



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2346A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Corrao Stefano

MATERIA: Idrologia celazione - Prof. Claps

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Esercitazione 2

Progetto 1 – Determinazione di massima dell’altezza dei rilevati arginali in una generica sezione di un corso d’acqua Parte a): esempio introduttivo di inferenza statistica (per stima della piena di progetto)

Il problema da affrontare è legato al rifacimento di un attraversamento stradale sul fiume Chisone, in provincia di Torino. Il tratto di corso d’acqua attraversato da tale viadotto è posto in località San Martino. Il quesito è relativo alla stima della massima portata delle piene fluviali per assegnate probabilità di superamento. Nella fase introduttiva viene proposto l’uso della distribuzione Normale per poter familiarizzare con le rappresentazioni grafiche. La valutazione proseguirà poi con metodi più raffinati.

Si consideri la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino del fiume Chisone (dati riportati al fondo)

Per la costruzione del diagramma delle frequenze cumulate e la curva di probabilità cumulata della distribuzione normale (nel piano (X, F)) occorre:

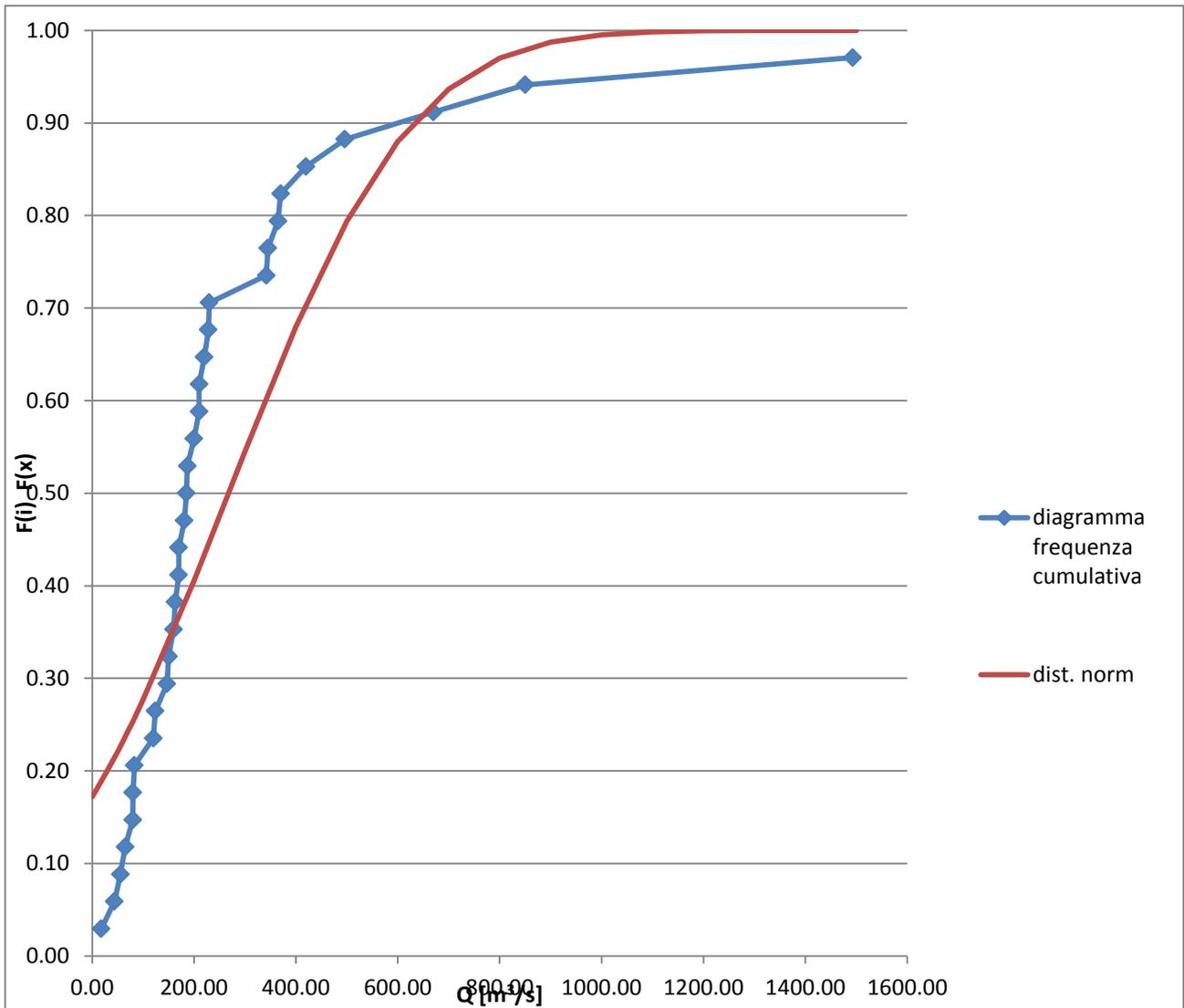
1. Costruire il diagramma delle frequenze cumulate e la curva di probabilità cumulata della distribuzione normale (nel piano (X,F)), ovvero:

- disporre i valori del campione in ordine crescente e associare a ciascun valore il numero d’ordine i ; (tab 1.1) - stimare la frequenza empirica di non superamento $F(i)$, usando l’espressione

$$F(i) = \frac{N}{i+1}$$

$F(x)$ è la distribuzione di probabilità cumulata teorica facente riferimento alle portate Q

N	i	Q [m3/s]	F(i)	F(x)
33	1	18,00	0,03	0,19
	2	43,80	0,06	0,21
	3	55,60	0,09	0,23
	4	64,90	0,12	0,24
	5	79,80	0,15	0,25
	6	80,00	0,18	0,25
	7	83,10	0,21	0,26
	8	120,00	0,24	0,30



Si è poi giunti a verificare graficamente l'adattamento della funzione di probabilità cumulata (la distribuzione normale) al campione usando la carta probabilistica normale (v. Figura 2.5).

Si traccia la retta relativa alla distribuzione normale: in ascissa i valori di X, cioè le portate Q, in ordinata la variabile ridotta standardizzata:

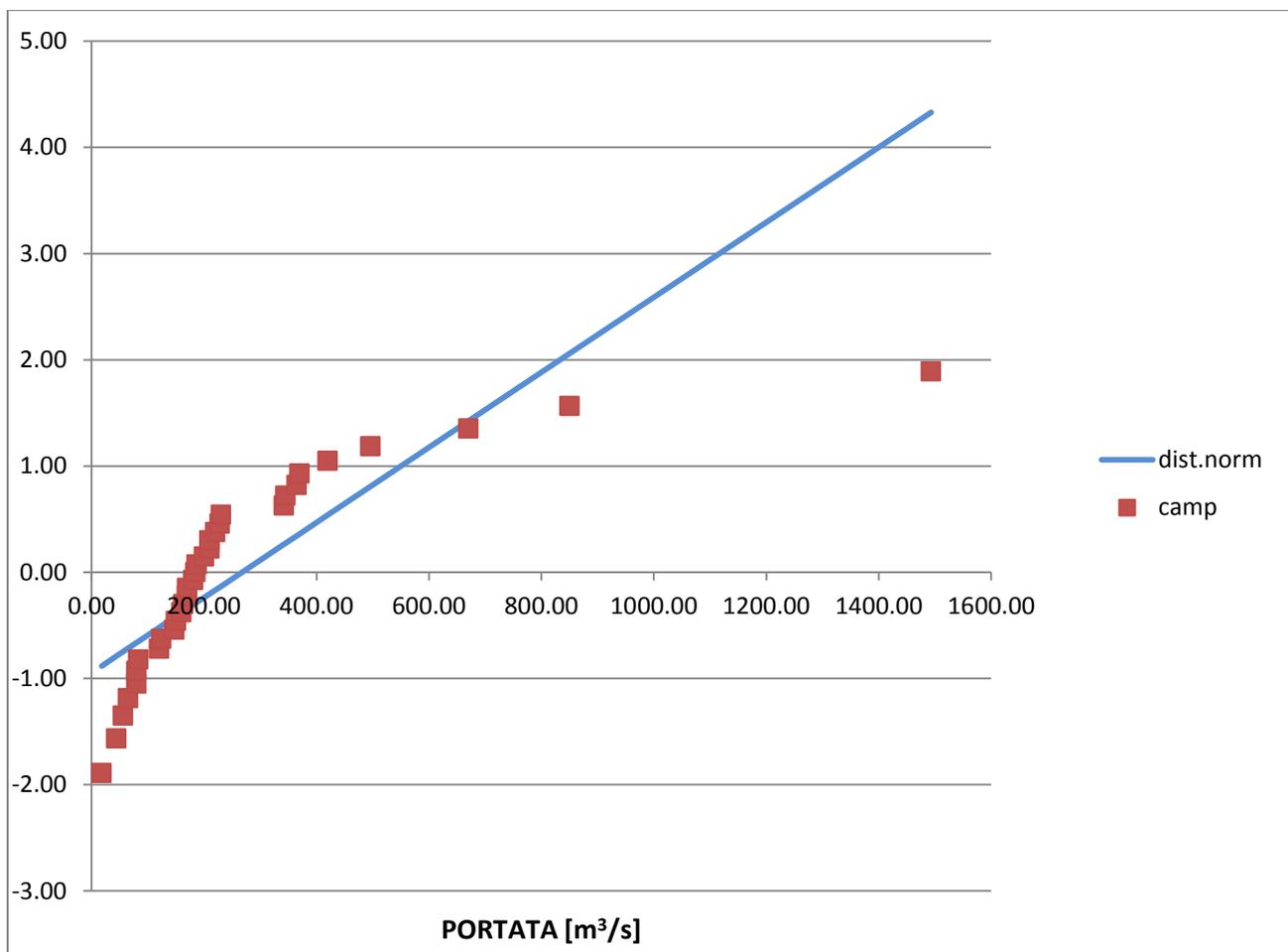
$$u(x) = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$$

Con θ_1 e θ_2 che coincidono con media e σ calcolati in precedenza

In seguito si è diagrammato in ascissa i valori di portata campionari x_i e in ordinata il valore delle u_i ottenute per inversione della funzione Normale standardizzata cumulata campionaria "F(i)" (v. Tabella 2.4).

Per calcolare le $u(i)$ si è usato il seguente comando excel: $u(i) = \text{INV.NORM.ST}(F(i))$

Per verificare l'attitudine di un dato di legge probabilistica (ad esempio la distribuzione normale) ad interpretare il campione dato, si possono utilizzare le carte probabilistiche, nelle quali tutte le curve di probabilità di un certo tipo risultano rappresentate da rette. Individuare la legge di distribuzione di probabilità che meglio si adatta ad un certo campione di dati significa individuare, tra le tante leggi teoriche, quella il cui andamento si avvicina maggiormente alla frequenza empirica del campione. Nota la distribuzione empirica e la legge teorica è possibile effettuare un confronto tra le due curve riportandole su uno stesso diagramma. Come si può osservare in Figura 2.5, dal momento che le due curve si discostano parecchio tra loro, allora si deduce che la distribuzione normale non è la più adatta a rappresentare i dati.



Avendo verificato che la distribuzione normale non è adatta a rappresentare i miei dati campionari.

Si passa ad utilizzare la distribuzione normale con due metodi : quello dei momenti e quello degli L-momenti

DISTRIBUZIONE LOGNORMALE Metodo dei momenti

Metodo dei momenti DISTRIBUZIONE LOGNORMALE

Obiettivo finale è il calcolo dei parametri θ_1 e θ_2 . X ha distribuzione lognormale se vale che il $\log(x)$ ha media μ e varianza σ^2

In formule

$$\theta_1 = \mu = M(\ln(x)) = \left(\frac{1}{N} \sum y_i \right) = 5,2211 \quad \text{con } y = \ln(x)$$

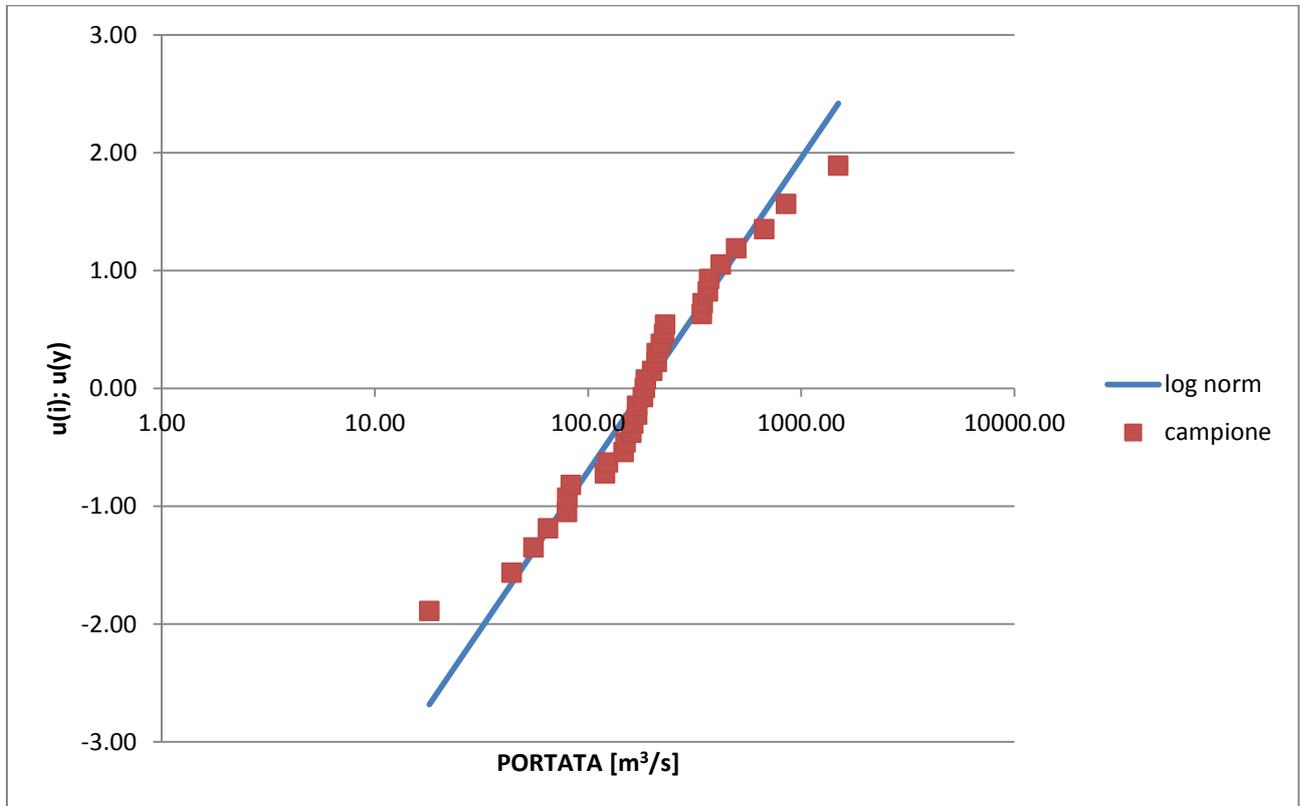
$$\theta_2 = \sigma = \text{VAR}(\ln(x)) = \frac{1}{N-1} \sum (y_i - \mu)^2 = 0.7640$$

Si calcolano i valori della variabile ridotta standardizzata : $u(x) = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$

Funzione di distribuzione campionaria : $F_i = \frac{i}{N+1}$

Variabile ridotta campionaria : $u(i) = \text{INV.NORM.ST}(F_i)$

Si riportano in tabella i valori calcolati in precedenza e nel grafico viene riportato l'andamento della variabile ridotta e della variabile campionaria in funzione delle portate



Distribuzione di Gumbel

Per la distribuzione di Gumbel valgono le seguenti formule,

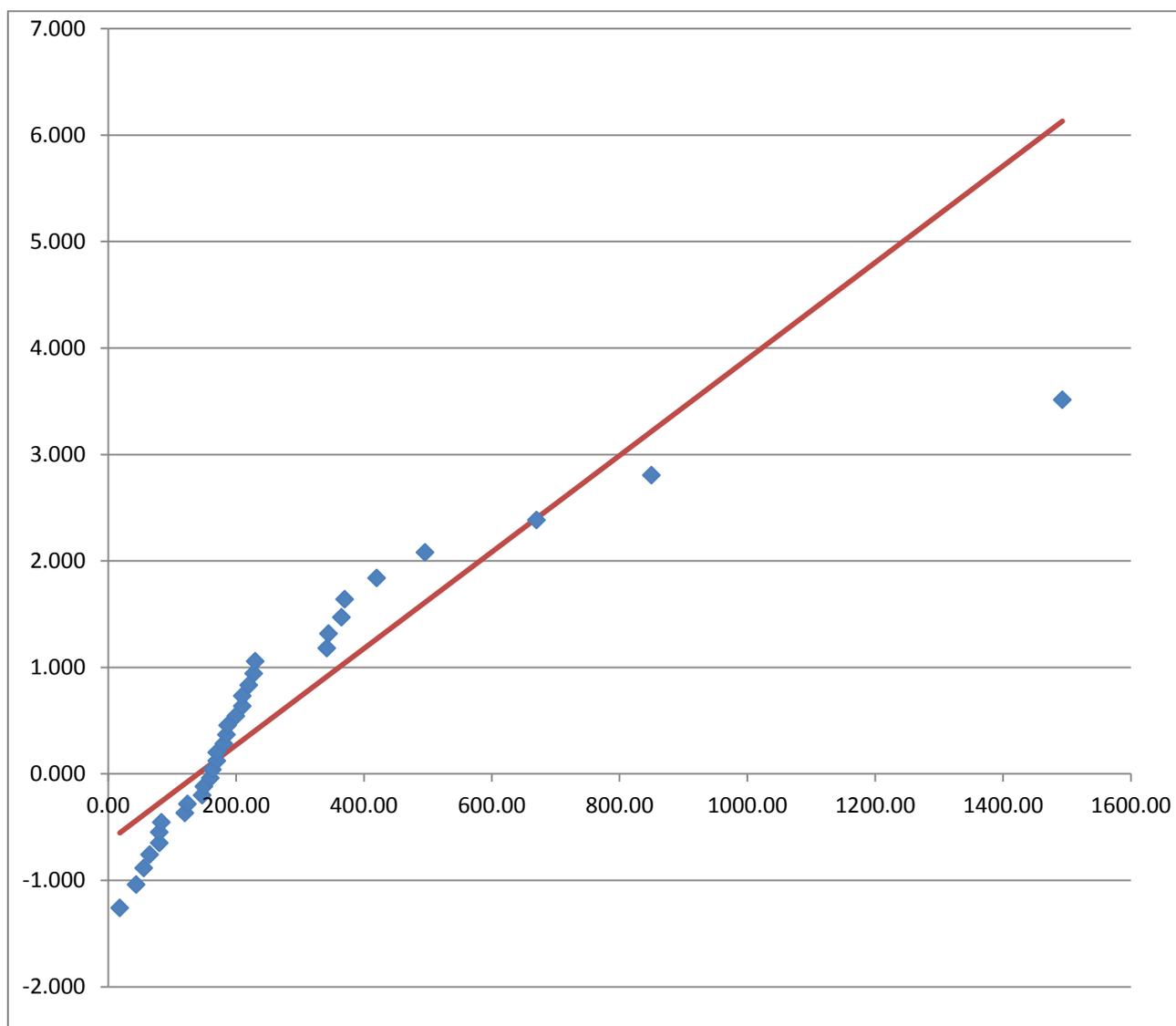
Probabilità cumulata $F(x) = e^{-e^u}$ con $u = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$, indica la variabile standardizzata

Con i stimatori per la legge di Gumbel che sono i seguenti:

$$\theta_1 = \mu - 0.577 \theta_2$$

28	370,00	1,041	0,824	1,639093245	0,702576
29	420,00	1,268	0,853	1,838444275	0,754712
30	496,00	1,612	0,882	2,078137249	0,819213
31	670,00	2,401	0,912	2,381917085	0,913363
32	850,00	3,217	0,941	2,803054168	0,960714
33	1493,00	6,131	0,971	3,511471176	0,997829

E diagrammando sulla carta probabilistica ottengo



$$u(y) = \frac{y - \theta_1}{\theta_2}$$

$$u_i = \text{INV.NORM.ST}(F_i)$$

In tabella sono riportati tutti i dati calcolati con le formule soprastanti. Successivamente si verifica graficamente l'adattamento al campione della funzione di probabilità LogNormale, con parametri stimati con il metodo degli L-momenti usando la relativa carta probabilistica

b ₀	b ₁	b ₂	λ ₁	λ ₂	λ ₃	θ ₁	θ ₂
5,22	2,851913638	1,980454926	5,22	0,482761133	-0,007686125	5,22	0,855671828

I	Q	F(i)	y	u(y)	u(i)	Fteo
1	18,00	0,03	2,89	-2,723818066	-1,88951	0,00323
2	43,80	0,06	3,78	-1,684562092	-1,56473	0,04604
3	55,60	0,09	4,02	-1,405776025	-1,3517	0,07990
4	64,90	0,12	4,17	-1,225023992	-1,18683	0,11028
5	79,80	0,15	4,38	-0,983487606	-1,04913	0,16268
6	80,00	0,18	4,38	-0,980562267	-0,9289	0,16340
7	83,10	0,21	4,42	-0,936131604	-0,82079	0,17460
8	120,00	0,24	4,79	-0,50670641	-0,72152	0,30618
9	124,00	0,26	4,82	-0,468385851	-0,6289	0,31975
10	147,00	0,29	4,99	-0,269535058	-0,5414	0,39376
11	150,00	0,32	5,01	-0,245924713	-0,45785	0,40287
12	160,00	0,35	5,08	-0,170500328	-0,37739	0,43231
13	163,00	0,38	5,09	-0,14879062	-0,29931	0,44086
14	170,00	0,41	5,14	-0,09965001	-0,22301	0,46031
15	170,00	0,44	5,14	-0,09965001	-0,14799	0,46031
16	181,00	0,47	5,20	-0,026375897	-0,07379	0,48948
17	185,00	0,50	5,22	-0,000830129	0	0,49967
18	187,00	0,53	5,23	0,011736362	0,073791	0,50468
19	200,00	0,56	5,30	0,090281368	0,147987	0,53597
20	210,00	0,59	5,35	0,147301084	0,223008	0,55855
21	210,00	0,62	5,35	0,147301084	0,299307	0,55855
22	220,00	0,65	5,39	0,20166774	0,377392	0,57991
23	228,00	0,68	5,43	0,243410475	0,457852	0,59616
24	230,00	0,71	5,44	0,253617285	0,541395	0,60010
25	342,00	0,74	5,83	0,717266332	0,628904	0,76340
26	345,00	0,76	5,84	0,727473143	0,721522	0,76653
27	365,00	0,79	5,90	0,793331261	0,820792	0,78621

DISTRIBUZIONE DI GUMBEL

Gli L-Momenti sono stimatori lineari dei momenti di un campione. Occorre innanzitutto calcolare i b_r che sono i PWM campionari (Probability Weighted Moments), tramite l'ausilio di un foglio di calcolo:

$$b_0 = \mu(x)$$

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(i-1)}{(N-1)} x_i$$

$$b_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(i-1)(i-2)}{(N-1)(N-2)} x_i$$

Si calcolano ora i coefficienti λ

$$L_1 = \lambda_1 = b_0$$

$$L_2 = \lambda_2 = 2b_1 - b_0$$

$$L_3 = \lambda_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0$$

Ora si passi ad analizzare il calcolo degli stimatori per la distribuzione Gumbel

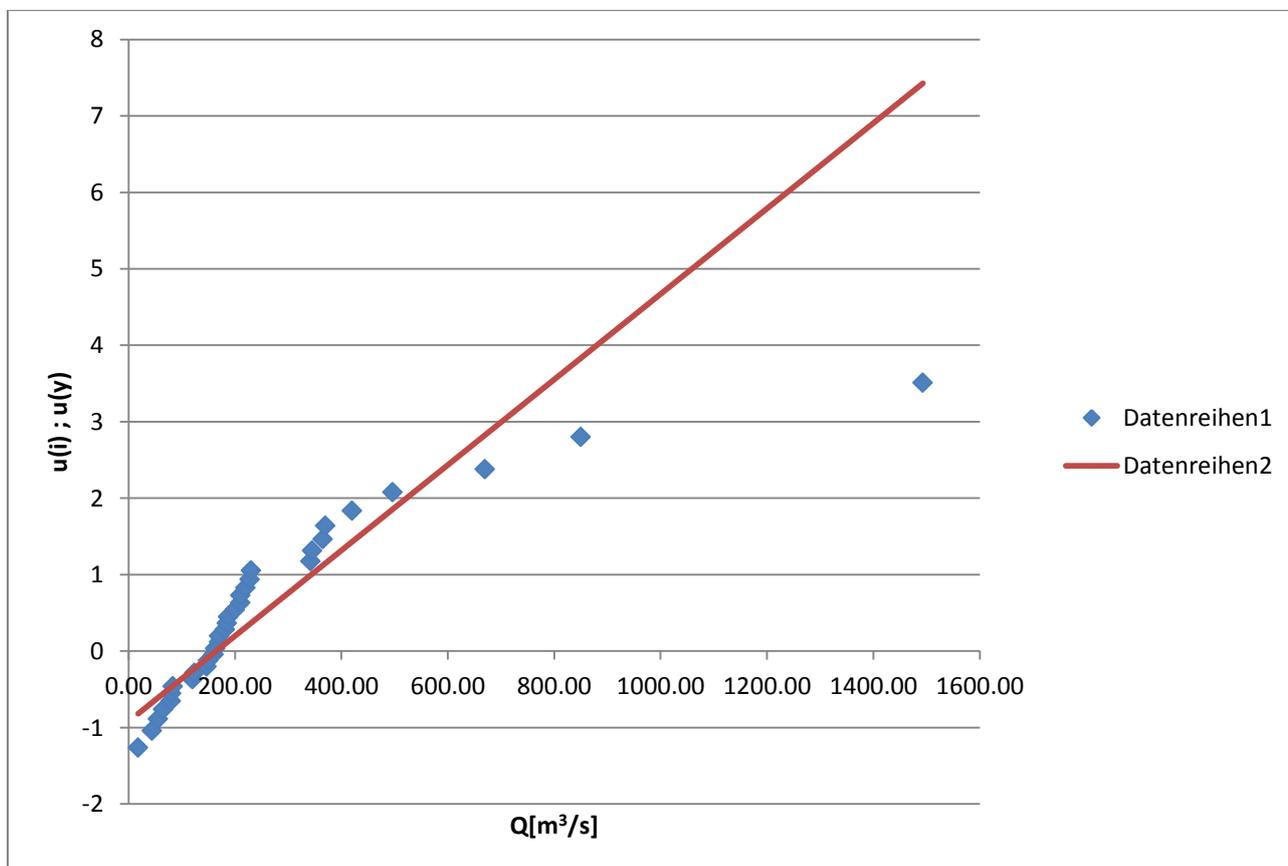
$$\theta_1 = L_1 - 0.5772 \quad \theta_2 = 164,338$$

$$\theta_2 = \frac{L_2}{\ln(2)} = 178,922$$

Si calcolano:

$$u(x) = \frac{x - \theta_1}{\theta_2}$$

21	210,00	0,255204855	0,617647059	0,730147141	0,460815391
22	220,00	0,311095028	0,647058824	0,831678317	0,480636385
23	228,00	0,355807167	0,676470588	0,939389699	0,496283617
24	230,00	0,366985202	0,705882353	1,054671882	0,500163668
25	342,00	0,992955146	0,735294118	1,17932995	0,690402686
26	345,00	1,009722198	0,764705882	1,315783759	0,694668744
27	365,00	1,121502545	0,794117647	1,467401781	0,721956845
28	370,00	1,149447632	0,823529412	1,639093245	0,7284679
29	420,00	1,4288985	0,852941176	1,838444275	0,786964085
30	496,00	1,853663819	0,882352941	2,078137249	0,854992885
31	670,00	2,826152839	0,911764706	2,381917085	0,942480242
32	850,00	3,832175964	0,941176471	2,803054168	0,978570518
33	1493,00	7,425914125	0,970588235	3,511471176	0,999404561



DISTRIBUZIONE GEV

Funzione densità di probabilità per la distribuzione GEV è:

$$c = \frac{2}{3+\tau_3} - \frac{\ln 2}{\ln 3} = -0,054$$

$$\theta_1 = L_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3} (1 - \Gamma(1+\theta_3)) = 139,542$$

$$\theta_2 = \frac{L_2 \theta_3}{(1-2^{-\theta_3}) \Gamma(1+\theta_3)} = 101,1199$$

$$\theta_3 = 7,859 c + 2,9554 c^2$$

Dove con excel: $\Gamma(x) = \text{EXP}[\text{LN.GAMMA}(x)]$

Occorre ora stimare le portate di progetto x_T su entrambe le distribuzioni per valori di periodo di ritorno T pari a 50, 100, 200 anni. Innanzitutto occorre calcolare:

$$1 - F = P(s) = \frac{1}{T} \rightarrow F = 1 - \frac{1}{T}$$

dove: $Pr(s)$ = probabilità di superamento

F = frequenza di non superamento

T = periodo di ritorno [anni]

Successivamente si ricavano i valori:

$$x_T(\text{LN}) = \text{INV.LOGNORM}(F_i; \theta_1; \theta_2)$$

$$x_T(\text{gumbel}) = \theta_1 - \theta_2 \ln(-\ln(F_i))$$

Q	F(i)	T [anni]	lnT
18,00	0,02941	1,03030303	0,02985
43,80	0,05882	1,0625	0,06062
55,60	0,08824	1,096774194	0,09237
64,90	0,11765	1,133333333	0,12516
79,80	0,14706	1,172413793	0,15906
80,00	0,17647	1,214285714	0,19416
83,10	0,20588	1,259259259	0,23052
120,00	0,23529	1,307692308	0,26826
124,00	0,26471	1,36	0,30748
147,00	0,29412	1,416666667	0,34831
150,00	0,32353	1,47826087	0,39087
160,00	0,35294	1,545454545	0,43532
163,00	0,38235	1,619047619	0,48184
170,00	0,41176	1,7	0,53063
170,00	0,44118	1,789473684	0,58192
181,00	0,47059	1,888888889	0,63599
185,00	0,50000	2	0,69315
187,00	0,52941	2,125	0,75377
200,00	0,55882	2,266666667	0,81831
210,00	0,58824	2,428571429	0,8873
210,00	0,61765	2,615384615	0,96141
220,00	0,64706	2,833333333	1,04145
228,00	0,67647	3,090909091	1,12847
230,00	0,70588	3,4	1,22378
342,00	0,73529	3,777777778	1,32914
345,00	0,76471	4,25	1,44692
365,00	0,79412	4,857142857	1,58045
370,00	0,82353	5,666666667	1,7346
420,00	0,85294	6,8	1,91692
496,00	0,88235	8,5	2,14007
670,00	0,91176	11,33333333	2,42775
850,00	0,94118	17	2,83321
1493,00	0,97059	34	3,52636

Fteo(LN)	T
0,003226602	1,003237047
0,046036545	1,048258185
0,079895322	1,086832861
0,110283091	1,123953012
0,162683756	1,194291891
0,163404325	1,195320547
0,174602716	1,211537789
0,306180416	1,441296878
0,319754342	1,470057161

0,402089286	1,67249
0,410270366	1,69569
0,414353662	1,70752
0,440743574	1,78809
0,460815391	1,85465
0,460815391	1,85465
0,480636385	1,92543
0,496283617	1,98524
0,500163668	2,00065
0,690402686	3,23
0,694668744	3,27513
0,721956845	3,59656
0,7284679	3,68281
0,786964085	4,69404
0,854992885	6,89621
0,942480242	17,3853
0,978570518	46,6647
0,999404561	1679,43

Fteor(GEV)	Tempo di ritorno
0,005037343	1,005062846
0,035743676	1,037068646
0,062769041	1,066972863
0,089361266	1,098130315
0,139466717	1,162070101
0,140187605	1,16304441
0,151488262	1,17853408
0,294287834	1,417008305
0,30970228	1,448650301
0,394579754	1,651745224
0,40506737	1,680862588
0,438913702	1,782257032
0,448723878	1,813972999
0,470983713	1,890300968
0,470983713	1,890300968
0,504168032	2,016812276
0,515693092	2,064806393
0,521348272	2,089201693
0,556393857	2,254251922
0,581393534	2,388878532
0,581393534	2,388878532

Verifica e scelta del modello probabilistico

Si consideri la serie storica dei massimi annui dei colmi di piena osservati alla stazione San Martino del fiume Chisone. Ora si sottopongono le tre distribuzioni che hanno superato le verifiche preliminari di adattamento (ovvero le distribuzioni Gumbel, LogNormale e GEV), ai test di adattamento del Chi Quadrato (Pearson) e di Anderson Darling, adottando un livello di significatività α del 5% e considerando i parametri stimati con il metodo degli L-Momenti.

Test Chi Quadro (Pearson)

Il test χ^2 parte dalla suddivisione del campione in k classi equiprobabili che si escludono a vicenda. Ogni intervallo sarà caratterizzato da due valori x_{inf} e x_{sup} ricavabili dall'inversa della distribuzione di probabilità considerata.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

L'ipotesi H_0 di partenza è che il campione osservato può essere considerato estratto da una distribuzione qualunque (cioè la distribuzione in esame si adatta efficacemente al campione di dati). Quindi il test risulta:

– sempre accettabile quando $\chi^2 < \chi^2_{limite, inf}(1-\alpha; k-s-1)$

il valore limite che può essere ricavato nei seguenti modi:

- Tramite funzione excel INV.CHI.QUAD(probabilità_di_non_superamento; k-s-1)
- Tramite tabella in funzione del livello di significatività α , del numero di classi k e del numero di parametri s della distribuzione sottoposta al test

– non accettabile (ma può essere ulteriormente valutato), nel caso in cui

$$\chi^2_{limite, inf}(1-\alpha; k-s-1) < \chi^2 < \chi^2_{limite, sup}(1-\alpha; k-1)$$

– non accettabile (e l'ipotesi H_0 è rigettata), nel caso in cui $\chi^2 > \chi^2_{limite, sup}(1-\alpha; k-1)$ Dove: $\chi^2_{limite, sup}(1-\alpha; k-1)$ è calcolato con la funzione excel:

INV.CHI.QUAD(probabilità_di_non_superamento; k-1)

I.

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - N p_i)^2}{N p_i}$$

Fempirica	Xquantili
0,125	67,88086187
0,25	102,513151
0,375	139,527833
0,5	183,883282
0,625	242,3391856
0,75	329,8412066
0,875	498,1236313

k	intervallo classi		n _i	χ ² _i
1	18	67,88086187	4	0,003787879
2	67,88086187	102,513151	7	0,306818182
3	102,513151	139,527833	9	1,09469697
4	139,527833	183,883282	16	2,003787879
5	183,883282	242,3391856	24	3,640151515
6	242,3391856	329,8412066	24	4,125
7	329,8412066	498,1236313	30	0,852272727
8	498,1236313	1493,00	33	0,306818182
			tot	33
				12,33

$\chi^2 = 11,364 > \chi^2_{limite,inf} = 11,070$

ma rientra nell'intervallo compreso tra $\chi^2_{limite, inf}$ e $\chi^2_{limite, sup}$ e quindi è da valutare ulteriormente.

Distribuzione gumbel (L-MOMENTI)

Noti:

$\alpha = 0,05$

$1 - \alpha = 0,95$

$N = 33$

$k = 8,0991 \approx 8$

Fempirica	Xquantili
0,125	33,3492295
0,25	105,8959908
0,375	167,8015327
0,5	229,9154984
0,625	299,4271705
0,75	387,2573613
0,875	524,5837114

k	intervallo classi			n _i	χ ² _i
1	18	33,34923	1	1	2,367424
2	33,34923	105,896	7	6	0,852273
3	105,896	167,8015	13	6	0,852273
4	167,8015	229,9155	23	10	8,367424
5	229,9155	299,4272	24	1	2,367424
6	299,4272	387,2574	28	4	0,003788
7	387,2574	524,5837	30	2	1,094697
8	524,5837	1493,00	33	3	0,306818
					16,21

Il test non risulta superato perché $\chi^2 > \chi^2_{limite, sup}$

Distribuzione GEV

Noti:

$\alpha = 0,05$

$1 - \alpha = 0,95$

$N = 33$

$k = 8,0991 \approx 8$

$s = 3$

Grado di libertà = 4

$p_i = 0,125 = 1/8$

k	intervallo classi			n _i	χ ² _i
1	18	75,71931825		4	0,003788
2	75,71932	108,6580253		7	0,306818
3	108,658	141,5076793		9	1,094697
4	141,5077	179,5774779		15	0,852273
5	179,5775	229,2333047		23	3,640152
6	229,2333	304,6108168		24	1,2367424
7	304,6108	458,0961869		29	0,185606
8	458,0962	1494,00		33	0,003788
					8,45

$$\sum_{i=1}^k \frac{(n_i - N p_i)^2}{N p_i}$$

Il test risulta superato perché $\chi^2 < \chi^2_{\text{limite,inf}}$

Test Anderson Darling

Il test di adattamento di Anderson-Darling è basato sul confronto tra la distribuzione di probabilità corrispondente all'ipotesi H0 e la funzione di frequenza cumulata. In particolare questo tipo di test valuta lo

scostamento medio quadratico tra la funzione di frequenza cumulata e la distribuzione ipotizzata valida

attraverso una funzione di peso che porta maggior sensibilità sulla discrepanza nelle code delle due distribuzioni.

Occorre calcolare:

$$A^2 = -N - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2i - 1)(\ln[F(xi)] + (2N + 1 - 2i))$$

$$\omega = 0,0403 + 0,116 \left(\frac{A^2 - \xi_p}{\beta_p} \right)^{\wedge} \left(\frac{\eta_p}{0,861} \right) \quad \text{con } 1.2 \xi_p \leq A_2$$

Test max valore

Test del massimo valore

Si immagina che il valore osservato di $X_{(N)}$ corrisponda al valore X_{LIM} . La condizione limite richiesta dal test è che $F_{X_{(N)}}(X_{LIM}) = 1 - \alpha$

Essendo $F_{X_{(N)}} = [F_X(x)]^N$ vale allora $[F_X(X_{LIM})]^N = 1 - \alpha$.

Di conseguenza, dato il valore $X_{(N)}$ osservato del massimo, il test corrisponde a verificare se:

$$[F_X(X_N)]^N < 1 - \alpha \quad \text{Ipotesi sul test soddisfatta}$$

contro l'ipotesi alternativa:

$$[F_X(X_N)]^N > 1 - \alpha \quad \text{Ipotesi sul test non soddisfatta}$$

Dato il significato di P-Value, il valore che esso assume in questo caso è $p(X_N) = 1 - [F_X(X_N)]^N$

y	$F(x_N)$	$F(x_N)^N$	$1 - \alpha$
4.526	0.989	0.700	0.950

Dove X_N è il massimo valore campionario, ossia 1493.

Il test è superato.

Con N numerosità del campione.

Si determini la relazione che lega la media dei massimi di precipitazione h_d alle durate utilizzando un modello di regressione:

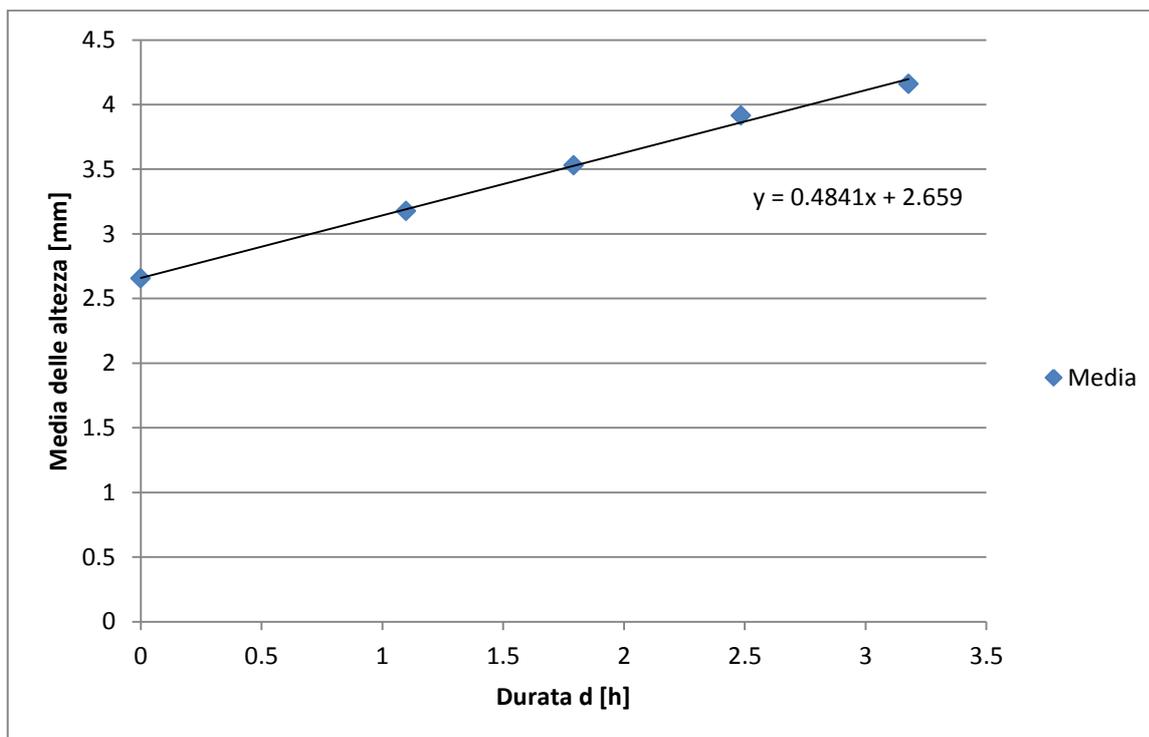
$$\text{media} = \hat{h}_d = a d^n \quad \text{con } d = \text{durata (ore)}.$$

Per la stima di a ed n si usa la regressione lineare sui logaritmi. Per farlo è necessario calcolare le medie dei massimi annui di precipitazione registrati nelle 5 durate: h_d (v. Tabella 3.2).

d	1h	3h	6h	12h	24h
\hat{h}_d	14,24	23,96	34,08	50,11	64,10

Si usino le coordinate logaritmiche e si diagrammino i seguenti valori:

ln(d)	0	1,09861229	1,79175947	2,48490665	3,17805383
ln(media)	2,656012345	3,17653753	3,52867513	3,91426292	4,16044436



Distribuzione GEV

	1h	3h	6h	12h	24h
Media μ [mm]	14,24	23,96	34,08	50,11	64,10
Varianza σ^2 [mm]	37,51	85,12	149,38	371,73	851,13
SQM (σ) (sh) [mm]	6,12	9,23	12,22	19,28	29,17
b0	14,24	23,96	34,08	50,11	64,10
b1	8,66	14,54	20,55	30,44	40,13
b2	6,48	10,72	15,03	22,40	30,09
l1	14,24	23,96	34,08	50,11	64,10
l2	3,08	5,13	7,02	10,77	16,16
l3	1,17	1,01	0,95	1,86	3,84
τ_3	0,38	0,20	0,14	0,17	0,24
c	-0,04	-0,01	0,01	0,00	-0,01
θ_1	11,18	19,56	28,49	41,11	49,61
θ_2	3,06	7,11	10,63	15,46	21,01
θ_3	-0,30	-0,04	0,05	0,00	-0,10
θ_1/μ	0,79	0,82	0,84	0,82	0,77
θ_2/μ	0,22	0,30	0,31	0,31	0,33
θ_3	-0,30	-0,04	0,05	0,00	-0,10

Dove

$$c = \frac{2}{3+\tau} - \frac{\log(2)}{\log(3)}$$

$$\tau = \frac{l_3}{l_2}$$

$$b_0 = \mu(x)$$

$$b_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(i-1)}{(N-1)} x_i$$

Svolte tutte queste operazioni, si può costruire l'intera rappresentazione della probabile altezza di pioggia a diverse durate per diversi tempi di ritorno e la rappresentazione è data dalle curve IDF che sono curve di possibilità pluviometrica

Utilizzare la legge di Gumbel nella forma di dipendenza da media e coefficiente di variazione (parametri stimati con il metodo dei momenti):

\hat{h}

$$h_{d,t} = \hat{h}_d \cdot K_T = \hat{h}_d \cdot \left(1 - Cv \left[0,45 + \frac{\sqrt{6}}{\pi} \ln \left(\ln \left(\frac{T}{T-1} \right) \right) \right] \right) =$$

$$\frac{T}{T-1} = \exp \left[\exp \left[\frac{\pi}{\sqrt{6}} \left[\left(\frac{1-K_t}{Cv} \right) - 0.45 \right] \right] \right]$$

$$T = \frac{ans}{(ans-1)}$$

per rappresentare i quantili di precipitazione relativi alla generica durata d una volta fissato il periodo di ritorno T.

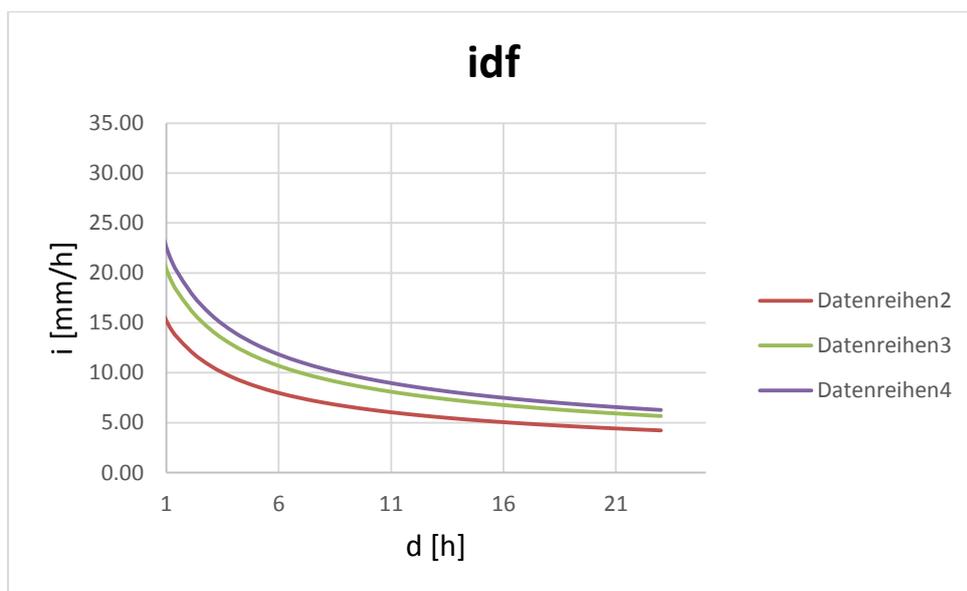
Si costruiscano poi le curve corrispondenti a T = 10, 50 e 100 anni rappresentandole in coordinate cartesiane ed in scala bi-logaritmica. Per la durata d = 6 ore, si determini il valore di precipitazione

d	\hat{h}_d
0	0,0
1	14,3
2	20,0
3	24,3
4	27,9
5	31,1
6	34,0
7	36,6
8	39,1
9	41,4
10	43,5
11	45,6
12	47,6

24	101,469092	135,96645	150,550391
----	------------	-----------	------------

Si dividono i risultati ottenuti per la durata corrispondente e si diagrammi per ottenere le IDF

$$I_{\text{medio}} = \frac{h_{d,t}}{d}$$



Curve IDF (distribuzione GEV)

Sempre per la durata d=6 ore, si stimino i primi tre L-momenti e si utilizzi la distribuzione GEV per determinare il valore di precipitazione $h_{6,T=100}$. Per questa stima può essere usata la relazione nella forma:

$$h_{d,T} = \hat{h}_d \left[\frac{\theta_1}{b_0} + \frac{\theta_2}{b_0 \theta_3} \left[1 - e^{-\theta_3 (-\ln(\ln(\frac{T}{T-1}))} \right) \right]$$

$$\alpha = \frac{\theta_2}{\mu}$$

$$k = \theta_3$$

						medie
θ_1/μ	0,79	0,82	0,84	0,82	0,77	0,81
θ_2/μ	0,22	0,30	0,31	0,31	0,33	0,29
θ_3	-0,30	-0,04	0,05	0,00	-0,10	-0,08

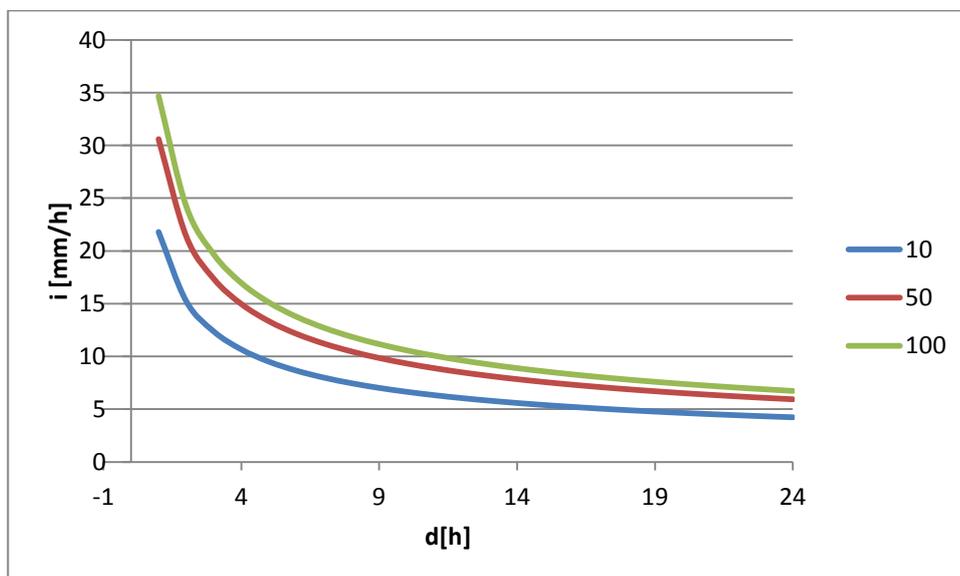
Si costruiscano poi le curve corrispondenti a T = 10, 50 e 100 anni rappresentandole in coordinate cartesiane (v. Figura 3.4) ed in scala bi-logaritmica (v. Figura 3.5). Per avere delle curve più precise, si

considerino intervalli di "d" pari ad 1 ora (d = 1, 2, 3, ..., 24) e si calcoli per ognuno

$$h_{d,T} = \hat{h}_d K_T \quad \text{con } \hat{h}_d = a d^n$$

Dividendo poi per la durata ottengo

$$i_{d,T} = \frac{h_{d,T}}{d} \quad (\text{per ciascuna delle 24 ore})$$



Esercitazione 4: ricostruzione di un idrogramma di piena con il metodo cinematico

Metodo cinematico

Si utilizzi il metodo cinematico per ricostruire l'idrogramma di piena corrispondente a $T = 100$ anni per il

bacino del Chisone a Fenestrelle, le cui caratteristiche morfometriche sono disponibili sull'Atlante dei bacini imbriferi piemontesi1 (v. sitografia).

Si accettano le seguenti ipotesi:

- La portata è funzione del pluviogramma e dipende solo dalla distribuzione delle velocità (non ci sono effetti di vaso)
- La velocità è costante nel tempo e nello spazio qualunque portata circoli e qualunque sia la forma della sezione fluviale.
- È valido il principio di sovrapposizione degli effetti, in virtù della velocità costante.

Il metodo cinematico è una classe di metodo in cui, dato un sistema fisico dove cade la pioggia, si ottiene il risultato in base alla conoscenza della velocità delle gocce.

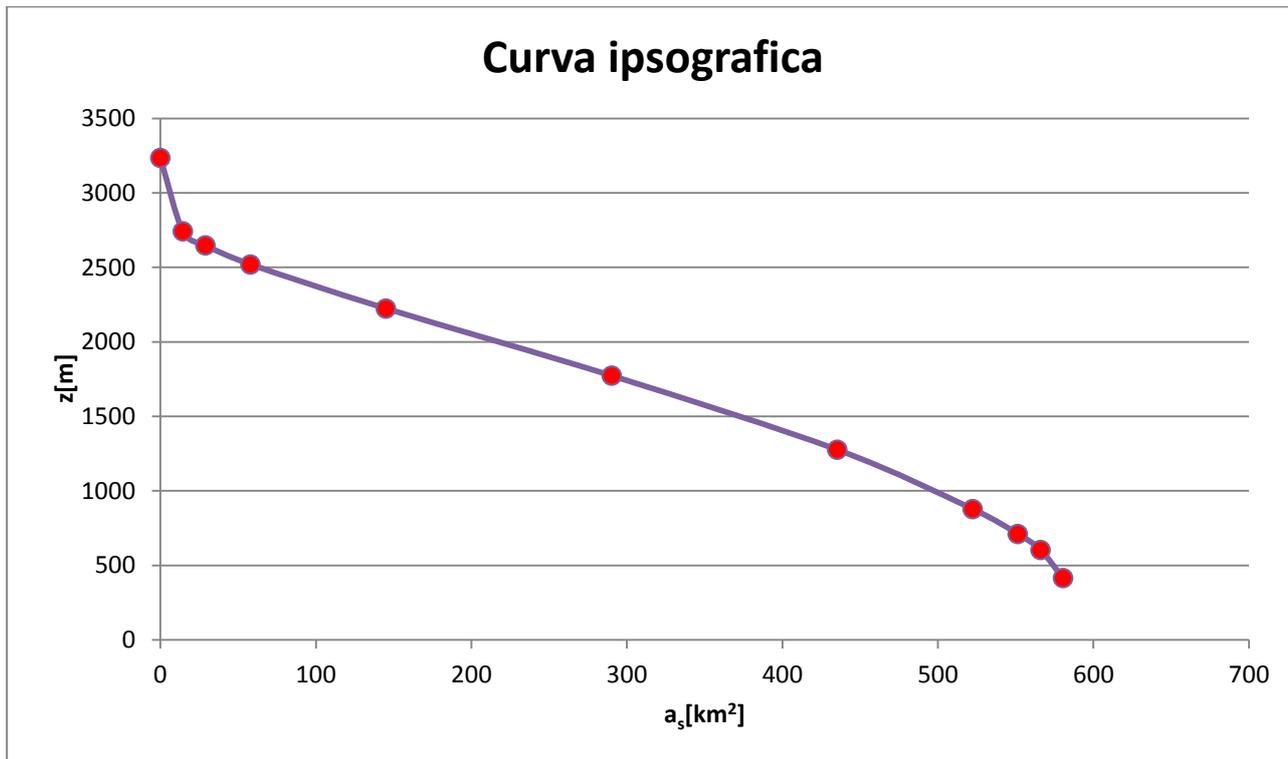
Innanzitutto occorre ricavare i parametri morfometrici del Chisone: curva ipsografica, quota minima (z_{min}), media (z_{media}) e massima (z_{max}), area del bacino (A) e lunghezza dell'asta principale (indicata come LDP nell'Atlante).

Z_{med}	1739
Z_{MIN}	415
Z_{MAX}	3234
A	580,53
L	57,524

- Costruzione curva ipsografica

L'andamento altimetrico di un bacino può essere descritto dalla curva ipsografica. Essa si ottiene riportando in un diagramma cartesiano i punti, le cui ordinate e ascisse rappresentano rispettivamente la quota e la superficie totale delle porzioni di bacino che si trovano a quote superiori a questa (area sovrastata).

La forma di tale curva dà delle indicazioni circa il grado di evoluzione del bacino.



Ricerca sulla curva ipsometrica i valori delle k aree a_j (con $k = 6$) sovrastanti i valori ottenuti dividendo il rilievo del bacino ($z_{max}-z_{min}$) in k dislivelli uguali

Ho un Δz pari a $\frac{z_{max}-z_{min}}{6} = 469.83m$

Partendo quindi dallo z_{min} faccio sei intervallo di larghezza pari a Δz

Trovo l' a_i corrispondente tramite la seguente formula:

$$a_i = \frac{(z_2 - z_1)(a_2 - a_1)}{(z_2 - z_1)} + a_1$$

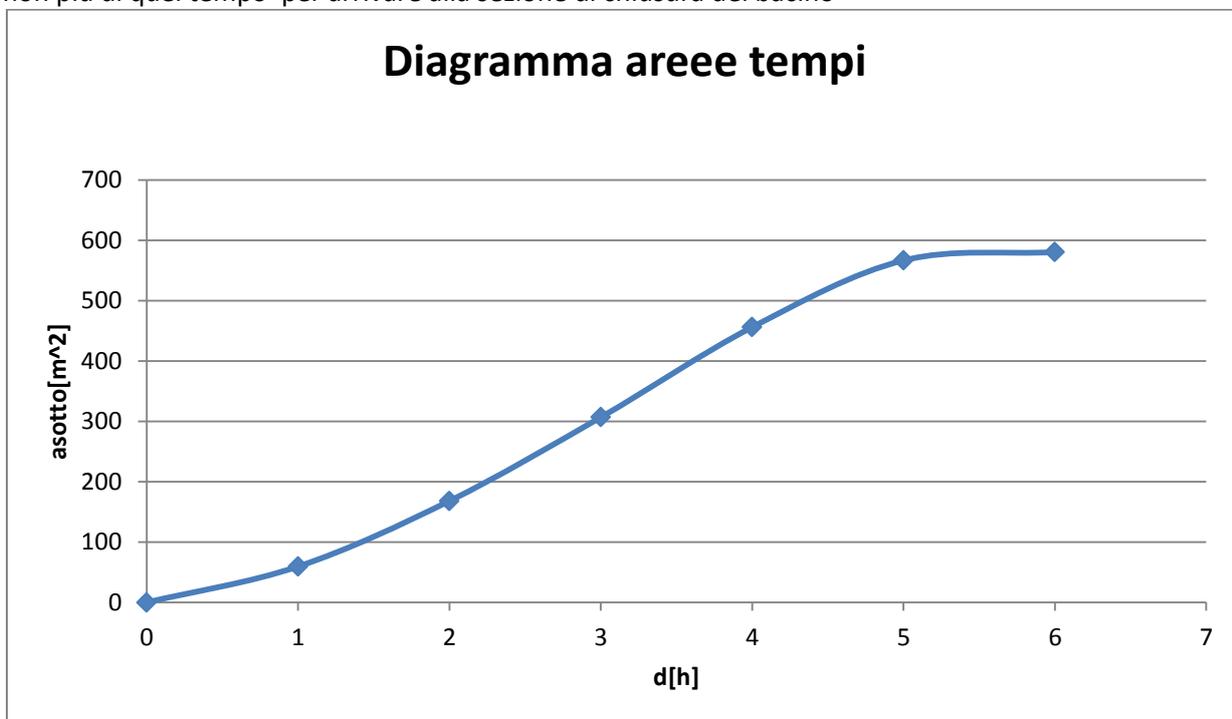
j	z[m]	asovrast[m ²]
1	415,0	580,53
2	884,8	520,9819
3	1354,7	412,4255
4	1824,5	273,6922
5	2294,3	124,4413
6	2764,2	13,85937
7	3234,0	0

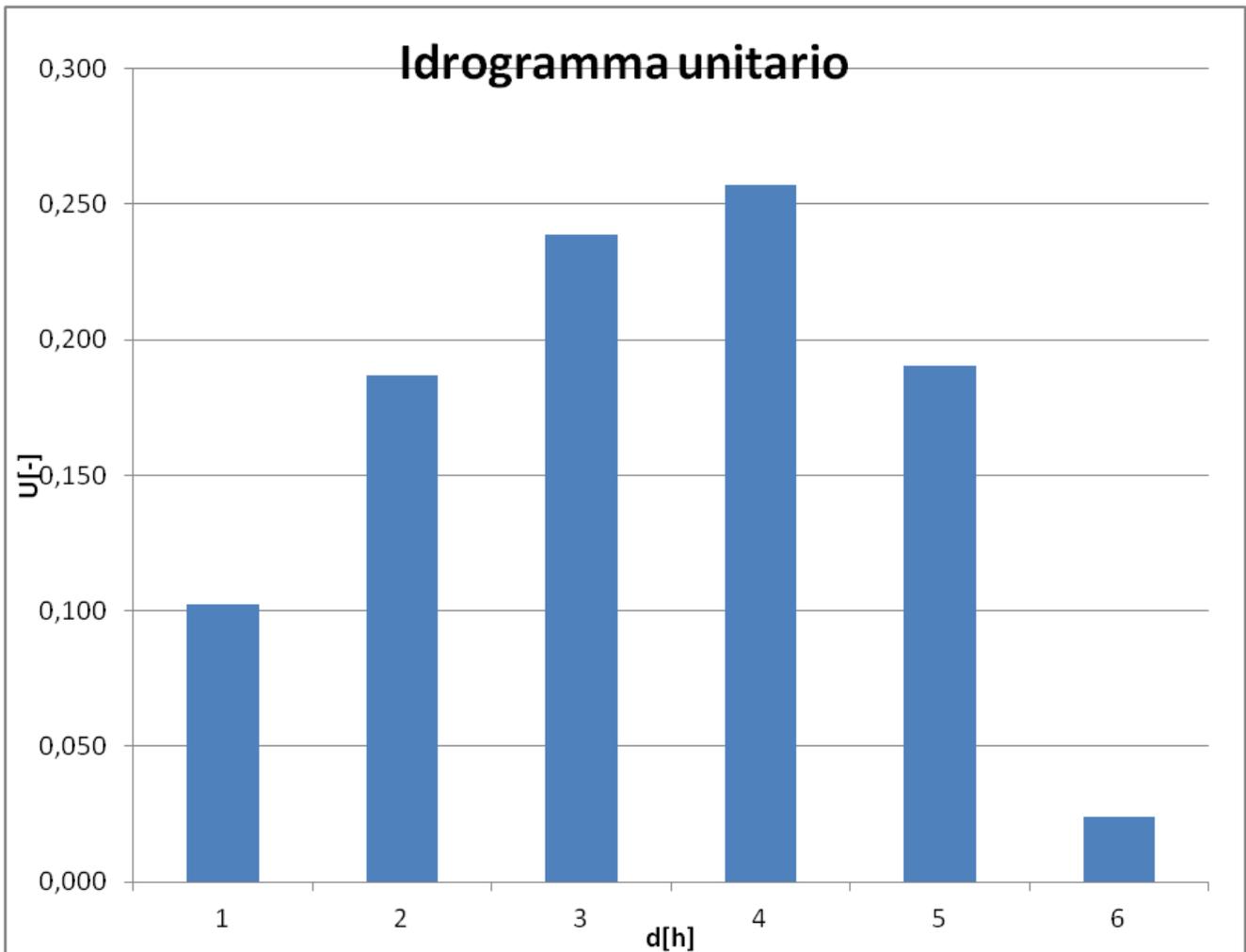
tc	6,275	ore	tc'	6
delta t	1,00			
K	6			

Calcolo l'a_{sottost.} = A - a_{sovrest}

z[m]	a _{sovrast} [m ²]	t[h]	a _{sotto} [m ²]
415,0	580,53	0	0
884,8	520,9819165	1	59,54808354
1354,7	412,4254879	2	168,1045121
1824,5	273,6922201	3	306,8377799
2294,3	124,4413125	4	456,0886875
2764,2	13,85936712	5	566,6706329
3234,0	0	6	580,53

La curva Aree-tempi è una curva , dove al passare del tempo, sommo tutte le aree che hanno impiegato non più di quel tempo per arrivare alla sezione di chiusura del bacino





Costruzione dell'istogramma

Usando la curva IDF già determinata per la stazione di Prigelato e scegliendo K_{100} sulla funzione di Gumbel, costruire lo ietogramma di progetto per una durata t_p di pioggia pari a t_c . Lo ietogramma sarà costruito con il metodo degli alternating blocks (chicago discretizzata). Usare anche qui 6 intervalli

Fissata la durata della pioggia (pari a t_c), si suddivide tale durata in $m = 6$ intervalli e si estragga dalla CPP di riferimento i valori (h_j) necessari a comporre lo ietogramma di progetto ($T=100$):

$$i_j = \frac{h_j - h_{j-1}}{\Delta t} \quad \text{con } \Delta t = 1$$

con i_j = intensità di pioggia

$$h_j = h_{d,T} = h_d \cdot K_T = K_T \cdot a \cdot d^n$$

Applicare la convoluzione in forma discreta, ricostruendo l'idrogramma (lordo) di piena

Dispongo le i in forma Chicago e applico la convoluzione:

j[h]	Aj[km2]	Ui	i[mm/h]
1	59,54808	0,103	7,20
2	108,5564	0,187	9,79
3	138,7333	0,239	32,27
4	149,2509	0,257	12,87
5	110,5819	0,190	8,21
6	13,85937	0,024	6,49

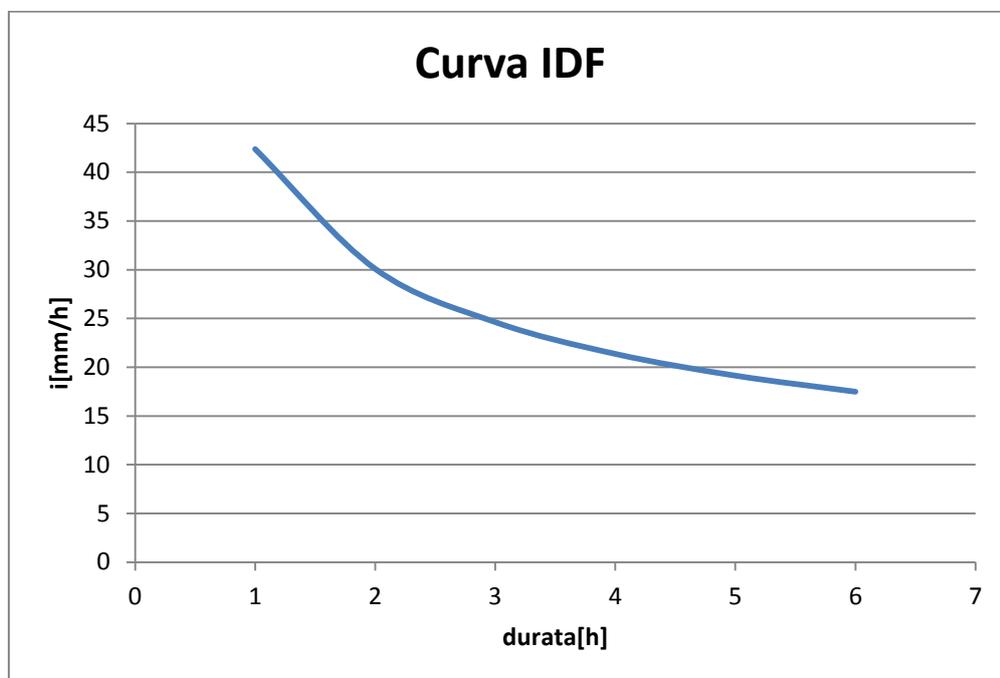
		A[km ²]	59,5	108,6	138,7	149,3	110,6	13,9
	i[mm/h]							
1	7,2		428,83					
2	9,8		582,88	781,76				
3	32,3		1921,51	1062,59	999,08			
4	12,9		766,13	3502,91	1357,97	1074,82		
5	8,2		488,72	1396,66	4476,67	1460,93	796,35	
6	6,5		386,45	890,93	1784,90	4816,05	1082,42	99,81
7				704,50	1138,59	1920,22	3568,27	135,66
8					900,34	1224,91	1422,72	447,22
9						968,60	907,55	178,31
10							717,64	113,74
11								89,94

	Q[m ³ /s]
428,83	119,1199
1364,6	379,067
3983,2	1106,438
6701,8	1861,622
8619,3	2394,253
9060,6	2516,823
7467,3	2074,237
3995,2	1109,774
2054,5	570,6835
831,39	230,9416
89,943	24,98424

a	n	k(T)100
17,438	0,506	2,43

d	h	i
1	42,37434	42,37434
2	60,17611205	30,08806
3	73,87990049	24,62663
4	85,45653953	21,36413
5	95,67132067	19,13426
6	104,9173903	17,48623

Posso quindi rappresentare la mia curva IDF con periodo di ritorno di 100 anni.



Nota la curva IDF media per si costruisca il corrispondente pluviogramma lordo con $K_T=1$, considerando un tempo di pioggia pari a 6 ore ed intervalli di 1 ora. Si dispongano le intensità parziali di pioggia in ordine temporale usando l'ietogramma crescente:

Per la costruzione dello ietogramma crescente considero $i_j = h_j - h_{j-1}$

Metodo Ψ

Immaginando di dover effettuare la stessa valutazione indiretta di QT in un sottobacino di quello per il quale si hanno dati, si proceda alla taratura di Ψ sul bacino chiuso a S. Martino, ricercando quel valore che consente di ottenere un idrogramma (calcolato con il metodo della corrivazione) che abbia portata al colmo uguale alla media campionaria dei massimi delle osservazioni disponibili per il Chisone a S.Martino. Servirà lo ietogramma lordo medio, cioè avente $K(T)=1$. Si tari il coefficiente Ψ nei tre casi corrispondenti alle diverse forme di pluviogramma lordo. Si confrontino i tre valori di Ψ ottenuti con quello ricavato usando la formula razionale:

Ricordando che:

$$a=17.44$$

$$n=0.51$$

$$Q_{\text{media}}=267.61 \text{ m}^3/\text{h}$$

Allora:

$$i_c = a \cdot d^{n-1} = 7,2 \text{ mm/h}$$

Posso con l'ausilio della formula razionale calcolare:

$$\Psi = \frac{Q \cdot 3.6}{A \cdot i_c} = 0.23$$

con $K_{d,t} = 1$ calcolo :

d[h]	hmedio[mm]	i[mm/h]
1	17,438	17,438
2	24,76383212	7,3258321
3	30,40325123	5,6394191
4	35,16730022	4,764049
5	39,37091386	4,2036136
6	43,1758808	3,8049669

letogramma crescente

	A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			Q[m3/s]
i										
1	0,85	50,34117							50,34117	13,98366
2	0,93	55,61542	91,77218						147,3876	40,941
3	1,06	63,03019	101,3872	117,2833					281,7006	78,25018
4	1,25	74,61167	114,9043	129,5711	126,1748				445,2618	123,6838
5	1,63	96,92356	136,0174	146,8458	139,3941	93,48453			612,6654	170,1848
6	3,87	230,7114	176,6921	173,8279	157,9784	103,2789	11,71653		854,2053	237,2793
7			420,588	225,8095	187,0062	117,0483	12,94407		963,396	267,61
8				537,5043	242,9286	138,5553	14,6698		933,6579	259,3494
9					578,2535	179,9889	17,3653		775,6077	215,4466
10						428,4356	22,55823		450,9938	125,2761
11							53,69634		53,69634	14,91565

letogramma decrescente

	A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			qj
i										
1	3,674816	218,8283							218,8283	60,78563
2	1,543817	91,93136	398,9249						490,8563	136,349
3	1,188429	70,76868	167,5913	509,8193					748,1792	207,8276
4	1,003957	59,78372	129,0116	214,1788	548,4697				951,4438	264,29
5	0,885853	52,75086	108,986	164,8747	230,4161	406,3683			963,396	267,61
6	0,801844	47,74827	96,16506	139,2823	177,3741	170,7183	50,93063		682,2187	189,5052
7			87,04531	122,8973	149,8415	131,4188	21,39633		512,5993	142,3887
8				111,2424	132,2144	111,0195	16,47088		370,9472	103,0409
9					119,6759	97,95937	13,91421		231,5495	64,31931
10						88,66946	12,27736		100,9468	28,04078
11							11,11305		11,11305	3,086958

letogramma simmetrico

	A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			qj
i										
1	0,80	47,80451							47,80451	13,27903
2	1,08	64,13284	87,14784						151,2807	42,02241
3	3,33	198,3091	116,9145	111,3735					426,5971	118,4992
4	1,40	83,31113	361,5185	149,4147	119,8169				714,0612	198,3503
5	0,91	54,17791	151,8766	462,0145	160,7421	88,7739			917,5849	254,8847
6	0,73	43,271	98,76659	194,0957	497,0407	119,0959	11,12614		963,396	267,61
			78,88324	126,222	208,8104	368,2639	14,92643		797,1061	221,4183
				100,8114	135,7912	154,7104	46,15496		437,4679	121,5189
					108,4541	100,6094	19,39004		228,4536	63,45934
						80,35509	12,6095		92,96459	25,8235
							10,071		10,071	2,7975

Per trovare le P_{nette} applico il metodo SCS:

Se $P_m - Ia > 0$

$$P_{n1} = \frac{(P_m - Ia)^2}{(P_m - Ia + S)}$$

Trovo le inette sempre per differenza

$$i_j = \frac{h_j - h_{j-1}}{\Delta t}$$

Pn1	i_{netto}
0	0
0	0
0	0
0,34	0,34
0,93	0,59
1,58	0,65

Analogamente a quanto indicato prima, si proceda alla taratura di CN sul bacino chiuso a S. Martino, ricercando (per il solo ietogramma con picco centrale e con $K(T)=1$) il valore CN che consente di ottenere dal metodo della corrivazione una portata al colmo uguale alla media dei massimi osservati.

Faccio un ipotesi su un valore di cn.

cn2	76,9
c	0,2
S0	254
S	76,29908973
Ia	15,25981795
delta t[h]	1

Criterio variazionale per la stima indiretta della piena indice

Nell'ambito di applicazione del metodo dell'evento critico per il progetto idrologico Alfieri et al. (2008) hanno mostrato che, tra le varie forme di ietogramma più efficienti, si distingue per efficacia e semplicità lo ietogramma rettangolare, purché non vincolato ad avere una durata pari al tempo di corrivazione.

La durata "critica" dipende dalla forma della funzione di risposta del bacino ed è da ricavare attraverso prove successive, definendo così un metodo che viene chiamato 'variazionale'. Una volta ricavata la durata critica, questa diventa una proprietà del bacino e può essere usata con riferimento ad una formulazione avanzata del metodo razionale, detta formulazione geomorfoclimatica.

Il metodo, come descritto nell'articolo, consiste nel calcolare le portate al picco derivanti da ietogrammi rettangolari di diverse durate. Affinché questi mantengano sempre la conformità con la curva di possibilità pluviometrica, il loro volume sarà sempre dato da $KT \text{ adn}$.

La durata per la quale si ottiene il picco massimo sarà quella critica. Con riferimento al bacino del Chisone a S. Martino ed alla curva IDF areale già nota si ricerchi, tramite convoluzione, il valore più elevato del picco di piena che risulta dall'applicazione di ietogrammi ad intensità costante di durata variabile tra 1/6 e 6/6 del tempo di corrivazione, imposto pari a 6 ore.

Si utilizzi la precipitazione media, cioè con $KT=1$. La durata di pioggia che produrrà il valore massimo di picco risulterà essere la durata critica per quel bacino Per il calcolo degli assorbimenti si proceda utilizzando il metodo percentuale Ψ (con $\Psi=0.21$) calcolando gli ietogrammi netti per tutte le durate considerate. Per verifica controllare che la pioggia di durata pari al tempo di corrivazione produca un valore di picco di piena uguale a quello della formula razionale tradizionale

Conoscendo i valori di a ed n posso ricavarmi le altezze di pioggia per le diverse durate. Il tempo di corrivazione è posto uguale ad 6 h

Dalle altezze di pioggia posso ricavare le i_{medie} , dividendo ciascuna altezza per la durata corrispondente.

Conoscendo il valore di Ψ pari a 0.21 posso ricavare le i_{nette} come mostrato nella seguente tabella.

d[h]	hmedio[mm]	i[mm/h]	i _{netto} [mm/h]
1	17,438	17,438	3,66198
2	24,76383212	12,38192	2,600202372
3	30,40325123	10,13442	2,128227586
4	35,16730022	8,791825	1,846283261
5	39,37091386	7,874183	1,653578382
6	43,1758808	7,19598	1,511155828

tp=4			A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			
0	j	ij[mm/h]										Q[m ³ /h]
1		1,846283		109,9426							109,9426	30,53962
2		1,846283		109,9426	200,4259						310,3685	86,21349
3		1,846283		109,9426	200,4259	256,1409					566,5095	157,3637
4		1,846283		109,9426	200,4259	256,1409	275,5595				842,0689	233,908
5					200,4259	256,1409	275,5595	204,1656			936,2919	260,0811
6						256,1409	275,5595	204,1656	25,58832		761,4543	211,5151
7							275,5595	204,1656	25,58832		505,3134	140,3648
8								204,1656	25,58832		229,7539	63,82053
9									25,58832		25,58832	7,107866

tp=5			A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			
0	j	ij[mm/h]										Q[m ³ /h]
1		1,653578		98,46742							98,46742	27,35206
2		1,653578		98,46742	179,5066						277,974	77,215
3		1,653578		98,46742	179,5066	229,4063					507,3803	140,939
4		1,653578		98,46742	179,5066	229,4063	246,7981				754,1784	209,494
5		1,653578		98,46742	179,5066	229,4063	246,7981	182,8559			937,0343	260,2873
6					179,5066	229,4063	246,7981	182,8559	22,91755		861,4844	239,3012
7						229,4063	246,7981	182,8559	22,91755		681,9779	189,4383
8							246,7981	182,8559	22,91755		452,5715	125,7143
9								182,8559	22,91755		205,7735	57,1593
10									22,91755		22,91755	6,365986

tp=6			A	59,54808	108,5564	138,7333	149,2509	110,5819	13,85937			
0	j	ij[mm/h]										Q[m ³ /h]
1		1,511156		89,98643							89,98643	24,99623
2		1,511156		89,98643	164,0457						254,0321	70,56448
3		1,511156		89,98643	164,0457	209,6476					463,6797	128,7999
4		1,511156		89,98643	164,0457	209,6476	225,5414				689,2211	191,4503
5		1,511156		89,98643	164,0457	209,6476	225,5414	167,1066			856,3276	237,8688
6		1,511156		89,98643	164,0457	209,6476	225,5414	167,1066	20,94366		877,2713	243,6865
7					164,0457	209,6476	225,5414	167,1066	20,94366		787,2849	218,6902
8						209,6476	225,5414	167,1066	20,94366		623,2392	173,122
9							225,5414	167,1066	20,94366		413,5916	114,8866
10								167,1066	20,94366		188,0502	52,23617
11									20,94366		20,94366	5,817684

Dai grafici si può evidenziare come la massima portata è 260,28 m³/h nell'ambito dell'5 ore che quindi costituirà la durata critica.

$$q(t) = \int_0^t i(\tau) \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-\frac{t-\tau}{k}} d\tau$$

Questo però è un integrale di convoluzione perché è un integrale tra 0 e t e ha una funzione di ingresso. Il termine tra parentesi ha significato di una funzione di risposta e si pone allora

$$u(t) = \frac{1}{k} e^{-\frac{t}{k}}$$

Si nota che questa è una funzione esponenziale decrescente che ricorda, nell'espressione, la pdf esponenziale, il cui integrale da 0 a infinito vale 1.

Sempre riferimento all'esponenziale si nota che il parametro k ha dimensione [t]. Questo parametro coincide con il momento di I ordine rispetto all'origine, cioè la media è a distanza k dall'origine

L'IUH è chiamato istantaneo perché è un idrogramma reale ottenuto tramite l'immissione nel sistema di una pioggia di valore unitario (h=1) concentrata in un intervallo di tempo infinitesimo.

Nel caso particolare che l'intensità di pioggia p(t) sia costante per $0 < t < T$ ed ancora che $q(0)=0$, l'integrale può essere calcolato e si ottiene

$$q(t) = p \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$

dalla quale si ricava che la portata raggiunge il valore massimo Q alla fine della pioggia. Ponendo nell'integrale $p(t)=0$ si ricava per la curva di esaurimento

$$q(t) = Q \cdot e^{-\frac{t-T}{k}}$$

dove k è metà del tempo di corrivazione e T è la durata di pioggia

Esercitazione 5:

valutazione dell'infiltrazione con il metodo Green-Ampt occorre definire:

- L'infiltrazione cumulata F [mm]: è il volume d'acqua che si infila attraverso l'unità di superficie del suolo in un assegnato intervallo di tempo. Se il suolo non è ancora saturo, l'acqua che si infila nella superficie del terreno va, almeno in parte, ad accrescere il contenuto d'acqua del suolo. Ricordando che il contenuto d'acqua o contenuto di umidità del suolo si misura generalmente come rapporto tra il volume d'acqua e il volume totale di un'assegnata porzione di suolo (esso varia tra zero e il valore della porosità), l'infiltrazione cumulata torna utile per tener conto delle variazioni del contenuto d'umidità del suolo sul tasso d'infiltrazione.

- Il tasso di infiltrazione f [mm/h]: è il volume d'acqua che si infila attraverso l'unità di superficie del terreno nell'unità di tempo. Esso dipende da diversi fattori come l'entità della precipitazione, la struttura del suolo (infiltrazione maggiore, per esempio, nei suoli sabbiosi rispetto a quelli argillosi) e il suo contenuto d'acqua al momento considerato. Da un punto di vista più pratico riguardo l'infiltrazione, si è potuto constatare che la pioggia in un primo momento si infila totalmente fino alla saturazione della superficie del terreno. Da questo momento in poi si forma un velo d'acqua sul terreno che dà luogo al deflusso superficiale. L'intervallo di tempo che intercorre tra l'inizio della pioggia ed il raggiungimento della saturazione prende il nome di tempo di saturazione t_p (o ponding time). Il fenomeno dell'infiltrazione è schematizzato da diversi modelli. In questo caso si adotterà quello di Green-Ampt

Il modello di Green-Ampt è decisamente semplificato rispetto al caso reale. Esso presuppone che il fronte dell'acqua, che avanza verso il basso, costituisca una netta divisione (orizzontale) tra gli strati del suolo non ancora raggiunti dall'acqua di infiltrazione (nei quali il contenuto di umidità è uguale al contenuto di umidità iniziale) e gli strati già raggiunti (nei quali si assume che il mezzo poroso sia saturo e quindi che il contenuto di umidità sia uguale alla porosità). Cioè data una intensità di pioggia pari a w , finché nel suolo $\theta < \theta_s$ (saturo) allora il tasso di infiltrazione effettivo f è pari a w ; mentre l'infiltrabilità del suolo f_c è maggiore di w . Al tempo di ponding t_p si ha $f_c = w$.

Si ricorda che il tempo di ponding è dato dall'equazione:

$$t_p = \frac{K \cdot \Psi \cdot \Delta\theta}{w \cdot (w - K)} \quad \text{dove: } \Delta\theta = (1 - \text{grado sat}) \cdot n$$

- A tale istante l'altezza di acqua infiltrata può essere valutata come:

$$F_p = w \cdot t_p$$

- Prima del tempo di ponding ($t < t_p$; $f_c > w$; $f = w$):

$$\begin{cases} F(t) = wt \\ f(t) = \frac{F(t)}{t} = w \end{cases}$$

- Dopo il ponding ($t > t_p$; $f_c < w$) per l'infiltrazione cumulata vale l'equazione di Green-Ampt:

$$F = F_p + K \cdot (t - t_p) + \Psi \cdot \Delta\theta \ln \left(\frac{\Psi \cdot \Delta\theta + F}{\Psi \cdot \Delta\theta + F_p} \right)$$

dove F è ottenuta con il metodo delle successive sostituzioni, utilizzando un valore di primo tentativo pari ad esempio a $(w \cdot t_p)$.

Simulazione di una sequenza di Infiltrazione con il metodo GREEN-AMPT

Si ricorda che:

- Al tempo di ponding l'altezza di acqua infiltrata può essere valutata come:

$$F_p - F_0 = w t_p \quad (1)$$

Di solito si ha $F_0=0$, specificando con ciò che l'acqua contenuta nel suolo corrisponde solo al contenuto d'acqua iniziale.

- se si raggiunge il ponding, a partire da quell'istante l'infiltrazione cumulata si ricava da:

$$F_1 = F_p + K(t - t_p) + \psi \Delta \theta \ln \left(\frac{\psi \Delta \theta + F_1}{\psi \Delta \theta + F_p} \right) \quad (2)$$

Ottenuto F_1 con il metodo delle successive sostituzioni, questa diventa la condizione iniziale per un nuovo passo temporale, nel quale prende il posto di F_p nella relazione (2).

- Il tasso di infiltrazione potenziale corrispondente ad ogni valore F è dato da:

$$f_c = K \left(\frac{\psi \Delta \theta}{F} + 1 \right) \quad (4)$$

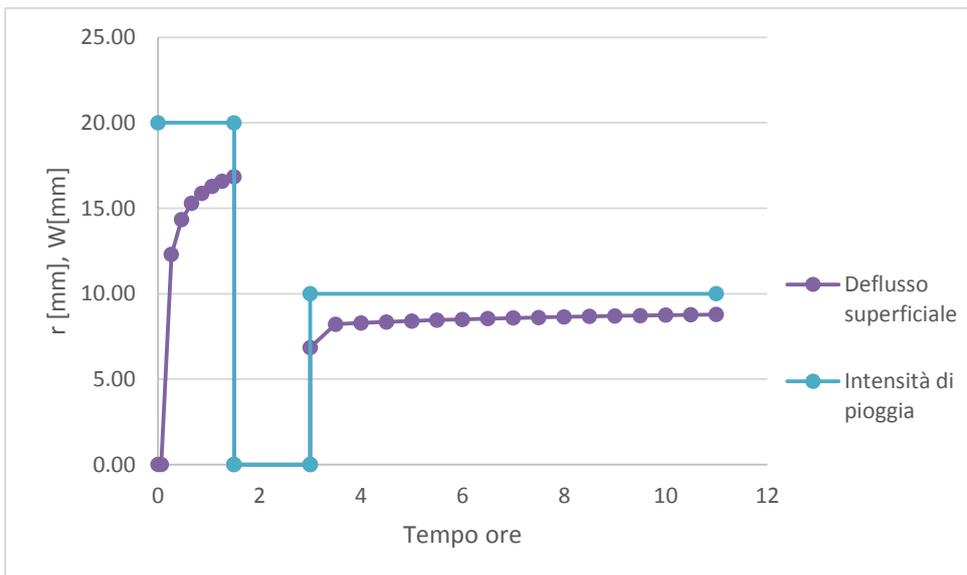
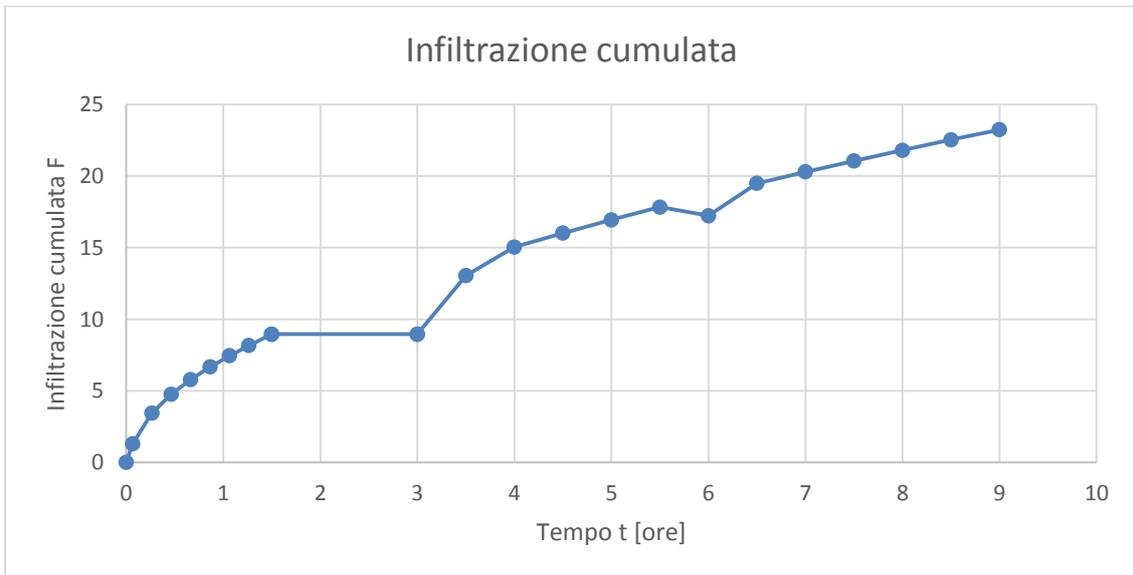
Si valutino:

- l'evoluzione dell'infiltrazione cumulata (F), del tasso di infiltrazione (f) e del deflusso superficiale (r) a seguito di una sequenza di precipitazione ($d=6$ ore) definita come segue:
- Intensità w costante, pari a **20 mm/h**, per le prime 1.5 ore
- Intensità w **pari a 0**, nell'intervallo 1.5-3 ore
- Intensità w costante, pari a **10 mm/h**, per le ore comprese tra la terza e la sesta

I terreni su cui simulare i flussi sono un limoso ed uno argilloso (le caratteristiche sono riportate in tabella). Ad entrambi compete un **grado di saturazione iniziale del 30%**.

Tipo di suolo	Porosità (n)	Potenziale di suzione (Ψ , mm)	Conducibilità sat. (K, mm/h)
Limo	0.486	166.8	6.5
Argilla	0.385	316.3	0.3

Rappresentare gli andamenti temporali del tasso di infiltrazione effettivo, dell'infiltrazione cumulata e del deflusso superficiale nei due casi.



ore costituito da tre eventi parziali rettangolari: - nelle prime due ore si ha: $w_1 = 10 \text{ mm/h}$ - nella terza ora si ha $w_2 = 20 \text{ mm/h}$ - nella quarta ora si ha $w_3 = 10 \text{ mm/h}$

t[h]	w[mm/h]	fc[mm/h]	f'[mm/h]	r[mm/h]	F[mm]	wt[mm]	R[mm]
0	10	55	10	0	0	0	0
0,5	10	28,0906942	10	0	5	5	0
1	10	15,3796382	10	0	10	10	0
1,5	10	9,37536045	10	0	15	15	0
2	10	6,53914049	10	0	20	20	0
2	20	6,53914049	20	0	20	20	0
2,1	20	6,18545847	20	0	22,00	22	0
2,2	20	5,88104154	20	0	24,00	24	0
2,3	20	5,61902746	20	0	26,00	26	0
2,321315	20	5,56808098	20	0	26,43	26,42631	0
2,5	20	5,19940504	16,23819491	3,761805089	29,64892	30	0,351084
2,6	20	5,03233748	14,53351198	5,466488023	31,18537	32	0,814629
2,7	20	4,88854111	13,06627778	6,933722222	32,56353	34	1,436472
2,8	20	4,76477442	11,8034176	8,1965824	33,80543	36	2,194566
2,9	20	4,65824744	10,71646377	9,283536228	34,93007	38	3,06993
3	20	4,56655882	9,780913942	10,21908606	35,95377	40	4,04623
3	10	4,56655882	9,780913942	0,219086058	35,95377	40	4,04623
3,2	10	4,4197171	8,28260638	1,71739362	37,75264	42	4,247358
3,4	10	4,31093407	7,172632838	2,827367162	39,29262	44	4,707376
3,6	10	4,23034563	6,350344214	3,649655786	40,64082	46	5,359183
3,8	10	4,17064424	5,741177819	4,258822181	41,84693	48	6,153072
4	10	4,12641636	5,289896254	4,710103746	42,94778	50	7,052218

Stimo la f_c teorica come

$$f_c(t) = f_1 + (f_0 - f_1) \cdot e^{-kt}$$

Il tempo di Ponding t_p , si ricava combinando insieme le due equazioni precedenti, in modo da ottenere una relazione che leghi la capacità di infiltrazione con il volume di infiltrazione. Questa relazione si chiama Infiltrability-dept:

$$F_c = \frac{f_0 - f_c}{k} - \frac{f_1}{k} \ln \left[\frac{f_c - f_1}{f_0 - f_1} \right]$$

Calcolo il tempo di ponding per verificare se si verifica saturazione nell'intervallo della prima intensità di pioggia come:

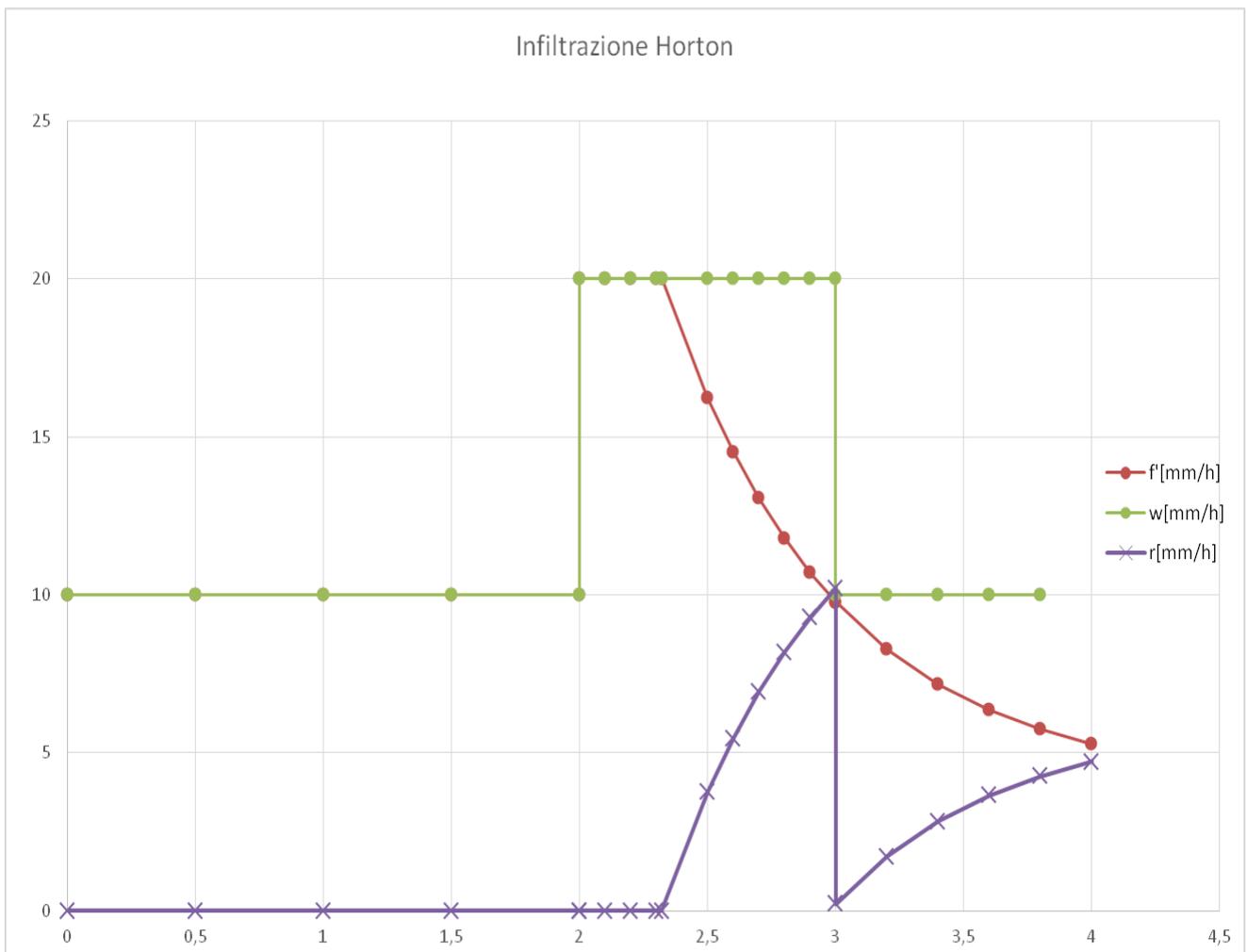
Quindi per calcolare la $f'(t)$ uso la seguente espressione

Dove $f_0 = w_2$

$$f_c(t) = f_1 + (w_2 - f_1) \cdot e^{-k(t-t_p)}$$

E il volume cumulato di infiltrazione:

$$F_c(t) = f_1 \cdot (t - t_p) + (w_2 - f_1) \cdot \frac{1}{k} \cdot [1 - e^{-k(t-t_p)}]$$



Quando cambia intensità devo controllare che la mia $f_c < w$ (saturazione), se ciò è verificato allora rimango nella stessa, se no ricalcolo un nuovo f_0 da cui dipende un t_p

ESERCITAZIONE 7

Costruzione di una curva di durata. Metodo speditivo Si costruisca la curva utilizzando il modello log-normale sui dati della curva media reperiti dalla Pubblicazione n.17 del SII con riferimento alla stazione di Gaiola

d	10	91	182	274	355	365
Q	55,3	22,3	12,7	8,78	5,44	4,2
lnQ	4,013	3,105	2,542	2,172	1,694	1,435
1-F=Φ	0,0273	0,2486	0,4973	0,7486	0,9699	0,9973 prob sup
z	-1,92169	-0,6788	-0,00685	0,670197	1,879991	2,778296031

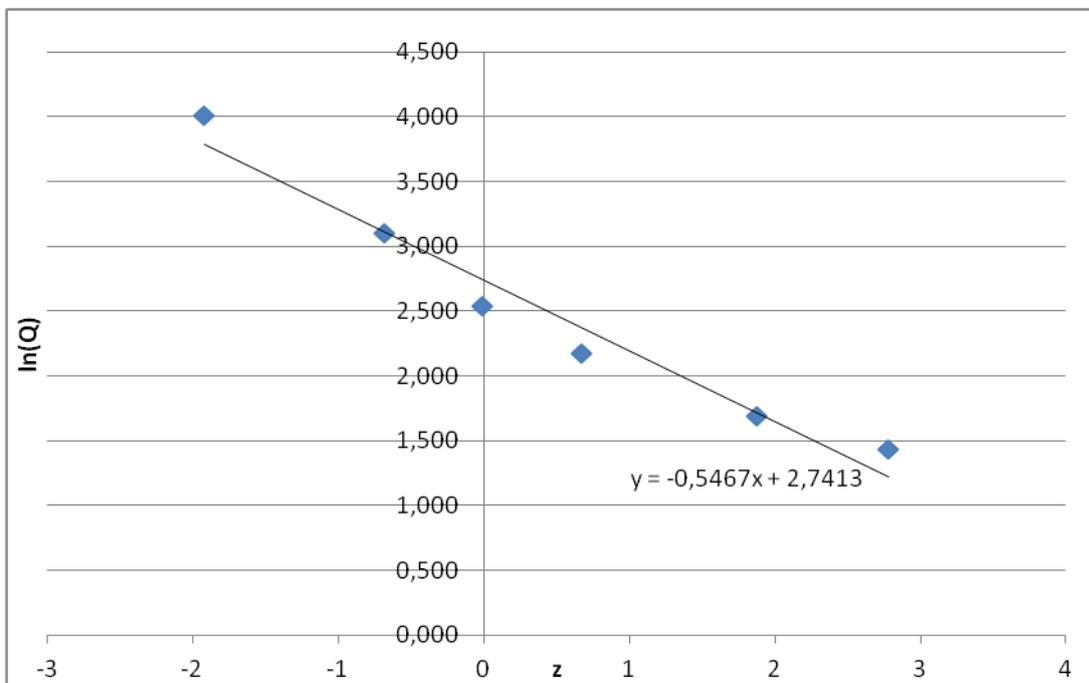
Dove Φ è ricavata come

$$\Phi = \frac{d}{365+1}$$

E la variabile ridotta z come

$$z = \text{INV.NORM.ST}(F)$$

Si procede con la regressione lineare della variabile y=lnQ per ricavare i valori di media e deviazione standard



33	0,090164	-1,33975	3,473739	32,25713
34	0,092896	-1,32313	3,464655	31,96542
35	0,095628	-1,30687	3,455766	31,68254
36	0,098361	-1,29095	3,447062	31,40798
37	0,101093	-1,27535	3,438533	31,14125
38	0,103825	-1,26005	3,430171	30,88192
39	0,106557	-1,24505	3,421967	30,6296
40	0,10929	-1,23031	3,413913	30,38391
41	0,112022	-1,21585	3,406003	30,14451
42	0,114754	-1,20163	3,398229	29,91109
43	0,117486	-1,18765	3,390586	29,68335
44	0,120219	-1,17389	3,383068	29,46103
45	0,122951	-1,16036	3,37567	29,24386
46	0,125683	-1,14704	3,368385	29,03161
47	0,128415	-1,13391	3,361211	28,82407
48	0,131148	-1,12098	3,354141	28,62102
49	0,13388	-1,10824	3,347173	28,42227
50	0,136612	-1,09567	3,340302	28,22764
51	0,139344	-1,08327	3,333524	28,03696
52	0,142077	-1,07104	3,326836	27,85008
53	0,144809	-1,05896	3,320234	27,66683
54	0,147541	-1,04704	3,313716	27,48707
55	0,150273	-1,03526	3,307278	27,31068
56	0,153005	-1,02363	3,300918	27,13753
57	0,155738	-1,01213	3,294632	26,96749
58	0,15847	-1,00077	3,288419	26,80045
59	0,161202	-0,98953	3,282276	26,63632
60	0,163934	-0,97842	3,2762	26,47497
61	0,166667	-0,96742	3,270189	26,31632
62	0,169399	-0,95654	3,264242	26,16028
63	0,172131	-0,94578	3,258356	26,00676
64	0,174863	-0,93512	3,25253	25,85567
65	0,177596	-0,92457	3,246761	25,70693
66	0,180328	-0,91412	3,241047	25,56048
67	0,18306	-0,90376	3,235388	25,41623
68	0,185792	-0,89351	3,229781	25,27413
69	0,188525	-0,88335	3,224225	25,1341
70	0,191257	-0,87327	3,218719	24,99608
71	0,193989	-0,86329	3,213261	24,86001
72	0,196721	-0,85339	3,207849	24,72584
73	0,199454	-0,84357	3,202482	24,5935
74	0,202186	-0,83384	3,19716	24,46295
75	0,204918	-0,82418	3,19188	24,33414
76	0,20765	-0,8146	3,186643	24,20702
77	0,210383	-0,80509	3,181445	24,08153
78	0,213115	-0,79566	3,176287	23,95765
79	0,215847	-0,7863	3,171168	23,83531

127	0,346995	-0,39345	2,956398	19,22858
128	0,349727	-0,38606	2,952358	19,15106
129	0,352459	-0,37869	2,94833	19,07407
130	0,355191	-0,37134	2,944313	18,9976
131	0,357923	-0,36401	2,940307	18,92165
132	0,360656	-0,35671	2,936311	18,8462
133	0,363388	-0,34942	2,932327	18,77125
134	0,36612	-0,34215	2,928352	18,69679
135	0,368852	-0,33489	2,924387	18,6228
136	0,371585	-0,32766	2,920431	18,54929
137	0,374317	-0,32044	2,916485	18,47623
138	0,377049	-0,31324	2,912548	18,40364
139	0,379781	-0,30605	2,90862	18,33149
140	0,382514	-0,29889	2,904701	18,25978
141	0,385246	-0,29173	2,90079	18,1885
142	0,387978	-0,28459	2,896887	18,11765
143	0,39071	-0,27747	2,892992	18,04722
144	0,393443	-0,27036	2,889104	17,9772
145	0,396175	-0,26326	2,885225	17,90759
146	0,398907	-0,25618	2,881352	17,83837
147	0,401639	-0,24911	2,877486	17,76955
148	0,404372	-0,24205	2,873628	17,70111
149	0,407104	-0,235	2,869775	17,63305
150	0,409836	-0,22797	2,865929	17,56537
151	0,412568	-0,22094	2,86209	17,49805
152	0,415301	-0,21393	2,858256	17,4311
153	0,418033	-0,20693	2,854428	17,3645
154	0,420765	-0,19994	2,850605	17,29825
155	0,423497	-0,19295	2,846788	17,23235
156	0,42623	-0,18598	2,842976	17,16678
157	0,428962	-0,17902	2,839169	17,10155
158	0,431694	-0,17206	2,835367	17,03665
159	0,434426	-0,16512	2,831569	16,97207
160	0,437158	-0,15818	2,827776	16,90781
161	0,439891	-0,15125	2,823986	16,84386
162	0,442623	-0,14432	2,820201	16,78022
163	0,445355	-0,13741	2,81642	16,71689
164	0,448087	-0,13049	2,812642	16,65385
165	0,45082	-0,12359	2,808867	16,59111
166	0,453552	-0,11669	2,805096	16,52866
167	0,456284	-0,1098	2,801327	16,46649
168	0,459016	-0,10291	2,797562	16,4046
169	0,461749	-0,09603	2,793799	16,34299
170	0,464481	-0,08915	2,790039	16,28165
171	0,467213	-0,08228	2,786281	16,22058
172	0,469945	-0,07541	2,782525	16,15978
173	0,472678	-0,06854	2,778771	16,09923

221	0,603825	0,263261	2,597375	13,42845
222	0,606557	0,270357	2,593496	13,37645
223	0,60929	0,277468	2,589608	13,32455
224	0,612022	0,284593	2,585713	13,27275
225	0,614754	0,291732	2,58181	13,22105
226	0,617486	0,298886	2,577899	13,16944
227	0,620219	0,306055	2,57398	13,11793
228	0,622951	0,31324	2,570052	13,0665
229	0,625683	0,320441	2,566115	13,01516
230	0,628415	0,327659	2,562169	12,9639
231	0,631148	0,334894	2,558213	12,91273
232	0,63388	0,342147	2,554248	12,86163
233	0,636612	0,349417	2,550273	12,81061
234	0,639344	0,356707	2,546289	12,75966
235	0,642077	0,364015	2,542293	12,70878
236	0,644809	0,371342	2,538287	12,65797
237	0,647541	0,37869	2,53427	12,60723
238	0,650273	0,386058	2,530242	12,55654
239	0,653005	0,393447	2,526202	12,50592
240	0,655738	0,400858	2,522151	12,45536
241	0,65847	0,408291	2,518087	12,40485
242	0,661202	0,415746	2,514011	12,35439
243	0,663934	0,423225	2,509923	12,30398
244	0,666667	0,430727	2,505821	12,25362
245	0,669399	0,438254	2,501707	12,2033
246	0,672131	0,445806	2,497578	12,15302
247	0,674863	0,453383	2,493436	12,10279
248	0,677596	0,460986	2,489279	12,05258
249	0,680328	0,468616	2,485108	12,00241
250	0,68306	0,476273	2,480921	11,95227
251	0,685792	0,483959	2,47672	11,90216
252	0,688525	0,491673	2,472503	11,85207
253	0,691257	0,499416	2,468269	11,802
254	0,693989	0,50719	2,464019	11,75195
255	0,696721	0,514994	2,459753	11,70192
256	0,699454	0,52283	2,455469	11,6519
257	0,702186	0,530698	2,451168	11,60189
258	0,704918	0,538598	2,446848	11,55188
259	0,70765	0,546533	2,44251	11,50188
260	0,710383	0,554503	2,438153	11,45187
261	0,713115	0,562507	2,433777	11,40187
262	0,715847	0,570548	2,429381	11,35186
263	0,718579	0,578626	2,424965	11,30184
264	0,721311	0,586742	2,420528	11,2518
265	0,724044	0,594897	2,41607	11,20175
266	0,726776	0,603091	2,41159	11,15168
267	0,729508	0,611326	2,407088	11,10159

315	0,860656	1,08327	2,149076	8,576931
316	0,863388	1,095668	2,142298	8,518994
317	0,86612	1,108237	2,135427	8,460658
318	0,868852	1,120983	2,128459	8,401906
319	0,871585	1,133914	2,121389	8,342719
320	0,874317	1,147038	2,114215	8,283078
321	0,877049	1,160362	2,10693	8,222961
322	0,879781	1,173895	2,099532	8,162347
323	0,882514	1,187647	2,092014	8,101211
324	0,885246	1,201627	2,084371	8,039531
325	0,887978	1,215846	2,076597	7,977277
326	0,89071	1,230315	2,068687	7,914424
327	0,893443	1,245046	2,060633	7,85094
328	0,896175	1,260053	2,052429	7,786793
329	0,898907	1,275349	2,044067	7,721949
330	0,901639	1,290949	2,035538	7,656371
331	0,904372	1,30687	2,026834	7,590019
332	0,907104	1,323129	2,017945	7,522851
333	0,909836	1,339746	2,008861	7,45482
334	0,912568	1,356741	1,999569	7,385876
335	0,915301	1,374138	1,990059	7,315964
336	0,918033	1,39196	1,980315	7,245027
337	0,920765	1,410236	1,970324	7,172999
338	0,923497	1,428996	1,960068	7,09981
339	0,92623	1,448272	1,94953	7,025383
340	0,928962	1,468102	1,938689	6,949631
341	0,931694	1,488527	1,927522	6,872462
342	0,934426	1,509592	1,916006	6,79377
343	0,937158	1,531349	1,904111	6,713439
344	0,939891	1,553857	1,891806	6,631337
345	0,942623	1,57718	1,879056	6,547319
346	0,945355	1,601394	1,865818	6,461217
347	0,948087	1,626586	1,852046	6,372843
348	0,95082	1,652854	1,837685	6,281978
349	0,953552	1,680314	1,822672	6,188373
350	0,956284	1,709104	1,806933	6,091735
351	0,959016	1,739384	1,790379	5,991721
352	0,961749	1,771349	1,772904	5,887925
353	0,964481	1,805233	1,754379	5,779858
354	0,967213	1,841326	1,734647	5,666927
355	0,969945	1,879991	1,713509	5,548396
356	0,972678	1,92169	1,690712	5,423342
357	0,97541	1,967025	1,665927	5,290578
358	0,978142	2,016805	1,638713	5,148537
359	0,980874	2,072151	1,608455	4,995088
360	0,983607	2,134683	1,574269	4,82721
361	0,986339	2,206881	1,534798	4,64039

2.4 Distribuzione Lognormale a 2 parametri

$$F(x) = \frac{1}{\theta_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2} \right)^2 \right] dx$$

$$f(x) = \frac{1}{x\theta_2\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x)-\theta_1}{\theta_2} \right)^2 \right] \quad x > 0$$

$$x(F) = \exp \left[\theta_1 + \theta_2 \Phi^{-1}(F) \right] \quad \theta_2 > 0$$

<i>Momenti</i>	<i>L Momenti</i>
$\mu = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$	$\lambda_1 = \exp(\theta_1 + \theta_2^2/2)$
$\sigma^2 = [\exp(\theta_2^2) - 1] \exp(2\theta_1 + \theta_2^2)$	$\lambda_2 = e^{\theta_1 + \theta_2^2/2} [2\Phi(\theta_2/\sqrt{2}) - 1]$
<i>Parametri(M)</i>	<i>Parametri(L_M)</i>
$\theta_1 = \ln \mu - 1/2 \ln(1 + \sigma^2/\mu^2)$	$\theta_1 = \ln \lambda_1 - \theta_2^2/2$
$\theta_2 = \sqrt{\ln(1 + \sigma^2/\mu^2)}$	$\theta_2 = \sqrt{2} \Phi^{-1} \left(\frac{\tau+1}{2} \right)$

Note

Il simbolo $\Phi(\cdot)$ rappresenta la funzione di probabilità cumulata della distribuzione Normale standard, e $\Phi^{-1}(\cdot)$ la relativa funzione quantile.

Proprietà speciali

Connessione con parametri della Distribuzione Normale della grandezza $y = \ln x$

La variabile casuale x ha distribuzione lognormale, con parametri θ_1 e θ_2 , se $\ln x$ ha distribuzione normale con media θ_1 e deviazione standard θ_2 .

La distribuzione lognormale si utilizza per rappresentare variabili aleatorie continue che si ritengono avere distribuzione asimmetrica.

2.7 Distribuzione GEV

$$F(x) = e^{-e^{-y}}$$

$$f(x) = \frac{1}{\theta_2} e^{-(1-\theta_3)y - e^{-y}}$$

$$y = \begin{cases} -\theta_3^{-1} \ln\{1 - \theta_3(x - \theta_1)/\theta_2\}, & \theta_3 \neq 0 \\ (x - \theta_1)/\theta_2, & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

$$x(F) = \begin{cases} \theta_1 + \theta_2[1 - (-\ln F)^{\theta_3}]/\theta_3, & \theta_3 \neq 0 \\ \theta_1 - \theta_2 \ln(-\ln F), & \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Momenti

$$\mu = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]/\theta_3$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{\theta_2}{\theta_3}\right)^2 (g_2 - g_1^2)$$

$$\begin{cases} \gamma = +\frac{g_3 - 3g_1g_2 + 2g_1^3}{(g_2 - g_1^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ if } \theta_3 < 0 \\ \gamma = -\frac{g_3 - 3g_1g_2 + 2g_1^3}{(g_2 - g_1^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ if } \theta_3 > 0 \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{g_4 - 4g_1g_3 + 6g_2g_1^2 - 3g_1^4}{(g_2 - g_1^2)^2} - 3$$

$$g_k = \Gamma(1 + k\theta_3)$$

L Momenti

$$\lambda_1 = \theta_1 + \theta_2[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]/\theta_3$$

$$\lambda_2 = \theta_2(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1 + \theta_3)/\theta_3$$

$$\tau_3 = 2(1 - 3^{-\theta_3})/(1 - 2^{-\theta_3}) - 3$$

$$\tau_4 = \frac{5(1 - 4^{-\theta_3}) - 10(1 - 3^{-\theta_3}) + 6(1 - 2^{-\theta_3})}{(1 - 2^{-\theta_3})}$$

Parametri(M)

$$\theta_1 = \mu - \frac{\theta_2[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]}{\theta_3}$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_3(\mu - \theta_1)}{[1 - \Gamma(1 + \theta_3)]}$$

$$\theta_3 = \frac{\theta_2(1 - \Gamma)}{(\mu - \theta_1 + \theta_2\Gamma)}$$

Parametri(L_M)

$$\theta_3 \simeq 7.8590c + 2.9554c^2$$

$$\theta_2 = \frac{\lambda_2\theta_3}{(1 - 2^{-\theta_3})\Gamma(1 + \theta_3)}$$

$$\theta_1 = \lambda_1 - \frac{\theta_2}{\theta_3} (1 - \Gamma(1 + \theta_3))$$

$$c = \frac{2}{3 + \tau_3} - \frac{\log 2}{\log 3}$$

Note

Per $\theta_3 = 0$ la distribuzione GEV corrisponde ad una distribuzione di Gumbel. L'approssimazione utilizzata per il calcolo di θ_3 con il metodo degli L-momenti ha un'accuratezza migliore di 9×10^4 per $-0.5 \leq \tau_3 \leq 0.5$.