~~ vari

- forze in gioco sono impulsive
- Se la risultante delle forze esterne è nulla

$$R^{(e)} = 0 = \vec{P}_F - \vec{P}_i \qquad \boxed{\vec{P}_F = \vec{P}_i}$$

La quantità di moto finale è uguale alla quantità di moto iniziale



- $\vec{F}$ non è costante
- $\vec{F}$ agisce per un intervallo Δt molto piccolo
- $\vec{F}$ molto intensa e modifica la quantità di moto delle particelle
- Sono forze interne.

In assenza di forze esterne la q.d.m totale del sistema si conserva il ragionamento può essere non corretto, perché la forza può essere confrontabile con la forza di interazione dovuta all'urto

UNA REAZIONE VINCOLARE PUÒ ESSERE IMPULSIVA

(C) VARIAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA IN UN URTO

- energia potenziale $\boxed{\text{non}}$ varia
- non si può assumere a priori che non vari l'energia cinetica (non è detto che le forze siano conservative)

URTI ELASTICI: energia cinetica totale del sistema dopo la collisione è uguale all'energia cinetica totale prima dell'urto

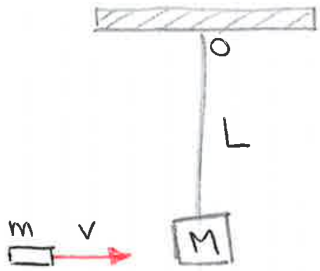
URTI ANELASTICI: energia cinetica totale del sistema NON si conserva dopo la collisione.

- Se gli oggetti rimangono attaccati dopo l'urto la collisione si dice completamente anelastica

IL PENDOLO BALISTICO

Veniva usato per misurare la velocità dei proiettili sparati da un'arma da fuoco

- consiste in un blocco di legno appeso al soffitto con una corda di lunghezza L
- il proiettile penetra nel blocco di legno e si ferma rispetto al blocco (urto completamente anelastico)
- blocco e proiettile, insieme, cominceranno ad oscillare come un pendolo
- misurando l'ampiezza (angolo?) delle oscillazioni, dalla conoscenza di massa del blocco, massa del proiettile e L, è possibile risalire alla velocità iniziale del proiettile



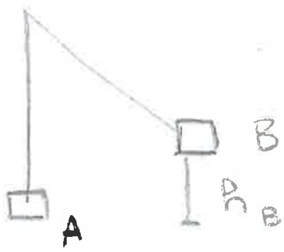
Durante l'urto CONSERVAZIONE Q.D.M.

$$(m_1 + m_2)\, v_f = m_1 \cdot v_{iniz,1}$$

Dopo l'urto CONSERVAZIONE ENERGIA

$$\overbrace{(m_1 + m_2) \cdot g \cdot h_B}^{E\ mecc\ in\ B} = \overbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) \cdot v_f^2}^{energia\ meccanica\ in\ A}$$

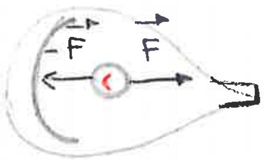
velocità nel punto A quando proiettile entra nel blocco



URTI

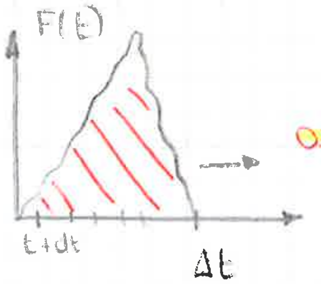
* Nell'intervallo di tempo dell'urto, si possono considerare nulle le forze esterne → sistema isolato

*



$\vec{F}(t) = \vec{F}(t) \cdot \hat{u}_x$

La forza dipende dal tempo



area sottesa è Δp

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}(t) \qquad 0 \le t \le \Delta t$$

tolgo il versore perché $\vec{F} = F \cdot \hat{u}_x$ $\vec{p} = p \cdot \hat{u}_x$

$$dp = \underline{F(t) \cdot dt}$$

→ impulso prodotto della forza per l'intervallino in cui divido il percorso

$$\Delta p = p(\Delta t) - p(0) = \int_{p(0)}^{p(\Delta t)} dp = \int_0^{\Delta t} F(t)\, dt$$

$$F_{media} = \frac{1}{\Delta t} \cdot \int_0^{\Delta t} F(t) dt \quad \rightarrow \quad \boxed{\Delta p = F_{media} \cdot \Delta t}$$

* Sulla pallina agisce una forza esterna che è la forza di gravità

$$\vec{F}^{(est)}_{media} \cdot \Delta t = \Delta p$$

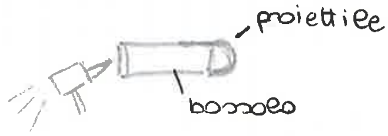
Ma si può osservare che

$$\vec{F}^{\,int}_{media} \gg \vec{F}^{\,(est)}_{media}$$

Durante Δt trascuro le forze esterne

$Q > 0$ Energia cinetica iniz < Energia cin. finale

PROCESSI ESOTERMICI Esempio: quando gli urti comportano reazioni chimiche o nucleari



il gas ad altissima pressione spinge il proiettile

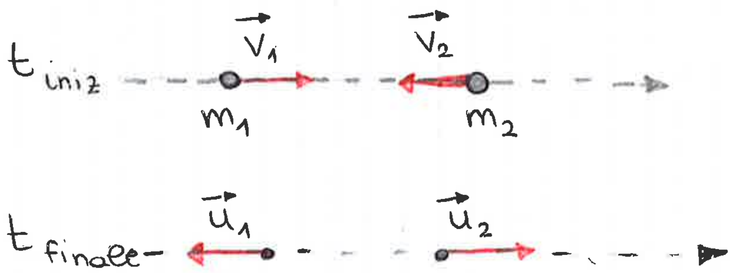
→ energia chimica si trasforma in energia cinetica

SISTEMA DI RIFERIMENTO CENTRO DI MASSA

$$\vec{P}' = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' + \ldots + \vec{p}_n' = 0 = \vec{q}_1' + \vec{q}_2' + \ldots + \vec{q}_n'$$

↓ la quantità di moto totale misurata dal CM prima e dopo l'urto è zero

Urto unidirezionale tra 2 particelle



$\vec{v}_1 = v_1 \cdot \hat{u}_x$
$\vec{v}_2 = v_2 \cdot \hat{u}_x$] velocità iniziali

$\vec{u}_1 = u_1 \cdot \hat{u}_x$
$\vec{u}_2 = u_2 \cdot \hat{u}_x$] velocità finali

$\cancel{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2}$

$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 \longrightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

applico la CONSERVAZIONE DELLA QDM

Se l'urto è ELASTICO ho un'ulteriore condizione:

① → $Q = 0$ $\quad E_k^{iniziale} = E_k^{finale}$

② → $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Queste 2 equazioni sono sufficienti per ricavare u_1 e u_2 (velocità finali)

(B) $m_1 = m_2$

$$\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0 \qquad \frac{2m_1}{m_1 + m_2} = 1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} u_1 = V_2 \\ u_2 = V_1 \end{cases}$$

la pallina 1 si muove con la velocità iniziale della 2, e la 2 si muove con la velocità della pallina 1

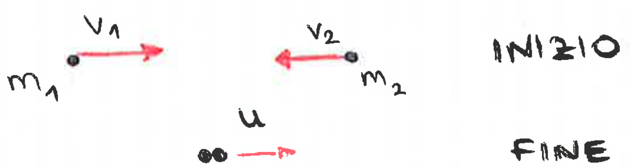
URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

$|Q|$ massimo → la differenza di E_k è massima

$$E_k = E_k^{(CM)} + E_k' = \frac{M}{2}|\vec{V}_{CM}|^2 + E'_k$$

Il moto del CM non varia con l'urto perché nell'urto agiscono solo forze interne
quindi l'energia cinetica del CM non varia.
Ciò che può ~~variare~~ variare è l'energia cinetica del moto interno
Quindi la massima energia cinetica che si può perdere è associata al moto interno
In un urto completamente anelastico non vi è più componente del moto interno perché le 2 particelle rimangono attaccate

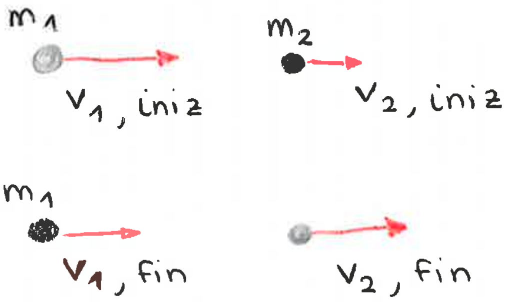
Posso trovare lo stato finale



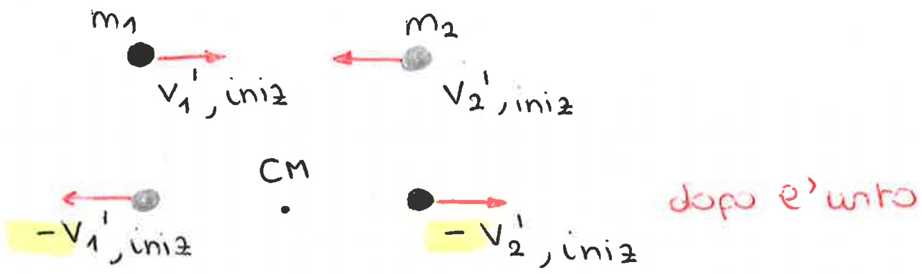
$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\cdot\vec{u}$$

$$\vec{u} = (m_1 V_1 + m_2 V_2) / m_1 + m_2$$

URTI ELASTICI



Sistema di riferimento inerziale



Sistema di riferimento CM

Sistema di RIFERIMENTO CM

$$m_1 v'_{1,iniz} = -m_2 v'_{2,iniz}$$

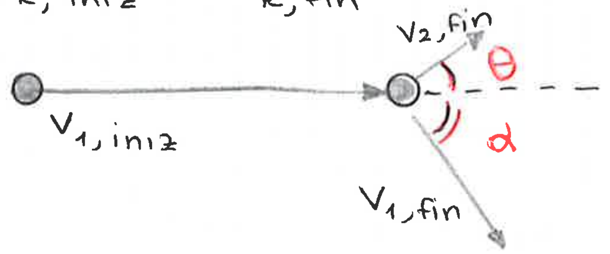
$$m_1 v'_{1,fin} = -m_2 v'_{2,fin}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_1 (v')^2_{1,iniz} + \frac{1}{2} m_2 (v'_2)^2_{iniz}}_{\text{en. cinetica iniziale}} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 \cdot (v'_{1,fin})^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot (v'_{2,fin})^2}_{\text{en. cinetica finale}}$$

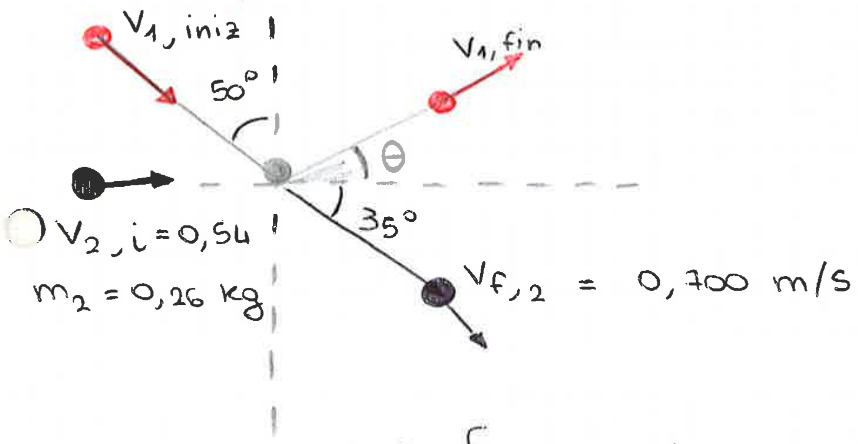
URTI ELASTICI IN 2D

$$P_{iniz} = P_{fin}$$

$$E_{k,iniz} = E_{k,fin}$$



ESEMPIO



$$\begin{cases} x: & m_1 \cdot V_{f,1} + m_2 \cdot V_{f,2} = m_1 \cdot V_{i,1} + m_2 \cdot V_{i,2} \\ y: & m_1 \cdot V_{f,1} + m_2 \cdot V_{f,2} = m_1 \cdot V_{i,1} + m_2 \cdot V_{i,2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x: & m_1 \cdot V_{f,1} \cdot \cos\theta + m_2 \cdot V_{f,2} \cdot \cos 35° = \dots \\ y: & m_1 \cdot V_{f,1} \cdot \sin\theta + m_2 \cdot V_{f,2} \cdot \sin 35° = \dots \end{cases}$$

~~MOMENTO ANGOLARE~~

CORPO RIGIDO

- formato da un insieme continuo di punti materiali
- la distanza tra i vari punti non varia
- il moto più generale del sistema rigido è la composizione tra un moto di traslazione e un moto di rotazione attorno a un opportuno asse (CM)
- le singole masse sono infinitesime

$$m_i \Rightarrow dm$$

DEFINIZIONE

Un corpo rigido è un oggetto; un sistema di punti materiali in cui le distanze relative NON cambiano a causa dell'azione delle forze interne

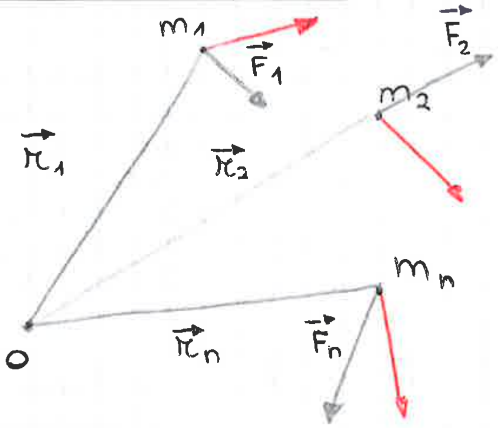
Le forze INTERNE (forze di coesione che mantengono invariate le distanze tra i punti) hanno le seguenti caratteristiche:

$$\vec{R}^{(interne)} = 0$$

$$\vec{M}^{(interne)} = 0$$

NON fanno lavoro $\quad \vec{W}^{(interne)} = 0$

MOTO DI UN SISTEMA DI PUN



$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{V}_1$$

$$\vdots$$

$$\vec{L}_n = \vec{r}_n \times m_n \cdot \vec{V}_n$$

$$\frac{d\vec{L}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = M_1$$

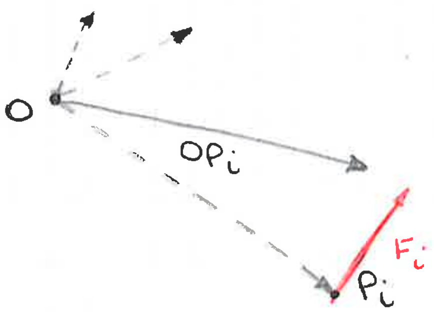
$$\frac{d\vec{L}_n}{dt} = \vec{r}_n \times \vec{F}_n$$

$$\vec{L}_{TOT} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_n$$ Momento angolare totale

$$\frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = \vec{M}_O$$

Momento risultante rispetto allo stesso punto O

PROPRIETÀ DEI SISTEMI DI FORZE APPLICATE A PUNTI DIVERSI



$$\vec{r}_i = OP_i$$
$$\vec{r}\,'_i = O'P_i$$
$$\vec{r}_i = (OO' + \vec{r}\,'_i)$$

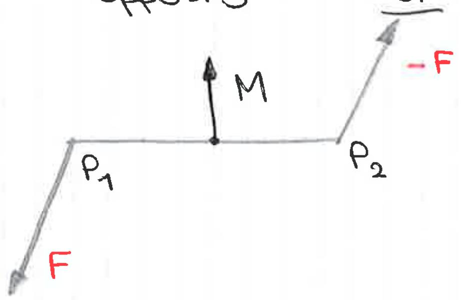
$$\vec{M}_O = \sum_i OP_i \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

rispetto a O

$$\vec{M}_O = \sum_i (OO' + \vec{r}\,'_i) \times \vec{F}_i = OO' \times \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}\,'_i \times \vec{F}_i =$$
$$= OO' \times \underbrace{\vec{R}}_{\text{Risultante forze}} + \vec{M}_{O'}$$

Il momento dipende dal polo a meno che la risultante non sia nulla

→ COPPIA DI FORZE (2 forze uguali di verso opposto NON aventi la stessa retta d'azione)



La distanza tra le 2 rette si chiama braccio della coppia, b

La risultante è nulla, quindi il momento non dipende dalla scelta del polo

Il momento è ortogonale al piano in cui giacciono le forze, la direzione è data

PURA ~~ROT~~ TRASLAZIONE

Tutti i punti del corpo rigido descrivono traiettorie uguali, con la stessa velocità $v = v_{CM}$

$\vec{P} = m \cdot \vec{v}_{CM}$ Si comporta come un punto materiale

$\vec{R}^{(esterne)} = m \cdot \vec{a}_{CM}$

$E_{cin} = \frac{1}{2} m v^2_{CM}$

$\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m \cdot \vec{v}_{CM}$

$$\begin{cases} E'_{cin} = 0 \\ \vec{L}' = 0 \end{cases}$$ → nella pura traslazione NON c'è movimento rispetto al CM

PURA ROTAZIONE

* Tutti i punti descrivono un moto circolare, le traiettorie sono archi di circonferenze che giacciono su piani paralleli tra loro e che hanno il centro sull'asse di rotazione
* Tutti i punti possiedono la stessa ω, che è parallela all'asse di rotazione

$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i$

* Moto di rotazione rispetto ad un asse costituito da tutti i punti del corpo che in un certo istante hanno $\vec{v} = \vec{0}$ (hanno velocità nulla)

asse di istantanea rotazione

DESCRIZIONE DEL MOTO DI UN CORPO RIGIDO NON È UNIVOCA

Consideriamo 2 punti P e Q di un corpo rigido in moto rototraslatorio. La velocità dei punti è:

$$\vec{V}_P = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OP}$$
$$\vec{V}_Q = \vec{V}_O + \vec{\omega} \times \vec{OQ}$$

$V = \underbrace{V_O}_{\text{velocità del sistema in moto}} + \underbrace{V'}_{\text{velocità misurata da O in mov.}}$

$$\vec{V}_P - \vec{V}_Q = \vec{\omega} \times \vec{QP} \longrightarrow \vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}$$

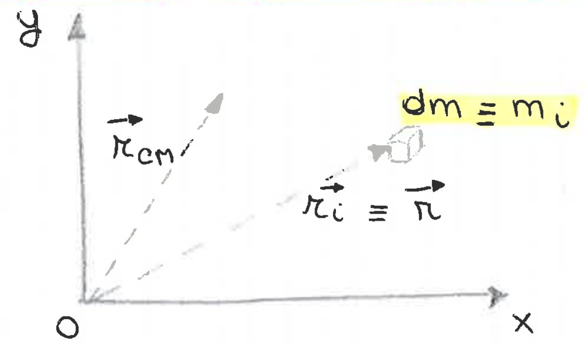
Il moto di P rispetto ad O è una rototraslazione, con velocità di traslazione V_O e velocità di rotazione $\vec{\omega} \times \vec{OP}$ attorno ad un asse di rotazione istantaneo nel punto O

NB La velocità angolare è sempre la stessa, cambia la velocità di traslazione (cioè dipende dall'asse istantaneo di rotazione)

$\rightarrow \boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times \vec{QP}}$ i punti ruotano intorno a Q, asse di rotazione

$\vec{V}_Q$: velocità dell'asse di rotazione

CENTRO DI MASSA DI UN CORPO RIGIDO



$$\vec r_{cm} = \frac{\sum_i m_i \cdot \vec r_i}{\sum_i m_i}$$

$$\boxed{\vec r_{cm} = \frac{\int \vec r \cdot dm}{\int dm}}$$

$dm = \rho \cdot dV$ con dV elemento di volume occupato da dm, e se lo supponiamo costante su V:

$$\underline{\vec r_{cm}} = \frac{\int_{vol} \vec r \rho \, dV}{\int_{vol} \rho \, dV} = \frac{\int_{vol} \vec r \, dV}{\int_{vol} dV} = \frac{\int_{vol} \vec r \cdot dV}{\text{Volume totale}}$$

MOMENTO DELLA FORZA PESO

Il momento della forza peso rispetto a un polo fisso (es origine dell' asse delle coordinate) è dato da:

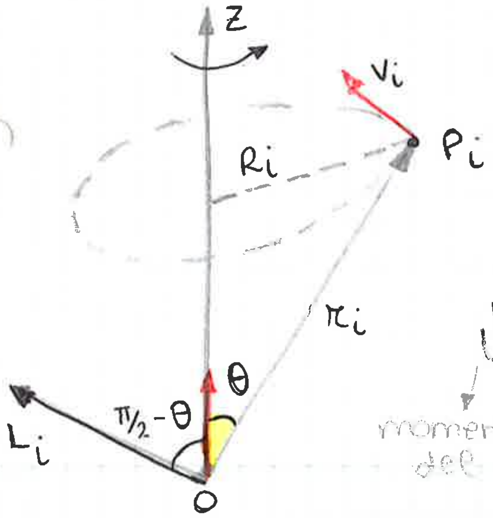
$$\vec M = \int \vec r \times \overbrace{\vec g \, dm}^{\vec F} = \left(\int \vec r \, dm\right) \times \vec g = m \vec r_{cm} \times \vec g = \cancel{M}$$

$$= \boxed{\vec r_{cm} \times m \cdot \vec g}$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

$$E_p = \int g \cdot h \cdot dm = g \int h \cdot dm = \underline{m g h_{cm}}$$

ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO AD UN ASSE FISSO



Asse di rotazione z.
Velocità angolare ω.
il polo sull' ~~asse~~ asse z

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i \rightarrow |\vec{L}_i| = m_i \cdot r_i \cdot v_i =$$

momento angolare del punto P_i

1 $$= m_i \cdot r_i \cdot \underbrace{R_i \omega}_{v_i}$$

- non c'è il sen perché $r_i \perp v_i$
- L_i è $\perp$ a v_i e r_i

La proiezione del momento angolare $\vec{L}_i$ sull' asse di rotazione z, ovvero il **momento angolare assiale**:

$$|L_{i,z}| = |L_i| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |L_i| \cdot \sin\theta_i =$$

$$= m_i \underbrace{r_i \sin(\theta_i)}_{R_i} R_i \omega = m_i R_i^2 \cdot \omega$$

Sommando su tutti i punti del corpo la 1 si ottiene il momento angolare totale del corpo che in generale non è parallelo nell' asse di rotazione. Se però ci si riferisce al momento angolare assiale (somma solo della componente z), si ha:

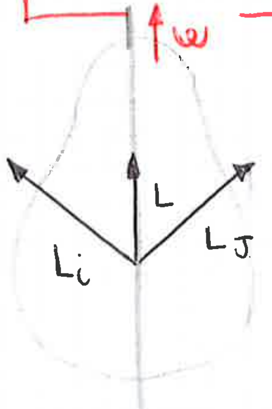
$$L_z = \sum |L_{i,z}| = \left(\sum_i m_i R_i^2\right) \cdot \omega = I \cdot \omega$$

ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE PRINCIPALE D' INERZIA

Se la rotazione avviene lungo uno degli assi principali di inerzia, tali per cui per ogni L_i c'è un L_j simmetrico rispetto all'asse così che la loro somma vettoriale è parallela all'asse

$$|L_{i\perp}| = |L_i| \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_i\right) = |L_i| \cdot \cos(\theta_i) = m_i r_i \cos(\theta_i) R_i \cdot \omega$$

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}} \qquad |\vec{L}| = L_z \qquad L_\perp = 0$$



* In un corpo rigido esistono sempre 3 assi (assi principali di inerzia) tali per cui se il corpo è posto in rotazione attorno a questi assi il momento angolare è parallelo all'asse di rotazione e quindi alla velocità angolare ω.

Esempio sugli effetti del non parallelismo tra L e ω

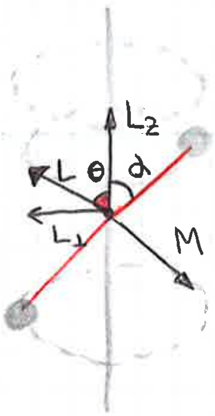
$m_i R_i^2 + m_1 R_i^2$

$L_z = 2m(r\sin\alpha)^2 \cdot \omega = 2mR^2\omega$ costante

$L_\perp = \cancel{2mR\omega\sin\alpha} \; 2mrR\omega\cos\alpha$ variabile in direzione

Calcolo del momento della forza:

$|\vec{M}| = L_\perp \omega = 2mrR\omega^2\cos\alpha$



* Le forze peso non contribuiscono al momento, mentre le forze centripete ciascuna di modulo $m\omega^2 R$ sono ora una coppia di braccio $2r\cos\alpha$

* Quando le masse non sono disposte simmetricamente esiste un momento esterno responsabile della variazione di $\vec{L}$ nel tempo

EQUAZIONI DEL MOTO

(A) Caso $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

$\vec{L} = \vec{L}_\parallel = I \cdot \vec{\omega}$ posto fuori I perché costante

$\vec{M}^{(est)} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d(I\cdot\vec{\omega})}{dt} = I\dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = I_z \cdot \vec{\alpha}$ accelerazione angolare

$$\boxed{\vec{M}^{(est)} = I \cdot \vec{\alpha}}$$

$$\boxed{\vec{F}^{(est)} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}_{CM}}$$

$\alpha = \dfrac{M}{I_z}$

$\omega = \omega_0 + \int_0^t \alpha\, dt$ → velocità angolare nel tempo

$\theta = \theta_0 + \int_0^t \omega\, dt$ → posizione angolare nel tempo

[Se NON c'è forza esterna il modulo e la direzione di $\vec{L}$ si mantiene costante

EQUAZIONI DEL MOTO PER UN CORPO RIGIDO IN ROTAZIONE ATTORNO AD UN ASSE FISSO

CASO GENERALE : L non è $\parallel \omega$

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \alpha \longrightarrow \boxed{M_z = I_z \cdot \alpha}$$

sull'asse di rotazione

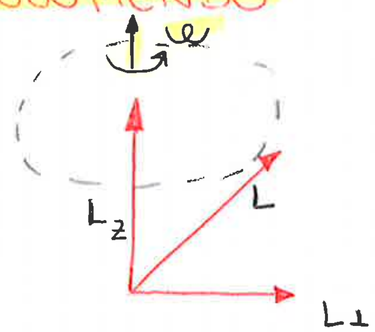
Cioè vale $\boxed{\text{solo}}$ per la componente assiale e poi rimane l'altra componente, che non porta a variazioni di α ma è responsabile del moto di precessione ed è dovuto alle reazioni vincolari:

$$\frac{dL_\perp}{dt} = M_\perp \longrightarrow$$

l'altra componente NON porta a variazioni di α

$$\frac{dL_\perp}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot \frac{\vec{L}_\perp}{\omega} + \vec{\omega} \times \vec{L}_\perp$$

RIASSUMENDO

① 

- La componente del momento angolare rispetto all'asse di rotazione è proporzionale alla velocità angolare e dipende tramite la componente I_z dalla forma e dalla posizione dell'asse rispetto al corpo $L_z = \omega I_z$

② Il momento angolare di un corpo rigido che ruota rispetto ad un asse non è, in generale, parallelo all'asse di rotazione e (L) ruota attorno a questo insieme al corpo

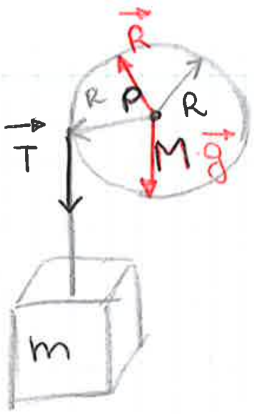
→ L_z può variare solo in modulo e non in direzione, è proporzionale a ω e non dipende dalla scelta del polo

→ $L_\perp$ varia in direzione, può variare in modulo e dipende dalla scelta del polo

→ L è parallelo a ω quando l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia

PROBLEMA

Consideriamo una carrucola messa in rotazione attorno al proprio asse da un filo inestensibile alla cui estremità libera è appeso un corpo di massa m. La carrucola ha massa M e raggio R.



~~P'~~

IL POLO LO SCELGO SUL VINCOLO per annullare $\vec{R}$ e $m\vec{g}$

Possono essere studiati separatamente i ~~corpi~~ moti dei 2 corpi, tenendo presente che agli estremi della corda che è inestensibile devo avere la stessa tensione e la stessa accelerazione

$$\begin{cases} mg - T = ma & \text{equazione del moto per } m \\ \underbrace{RT}_{M^{(est)}} = I\alpha = \underbrace{\tfrac{1}{2}MR^2}_{I \text{ per il disco}}\alpha & T \text{ è l'unica } F_{est} \text{ sul disco} \\ a_T = \alpha \cdot R \\ a_T = a \quad (\text{accelerazione di } m) \end{cases}$$

CALCOLO DEL LAVORO ESERCITATO SUL CORPO ~~RIGIDO~~ RIGIDO

$$W = \Delta E_{cin} = \frac{1}{2} I_z \omega^2_{fin} - \frac{1}{2} I_z \omega^2_{ini}$$

$$= \frac{1}{2} I_z \left(\omega^2_{fin} - \omega^2_{iniz} \right)$$

forma infinitesima del lavoro

derivo dell'energia cinetica

$$dW = dE_{cin} = \cancel{I_z \omega d\omega} \; \underbrace{I_z \omega d\omega}_{\text{derivata di } \frac{1}{2} I_z \omega^2} = I_z \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \alpha \, dt$$

ω $d\omega$

M_z

$$= I_z \alpha d\theta = M_z \, d\theta$$

In forma finita $\rightarrow$ $\boxed{W = \int_0^\theta M_z^{(est)} \cdot d\theta}$

N.B. il L non è $M \cdot \theta$ ma l'integrale di $M \, d\theta$

ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA RIGIDO IN ROTO-TRASLAZIONE

Corpo in moto roto-traslatorio con velocità angolare ω calcolata rispetto ad un asse passante per il cM e velocità del centro di massa $\vec{V}_{cM}$

$$\vec{v}_i = \vec{V}_{cM} + \omega \times \vec{r}_i'$$

distanza della particella dall'asse di rotazione che è nel cM

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \cdot \left(\vec{V}_{cM} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2 =$$

$$\cancel{= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}^2_{cM} + 2\vec{V}_{cM} \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right) + \right.}$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}^2_{cM} + \underbrace{2\vec{V}_{cM} \cdot \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)}_{2\vec{V}_{cM} \cdot \sum \vec{\omega} \times m_i \vec{r}_i' = 0} + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_i' \right)^2 \right)$$

MOMENTO D'INERZIA

Nello studio delle rotazioni è bene il momento d'inerzia gioca un ruolo analogo a quello della massa nella legge di Newton

$$\vec{M} = I\vec{\alpha} \qquad \vec{F} = m\vec{a}$$

Differenza tra massa e momento d'inerzia

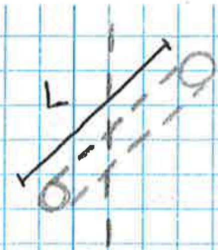
massa → proprietà univoca associata ad un corpo

momento d'inerzia → dipende dall'asse di rotazione

$$I = \int R^2 \, dm = \int \rho R^2 \, dV = \int \rho \overbrace{(x^2+y^2)}^{R^2} dV$$

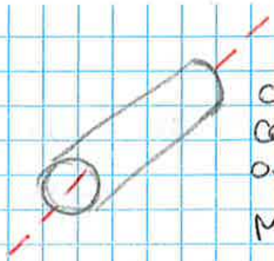
* il momento d'inerzia è una quantità additiva, quindi il momento d'inerzia di un corpo può essere calcolato come la somma di momenti d'inerzia di parti del corpo rispetto allo stesso asse

~~solid rod, asse centrale~~



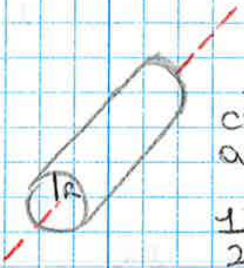
Solid rod
asse centrale

$\frac{1}{12} M \cdot L^2$



cilindro
cavo
asse centrale

MR^2

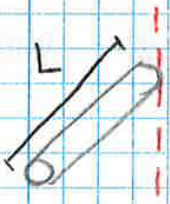


cilindro pieno
asse centrale

$\frac{1}{2} MR^2$

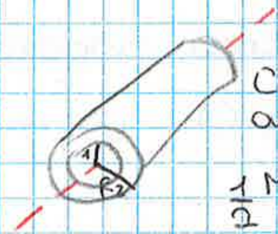
Sfera piena
ogni diametro

$\frac{2}{5} MR^2$



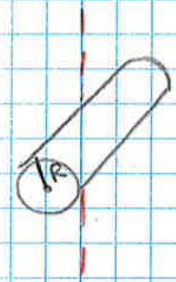
Solid rod
asse alla
fine

$\frac{1}{3} ML^2$



Cilindro cavo
asse centrale

$\frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$



Cilindro
pieno
diametro
passante
per il centro

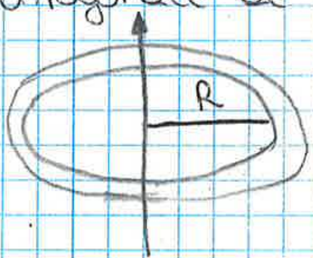
$\frac{1}{4} MR^2 + \frac{1}{12} ML^2$

Sfera cava
ogni diametro

$\frac{2}{3} MR^2$

Esempio

Momento d'inerzia di un anello omogeneo di massa m e raggio R, rispetto ad un asse z passante per il centro dell'anello, ortogonale al piano dell'anello

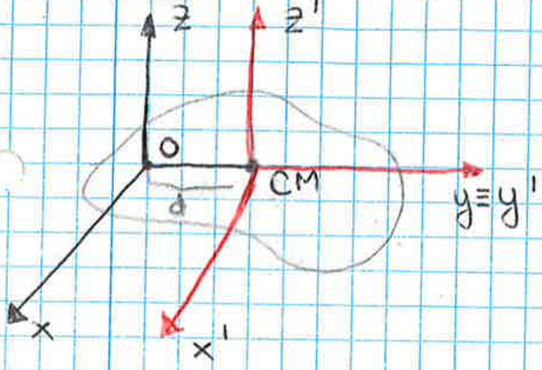


La densità è lineare

$$I = \int R^2 dm = \int \rho R^2 d\ell =$$

$$= \rho R^2 \int d\ell = \rho R^2 \cdot \underbrace{2\pi R}_{\int d\ell \text{ AREA}} = m R^2$$

$\rho \cdot A$



$$x = x'$$
$$y = y' + d$$
$$z = z'$$

Il momento d'inerzia rispetto a un punto generico P_i rispetto all'asse z è dato da:

$$I = m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\overbrace{\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}^{I} = \sum_i m_i (x_i'^2 + (y_i' + d)^2) =$$

$$= \overbrace{\sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}^{I_{CM}} + \underbrace{\sum_i m_i d^2}_{md^2} + \underbrace{2d \sum_i m_i y_i'}_{= 0}$$

?

$$y_{CM} = \frac{\sum_i m_i y_i'}{\sum_i m_i} = 0$$

In rosso c'è l'asse I_{CM}, passante per il centro di massa

In nero l'asse generico

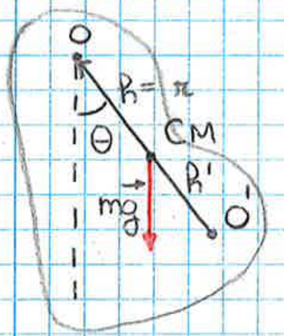
$$\underbrace{\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)}_{I} = \underbrace{\sum_i m_i (x_i'^2 + y_i'^2)}_{I_{CM}} + \underbrace{\sum_i m_i d^2}_{md^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 191 di 362

PENDOLO COMPOSTO

(o pendolo fisico) ogni corpo rigido che possa oscillare per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il suo CM.

~~Momento della~~



Momento della forza

$$\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = m_{Tot} \vec{r}_{CM} \times \vec{g}$$

$$|\vec{M}| = |\vec{r}_{CM} \times m_{TOT} \vec{g}| = \underbrace{-h}_{r} \cdot \underbrace{m_{TOT} \cdot g}_{F} \underbrace{\sin\theta}_{\sin \text{ angolo compreso}}$$

Equazione del moto

$$\underbrace{\frac{dL_z}{dt}}_{M_z} = I_z \alpha = I_z \cdot \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\alpha} = -h m_{TOT} g \sin\theta$$

Approssimazione per angoli piccoli

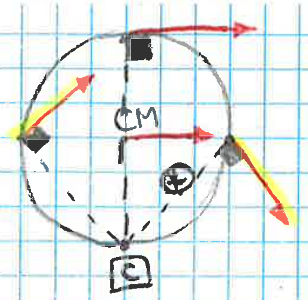
$$\cancel{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m_{TOT} g h}{I_z} \cdot \theta = 0}$$

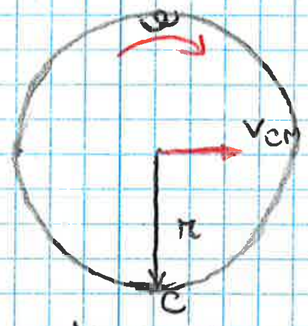
per angoli piccoli θ ??

$$I_z \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -h m_{TOT} g \sin\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{-h m_{TOT} g \sin\theta}{I_z} \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{h m_{TOT} g \sin\theta}{I_z} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{m_{TOT} g h}{I_z} \cdot \theta = 0$$





Un moto di puro rotolamento può essere visto come un moto rotatorio del corpo che nell'istante infinitesimo dt ruota con velocità ω attorno all'asse passante per $\boxed{C}$

* Velocità del punto ha direzione ortogonale alla congiungente passante per l'asse di rotazione e il punto ⊛

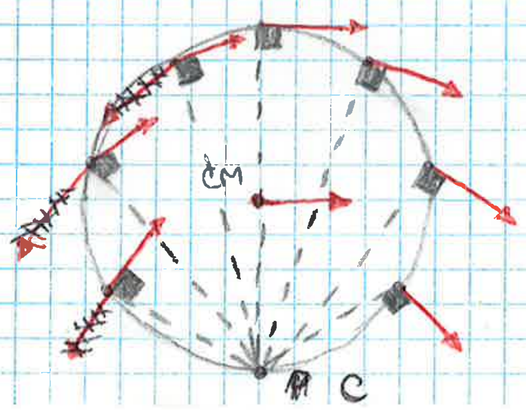
* In un punto solidale con il pavimento

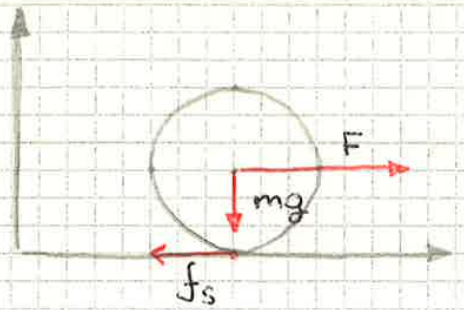
$$\underbrace{\vec{V}_P}_{\text{velocità di un punto sul suolo}} = \underbrace{\vec{V}_O}_{\text{velocità del CM}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{OP}}_{\text{velocità calcolata dal CM } \omega \times r} \rightarrow \vec{V}_P = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

v'

$$\underbrace{\vec{V}_{\boxed{C}} = 0}_{\text{il punto a contatto con la superficie ha velocità nulla}} \rightarrow 0 = \vec{V}_{CM} + \vec{\omega} \times \vec{r} \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{V}_{CM} = -\omega \times \vec{r}}$$





$$\begin{cases} F - f_s = m \cdot a_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{f_s} = I \vec{\alpha} \rightarrow f_s \cdot R = I \cdot \underbrace{\frac{a_{CM}}{R}}_{\alpha}$$

$$\begin{cases} f_s \cdot R = I \cdot \dfrac{a_{CM}}{R} \\ F - f_s = m \cdot a_{CM} \end{cases}$$ 2 equazioni in 2 incognite

$$\boxed{a_{CM} = \alpha \cdot R} \rightarrow$$ Condizione di puro rotolamento

$$f_s = \frac{I \cdot a_{CM}}{R^2}$$

$$F - \frac{I \cdot a_{CM}}{R^2} = m \cdot a_{CM} \rightarrow a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}}$$

Imponendo la disequazione $\boxed{f_s \le f_s^{MAX} = \mu_s \cdot N}$ trovo le condizioni per il puro rotolamento (F_{max}, R_{max} ...)

è l'equazione limite dell'attrito statico

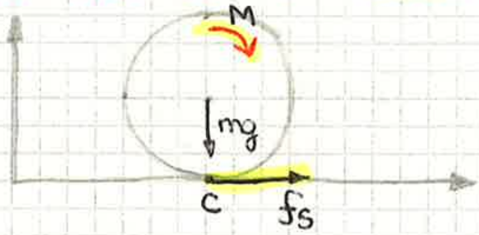
$$f_s = \frac{F}{\left(\frac{R^2}{I} m + 1\right)} \rightarrow f_s \le \mu_s \cdot N$$

$$\frac{F}{\left(\frac{R^2}{I} \cdot m + 1\right)} \le \mu_s \cdot m \cdot g$$

$$\boxed{F \le \mu_s m g \cdot \left(\frac{R^2}{I} \cdot m + 1\right)}$$

APPLICATO UN MOMENTO MOTORE M

2



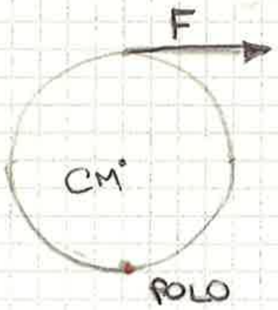
FORZE $\begin{cases} f_s = m \cdot a_{CM} \\ N - mg = 0 \end{cases}$

MOMENTI $\left\{ \vec{M} + \overbrace{\vec{r} \times \vec{f_s}}^{\text{momento di } f_s} = I \vec{\alpha} \right.$

Equazioni del moto

$$\begin{cases} f_s = m a_{CM} \\ M - R f_s = I\alpha = I \dfrac{a_{CM}}{R} \end{cases}$$

R cade su f_s nel verso opposto rispetto a M quindi lo prendo con segno opposto



N.B. Se non prendo il polo nel CM devo cambiare il momento d'inerzia

$$|\vec{M}| = |2R \cdot F| = I \cdot \alpha$$

$$I = I_{CM} + M \cdot \underbrace{d^2}_{\text{distanza tra CM e polo}} = I_{CM} + M \cdot R^2$$

N.B. ① La forza d'attrito è nello "verso" ~~del momento~~ stesso "verso" della forza d'attrito

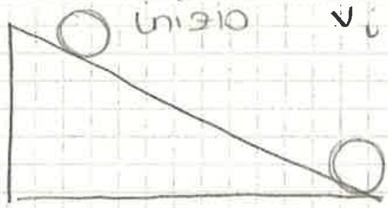
② In assenza di forze e momenti si ha una roto-traslazione uniforme ($\vec{v}$ e $\vec{\omega}$ costanti, $\vec{a}_{CM}$ e $\vec{\alpha}$ nulle)

③ La forza di attrito STATICO NON compie lavoro

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 362

ESERCIZIO Cilindri che ruotano 3

Consideriamo 2 cilindri che ruotano senza strisciare



CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + mgh$$

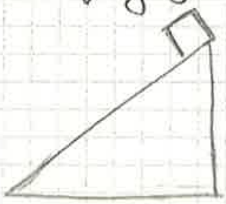
$$\cancel{\frac{1}{2} m v_i^2} + \cancel{\frac{1}{2} I \omega_i^2} + mgh_i = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 + \cancel{mgh_f}$$

$$mgh_i = \frac{1}{2} m v_f^2 + \frac{1}{2} I \omega_f^2 \quad \omega_f \rightarrow \frac{v_f}{R}$$ perchè puro rotolamento

$$v_f = \sqrt{\frac{2mgh_0}{m + I/r^2}}$$ velocità dipende da I

→ Il cilindro con minore inerzia avrà una maggiore velocità finale traslazionale

$v_f = \sqrt{2gh_0}$ $\qquad$ $v_f = \sqrt{\frac{2mgh_0}{m + I/r^2}}$



↓

Ha maggiore velocità finale perchè non ruota

→ La parte rotazionale sottrae energia all'energia meccanica.

TRASFERIMENTO DI IMPULSI E MOMENTO ANGOLARE SU UN CORPO RIGIDO 4

Nel caso di corpi rigidi spesso sono presenti vincoli (es asta vincolata o oggetto appoggiato su un piano). In questo caso le reazioni vincolari possono essere impulsive e la q.d.m potrebbe non conservarsi

Se si calcola il momento angolare prendendo il polo nel vincolo (per avere braccio nullo) si può annullare il momento angolare e avere conservazione della q.d.m.

Impulso angolare e momento dell'impulso

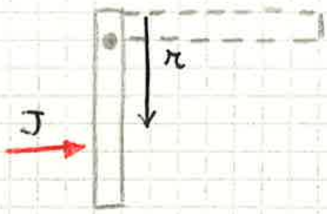
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \vec{F}dt = d\vec{p} \rightarrow \vec{J} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \Delta\vec{p}$$

IMPULSO ANGOLARE

$$\vec{M}dt = d\vec{L} \rightarrow \int_{t_0}^{t_1} \vec{M}dt = \int_{t_0}^{t_1} (\vec{r} \times \vec{F})dt = \vec{r} \times \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}dt = \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L} \rightarrow \text{MOMENTO DELL'IMPULSO}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = \Delta p \iff \int_{t_0}^{t_1} M dt = \Delta L$$

$$\Delta\vec{L} = I\omega_f - I\omega_I = \vec{r} \times \vec{J}$$



Pendolo composto: asta di lunghezza L e massa m vincolata in un estremo. Un ~~mag~~ impulso orizzontale J, ortogonale all'asta.
Quale valore deve avere e dove deve essere applicato per far compiere all'asta una rotazione di 90°

CORPO RIGIDO LIBERO

È un corpo rigido in cui nessun punto è vincolato.

VALGONO le 2 EQUAZIONI

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{R} &= m \cdot \vec{a}_{CM} \\ \vec{M} &= \frac{d\vec{L}}{dt}\end{aligned}}$$

MOTO DEL CM

MOTO RISPETTO AL CM

Se rispetto al CM $\vec{M} = 0$, allora $\vec{L} =$ costante.
Si ha $\omega =$ costante solo se la rotazione avviene attorno ad un asse principale d'inerzia

~~LEGGI DI CONSERVAZIONE DI UN CORPO RIGIDO~~

ASTA NON VINCOLATA $\quad V_{CM} = \dfrac{J}{m}$

$$\vec{d} \times \vec{J} = \vec{L}_{CM} = I_{CM}\vec{\omega} = \frac{1}{12} m \ell^2 \vec{\omega}$$

Dopo l'impulso, l'asta continua a ruotare con velocità ANGOLARE COSTANTE mentre il CM percorre una traiettoria parabolica nel piano verticale se soggetta alla forza peso

EQUAZIONE DEL MOTO DEL CM

$$m \cdot \vec{a}_{CM} = m\vec{g}$$

$$V_{CM}(0) = \frac{J}{m}$$

CONDIZIONE INIZIALE
(subito dopo l'impulso)

URTI TRA CORPI RIGIDI (e punti materiali)

① Energia cinetica (totale) costante
si conserva solo se l'URTO è ELASTICO

② Se agiscono solo forze interne o quelle esterne non sono impulsive si conserva la quantità di moto totale

③ Se c'è vincolo non si conserva la q.d.m

$$\sum \vec{F}^{est} = \frac{d\vec{p}}{dt} \neq 0$$ perché c'è la reazione vincolare del vincolo che agisce quando c'è l'impulso

④ Se rispetto ad un polo fisso il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, allora si conserva il momento angolare rispetto a quel polo

$$\sum \vec{M}^{est} = \frac{d\vec{L}_{TOT}}{dt} = 0$$

⑤ Se ci sono SOLO forze interne

solo forze interne	$\Delta\vec{P} = 0$	$\Delta\vec{L} = 0$
F. esterne non impulsive	$\Delta\vec{P} = 0$	$\Delta\vec{L} = 0$
Forze esterne impulsive	$\Delta\vec{P} = \vec{J}$	$\Delta\vec{L} = \vec{J}_{angolare}$

Se ci sono solo forze INTERNE il momento angolare si conserva sempre indipendentemente dalla scelta del polo

~~$V_{CM} = \sum V_i m_i$~~

* Dalla conservazione della q.d.m

$$m_2 \vec{V} = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM}$$

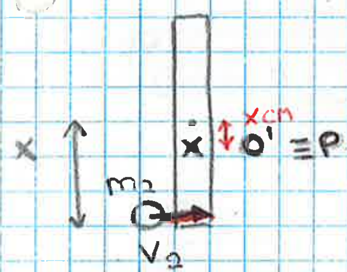
$$\vec{V}_{CM} = \frac{m_2}{(m_1+m_2)} \cdot \vec{V}$$

CM del sistema pallina - asta

All' inizio l'asta è zero quindi l'unica velocità iniziale è quella della pallina

* Dalla conservazione del momento angolare, assumo come polo il CM del sistema asta - pallina

PRIMA DELL' URTO



$$L'_{prima} = \vec{r}_2{}' \times m_2 \vec{V}_2$$
$$= (x - x_{CM})\, m_2 V_2$$

DOPO L' URTO

$$L'_{dopo} = I\omega$$

$$I = I^{sb}_{CM} + m_1 d_1^2 + \underbrace{m_2 d_2^2}_{\text{inerzia della pallina}}$$
$$= \frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

$$\underbrace{(x - x_{CM}) m_2 V}_{L'_{prima}} = \underbrace{I\omega}_{L'_{dopo}}$$

N.B.

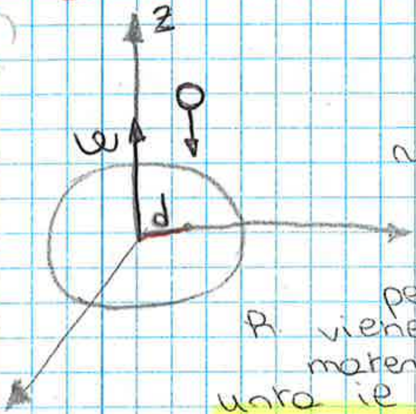
$$I = \underbrace{I_{CM} + m_1 d_1^2}_{\text{sbarra}} + \underbrace{m_2 d_2^2}_{\text{pallina}}$$
$$d_1 = x_{CM}$$
$$d_2 = x - x_{CM}$$

$I = I_{sbarra} + I_{pallina}$

Dalla conservazione del momento angolare, assumendo come polo il CM

$$L_{prima} = L_{dopo}$$
$$(x - x_{CM}) m_2 V_2 = I\omega$$
$$\omega = \frac{(x - x_{CM}) \cdot m_2 \cdot V_2}{\frac{1}{12} m_1 \ell^2 + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2}$$

URTO ANELASTICO PARALLELO ALL'ASSE DI ROTAZIONE



velocità lungo x = ω·d

Un disco di raggio R e massa m1 ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse passante per il centro. Da un'altezza R viene lasciato cadere un punto materiale di massa m2. Il punto urta il disco ad una distanza d dal centro

COMPONENTE DELL'IMPULSO NEL PIANO ORIZZ.

$$J_1 = \Delta p_x = m_2 v_x' = m_2 d \omega'$$

COMPONENTE DELL'IMPULSO NEL PIANO VERTICALE

$$J_2 = m_2 \cdot \underbrace{\sqrt{2gR}}_{\text{velocità } y}$$

$$J = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} = m_2 \sqrt{d^2\omega^2}$$

$$\underbrace{I\omega}_{\text{momento angolare iniziale}} = \underbrace{(I + m_2 d^2)\omega'}_{\text{momento angolare finale}}$$

URTO ELASTICO FRA UN PUNTO MATERIALE E UN'ASTA VINCOLATA

→ ma non si conserva la q.d.m perché c'è un vincolo

→ si conserva il momento angolare perché metto il polo nel vincolo

→ si conserva l'En. cinetica perché l'urto è elastico

STATICA

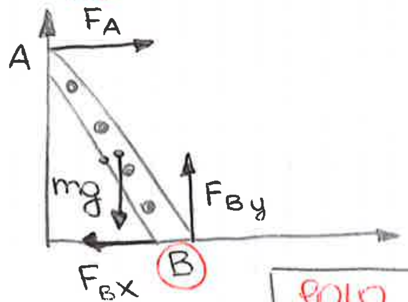
Le condizioni di equilibrio statico per un corpo rigido è :

$$\vec{R}^{est} = 0 \qquad \vec{M}^{est} = 0$$

Con $\vec{R} = 0 \rightarrow V_{CM} = 0$

Con $\vec{M} = 0 \rightarrow \omega = 0$

PROBLEMA



$\vec{R}^{est} = 0$

$$\begin{cases} F_A = F_{Bx} \\ mg = F_{B,y} \end{cases}$$

$\boxed{\text{POLO IN B}}$ $\vec{M}^{est} = 0$

$$\begin{cases} F_A \cdot \ell \cdot \cos\theta = mg \frac{\ell}{2} \sin\theta \end{cases}$$

preso il polo in B

N.B. Prendi il polo dove vengono applicate più forze

RIEPILOGO

- il moto più generale per un corpo rigido è rototraslatorio. Nelle traslazioni tutti i punti hanno lo stesso moto

ENERGIA CINETICA $E_k = \frac{1}{2} m V_{CM}^2$

MOMENTO ANGOLARE $\vec{L} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{V}_{CM}$

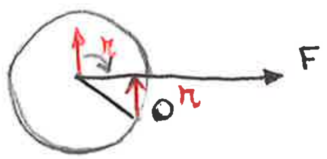
- Nella rotazione tutti i punti ruotano con la stessa velocità angolare attorno all' asse di rotazione parallelo a $\vec{\omega}$

~~xxxx~~ SEGNO DEL MOMENTO

① Disegna i vettori perpendicolari (braccio ⊥ forza)

② metto r nel punto di applicazione della forza

③ vedo come r cade su F (senso orario o senso antiorario)



r cade su F in senso orario

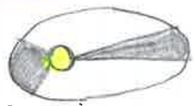
$$g : a = \frac{1}{R_T^2} : \frac{1}{R_{TL}^2}$$

Ne ~~deduce~~ deduce che le 2 accelerazioni stanno tra loro, nello stesso rapporto degli inversi dei quadrati delle distanze

LEGGI DI KEPLERO

① Tutti i pianeti descrivono attorno al Sole delle orbite di forma ellittica. Il Sole occupa uno dei 2 fuochi, comune a tutte le ellissi.

② Il raggio vettore di un pianeta ossia il segmento che congiunge il centro del sole con quello del pianeta copre aree uguali in tempi uguali. Velocità areale è costante



③ Il quadrato dei periodi di rivoluzione dei pianeti è proporzionale al cubo dei semiassi maggiori delle loro orbite

$$\boxed{T^2 = k \cdot r^3}$$

Conseguenze delle leggi di Keplero per orbite ~~[illegible]~~ circolari

II LEGGE DI KEPLERO

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m} \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m r^2} = \text{COSTANTE}$$

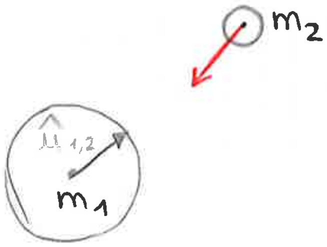
Essendo costanti sia il momento angolare L, sia il raggio vettore r si ha che la velocità angolare è costante, ovvero si esercita una forza puramente centripeta (NO componente tangenziale

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Intuizione di Newton: questa legge vale per qualsiasi coppia di masse sempre con la stessa costante di attrazione gravitazione

$$\boxed{\vec{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot \vec{u}_{1,2}}$$

è meno perché la forza è attrattiva



È una forza centrale, attrattiva ed è valida ~~per~~ qualsiasi siano le masse in gioco, cioè è una legge universale

Consideriamo un oggetto sulla crosta terrestre

$$F = \gamma \frac{m_T\, m}{r_T^2}$$ → La stessa forza è scritta come $\underline{F = mg}$

$$\gamma \cdot \frac{m_T \cdot \cancel{m}}{r_T^2} = \cancel{m}g$$

Dall'osservazione del sistema terra-luna:

Scrivo la forza della terra sulla luna = forza centripeta della luna ← $$F_{T,L} = \frac{\boxed{\gamma\, m_T}\, m_L}{r_{T,L}^2} = \cancel{m_T}\, m_L \overbrace{\omega_L^2\, r_{T,L}}^{\text{accelerazione centripeta della luna}}$$

$$\gamma \cdot m_T = \omega_L^2\, r_{TL}^3$$

ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE

In quanto forza centrale, la forza gravitazionale è conservativa, per cui si può definire un'energia potenziale relativa a tale forza

$\hat{u}_r \cdot d\vec{s}$

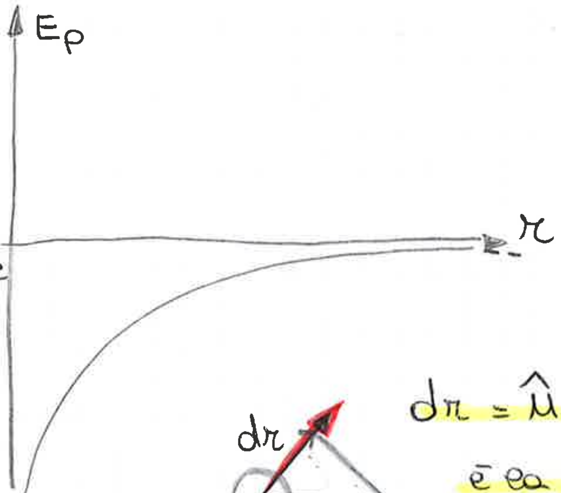
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F(r)\,\hat{u}_r\, d\vec{s} = F(r)\, dr$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = -\int_A^B \gamma \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \cdot dr = \overbrace{-\frac{\gamma m_1 m_2}{r_A}}^{E_{PA}} + \overbrace{\frac{\gamma m_1 m_2}{r_B}}^{E_{p,B}}$$

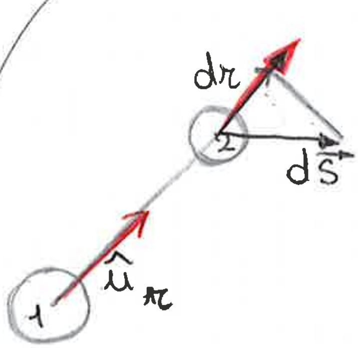
~~E_p~~ $\neq$

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = \overbrace{-\frac{\gamma m_1 m_2}{r_A}}^{E_{p,A}} + \overbrace{\frac{\gamma m_1 m_2}{r_B}}^{E_{p,B}}$$

$$\boxed{E_p = -\frac{\gamma m_1 m_2}{r}}$$

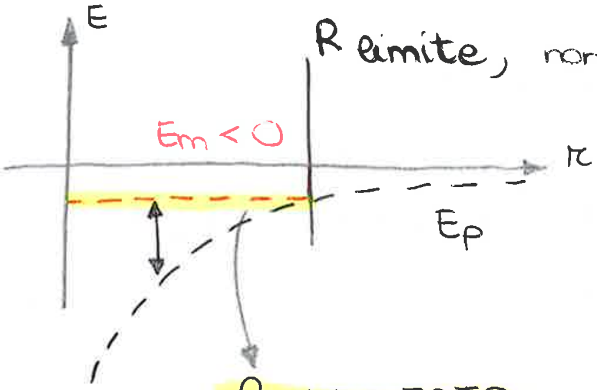


L'energia potenziale vale 0, per un raggio tendente a ∞. Quando m_2 si avvicina a m_1, la forza gravitazionale fa un lavoro positivo e m_2 acquista Energia cinetica



$dr = \hat{u}_r \cdot d\vec{s}$

è la proiezione di ds su $\hat{u}_r$ =



R limite, non può andare oltre altrimenti l'energia cinetica è negativa (IMPOSSIBILE $\frac{1}{2}mv^2$)

R LIMITATO, orbita ellittica

Se un corpo ha Energia meccanica negativa, allora il corpo ha un'orbita CHIUSA

E > 0 iperbolica
E = 0 parabolica
E < 0 ellittica

Problemi ~~...~~ concettuali della leggi di gravitazione universale

1) Problema dell' AZIONE A DISTANZA

Le equazioni per la forza gravitazionale e per quella elettrostatica prevedono un'"azione a distanza" cioè una massa (o carica) generano una forza su un'altra massa o carica (di "prova") a grande distanza anche senza la presenza di un mezzo interposto. Vi è uno scambio di bosoni di gauge

- l'elettromagnetismo è mediato dai FOTONI
- la forza nucleare debole è mediata dai bosoni W e Z
- la forza nucleare forte è mediata dai gluoni
- la gravità è mediata dai ~~...~~ gravitoni

$$\vec{G}_T = -\gamma \frac{M_T}{r_T^2} \hat{u}_T$$

$$\vec{G}_L = -\gamma \frac{M_L}{r_L^2} \hat{u}_L$$

forza tangente al campo

Intensità delle linee di campo ci dà l'intensità del campo stesso

LINEE DI FORZA PER IL CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE

* Una linea di campo di CAMPO VETTORIALE anche detta linea di forza, è una CURVA ideale che ha come tangente in ogni punto la direzione del vettore del campo stesso. Per ogni punto passa una sola linea di campo che si può dire univocamente definita

FLUSSO DI UN CAMPO GRAVITAZIONALE

Ogni superficie piana può essere rappresentata mediante un vettore S che ha:

1_ Intensità : Area della superficie

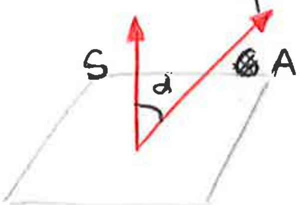
2_ Direzione perpendicolare alla superficie

3_ Verso → diretto verso l'interno se la superficie è chiusa

arbitrario se la superficie è aperta

Si dice flusso di un campo vettoriale A uniforme attraverso una superficie piana S:

$$\Phi(A) = \vec{A}\cdot\vec{S} = A\cdot S\cdot\cos\alpha$$



È un modo per "contare" le linee di forza che passano attraverso una superficie

* Se il campo NON è uniforme (in generale varia da punto a punto) e la superficie NON è piana (il vettore superficie non è definito in modo unico), divido la superficie in elementi infinitesimi dS e ne faccio l'integrale

$$\Phi_S(G) = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i$$

flusso è uno scalare

FLUSSO

$$\Phi_S(\vec{G}) = \int_S d\Phi = \int_S \vec{G}\cdot\hat{u}_N \, dS$$

Il flusso del campo $\vec{G}$ di una massa puntiforme m dipende solo dall'angolo solido e non dalla superficie né dalla sua distanza dalla massa (le linee di flusso che passano tra 2 superfici sono le stesse)

Considero il flusso attraverso una qualsiasi superficie (superficie gaussiana), generato da una massa posta all'interno.

$$\Phi_S(\vec{G}) = \oint_S \underbrace{d\Phi}_{G\,d\vec{s}} = \oint_S \vec{G}\cdot d\vec{s} = \oint_S \underbrace{\vec{G}\cdot\hat{u}_N\,ds}_{G\cdot ds\cdot\cos\theta}$$

$$= \oint_S |G(r_S)|\,\hat{u}_r\cdot\hat{u}_N\,ds = \oint_S G(r_S)\overbrace{\cos\theta}^{\hat{u}_r\cdot\hat{u}_N}\,ds =$$

$$\cancel{= \oint \gamma\frac{m}{r^2}\cos\theta\,ds = \gamma m\oint_S\frac{\cos\theta}{r^2}ds}$$

$$\cancel{= 4\pi\gamma m}$$

$$= \oint_S \gamma\frac{m}{r^2}\cos\theta\,ds = \gamma m \oint_S \underbrace{\frac{\cos\theta\,ds}{r^2}}_{d\Omega} =$$

$$= \gamma m\,4\pi$$

$d\Omega$ → angolo solido

$\|$

4π quando S è l'intera sfera

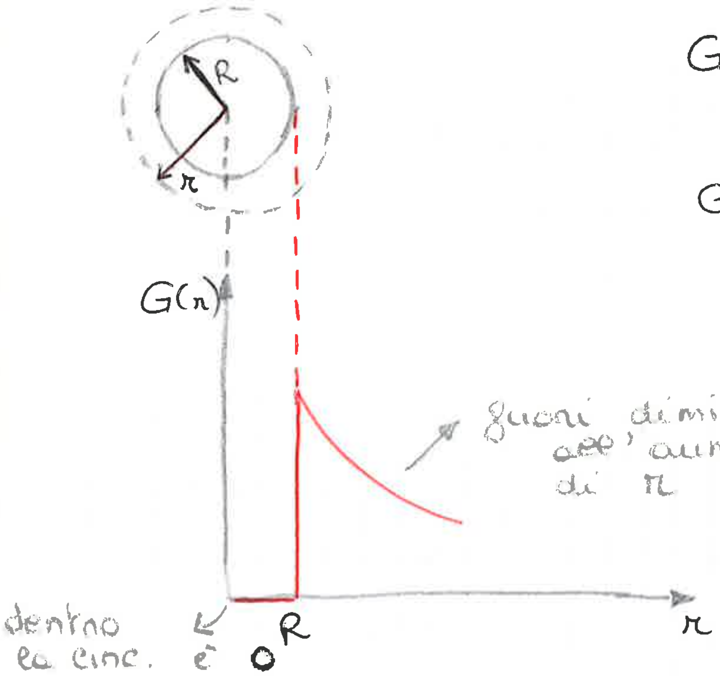
$\hat{u}_N$ è la direzione di ds

$\hat{u}_r$ è la direzione di $G(r)$ (lega la massa al punto r)

$$\vec{G} = G\cdot\hat{u}_r = \gamma\frac{m}{r^2}$$

$$d\vec{s} = ds\cdot\hat{u}_N$$

$$\frac{ds}{r^2}\cdot\cos\theta = d\Omega \quad \text{angolo solido}$$



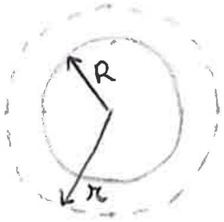
$G(r) = \gamma \dfrac{m}{r^2}$ per ogni $r > R$

$G(r) = 0$ per ogni $r < R$

* quando sono all'esterno della superficie non vi è differenza con un campo generato da una particella puntiforme di eguale massa posta al centro della sfera

* Se m invece di essere distribuita solo sulla superficie massa piena

CASO 2 m è distribuita uniformemente in tutto il volume



$$\boxed{G(r) = \gamma \frac{m}{r^2}}$$

All'esterno

NON CAMBIA NIENTE ALL' ESTERNO

* Siccome la massa è distribuita sul volume uniformemente il rapporto tra la massa e volume (densità) deve essere costante per diversi raggi interni

$$\frac{m(r_1)}{4/3 \pi r_1^3} = \frac{m(r_2)}{4/3 \pi r_2^3} = \dots = \frac{m}{\underbrace{4/3 \pi R^3}_{\text{volume sfera}}}$$

$$\Rightarrow m(r) = m \frac{r^3}{R^3}$$

* All'interno *

CONSEGUENZA DELLA LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE : la traiettoria

CONICHE : luogo dei punti del piano per i quali è costante il rapporto tra la distanza da un punto (fuoco) e la distanza da una retta (direttrice). Tale rapporto si chiama eccentricità :

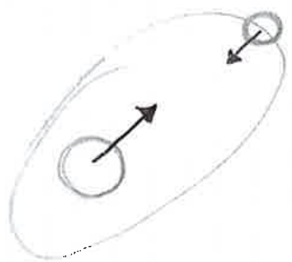
$$e = \frac{MF}{MM} ,$$

$e > 1$ iperbole

$e = 1$ parabola

$e < 1$ ellisse

PROBLEMA DEI 2 CORPI E MASSA RIDOTTA



In un sistema inerziale

$$\underbrace{\vec{F} = m \cdot \vec{a}_m}_{\text{forza sulla terra}} \qquad \underbrace{-\vec{F} = M \cdot \vec{a}_M}_{\text{forza sul sole}}$$

L'accelerazione relativa di m rispetto a M :

$$\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\vec{F} = \frac{1}{\mu}\vec{F}$$

$$\boxed{\mu = \frac{mM}{m+M}}$$ Massa ridotta

$$\boxed{\vec{F} = \mu\vec{a}}$$

→ Un corpo che ha una massa fittizia μ e un'accelerazione a che è l'accelerazione relativa tra i due corpi $\vec{a} = \vec{a}_m - \vec{a}_M$

Il moto relativo di 2 punti sottoposti alla loro interazione mutua è equivalente al moto di un punto con massa uguale alla massa ridotta e forza pari alla forza di interazione mutua.

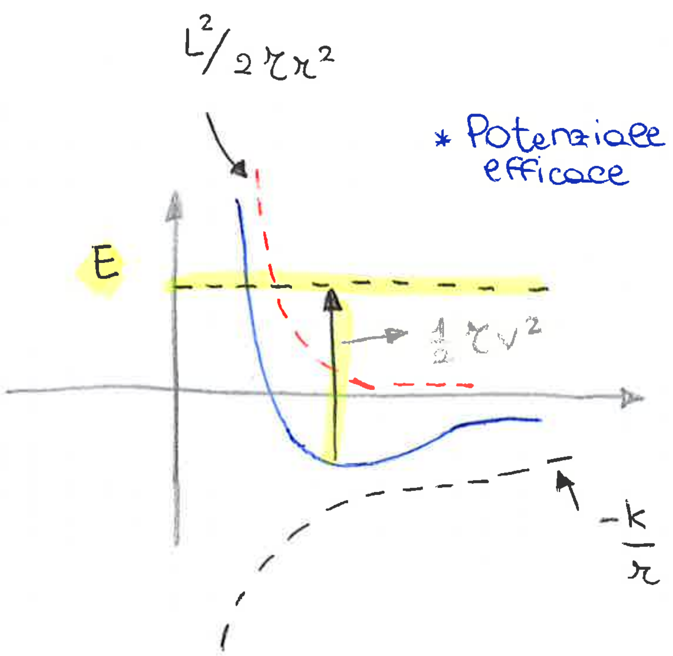
ENERGIA

energia potenziale gravitazionale

$$E = \underbrace{\frac{1}{2}\tau v_r^2}_{\text{energia cinetica radiale}} + \underbrace{\frac{L^2}{2\tau r^2}}_{\text{energia cinetica trasversa AZIMUTALE}} - \frac{k}{r}$$

$$k = +m_1 m_2 \gamma$$

- Formalmente possiamo considerare il secondo termine come energia potenziale, aggiuntiva a quella gravitazionale di una particella fittizia di cui il primo termine rappresenta tutta l'energia cinetica. (il 2° termine dipende dalla posizione e non dalla velocità)



- Energia totale E è una COSTANTE (retta)
- La freccia → è l'energia cinetica (la differenza tra E e E potenziale efficace)

ELETTROSTATICA

Studio dei fenomeni elettrici in presenza di cariche a riposo

STROFINARE → modo per caricare elettricamente un materiale isolante

AVVICINARE UN CORPO CARICO → modo per caricare elettricamente un conduttore

- la carica elettrica è una proprietà intrinseca al materiale. La sua unità di misura è il Coulomb

Ci sono 2 TIPI di carica elettrica: positiva e negativa

- sempre multipla di $\pm e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C (carica elementare)
- si conserva (NON si crea e NON si distrugge, ma si separa / unisce)

FORZA DI COULOMB

$$\vec{F}_{el} = \underbrace{\frac{1}{4\pi \varepsilon_0}}_{K} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

costante dielettrica del vuoto

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \ \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Se le cariche sono concordi la forza è repulsiva, se le cariche sono discordi la forza è attrattiva

* La forza è direttamente proporzionale alle cariche e inversamente proporzionale al quadrato della distanza

* È una forza conservativa

Struttura identica a quella della forza di gravitazione universale