



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2333A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Calvo Alberto

**MATERIA: Fluidodinamici Computazionale dei Sistemi di
Produzione - Prof. Larocca**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

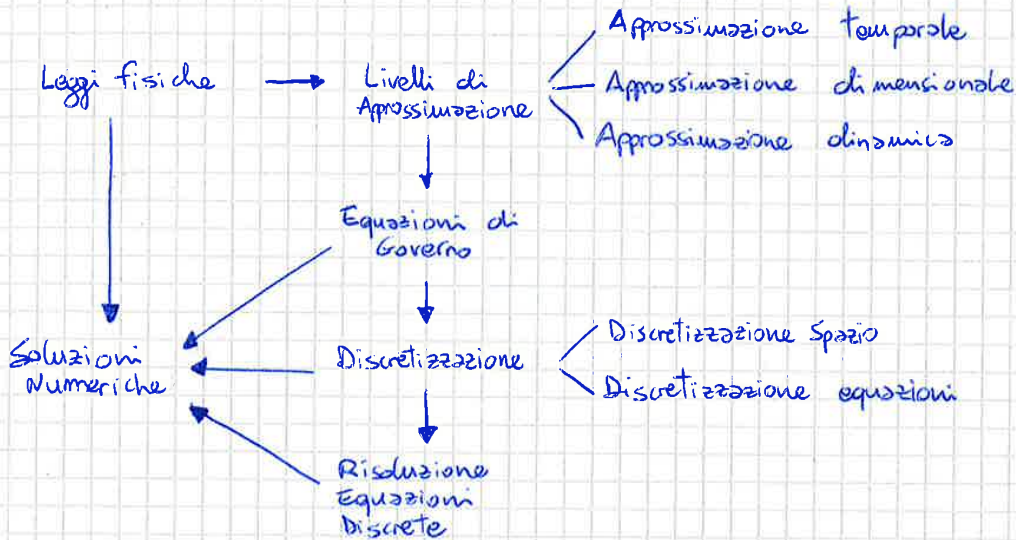
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE

8/3/18

- La CFD consiste nel sostituire dei numeri alle equazioni di governo. Attraverso la manipolazione di questi numeri si ottengono soluzioni approssimate.
- Lo schema che verrà seguito durante il corso è il seguente:



EQUAZIONI DI GOVERNO

- Si possono scrivere in diversi modi, ma nella CFD possono portare a soluzioni diverse.
- Queste leggi sono:
 - Conservazione Massa
 - Conservazione q.d.m.
 - Conservazione Energia
- Il modello di fluido preso in esame può essere scelto tra volume di controllo fisso nello spazio, con pareti permeabili e flusso che entra ed esce, oppure un volume che si muove nello spazio. Nel primo caso si hanno equazioni di tipo integrale conservativo. Nel secondo si hanno in forma integrale non conservativa.
- Per avere equazioni in forma differenziale si considera un volumetto infinitesimo che può essere fisso o mobile come nei due casi precedenti e portano nuovamente a forme conservative e non conservative. In pratica l'essere conservativo o meno dipende dall'approccio (Lagrangiano o Euleriano).
- Noi partiremo considerando un volume fisso nello spazio. (Euleriano).



\vec{n} positivo verso l'esterno

• La superficie di controllo del volume può essere permeabile o parzialmente permeabile. Applicheremo le eq. di governo a questo volume.

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Variaz.} \\ t \end{matrix} \right\}_A = \left\{ \begin{matrix} \text{Flusso} \\ \text{nella} \\ S \end{matrix} \right\}_B + S \rightarrow \text{Matrice che verrà applicata in tutti i casi}$$

- Quelle trovate sono relazioni esatte, ovvero senza approssimazioni. A questo li nelle non c'è differenza tra fluido ideale e fluido viscoso.
- Queste relazioni non considerano cosa accade all'interno del volume di controllo, però anche in presenza di un urto all'interno le relazioni valgono, sono indipendenti da cosa accade dentro.
- Quindi la **formulazione integrale** non dipende dall'evoluzione del fluido all'interno del volume di controllo.

• Possiamo rielaborare le relazioni trovate. Siccome stiamo considerando un volume fisso nello spazio il segno di derivata può essere portato sotto il segno di integrazione

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_S p \vec{q} \cdot \vec{n} dS = 0$$

• Applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_V \frac{\partial p}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (p \vec{q}) dV = 0$$

$$\int_V \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (p \vec{q}) \right] dV = 0 \rightarrow \text{L'integrale nullo comporta che la funzione integranda (dentro la quadra) sia nulla}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot p \vec{q} = 0} \Rightarrow \text{Forma Differenziale Conservativa}$$

• Sviluppando la divergenza nella forma differenziale ottergo

$$\left[\frac{\partial p}{\partial t} + \underbrace{\vec{q} \cdot \nabla p}_{\text{derivata convettiva}} + p \nabla \cdot \vec{q} = 0 \right]$$

$$\left[\frac{dp}{dt} = \frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{q} = 0 \right]$$

PUNTO DI VISTA EULERIANO

PUNTO DI VISTA LAGRANGIANO

→ La particella ha massa costante, ma può cambiare la forma

Siccome in CFD dovremo risolvere le equazioni per via numerica, serve che la conservazione della massa sia verificata anche numericamente. Questo non sempre è vero, quindi nello schema numerico in questione bisognerà introdurre delle approssimazioni che rendano verificata la conservazione della massa.

$$\boxed{\frac{Dp}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{q} = 0} \Rightarrow \text{Forma Differenziale Non Conservativa}$$

• Quindi le forze di superficie sono

$$\vec{F}_s = \int_S \vec{\sigma}_m \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{m} dS \rightarrow \text{Agiscono esclusivamente sulla superficie di controllo. Da qui anche il nome di forze interne}$$

• L'unica forza di volume è la forza peso:

$$\int_V \rho \vec{f}_e dV \rightarrow \text{Forza Peso}$$

• Adesso possiamo scrivere l'equazione completa

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V (\rho \vec{q}) dV}_A = - \underbrace{\int_S (\rho \vec{q}) \vec{q} \cdot \vec{m} dS}_B + \underbrace{\int_S \vec{\sigma} \cdot \vec{m} dS}_C + \int_V \rho \vec{f}_e dV \Rightarrow \text{Forma Integrale Conservativa}$$

• Anche in questo caso possiamo introdurre la divergenza

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{q}) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{q} \vec{q}) dV = \int_V \nabla \cdot \vec{\sigma} dV + \int_V \rho \vec{f}_e dV \rightarrow \text{In questo modo ho trasformato gli integrali di superficie in integrali di volume.}$$

• A questo punto porto tutto sotto lo stesso integrale:

$$\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{q}) + \nabla \cdot (\rho \vec{q} \vec{q}) - \nabla \cdot \vec{\sigma} - \rho \vec{f}_e \right] dV = 0$$

• Se l'integrale è nullo lo è anche la funzione integranda, quindi scrivo che:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{q}) + \nabla \cdot (\rho \vec{q} \vec{q}) = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}_e \Rightarrow \text{Forma Differenziale Conservativa}$$

$$\rho \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{[\nabla \cdot (\rho \vec{q})]}_{=0} \vec{q} + (\rho \vec{q} \cdot \nabla) \vec{q} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}_e \rightarrow \text{Otenuta sviluppando le derivate}$$

\rightarrow È l'equazione di continuità

• Raccolgo la ρ :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \vec{q} \cdot \nabla \vec{q} \right) = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}_e$$

derivata sostanziale

$$\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = \nabla \cdot \vec{\sigma} + \rho \vec{f}_e \Rightarrow \text{Forma Differenziale Non Conservativa}$$

CONSIDERAZIONI SULLE LEGGI

- L'eq. di continuità è scalare.
- L'eq. di q.d.m. è un'equazione vettoriale (tre eq. scalari)
- L'eq. dell'energia è scalare.
- Quindi abbiamo un sistema di 5 equazioni scalari. Le incognite sono p , $3\vec{q}$ (3 componenti di \vec{q}), $6\sigma_{ij}$ (3 componenti di σ), e $3\vec{q}_T$ (3 componenti di \vec{q}_T). Le incognite sono 14.
- Per chiudere il problema usiamo le sigmas.
Il vettore $\vec{\sigma}_m$ l'abbiamo scritto come:

$$\vec{\sigma}_m = -p\vec{m} + \vec{\tau}_m$$

$$\vec{\sigma} = -p\vec{I} + \vec{\tau}$$

$$\sigma_m = -p\bar{m} + \bar{\tau}_m \quad \tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{q}$$

Ho introdotto una nuova incognita, la pressione, quindi adesso le incognite sono 15. Però ho introdotto 6 nuove equazioni grazie al tensore τ (sarebbero 9, ma per via della sua simmetria solo 6 sono linearmente indipendenti).
Quindi ora \Rightarrow 15 INCOGNITE
11 EQUAZIONI

Introduco la legge di Fourier. Il flusso di calore è legato al gradiente di temperatura

$$\vec{q}_T = -k \nabla T$$

T è un vettore, quindi ha tre componenti.
 \Rightarrow Ciò significa che con la legge di Fourier introduco 3 equazioni scalari e un'incognita ulteriore, la T .

k : Coefficiente di Conduttività termica

Le incognite sono diventate 16, le equazioni sono 14. Per chiudere utilizzo l'eq. di stato e l'energia

$$\begin{cases} p/p = RT \longrightarrow \text{Eq. DI STATO} \\ e = e(p, T) \longrightarrow \text{ENERGIA} \end{cases}$$

• Si ottiene allora un sistema di 16 equazioni non risolvibile analiticamente, se non in casi estremamente particolari e semplificati.
• Queste equazioni che si ottengono prendono il nome di EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES.

Questo sistema di 16 eq. può essere risolto solo dal punto di vista numerico e sono soluzione di qualsiasi problema. Per un fluido ideale le equazioni sono dette di Eulero.

Considerazioni sulla conservazione dell'Energia

$$\frac{\partial(\rho \vec{q})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q} \vec{q}) = \nabla \cdot (-p\vec{I} + \vec{\tau}) + \rho \vec{f}_e \quad \rightarrow \text{Conservazione dello q.d.m.}$$

Moltiplico scalarmente per \vec{q}

$$\left(\rho \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_e \right) \cdot \vec{q}$$

Ottingo:

$$\rho \cdot \vec{q} \cdot \frac{D\vec{q}}{Dt} = -\nabla p \cdot \vec{q} + \nabla \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{q} + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{q}$$

$$\rho \frac{D(\frac{q^2}{2})}{Dt} = -\nabla p \cdot \vec{q} + (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{q} + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{q} \quad \rightarrow \text{Conservazione dell'Energia Cinetica}$$

Riscriviamo adesso la conservazione dell'energia, esplicitando $\vec{\sigma}$ e \vec{q}_T :

$$\rho \frac{De}{Dt} + \rho \frac{D(\frac{q^2}{2})}{Dt} = \nabla \cdot (-p\vec{I} + \vec{\tau}) \cdot \vec{q} + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

Svolgo il prodotto scalare nel primo termine del secondo membro:

$$= -\nabla \cdot (p \cdot \vec{q}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{q}) + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad \rightarrow \text{svolgere divergenze}$$

$$= -p \nabla \cdot \vec{q} - \vec{q} \cdot \nabla p + (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{q} + (\vec{\tau} \cdot \nabla) \cdot \vec{q} + \rho \vec{f}_e \cdot \vec{q} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

- Ancora una considerazione → Il primo termine o secondo membro della q.d.m. non conservativa è ∇p *

Partiamo dal 2° Principio della Termodinamica:

$$T ds = dh - \frac{dp}{\rho}$$

$$T \nabla s = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho} \rightarrow -\frac{\nabla p}{\rho} = T \nabla s - \nabla h$$

- Sostituisco nella conservazione della q.d.m. non conservativa

$$\left(\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{q} \cdot \nabla) \vec{q}} \right) = T \nabla s - \nabla h + \frac{\nabla \cdot \vec{\tau}}{\rho} + \vec{f}_e$$

$$\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \nabla \left(\frac{q^2}{2} \right) - \vec{q} \times \vec{\omega} = T \nabla s - \nabla h + \frac{\nabla \cdot \vec{\tau}}{\rho} + \vec{f}_e$$

- Si ottiene l'Equazione di Crocco

$$\left[\frac{\partial \vec{q}}{\partial t} + \nabla \left(h + \frac{q^2}{2} \right) - \vec{q} \times \vec{\omega} = T \nabla s + \frac{\nabla \cdot \vec{\tau}}{\rho} + \vec{f}_e \right]$$

Flusso Stazionario Flusso Entalpia totale costante Flusso centr. Flusso Ideale Assenza Forza Esterne

- Questa equazione ci dice che se un flusso ha le caratteristiche in verde, l'equazione si riduce a $\vec{\omega} = 0$. Poiché, se $\vec{\omega} = 0$ il flusso si dice che è irrotazionale, allora per le caratteristiche verdi si ha un flusso irrotazionale. In questo caso, quindi, l'equazione della q.d.m. si semplifica.

- L'equazione diventa $\Rightarrow \vec{q} \times \vec{\omega} = 0$

- Se il flusso è irrotazionale $\Rightarrow \vec{\omega} = 0$

- Dovendole risolvere numericamente dovremo esplicitare ogni termine.

- Prima facciamo un'altra considerazione.

- Le equazioni relative ad un profilo e ad un condotto sono le stesse. La differenza sta nelle condizioni al contorno, ovvero le condizioni a parete nei due casi.

Il problema viene risolto, quindi, con le condizioni al contorno. Sono fondamentali, se cambiano, cambiano le soluzioni.

- Per risolvere devo risolvere numericamente le Navier-Stokes e le condizioni al contorno.

- Possiamo scrivere le Navier-Stokes in forma matriciale sfruttando il fatto che abbiano strutture simili:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho \\ \rho \vec{q} \\ \rho E \end{Bmatrix}}_U + \nabla \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} \rho \vec{q} \\ \rho \vec{q} \vec{q} + p \vec{I} - \vec{\tau} \\ \rho E \vec{q} + p \vec{q} - \vec{\tau} \cdot \vec{q} - k \nabla T \end{Bmatrix}}_F = \underbrace{\begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{f}_e \\ \vec{q} \cdot \vec{f}_e \end{Bmatrix}}_Q$$

- U rappresenta le **grandezze conservate**

- F rappresenta i **Termini di flusso**

→ **Forma Conservativa**

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{F} = Q \right] \rightarrow \text{Posso scrivere il sistema nella forma compatta.}$$

19/03

La forma intera è $\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = Q$

Da adesso in poi ci interesseremo solo all'equazioni di Eulero, quindi non considereremo la viscosità.

Quindi considereremo l'equazione in 1D:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \text{con} \quad U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix} \Rightarrow \text{FORMA CONSERVATIVA}$$

Forma conservativa significa che abbiamo grandezze come densità, massa q.d.m ed energia che si conservano e compaiono le derivate nei termini di flusso. Compaiono le derivate dei termini di flusso nelle coordinate spaziali.

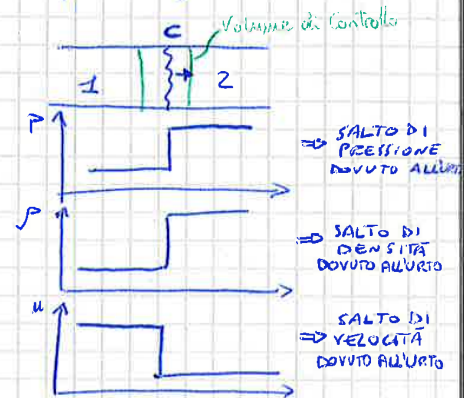
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{FORMA NON CONSERVATIVA}$$

Condizioni di Salto - Caso Stazionario

Nella forma non conservativa compaiono le derivate delle grandezze primitive, che sono grandezze continue. \Rightarrow Ammettono soluzioni continue.

In presenza di un urto possono presentarsi delle discontinuità.

Sappiamo però che valgono le leggi di conservazione, quindi se guardo un volume di controllo a cavallo dell'urto so che il flusso di massa che entra è uguale a quello che esce, indipendentemente dalla presenza dell'urto. E così le altre due



$$(\rho u A)_1 = (\rho u A)_2 \rightarrow \text{MASSA}$$

$$[(\rho U^2 + p)A]_1 = [(\rho U^2 + p)A]_2 \rightarrow \text{Quantità di Moto}$$

$$[(\rho E + p)UA]_1 = [(\rho E + p)UA]_2 \rightarrow \text{Energia}$$

Considerando una sezione costante tra le Relazioni di Rankine-Hugoniot

$$\begin{cases} (\rho U)_1 = (\rho U)_2 \\ (\rho U^2 + p)_1 = (\rho U^2 + p)_2 \\ (\rho E + p)U_1 = (\rho E + p)U_2 \end{cases}$$

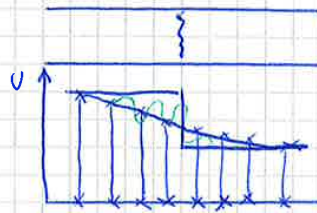
- Queste sono relazioni di salto, ovvero mettono in relazione le grandezze a monte e a valle dell'urto. Discendono dalle leggi di conservazione.
- In queste relazioni compaiono esattamente le quantità dei termini di flusso (quelli in f).
- Ci dicono che il salto è nullo.

La scrittura in forma conservativa considera la presenza di discontinuità. \Rightarrow Ammette soluzioni

$$\begin{cases} \frac{\partial (\rho U)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho U^2 + p)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial (\rho E + p)U}{\partial t} + \frac{\partial (\rho E + p)U^2 + pU}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

• Posso anche risolvere l'equazione in forma conservativa. In questo caso l'urto viene automaticamente catturato e descritto.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$



Possiamo anche essere esserci delle oscillazioni

• In questo caso l'urto viene smussato. Bisso pensare di aggiungere più punti, ma avrò sempre un errore di diffusione. Questa è la differenza principale tra forma conservativa e non. In precedenza, infatti, l'urto era definito perfettamente.

• Quale conviene usare? Con geometrie complicate la forma non conservativa è più complicata. Quindi, nonostante la possibile presenza di oscillazioni in prossimità dell'urto, conviene la forma conservativa.

• Nel caso non conservativo, con le condizioni di salto, trovo la velocità dell'urto che mi permette di fare una trattazione considerando l'evoluzione dell'urto. Se $c=0$ l'urto è fermo. Continuo la trattazione finché $c=0$, perché io cerco soluzioni stazionarie. Quindi è un procedimento iterativo.

LINEE CARATTERISTICHE

• Consideriamo delle equazioni modello che semplificano la trattazione * → Ovvero fanno passare le Navier-Stokes da 2° a 1° ordine.

↳ Eq. Modello

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Sono due termini o caso $\begin{cases} U(x,t) \\ a=a(U) \end{cases}$

• Se $a=const$ l'eq. è lineare, se a è funzione di U è detto quasi lineare, se a è funzione anche della derivata, l'eq. non è più lineare.

• Noi ci fermiamo al caso quasi lineare.

• Partiamo dal caso lineare, quindi $[a=const]$ ci chiediamo se su un certo dominio esistono delle linee in cui U è sempre continua, ma le sue derivate sono discontinue. Queste sono dette Linee Caratteristiche.

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx = dU \end{cases}$$

• Scrivo l'equazione modello introdotta prima. A questo punto, siccome U è una funzione continua, ne definisco il differenziale, e posso scrivere la seconda equazione del sistema.

• Posso trovare $\frac{\partial U}{\partial t}$ con la regola di Kramer

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a \\ dU & dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ dt & dx \end{vmatrix}}$$

• Se vedessimo il problema opposto, ovvero $\frac{\partial U}{\partial t} - a \frac{\partial U}{\partial x} = 0$ cambia solo l'inclinazione delle rette, quindi cambiano i punti in cui fissare le condizioni al contorno.

• Potrebbero presentarsi problemi un po' meno semplici, ad esempio:

CASO NON OMOGENEO

$$\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} = b$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx = dU$$

$$\frac{dx}{dt} = a$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} b & a \\ dt & dx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ dt & dx \end{vmatrix}} = b dx - a dt$$

$$= b dx - a \left(\frac{\partial U}{\partial t} dt + \frac{\partial U}{\partial x} dx \right)$$

$$= b dx - a dt \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$= b dx - a dt \left(\frac{\partial U}{\partial t} + a \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

$$\downarrow b$$

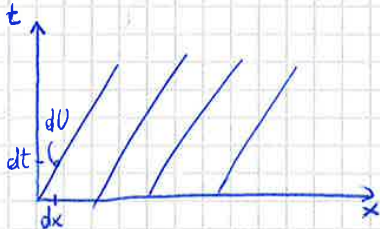
$$= b dx - a dt b = 0$$

• Quindi l'eq. di compatibilità è:

$$b dx - a dt = 0 \rightarrow \text{Non è più vero che } U = \text{cost} !!$$

↳ Deve valere lungo la linea caratteristica.

• In questo caso si procede così:



• Se mi sposto di un dt e un dx trovo un dU che dipende da dx e dt

• La soluzione è tanto più precisa quanto più piccoli sono dU, dx, dt

• La soluzione di un punto fuori da una linea caratteristica non influenzerà MAI un punto di una linea caratteristica.

• La soluzione sulla linea dipende solo dalla propagazione della condizione iniziale sulla linea caratteristica.

SISTEMI IPERBOLICO ED ELLITICO

22/03

• Vediamo un'altra Equazione Modello

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{con } \varphi = \varphi(x, t)$$

• Contemporaneamente vediamo anche

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

• Per non portare avanti due eq. introduco il parametro ϵ

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \epsilon a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \rightarrow \text{Lineare se } a = \text{cost}$$

• Inoltre posso dire che vale

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= u \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= v \end{aligned} \right\}$$

NB. $\rightarrow \varphi$ non è il potenziale e u e v non sono velocità, sono funzioni

$$v = v(x, t)$$

$$u = u(x, t)$$

• Consideriamo ora il caso $\varepsilon=1$, lungo le linee il denominatore \bar{a} nullo. Il numeratore, invece:

$$\begin{aligned}
 N &= \varepsilon a^2 (-dx dv + du dt) = \varepsilon a^2 \left[-dx \left(\frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + dt \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \right] = \\
 &= \varepsilon a^2 \left[-\frac{\partial v}{\partial t} dx dt - \frac{\partial v}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial u}{\partial t} dt^2 + \frac{\partial u}{\partial x} dx dt \right] = \\
 &= \varepsilon a^2 \left[-dx dt \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 \right) dt^2 \right]
 \end{aligned}$$

• Faccio le semplificazioni, poiché sono sulle linee a

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{v=0} \quad \xrightarrow{a=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) dt^2 = 0
 \end{aligned}$$

• Allora abbiamo dimostrato che, lungo le linee, anche il numeratore va a zero:

$$\varepsilon a^2 (-dx dv + du dt) = 0 \rightarrow \text{Lungo le Linee}$$

• La pendenza delle curve la indico con λ : $\lambda_1 = \frac{dx}{dt} = -a$; $\lambda_2 = \frac{dx}{dt} = a$

• Poiché poi stiamo considerando il problema lineare ($a = \text{cost}$) queste linee sono **RETTE**.

• Le equazioni di queste rette le troviamo annullando il termine nella parentesi del numeratore

$$-dx dv + du dt = 0 \Rightarrow du - dv \frac{dx}{dt} = 0$$

• Dal quale ottengo le due rette

$$\begin{aligned}
 * \quad du + a dv &= 0 \rightarrow \lambda_1 = -a \\
 du - a dv &= 0 \rightarrow \lambda_2 = a
 \end{aligned}$$

• Tutto questo discorso lo abbiamo fatto per la sola incognita $\frac{\partial u}{\partial t}$, ma per le altre tre si ottengono le stesse relazioni e valgono le stesse considerazioni.

• Tutto il sistema iniziale può essere sostituito dalle due equazioni * che sono le **Equazioni di Compatibilità**.

• Ciò significa che lungo la linea $\lambda_1 = -a$ vale $du + a dv = 0$
 $\lambda_2 = a$ vale $du - a dv = 0$ } **Eq. di Compatibilità** (sono Eq. differenziali)

• L'integrazione delle equazioni di compatibilità può essere più o meno complicata, dipende tutto dal coefficiente a ! Nel nostro caso, in cui $a = \text{cost}$, abbiamo

$$\begin{aligned}
 d(u + av) &= 0 \Rightarrow u + av = \text{cost} \\
 d(u - av) &= 0 \Rightarrow u - av = \text{cost}
 \end{aligned}$$

• Nel momento in cui $a = \text{cost}$ l'integrazione è immediata.
 • Quelle relazioni differenziali valgono lungo le linee caratteristiche.

• Ritorniamo sul sistema di equazioni analizzato finora

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \mp a \begin{cases} \lambda_1 = -a \\ \lambda_2 = a \end{cases} \end{cases}$$

• Avevamo trovato le equazioni di compatibilità:

$$\begin{aligned} du + a dv &= 0 & \lambda_1 \\ du - a dv &= 0 & \lambda_2 \end{aligned} \rightarrow \text{Relazione differenziale}$$

• Queste grandezze possono essere indicate come delle variabili w_1 e w_2 , definite a livello differenziale come:

$$\begin{aligned} dw_1 &= du + a dv \\ dw_2 &= du - a dv \end{aligned}$$

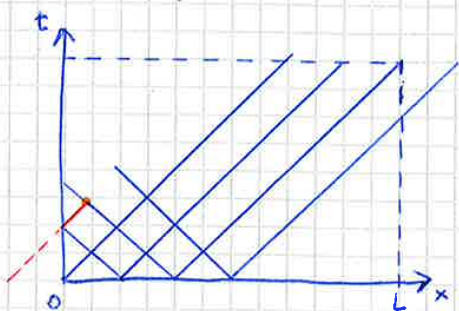
• Nel caso particolare in cui $a = \text{cost}$, queste relazioni sono facilmente integrabili

$$\begin{aligned} w_1 &= u + av = \text{cost} & \lambda_1 \\ w_2 &= u - av = \text{cost} & \lambda_2 \end{aligned}$$

→ INVARIANTE DI RIEMANN → Sono invarianti perché sono costanti lungo la linea caratteristica e sono integrabili

• Abbiamo due soluzioni reali e distinte ⇒ **Problema IPERBOLICO**

• Se vediamo di nuovo il reticolo di linee caratteristiche ci accorgiamo che nei punti oltre le



linee caratteristiche che partono da zero, si può sfruttare solo l'informazione della linea opposta. Servono anche le condizioni al contorno, ovvero il punto sul bordo del dominio. In questo caso come condizioni al contorno si intende ad $x=0$ ed $x=L$. Non posso determinare arbitrariamente!

• La teoria delle linee caratteristiche ci dice che il numero di condizioni al contorno è pari al numero delle linee caratteristiche globali meno il numero delle linee caratteristiche che partono da $t=0$ all'interno del dominio.

N : Numero di Linee Caratteristiche

* $m_c = N - m_i$; Numero di Condizioni al Contorno
↳ Numero di Linee Caratteristiche che provengono dall'interno

• Il numero delle condizioni al contorno, dipendono dal numero di linee caratteristiche che arrivano su quel contorno. Se cambia la pendenza delle linee cambiano le condizioni al contorno.

• Il problema iperbolico è ben posto quando il numero delle condizioni al contorno soddisfa l'equazione *

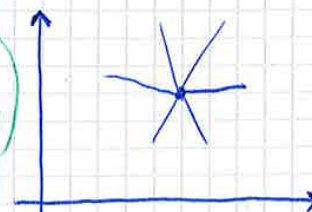
• Ritornando al sistema di partenza, lo vediamo per $\epsilon = 1$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{dx}{dt} = \begin{cases} \lambda_1 = -ai \\ \lambda_2 = ai \end{cases} \end{cases}$$

⇓
Soluzioni Complesse Coniugate

• Sistemi di questo tipo sono detti di tipo **Ellittico**. Tutto il dominio è di dipendenza e di influenza

• Le pendenze delle linee caratteristiche sono immaginarie, ci sono delle linee caratteristiche che non sono reali. Questo significa che non esistono direzioni preferenziali lungo cui propagano le informazioni, ma ogni info viaggia lungo tutte le direzioni. Questo è la definizione di **PROBLEMA ELLITTICO**.

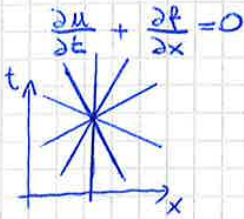


• Per ogni contorno ci vuole una condizione al contorno !!

Il tutto vale anche nel caso 3D, in quel caso non si parla di linee, ma di superfici.

CAMPO INSTAZIONARIO

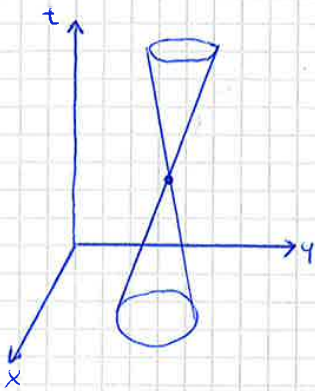
Se rivediamo l'equazione di Eulero 1D, siamo nel piano x-t.



- Questa equazione è **iperbolica**, ciò significa che per ogni punto ci saranno delle linee caratteristiche, indipendentemente dal numero di Mach. Questo perché l'equazione è istazionaria e stiamo guardando cosa succede nel tempo.
- La soluzione può essere ottenuta marciando nel tempo.
- Quindi è iperbolica sia per flusso subsonico che supersonico.

In due dimensioni invece Eulero diventa

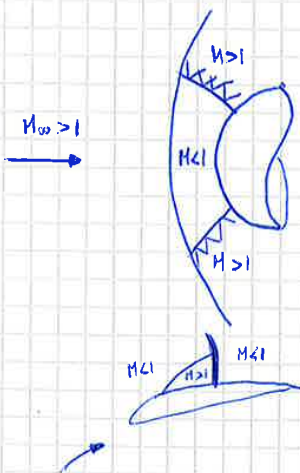
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$



- Anche questa equazione è **iperbolica** sia per flusso subsonico che supersonico. Abbiamo delle superfici caratteristiche (in questo caso la superficie è conica) e ottengo le soluzioni marciando nel tempo.
- Il principio è sempre lo stesso, ovvero partire dalle condizioni iniziali.
- Le equazioni differenziali contengono il segnale due viaggi.
- Quindi l'equazione di Eulero ha un comportamento diverso a seconda che il campo sia stazionario o non stazionario. Nel caso stazionario è iperbolica nel caso supersonico, mentre nel caso istazionario è iperbolica indipendentemente dal numero di Mach.

Nel caso non stazionario queste linee caratteristiche esistono sempre, indipendentemente dal numero di Mach.

Questo fatto ci permette di risolvere l'equazione tramite una tecnica che spesso introduciamo



Il metodo delle caratteristiche risulta impossibile, non conosco la geometria dell'urto.

La tecnica si chiama **Time Dependent**.

Questo campo di moto è STAZIONARIO, quindi l'equazione di governo è di tipo iperbolico quando il flusso è supersonico, ellittico quando il flusso è subsonico. Questo significa che nelle varie regioni a valle dell'urto avrò equazioni ellittiche o iperboliche. Le regioni a $M > 1$ posso risolverle con il metodo delle caratteristiche. Nella regione a $M < 1$, invece, dovrò imporre le condizioni al contorno su tutto il contorno. Inoltre nelle zone supersoniche avrò ugualmente bisogno delle condizioni al contorno. Il problema è che la geometria (in particolare dell'urto) non è nota, non conosco i contorni. Non posso quindi risolvere il problema risolvendo l'equazione di governo.

Se guardo l'equazione INSTAZIONARIA, posso pensare di ottenere la soluzione stazionaria descrivendo il transitorio e descrivendo la soluzione stazionaria come quella che si ottiene alla fine del transitorio. Questo perché, essendo le equazioni non stazionarie **iperboliche**, posso marciare nel tempo fino alla fine del transitorio. Quando il transitorio finisce, ottengo la soluzione **STAZIONARIA**.

Il transitorio può essere fisico (ad esempio usando le pressioni), ma può anche non avere significato fisico, ad esempio partendo da un valore casuale della velocità.

• L'Equazione di compatibilità può essere riscritta come:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \Delta \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

• La quale equivale a dire che

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

⇒ EQ. DI COMPATIBILITÀ

• Sono esattamente le stesse che avevamo già trovato prima.

• Questo processo risulta più rapido e più "matematico".

• Se le equazioni sono lineari allora il sistema è **disaccoppiato**, quindi ogni equazione è per i fatti propri e non influenza le altre.

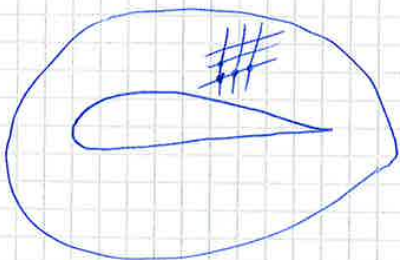
• Se le equazioni non sono lineari il sistema è **accoppiato**, in questo caso non posso usare la sovrapposizione degli effetti.

5/04

DISCRETIZZAZIONE

• La discretizzazione di un sistema di equazioni è costituita da due fasi:

- discretizzazione dello spazio
- discretizzazione delle equazioni



Discretizzare lo spazio significa innanzitutto rendere un certo tipo di dominio finito. Se sono dentro una turbomacchina il dominio sarà già per forza di cose ben definito. Una volta definito un dominio continuo bisogna definire la cosiddetta **Griglia di Calcolo**.

• Soprattutto su geometrie complicate è molto importante avere griglie fitte per abbassare l'errore di approssimazione.

• La soluzione è strettamente legata alla griglia

• L'errore che si commette nell'approssimazione è tanto più piccolo quanto più fitta è la griglia.

• La griglia di calcolo è importantissima. Se avesse irregolarità, la soluzione sarebbe errata. Per generare la griglia bisogna fare estrema attenzione.

• Nei punti individuati dalla griglia si definiscono le **variabili dipendenti** del problema.

• Per le equazioni si può ricorrere al metodo delle differenze finite, primo metodo e più diffuso. In seguito si è iniziato ad usare un metodo ai volumi finiti, per poi arrivare agli elementi finiti.

* Lo schema di discretizzazione consiste nel sostituire le derivate parziali o gli integrali che compaiono nelle equazioni, a seconda che si usi la forma differenziale o integrale, con delle relazioni algebriche che legano le variabili dipendenti nei diversi punti dando vita a sistemi che possono essere algebrici lineari o non lineari che possono essere in qualche modo risolti.

Allo stesso modo si può definire la **Differenza all'indietro**

$$(U_x)_m = \frac{U_m - U_{m-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad \rightarrow \text{La differenza è il tratto verde.}$$

$$U_{m-1} = U_m - U_x \Delta x + U_{xx} \frac{\Delta x^2}{2!} - U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{3!} + \dots$$

Se combino le due precedenti relazioni ottengo:

$$U_{m+1} - U_{m-1} = 2U_x \Delta x + 2U_{xxx} \frac{\Delta x^3}{3!} + U_{xxxx} \Delta x^5$$

$$(U_x)_m = \frac{U_{m+1} - U_{m-1}}{2\Delta x} + U_{xxx} \frac{\Delta x^2}{3!} + \dots \quad \rightarrow \text{Errore del secondo ordine perché il termine preponderante è } \Delta x^2.$$

Questa differenza è detta **Centrata**, perché coinvolge il centro. L'approssimazione che si ottiene è il tratto rosso, che ha una pendenza molto più vicina a quella vera. Questo perché, rispetto alle due precedenti appena viste, l'approssimazione è di un grado superiore.

Un'altra considerazione è che con errore del primo ordine, se raddoppio la griglia si dimezza l'errore. Se invece raddoppio la griglia con errore del secondo ordine, l'errore diventa un quarto.

Se mi pongo nel punto $*$, ottengo una differenza centrata nel punto $m + \frac{1}{2}$

$$(U_x)_{m+\frac{1}{2}} = \frac{U_{m+1} - U_m}{\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad \rightarrow \text{Approssimazione 2° ordine perché è come fare una differenza centrata, invece che tra } m+1 \text{ e } m-1, \text{ faccio in un intervallo } m+1 \text{ e } m.$$

Per dimostrare che l'errore è del secondo ordine basta fare l'espansione in serie di Taylor

$$U_{m+1} = U_{m+\frac{1}{2}} + (U_x)_{m+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2} + (U_{xx})_{m+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x^2}{4 \cdot 2!} + \dots$$

Posso ricorrere alle differenze finite, ma per capire l'ordine di approssimazione è necessario vedere le espansioni in serie di Taylor

$$U_m = U_{m+\frac{1}{2}} - (U_x)_{m+\frac{1}{2}} \frac{\Delta x}{2} + \dots$$

Adesso immagino di sottrarre $4 \cdot U_{m+1} \ominus U_{m+2}$ che è il seguente

$$U_{m+2} = U_m + U_x (2\Delta x) + U_{xx} \frac{(2\Delta x)^2}{2!} + U_{xxx} \frac{(2\Delta x)^3}{3!} + \dots$$

e ottengo

$$U_{m+2} - 4U_{m+1} = -3U_m - 2U_x \Delta x + \frac{4}{3!} U_{xxx} \Delta x^3 + \dots$$

$$U_x = \frac{-U_{m+2} + 4U_{m+1} - 3U_m}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad \rightarrow \text{Altra definizione di derivata prima del secondo ordine}$$

L'espansione di Taylor mi permetta di valutare l'ordine di approssimazione.

L'approssimazione è tanto migliore quanto più alta è il numero di punti

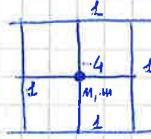
Se la curva da approssimare è una retta, nell'espansione di Taylor le derivate seconde sono nulle, quindi l'espansione con le sole derivate prime è già soluzione esatta.

Se la distribuzione è uniforme u è costante ovunque \Rightarrow Tutte le forme di derivata mi danno valore nullo.

$$\frac{\varphi_{m+1,m} - 2\varphi_{m,m} + \varphi_{m-1,m}}{\Delta x^2} + \frac{\varphi_{m,m+1} - 2\varphi_{m,m} - \varphi_{m,m-1}}{\Delta y^2} = 0 + O(\Delta x^2, \Delta y^2)$$

Nel caso particolare in cui $\Delta x = \Delta y$ si ottiene:

$$\varphi_{m+1,m} + \varphi_{m-1,m} + \varphi_{m,m+1} + \varphi_{m,m-1} - 4\varphi_{m,m} = 0$$



- Facciamo un ingrandimento della zona intorno al punto m,m . Questo punto passa per 4 volte sul problema, gli altri una volta.
- La relazione \Rightarrow fianco vale per ogni punto del dominio.

Quindi l'equazione differenziale viene sostituita da un sistema di equazioni $M \times M$.

$$\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & -4 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & 1 & \dots & 1 & -4 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \dots & 1 & -4 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \varphi_{m-1,m-1} \\ \varphi_{m,m-1} \\ \varphi_{m+1,m-1} \\ \vdots \\ \varphi_{m-1,m} \\ \varphi_{m,m} \\ \varphi_{m+1,m} \\ \vdots \\ \varphi_{m-1,m+1} \\ \varphi_{m,m+1} \\ \varphi_{m+1,m+1} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ b \\ b \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ b \\ b \\ \vdots \end{bmatrix}$$

- Siccome quella relazione vale per ogni punto, otterremo il sistema $M \times M$ che deve essere risolto per risolvere il problema. La soluzione di questo sistema mi dà il valore di φ per ogni punto del dominio.
- La matrice dei coefficienti ha una struttura detta a blocchi tridiagonale. Ci sono 3 diagonali principali su cui sono distribuiti questi blocchi.
- I termini noti saranno 0 per i nodi interni, e per i punti sul contorno ci saranno valori diversi da zero, poiché abbiamo le condizioni al contorno.
- Il problema quindi si riduce al come risolvere questi sistemi algebrici, che possono diventare enormi in maniera rapida.

$[A] \{x\} = \{N\} \Rightarrow x = N \cdot A^{-1}$ → Non è questo il modo per risolvere poiché per grosse matrici il costo computaz. è eccessivo.

A volte le matrici possono avere elementi sparsi. Questo perché le approssimazioni sono fatte a piacere. In quel caso la risoluzione è ancora più lunga.

$$\varphi(m,m) = \frac{1}{4} (\varphi(m+1,m) + \varphi(m-1,m) + \varphi(m,m+1) + \varphi(m,m-1))$$

In Fortran questo problema si risolve come segue

DO l = 1, 1000

DO m = 2, N-1

DO n = 2, M-1

$$\varphi(m,n) =$$

END DO

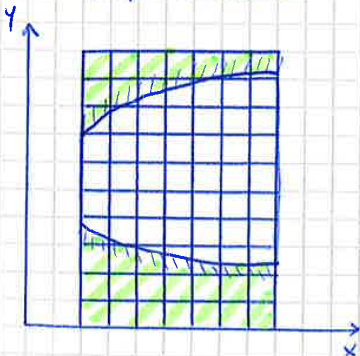
END DO

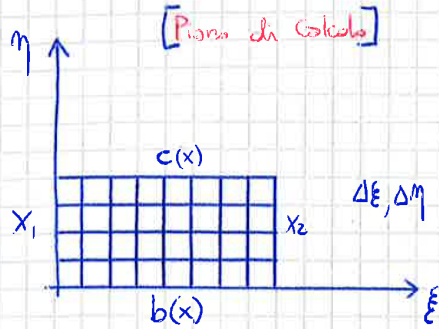
END DO

→ Parto da 2 perché nei punti 1 abbiamo imposto le condizioni al contorno.

- In questo caso il problema è solo la convergenza del metodo, e si risolve con un codice semplice.
- La soluzione di questo problema, ovvero un campo di vettore bidimensionale sulla geometria.
- La soluzione in ogni punto dipende dalle condizioni al contorno → Problema ellittico. Tutto il dominio è dominio di influenza. Il contorno è importantissimo. Se è sbagliata la condizione al contorno anche la soluzione sarà sbagliata.

- Supponiamo di voler risolvere un problema con un condotto le cui pareti non sono tutte parallele. Il problema è bidimensionale. Independentemente dal tipo di equazione che vogliamo risolvere, quando sono solo la geometria.
 - Costruiamo una griglia $\Rightarrow dx$ e dy costanti. I punti che cadono al di fuori del condotto (zona verde) sono punti in cui non devo fare nessun calcolo, sono punti che non servono. Le soluzioni di questo problema e del precedente sono sicuramente diverse perché i contorni sono diversi. È quindi chiaro come una discretizzazione di questo tipo potrebbe portarmi \Rightarrow non avere punti discreti sul contorno. Ciò rende questa discretizzazione inadatta \Rightarrow questo tipo di geometria.





$$\xi = \xi(x, y)$$

$$\eta = \eta(x, y)$$

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$

$$\xi = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow x = x_1 \Rightarrow \xi = 0$$

$$x = x_2 \Rightarrow \xi = 1$$

$$\eta = \frac{y - b(x)}{c(x) - b(x)} \Rightarrow y = b(x) \Rightarrow \eta = 0$$

$$y = c(x) \Rightarrow \eta = 1$$

• Per trasformare il piano si possono usare le trasformazioni conformi, che però non si usano più. Quindi si utilizzano delle tecniche algebriche.

• Una di queste consiste nel definire gli estremi del condotto e di utilizzare le relazioni in basso. Trovo ξ per $x = x_1$ e $x = x_2$ e traccio le linee a ξ costante. Analogamente per la y e per la η .

• Di fatto quindi abbiamo trasformato il contorno dell'ugello in un rettangolo. A questo punto faccio la griglia, inverto le relazioni e trovo i punti sul piano fisico.

19/04

• Le derivate $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ vengono trasformate in $\frac{\partial}{\partial \xi}$ e $\frac{\partial}{\partial \eta}$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

• Le derivate contengono i **Coefficienti metrici**. L'insieme di questi coefficienti rappresenta la **metrica della trasformazione**. Le derivate sono note nel momento in cui sono assegnate le funzioni di trasformazione. Queste funzioni possono essere assegnate sia analiticamente che geometricamente.

• Abbiamo visto in precedenza come il problema veniva descritto dall'eq. di Laplace $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$, quindi bisogna considerare anche le derivate seconde, vediamo come si trasformano:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

$$= \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

→ Oltre a derivate prime e seconde compaiono derivate **miste**

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} \left(\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \left(\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right) + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \right) = 0$$

• ψ deve quindi soddisfare un'equazione un po' diversa. Le derivate di ξ ed η vanno discretizzate sul piano di calcolo, e per ognuno dei nodi troviamo ψ che viene trasportata nel piano fisico

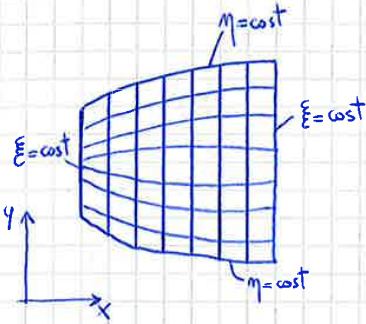
• Abbiamo quindi un'equazione del tipo

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + c \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + d \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + e \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = 0$$

• Compaiono derivate prime, seconde e miste moltiplicate per dei coefficienti. È un'eq. del secondo ordine in cui compaiono tutti i termini. La natura dell'eq. non cambia rispetto alla *, è ancora un'eq. di tipo ellittico, il che significa che ci sono solo linee caratteristiche immaginarie. La natura dell'eq. non cambia se cambia il sistema di riferimento!!!

- La grossa limitazione delle differenze finite è che bisogna passare dal piano di calcolo. Se la geometria è complicata, saranno complicate le trasformazioni e di conseguenza anche la struttura delle equazioni da considerare.

METODO DI GENERAZIONE ELLITTICA



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \end{cases}$$

- Sono note le coordinate di tutti i punti sul contorno. Bisogna trovare le linee a ξ e η costanti che soddisfino le condizioni al contorno. Infatti il problema ellittico è proprio il tipo di problema in cui le soluzioni dipendono dalle condizioni al contorno.
- Le equazioni di tipo ellittico più semplici sono quelle a lato. Bisogna trovare ξ ed η che le soddisfino. La generazione del griglia che si ottiene prende il nome di **generazione di tipo ellittico**. Il motivo del nome è solo che le equazioni sono di tipo ellittico. Queste equazioni si risolvono per via numerica → **Non** sono eq. analitiche!

METODO DI GENERAZIONE IPERBOLICA

- Si utilizza su domini aperti. Se l'ellittico ci richiama al fatto che le soluzioni dipendono dal contorno, un problema di tipo iperbolico richiama il fatto che la soluzione può essere ottenuta **"marciando"**. Marcciare però significa che non posso applicare il problema della generazione di tipo iperbolico a questo problema perché la generazione di tipo iperbolico significa che non tutti i contorni contribuiscono alla soluzione. Il dominio deve essere di tipo aperto.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(U_m + U_{m+1} + U_{m-1})}{3} + \frac{f_{m+\frac{1}{2}} - f_{m-\frac{1}{2}}}{3\Delta x} = \frac{q_m + q_{m+1} + q_{m-1}}{3}$$

• Divido tutti i termini per 3. Il termine noto e il termine dentro la derivata temporale possono essere visti come valori medi e posso scriverli solo U_m e q_m .

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{f_{m+\frac{1}{2}} - f_{m-\frac{1}{2}}}{3\Delta x} = q_m$$

→ Dipende tutto dai termini agli estremi, i termini intermedi si annullano. Questo mi assicura che anche a livello discreto è soddisfatta la legge di conservazione. Questa proprietà può essere vista come proprietà **TELESCOPICA**

• Ora ritorniamo all'equazione di partenza, la riscriviamo come:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = q \quad \text{con} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = a(u)$$

• Prima l'avevamo scritta in **Forma Conservativa**, adesso è in **Forma quasi-lineare**. Le due forme sono equivalenti.

• Discretizziamo nuovamente sulla griglia fatta per il caso precedente

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + a_m \frac{U_{m+\frac{1}{2}} - U_{m-\frac{1}{2}}}{\Delta x} = q_m$$

• Discretizziamo $\frac{\partial f}{\partial x}$ sugli stessi nodi del caso precedente. La cosa che si nota subito è che facendo la somma membro a membro i termini uguali non si annullano perché sono moltiplicati a valori diversi.

$$\frac{\partial U_{m+1}}{\partial t} + a_{m+1} \frac{U_{m+\frac{3}{2}} - U_{m+\frac{1}{2}}}{\Delta x} = q_{m+1}$$

$$\frac{\partial U_{m-1}}{\partial t} + a_{m-1} \frac{U_{m-\frac{1}{2}} - U_{m-\frac{3}{2}}}{\Delta x} = q_{m-1}$$

• Con alcune manipolazioni però posso ritrovare un termine analogo al caso precedente.

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{(U_m + U_{m+1} + U_{m-1})}{3} + \underbrace{(a_{m+1} + a_{m-1})}_{*} \frac{U_{m+\frac{1}{2}} - U_{m-\frac{1}{2}}}{3\Delta x} = \frac{1}{3} (q_m + q_{m+1} + q_{m-1})$$

• Questo significa che la legge di conservazione sarebbe rispettata a meno dei termini $*$. Quei termini introducono un certo errore, che è lo stesso dello schema di discretizzazione. Non ha nessun valore fisico, solo numerico. Questi termini sono trascurabili. In presenza di un forte gradiente di pressione (o addirittura un urto) non lo sono più, e la legge di conservazione non è più rispettata.

• Affinché lo schema numerico sia **conservativo**, deve avere la seguente forma:

$$\frac{\partial U_m}{\partial t} + \frac{f_{m+\frac{1}{2}}^* - f_{m-\frac{1}{2}}^*}{\Delta x} = q_m$$

• Affinché lo schema numerico sia valido deve essere tale da garantire la legge di conservazione → **Proprietà FONDAMENTALE**
• In pratica lo schema numerico **DEVE** essere conservativo!

$$f_{m+\frac{1}{2}}^* = f^*(U_m, U_{m+1}, \dots)$$

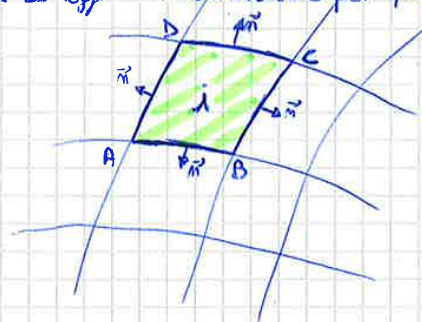
• Torniamo alla **discretizzazione mediante volumi finiti**. Il primo passo è, come al solito, generare una griglia sul piano fisico. Poi individuo un volumetto i . La legge di conservazione per questo volumetto è:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} U dV + \int_{S_i} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \int_{V_i} Q dV$$

$$U_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} U dV \quad Q_i = \frac{1}{V_i} \int_{V_i} Q dV$$

$$\frac{\partial (U_i V_i)}{\partial t} + \sum_{\text{loti}} (\vec{F} \cdot \vec{n}) \Delta S_i = Q_i V_i$$

Legge di Conservazione



• Lo Schema di approssimazione ai volumi finiti. Dipende solo dai flussi
• Per stabilire questa legge non abbiamo fatto nessuna ipotesi. Il volumetto di controllo può essere del tutto arbitrario.

• Posso anche fare scelte diverse dal valore medio, come ad esempio:

→ $f_{bc} = f_{m,m} = f(U_{m,m}) \rightarrow f\left(\frac{U_{m,m} + U_{m+1,m}}{2}\right)$ → Il flusso della cella lo calcolo come valore della U di questo cella, e poi come entrante in un'altra. Deve essere sempre coerente.
 → Posso anche calcolarlo facendo la media tra le U .

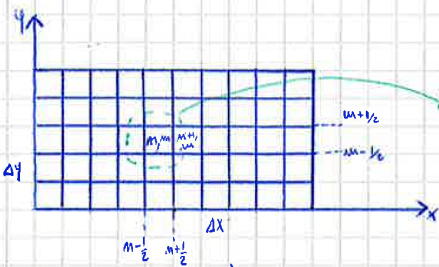
→ $f_{bc} = \frac{1}{2} (f_b + f_c)$ → Posso calcolarlo come media tra f_b ed f_c , che sono fatti come segue:

$$f_b = f(U_{m,m}, U_{m+1,m}, U_{m,m-1})$$

$$f_c = f(U_{m,m}, U_{m+1,m}, U_{m,m-1}, U_{m+1,m+1})$$

• C'è una grande varietà di scelta anche per quanto riguarda i flussi.

• Per capire meglio il metodo lo applichiamo a un problema relativo a una griglia cartesiana così fatta:



• Chiamo nuovamente le celle m,m ed $m+1,m$ (ecc), mentre le interfacce tra le celle saranno individuate dalle linee tipo $x_{m-1/2}$ ed $x_{m+1/2}$.



• Di fianco vediamo i valori dei vettori per ogni faccia della cella

• Così definita la griglia, l'equazione della conservazione diventa:

$$\frac{\partial U_{m,m}}{\partial t} (\Delta x \cdot \Delta y) + (f_{m+1/2,m} m_x + g_{m+1/2,m} m_y) \Delta y + (f_{m,m+1/2} m_x + g_{m,m+1/2} m_y) \Delta x + (f_{m-1/2,m} m_x + g_{m-1/2,m} m_y) \Delta y + (f_{m,m-1/2} m_x + g_{m,m-1/2} m_y) \Delta x = Q_{m,m} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$$

• Sostituendo per ogni faccia i valori dei vettori normalizzati m_x ed m_y , l'equazione si semplifica notevolmente

$$\frac{\partial U_{m,m}}{\partial t} \Delta x \Delta y + (f_{m+1/2,m} - f_{m-1/2,m}) \Delta y + (g_{m,m+1/2} - g_{m,m-1/2}) \Delta x = Q_{m,m} \Delta x \Delta y$$

• Divido tutto per $\Delta x \cdot \Delta y$

$$\frac{\partial U_{m,m}}{\partial t} + \frac{f_{m+1/2,m} - f_{m-1/2,m}}{\Delta x} + \frac{g_{m,m+1/2} - g_{m,m-1/2}}{\Delta y} = Q_{m,m}$$

• Calcolo il flusso solo una volta per faccia, entrante o uscente a seconda di quale cella prendo in considerazione. In questo modo, quando faccio la somma tra le due celle i termini si annullano e la conservazione è garantita.

• Adesso faccio la scelta di calcolare f e g come segue, e la sostituisco nella *

$$f_{m+1/2,m} = \frac{1}{2} (f_{m,m} + f_{m+1,m})$$

$$g_{m,m+1/2} = \frac{1}{2} (g_{m,m} + g_{m,m+1})$$

• Scegliamo il modo del valore medio per calcolare il flusso, ma potevo sceglierne uno qualunque di quelli elencati all'inizio di questa pagina.

• Sostituisco:

$$\frac{\partial U_{m,m}}{\partial t} + \left[\frac{f_{m,m} + f_{m+1,m}}{2} - \frac{f_{m,m} + f_{m-1,m}}{2} \right] \frac{1}{\Delta x} + \left[\frac{g_{m,m} + g_{m,m+1}}{2} - \frac{g_{m,m} + g_{m,m-1}}{2} \right] \frac{1}{\Delta y} = Q_{m,m}$$

$$\frac{\partial U_{m,m}}{\partial t} + \frac{f_{m+1,m} - f_{m-1,m}}{2\Delta x} + \frac{g_{m,m+1} - g_{m,m-1}}{2\Delta y} = Q_{m,m}$$

• Questa espressione rappresenta una derivata rispetto al tempo di U , una differenza centrata di f rispetto al nodo m e una differenza centrata di g rispetto al nodo m .

• La scrivo in forma differenziale

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - Q \right] \rightarrow \text{Questo è la legge di conservazione in 2D in forma differenziale}$$

• Se questo lo discretizzo su una griglia rettangolare utilizzando le differenze centrate mi rendo conto che il metodo ai volumi finiti su quel tipo di griglia coincide con il metodo alle differenze finite. !!!!!

• Con la scelta iniziale che abbiamo fatto ci porta ad avere termini che introducano un errore di approssimazione del secondo ordine.

- Scrivere un'approximazione di questo tipo significa che quando Δx_{m+1} e Δx_m sono uguali, cioè la griglia è equispaziata, il termine $*$ si annulla e rimane solo il termine con Δx^2 . Ritroviamo, dunque, l'approximazione del secondo ordine per elementi centrati. Su una griglia in cui il Δx è variabile, invece, e se in particolare il Δx subisce una brusca variazione, il termine non si annulla, quindi l'ordine di approssimazione diventa $\Delta x \rightarrow$ si abbassa l'ordine di approssimazione. Se la variazione non è eccessivamente brusca, l'ordine potrebbe degradare leggermente, quindi meno del secondo ma più del primo. Il discorso può essere trasportato sugli elementi finiti: se la cella cambia dimensione, cambia l'ordine. È una cosa da evitare in ogni caso. Un modo per aggirare questa cosa è fare una media pesata. Per costruire un'approximazione di ordine due devo fare in modo che il termine $*$ vada a zero.

$$\Delta x_m^2 f_{m+1} - \Delta x_{m+1}^2 f_m = f_m \Delta x_m^2 - f_{m+1} \Delta x_{m+1}^2 + (\Delta x_m^2 \Delta x_{m+1} + \Delta x_{m+1}^2 \Delta x_m) f_x + \Delta x_m^2 \Delta x_{m+1}^3 \frac{f_{xxx}}{3!} + \Delta x_m^3 \Delta x_{m+1}^2 \frac{f_{xxx}}{3!}$$

- Per ottenere l'equazione in alto ho moltiplicato la $*$ per Δx_m^2 e la $**$ per Δx_{m+1}^2 . Dopo di che, facendo la differenza membro a membro ottengo proprio l'eliminazione del termine $*$!!
- Grazie a questo escamotage l'approximazione resta di secondo grado

• Posso scrivere allora f_x

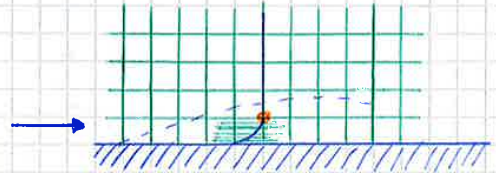
$$f_x = \frac{\Delta x_m (f_{m+1} - f_m) - (f_m - f_{m-1}) \Delta x_{m+1}^2}{\Delta x_m \Delta x_{m+1} (\Delta x_m + \Delta x_{m+1})} + \Delta x_m \Delta x_{m+1} (\Delta x_{m+1} + \Delta x_m) \frac{f_{xxx}}{3!}$$

Che diventa:

$$f_x = \frac{1}{\Delta x_m + \Delta x_{m+1}} \left[\frac{\Delta x_m}{\Delta x_{m+1}} (f_{m+1} - f_m) + \frac{\Delta x_{m+1}}{\Delta x_m} (f_m - f_{m-1}) \right] + \Delta x_m \Delta x_{m+1} \frac{f_{xxx}}{3!}$$

- Otteniamo un'approximazione di f_x , coinvolgendo il punto $m+1$ e $m-1$, commettendo come errore di approssimazione il termine $*$, ovvero un errore dell'ordine di Δx^2 . I termini dentro la quadra sono delle medie pesate delle differenze in avanti e all'indietro. Quindi, anche se la variazione di Δx è brusca, se costruisco le derivate come delle medie fra le differenze finite di quei valori, ottengo un'approximazione del secondo ordine.
- La domanda sorge spontanea: "Perché fare griglie irregolari?" Dipende dal tipo di problema e dalla geometria da discretizzare. Si possono incontrare geometrie complicate che non permettano una griglia regolare. Potrebbero, però, sorgere problemi anche con geometrie semplici. Vediamo un esempio.

• Supponiamo di voler studiare un problema come quello a fianco. Bisogna discretizzare lo spazio.



Abbiamo il flusso su una lamina piana con fluido reale (quindi viscoso). Sappiamo che su una lamina piana la velocità a parete è nulla per effetto della viscosità. All'interno dello strato limite c'è un forte gradiente di velocità, mentre al di fuori si mantiene uniforme. La prima cosa da fare per studiare il problema è discretizzare lo spazio. Questo problema in particolare non ha gradienti forti, però abbiamo visto che l'errore di approx. è moltiplicato per una derivata, quindi l'errore è tanto più grande quanto più i gradienti sono forti. Allora se la griglia è deformata nelle zone dove ci sono i gradienti l'errore aumenta ulteriormente. La regola quindi è: dove ci sono gradienti devo evitare griglie strane. Tornando al problema, lungo x non ho gradienti, allora posso permettermi dei Δx più elevati. Se scegliessi lo stesso passo anche per y , scegliendo il punto $*$, perderei totalmente le info sullo strato limite. Allora, per avere $\Delta y = \text{cost}$ dovrei discretizzare y molto fitto, ottenendo un numero altissimo di punti, con un altrettanto alto costo computazionale. Vedendo il problema, però, fuori dallo s.l. la velocità è uniforme. Posso allora scegliere una griglia il cui passo aumenta sempre di più all'aumentare di y .

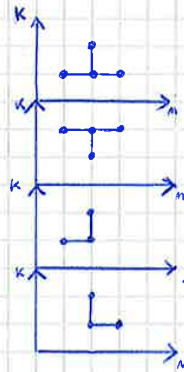
Ricostruendo, possiamo vedere i vari schemi espliciti relativi all'equazione $U_t + a U_x = 0$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\sigma}{2} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k)$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\sigma}{2} (U_{m+1}^{k+1} - U_{m-1}^{k+1})$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \sigma (U_m^k - U_{m-1}^k)$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \sigma (U_{m+1}^k - U_m^k)$$



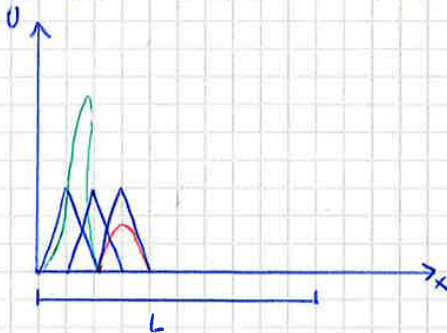
⇒ Schema di tipo ESPlicito centrato

⇒ Schema di tipo IMPLICITO centrato

⇒ Differenza all'indietro per approssimare la derivata nello SPAZIO

⇒ Differenza in avanti per approssimare la derivata nello SPAZIO

Nel costruire questi schemi abbiamo introdotto un errore dell'ordine di Δt e Δx^2 per la differenza centrata e Δt e Δx per le differenze in avanti o all'indietro. Avevamo visto che l'equazione è di tipo lineare e iperbolico con linee caratteristiche con pendenza a . La soluzione si mantiene inalterata e viaggia nel tempo con velocità pari alla pendenza.



Allo stesso modo, supponiamo di avere una U iniziale uguale a zero dappertutto e introduciamo una condizione iniziale dovuta ad una funzione come quella a fianco. Introduciamo un disturbo la cui evoluzione è dettata dalla equazione di governo. Come prima il disturbo viaggia inalterato. Considero un dominio $0-L$, e immagino una funzione, definita in questo dominio, tutta costante o uguale a zero e introduciamo un disturbo. Questo disturbo viaggia secondo le modalità descritte dall'equazione e uscirà dal dominio e la soluzione rimarrà uguale. Questo è quello che succede dal punto di vista Teorico.

- Vediamo qual è la soluzione numerica. Punto di vista numerico significa discretizzare lo spazio e il tempo e poi ottenere la soluzione marciando nel tempo a diversi livelli temporali. La soluzione al tempo zero è nota, al tempo $k=1$ la si ottiene marciando nel tempo, una volta fissati Δt e Δx . Per quanto riguarda la soluzione numerica bisognerà vedere se i numeri hanno qualche relazione con la soluzione teorica.
- La soluzione con metodo all'indietro è stabile per $\sigma \leq 1$, mentre per $\sigma > 1$ introduce un errore di smorzamento. La soluzione con metodo centrato è sempre instabile. Nei prossimi argomenti capiremo i motivi di queste differenze fra metodi così simili.

CONSISTENZA, STABILITÀ E CONVERGENZA

- Per consistenza si intende che lo schema numerico si riduce esattamente all'equazione di partenza al tendere di Δt e Δx a zero. Bisogna essere sicuri che uno schema numerico sia consistente.
- Per stabilità si intende che qualsiasi errore deve essere contenuto entro limiti accettabili, durante l'evoluzione temporale. Se l'errore esplose perde la stabilità. Ad esempio:

$$E_m^k = U_m^k - \bar{U}_m^k \rightarrow \text{Soluzione Esatta}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |E_m^k| < M \Rightarrow \text{Condizione di Stabilità}$$

Andando a fare i calcoli col computer avrò una precisione limitata. La differenza prende il nome di Rand Off ed è indicato con ϵ_m^k . Rappresenta l'errore in ogni punto rispetto al valore numerico esatto.

$$\tilde{E}_m^k = U_m^k - \tilde{U}(m \Delta x, k \Delta t)$$

- Lo schema si dice convergente se $\lim_{\substack{\Delta t \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \tilde{E}_m^k = 0$. Cioè i numeri che ottengo devono tendere esattamente alla soluzione teorica al tendere di Δt e Δx a zero.

Tornando al risultato ottenuto, per vedere se è consistente, si dovrebbe ottenere uno schema numerico meno l'equazione di partenza uguale all'errore di troncamento.

Possiamo dare un'altra interpretazione.

Se \bar{U}_m^k è soluzione esatta dello schema numerico significa che soddisfa esattamente lo schema numerico:

$$\frac{\bar{U}_m^{k+1} - \bar{U}_m^k}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (\bar{U}_{m+1}^k - \bar{U}_{m-1}^k) - (\bar{U}_t + a\bar{U}_x) = \underbrace{\Delta t \bar{U}_{tt}}_{\epsilon_T} + O(\Delta x^2)$$

Allora è come se la soluzione numerica soddisfacesse non più l'equazione di partenza, ma un'equazione modificata e la modifica è dovuta al termine ϵ_T .

$\Rightarrow 0$ perché \bar{U}_m^k è soluzione esatta

Se rielaboro l'espressione trovo:

* $\bar{U}_t + a\bar{U}_x = -\frac{\Delta t}{2} \bar{U}_{tt} + O(\Delta x^2) \rightarrow$ Da questa relazione posso ricavare lo U_t

$$U_t = -aU_x - O(\Delta t, \Delta x^2)$$

Quindi la soluzione numerica soddisfa sempre l'equazione di partenza modificata.

Ora studio la derivata seconda di U rispetto al tempo per esplicitare il termine *

$$(U_t)_t = -a(U_x)_t - O(\Delta t, \Delta x^2) \rightarrow$$
 Derivo U_t rispetto al tempo

$$= -a(U_t)_x - O(\Delta t, \Delta x^2) \rightarrow$$
 Posso invertire la derivata mista $\Rightarrow (U_t)_x = (U_x)_t$

$$= a^2 U_{xx} + O(\Delta t, \Delta x^2) \rightarrow$$
 Sostituisco $U_t = -aU_x$

A questo punto sostituisco nella * e ottengo:

$$\bar{U}_t + a\bar{U}_x = -\frac{\Delta t}{2} a^2 U_{xx}$$

Quindi è come dire che l'equazione modificata presenta, oltre alla derivata prima, una derivata seconda. La derivata seconda a secondo membro fa da smorzatore o amplificatore a secondo del segno del coefficiente che la moltiplica. Questo era l'approssimazione di uno schema CENTRATO.

10/05

STABILITÀ

\rightarrow Si basa sulle espansioni in serie di Fourier.

Facciamo l'Analisi di Stabilità di Von Neumann. Facciamo sempre riferimento all'equazione modello

$$U_t + aU_x = 0 \rightarrow$$
 Equazione modello lineare iperbolico

Partiamo dal seguente schema numerico centrato nello spazio

$$\frac{U_m^{k+1} - U_m^k}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k) = 0$$

Lo schema numerico risulta essere stabile quando qualsiasi errore nella evoluzione temporale si mantiene limitato e non cresce in maniera incontrollata.

È stato introdotto l'errore come:

$$E_m^k = U_m^k - \bar{U}_m^k$$

$$U_m^k = \bar{U}_m^k + E_m^k *$$

Sostituisco lo * all'interno dello schema numerico

$$\frac{\bar{U}_m^{k+1} + E_m^{k+1} - \bar{U}_m^k - E_m^k}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (\bar{U}_{m+1}^k + E_{m+1}^k - \bar{U}_{m-1}^k - E_{m-1}^k) = 0$$

Separo le U e le E ed ottengo:

$$\frac{\bar{U}_m^{k+1} - \bar{U}_m^k}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (\bar{U}_{m+1}^k - \bar{U}_{m-1}^k) + \frac{E_m^{k+1} - E_m^k}{\Delta t} + \frac{a}{2\Delta x} (E_{m+1}^k - E_{m-1}^k) = 0$$

Poiché \bar{U}_m^k è soluzione esatta, la prima parte è nulla. Ciò che resta rappresenta l'evoluzione della E_m^k nel tempo. Quindi l'evoluzione dell'errore nel tempo è descritto dallo stesso schema numerico.

- Tornando allo schemo numerico. Affinché l'errore risulti limitato, bisogna che l'ampiezza delle armoniche E risulti limitata nell'evoluzione temporale. Poiché stiamo considerando un problema lineare, vale la sovrapposizione degli effetti; quindi anziché guardare tutte le armoniche contemporaneamente, posso pensare di prenderle una per volta e ricavare le altre con la sovrapposizione degli effetti. Allora rappresento E_m come una singola armonica:

$$E_m^k = E^k e^{i\omega m \Delta x}$$

- Sostituisco nello schemo numerico:

$$E^{k+1} e^{i\omega m \Delta x} = E^k e^{i\omega m \Delta x} - \frac{\sigma}{2} (E^k e^{i\omega(m+1)\Delta x} - E^k e^{i\omega(m-1)\Delta x})$$

- Raccolgo E^k e lo porto a primo membro

$$E^{k+1} = E^k - \frac{\sigma}{2} E^k (e^{i\omega \Delta x} - e^{-i\omega \Delta x})$$

$$\frac{E^{k+1}}{E^k} = 1 - \frac{\sigma}{2} (e^{i\omega \Delta x} - e^{-i\omega \Delta x}) = G$$

⇒ **FATTORE DI AMPLIFICAZIONE**

- Da qui si intuisce come, affinché lo schemo sia stabile, l'ampiezza dell'armonica deve rimanere limitata; in particolare E^{k+1} non deve mai superare E^k . Questo rapporto prende il nome di **Fattore di Amplificazione**. È un numero complesso il cui modulo deve essere sempre minore o uguale a 1.

$$|G| \leq 1 \Rightarrow \text{Deve valere per ogni armonica.}$$

- Se lo scriviamo come numero complesso otteniamo:

$$G = 1 - \frac{\sigma}{2} (\cos(\omega \Delta x) + i \sin(\omega \Delta x) - \cos(\omega \Delta x) + i \sin(\omega \Delta x)) = 1 - i \sigma \sin(\omega \Delta x)$$

- Il cui modulo è:

$$\Rightarrow |G| = \sqrt{1 + \sigma^2 \sin^2(\omega \Delta x)} \Rightarrow \text{MODULO DI } G \text{ per schemo numerico CENTRATO}$$

- Per qualsiasi valore di ω e di σ $|G|$ risulta sempre maggiore di 1, ciò significa che lo schemo numerico centrato è **SEMPRE INSTABILE!!** Sarebbe stabile solo per $\sigma=0$, ma se $\sigma=0$ allora $\Delta t=0$ e non ho evoluzione nel tempo. $\sigma=0$ anche se $\omega=0$, ma se $\omega=0$ allora solo un'armonica risulterebbe stabile.

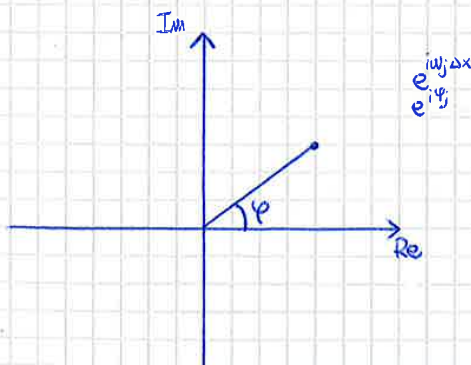
$$\omega_j = \frac{2\pi}{2L} j$$

$$\omega_j \Delta x = \frac{2\pi}{2L} \Delta x j$$

$$= \frac{\pi}{N \Delta x} \Delta x j = \frac{\pi}{N} j \Rightarrow \boxed{\Phi_j = \frac{\pi}{N} j}$$

Angolo di Fase

- Vediamo adesso la **Costruzione Grafica**. Per farlo faccio comparire lo Δx nell'espressione dell' ω_j . Per j che va da $-N$ ad N ottengo un angolo Φ_j che va da $-\pi$ a π .



- Riparto sul piano complesso il generico numero complesso. Considerando $e^{i\omega_j \Delta x} = e^{i\Phi_j}$, posso dire che l'angolo Φ_j individua la posizione del vettore al variare di ω_j . Cioè per ogni ω_j ci sarà un Φ_j .
- Dunque posso rappresentare il numero complesso come un punto qualsiasi il cui modulo è pari a G e individuato dall'angolo di fase Φ .

- Ora dire che $|G|$ deve essere minore o uguale a 1 per avere uno schemo stabile significa dire che il numero complesso G deve essere contenuto all'interno di un cerchio di raggio unitario. Per definizione, un vettore contenuto nel cerchio di raggio unitario ha sempre modulo minore o uguale a 1.

- Questo è ciò che ci dice la **Rappresentazione Grafica**.

Condizione di stabilità CFL

C.F.L. = Courant - Friedrich - Levy

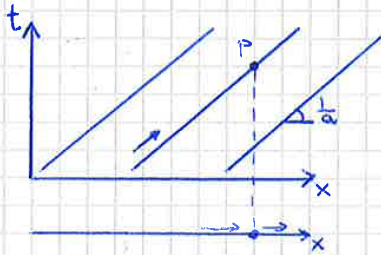
Abbiamo detto che il seguente schema:

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{a \Delta t}{\Delta x} (U_m^k - U_{m-1}^k)$$

è condizionatamente stabile, cioè è stabile solo se $\left[0 \leq \frac{a \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \right] \Rightarrow$ Condizione CFL

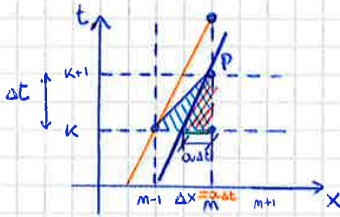
Vediamo qualche commento su questa condizione di stabilità. Ricordiamo che lo schema numerico rappresenta una soluzione approssimata dell'equazione modello che stavamo considerando, ovvero:

$$U_t + a U_x = 0 \quad \frac{dx}{dt} = a$$



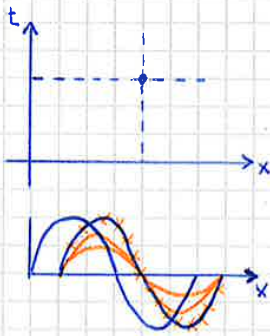
Studiando l'equazione abbiamo visto che esiste una linea caratteristica di pendenza pari ad a e che la presenza delle linee caratteristiche, che in questo caso sono rette, permette di trovare la soluzione nel generico punto grazie al segnale che propaga nel tempo lungo le linee. Avevamo introdotto il dominio di dipendenza che in questo caso è la linea caratteristica stessa a monte del punto P e il dominio di influenza che è sempre la linea ma a valle del punto P.

Ritorniamo allo schema numerico che stiamo considerando



CFL $\Rightarrow a \Delta t \leq \Delta x$

La soluzione al tempo $k+1$ è ottenuta partendo dalla soluzione al tempo k e andando avanti nel tempo di un passo Δt . Se guardo lo schema numerico, il punto m al tempo $k+1$ dipende dalla soluzione in m al tempo k e dalla soluzione in $m-1$ al tempo k . In qualche modo possiamo dire che il dominio numerico del punto P ha un dominio numerico rappresentato dalla regione azzurra. Ora la condizione di stabilità $0 \leq 1$ significa $a \Delta t \leq \Delta x$, quindi $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$. Allora se traccio la linea caratteristica passante per il punto P è chiaro che, secondo la condizione di stabilità, il segmento verde dovrà essere minore o uguale a Δx . Se aumento il Δt , ottengo la linea caratteristica arancione e $a \Delta t$ coincide con Δx . Se il Δt fosse ancora maggiore avrei un $a \Delta t > \Delta x$ e quindi lo schema numerico risulterebbe INSTABILE. Allora il Δt deve essere scelto in modo tale da soddisfare la stabilità, in quanto il Δx sia scelto automaticamente in base al numero di punti di discretizzazione e la a è data dal problema. La condizione di stabilità ci dice che il dominio fisico deve essere compreso all'interno del dominio numerico.



Come abbiamo già visto, se prendiamo una semplice armonica, sappiamo che la soluzione esatta è uguale a se stessa traslata nel tempo che viaggia alla velocità data dalla pendenza della linea caratteristica. Quindi l'ampiezza è sempre la stessa. Questo dal punto di vista teorico. Dal punto di vista numerico quello che possiamo valutare è la soluzione per punti discreti. Nel caso in cui $\Delta t = \Delta x$ la soluzione numerica è esattamente pari a quella teorica (le x nel disegno a fianco). Nel momento in cui $a \Delta t < \Delta x$ è come se l'armonica venisse smorzata andando avanti nel tempo, e lo smorzamento è tanto più grande quanto più σ è piccola. Il Δt deve essere scelto in modo da soddisfare la stabilità, ma il più alto possibile in modo da minimizzare l'errore di diffusione.

Che la generica armonica venga smorzata lo si vede anche dall'analisi di stabilità fatta. Avevamo definito il fattore di amplificazione G come rapporto tra l'ampiezza dell'armonica al tempo $k+1$ e al tempo k . Con la stessa metodologia possiamo definire un G con le soluzioni esatte:

$$G = \frac{U^{k+1}}{U^k} \Rightarrow U^{k+1} = G \cdot U^k$$

Da cui si vede che la U^{k+1} è diversa da U^k per il fattore G . Se $G < 1$ l'ampiezza diminuisce se $G = 1$ l'ampiezza non cambia perché $U^{k+1} = U^k$.

Facciamo un'analisi di stabilità dello schema numerico che abbiamo scritto, la condizione è:

$$U_m^k = \sum_{j=N}^N U_j^k e^{i\omega_j \Delta x}$$

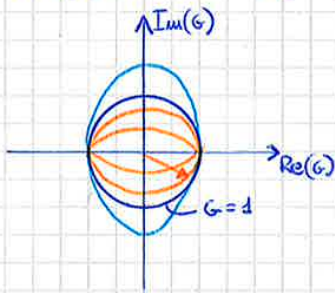
Lo applico allo schema:

$$U^{k+1} e^{i\omega \Delta x} = \frac{U^k e^{i\omega(m+1)\Delta x} + U^k e^{i\omega(m-1)\Delta x}}{2} - \frac{\sigma}{2} (U^k e^{i\omega(m+1)\Delta x} - U^k e^{i\omega(m-1)\Delta x})$$

$$U^{k+1} = \frac{U^k}{2} (e^{i\omega \Delta x} + e^{-i\omega \Delta x}) - \frac{\sigma}{2} U^k (e^{i\omega \Delta x} - e^{-i\omega \Delta x})$$

$$G = \frac{U^{k+1}}{U^k} = \frac{1}{2} (\cos(\omega \Delta x) + i \sin(\omega \Delta x) + \cos(\omega \Delta x) - i \sin(\omega \Delta x)) - \frac{\sigma}{2} (\cos(\omega \Delta x) + i \sin(\omega \Delta x) - \cos(\omega \Delta x) + i \sin(\omega \Delta x))$$

$$G = \cos(\omega \Delta x) - i\sigma \sin(\omega \Delta x) \quad \sigma = 1$$



Dopo aver trovato G, lo riporto sul piano complesso. Se $\sigma = 1$, al variare di ω ottengo un cerchio di raggio unitario. Per $\sigma < 1$ G è un'ellisse di semiasse 1 e σ (armonici). Per $0 < \sigma < 1$ il semiasse dell'ellisse è tanto più piccolo quanto più piccolo è σ . Per $\sigma > 1$ il semiasse è maggiore di uno (azzurro), quindi c'è instabilità. In sostanza, lo schema numerico che abbiamo ottenuto a partire da quello centrato, risulta essere stabile. Quindi anche lo schema centrato, indipendentemente dalla posizione della a , il dominio fisico è sempre contenuto nel dominio numerico, ma questa aggiunta mi stabilizza lo schema. Bisogna tenere presente che questo schema non ha niente a che vedere con la natura fisica del problema.

Torniamo indietro alla \otimes . Abbiamo detto che se $\sigma < 1$, il termine a secondo membro è positivo ed è proporzionale alla derivata seconda, ed è proprio questo che stabilizza la soluzione. La derivata seconda con il segno più ha il significato di ~~smorzare~~ possibili oscillazioni. In genere quando c'è un termine con derivata seconda, a seconda del segno che compare davanti alla derivata, le possibili oscillazioni possono essere smorzate (+) o amplificate (-). Per analogia con le Navier-Stokes in cui le derivate seconde compaiono con i termini viscosi, questo termine è detto **VISCOSITÀ NUMERICA**.

Quindi ci sono due categorie di schemi numerici:

CENTRATI → Vengono stabilizzati aggiungendo la **VISCOSITÀ NUMERICA** senza preoccuparsi del fatto che ci sono informazioni che viaggiano da una parte o dall'altra, ma semplicemente aggiungendo allo schema numerico aggiungendo la viscosità.

UPWIND → Per loro natura sono stabili, ma anche qui facendo lo stesso ragionamento si vede che alla fine si introduce un termine proporzionale alla derivata seconda. Ma in questo caso avviene automaticamente. Inoltre in questi schemi la viscosità numerica è più piccola di quella introdotta esplicitamente negli schemi centrati.

21/05

Ricapitolando...

Lo schema centrato riscritto per essere stabile è:

$$U_m^{k+1} = \frac{U_{m+1}^k + U_{m-1}^k}{2} - \frac{\sigma}{2} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k) \Rightarrow \text{Schema Centrato ESPlicito}$$

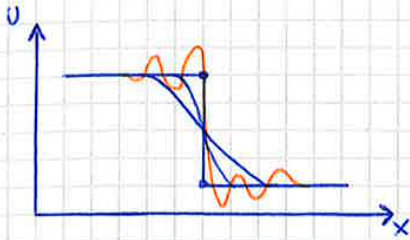
Aggiungo e sottraggo U_m^k e posso riscrivere come:

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\sigma}{2} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k) + \frac{U_{m+1}^k - 2U_m^k + U_{m-1}^k}{2} \Rightarrow \text{Schema di Lax Friedrichs}$$

Abbiamo visto anche schemi da un lato, chiamati **upwind**, che sono stabili finché $\sigma \leq 1$.

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \sigma (U_m^k - U_{m-1}^k) \Rightarrow \text{Schema UPWIND}$$

La differenza sostanziale tra uno schema centrato e uno upwind, come abbiamo visto, è che nel centrato bisogna aggiungere la viscosità esplicitamente.



• Cosa significa che lo schema deve essere dissipativo e cioè deve smorzare? Prendiamo, ad esempio, una soluzione che presenti una discontinuità come a fianco. La discontinuità non viene in maniera netta, lo smorzamento smussa gli angoli. Questo smorzamento è tanto più grande quanto più Δx è piccolo. Inoltre lo smorzamento sarà diverso a seconda che stia considerando uno schema centrato o upwind. Ora noi abbiamo considerato schemi numerici del primo ordine, cioè l'errore commesso è legato a Δx . L'errore è piccolo quanto più è piccolo Δx , ma è sempre presente. Quindi lo schema al primo ordine non lineare è sempre **dissipativo**. A livello ingegneristico non si usano, il minimo è il secondo ordine. Il problema è che gli schemi di ordine superiori al primo introducono un altro

fenomeno. Abbiamo detto che le armoniche interagiscono fra loro e quindi potremmo avere delle soluzioni come quella oratione, in presenza di discontinuità, o di forti gradienti, potrebbero nascere delle oscillazioni.

• Tutto quello che abbiamo visto finora era relativo ad un problema con una sola equazione differenziale. Vediamo adesso cosa succede con un **sistema di equazioni**.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \lambda_1 = -a & dw_1 = du + a dv \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & \Rightarrow \lambda_2 = a & dw_2 = du - a dv \end{cases}$$

• Prendiamo questo sistema di equazioni di tipo iperbolico. Esistono due linee caratteristiche con pendenze $\pm a$. Avremo inoltre individuato le due **equazioni di compatibilità** come combinazioni lineari dei differenziali du e dv .

• Quindi trovo un sistema equivalente al primo

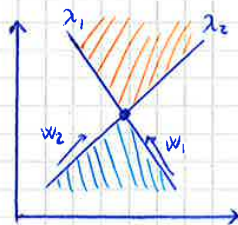
$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

• Queste rappresentano il trasporto di w_1 (e w_2) lungo la linea caratteristica λ_1 (e λ_2).
• Se poi il problema è lineare $\lambda_1, \lambda_2 = \text{cost}$, quindi il sistema risulta perfettamente **disaccoppiato**. Noi consideriamo il problema **lineare**.

• In passato abbiamo visto il problema lineare seguente

$$U_t + a U_x = 0$$

/// : Dominio di Influenza
//// : Dominio di Dipendenza



• Per ogni punto la soluzione era data dalla combinazione dei segnali w_1 e w_2 che propagavano lungo le linee caratteristiche λ_1 e λ_2 di pendenza $\pm a$.
• Abbiamo inoltre definito il **dominio di dipendenza** e il **dominio di influenza**.

• Vediamo adesso numericamente come possiamo analizzare i vari schemi numerici. Abbiamo scritto il sistema di equazioni in forma matriciale:

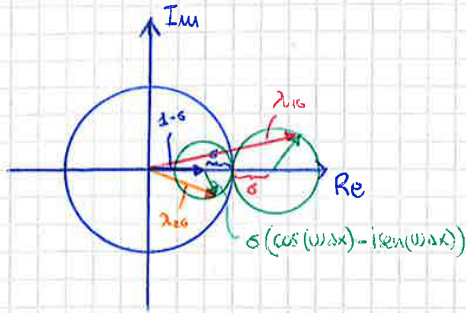
$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_U + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_A \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_U \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x}$$

• Vediamo come scrivere lo schema numerico per questo problema. Vediamo uno **schema numerico CENTRATO**:

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\Delta t A}{2\Delta x} [U_{m+1}^k - U_{m-1}^k] \rightarrow \text{Questa scrittura è lo stesso già scritta per gli altri casi ma al posto di } a \text{ abbiamo la matrice } A.$$

• Sappiamo già che lo schema centrato è **INSTABILE**. Proviamo a scrivere lo **schema con differenza all'indietro**:

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\Delta t A}{\Delta x} [U_m^k - U_{m-1}^k]$$



- Riportiamo sull'asse reale e sull'asse immaginario un cerchio di raggio unitario. Abbiamo detto che per la condizione di stabilità, la matrice G deve essere limitata. Quindi il massimo degli autovalori deve essere contenuto nel cerchio di raggio unitario. Vediamo allora quanto valgono λ_{1c} e λ_{2c} .
- Come si vede dal piano λ_{1c} è sempre maggiore di 1, per tutti i valori di s e di w . Allora lo schema con differenza all'indietro è sempre **INSTABILE**, per un sistema di equazioni.
- Per un'equazione scalare questo schema risultava stabile.

• Proviamo adesso a vedere lo schema con differenza in avanti.

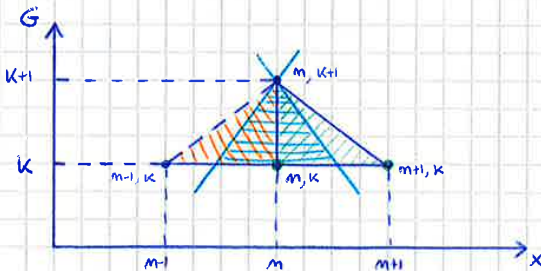
$$U_m^{k+1} = U_m^k - A \frac{\Delta t}{\Delta x} [U_{m+1}^k - U_m^k]$$

$$W^{k+1} = W^k - A \frac{\Delta t}{\Delta x} W^k (e^{i w \Delta x} - 1)$$

• Scrivo direttamente la matrice di amplificazione

$$G = \frac{W^{k+1}}{W^k} = I - \frac{A \Delta t}{\Delta x} (\cos(w \Delta x) + i \sin(w \Delta x) - 1) \rightarrow \text{Gli autovalori non cambiano, quindi anche questo schema risulta INSTABILE.}$$

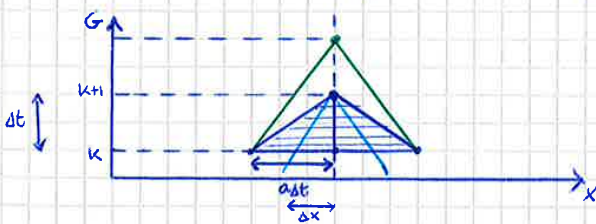
• Se avessimo provato uno schema centrato avremmo sempre trovato autovalori di G maggiori di 1.



- Vediamo allora come possiamo reinterpretare la **Condizione CFL**. Questa condizione significa che il dominio fisico deve essere contenuto nel dominio numerico. Se prendo un generico punto m, k il dominio fisico è la regione compresa dalle due linee caratteristiche con pendenza $\pm a$.
- Se ora prendo uno schema backward, cioè quello che abbiamo appena studiato per intero, il dominio numerico è la regione tratteggiata in graticola. È chiaro che il dominio fisico sia sempre esterno. Lo stesso vale con lo schema forward.
- Se però guardo lo schema centrato, fintanto che $\Delta x \leq a \Delta t$, il dominio numerico (somma dei numerici backward e forward) contiene quello fisico. Allora ci si aspetterebbe che questo schema fosse stabile, eppure non lo è.

- ▨ : Dominio Fisico
- ▨ : Dominio Numerico Backward
- ▨ : Dominio Numerico Forward

• Se aumenta il Δt ho la situazione verde



• Riscrivo lo schema centrato:

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{A \Delta t}{2 \Delta x} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k)$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{a^2 \Delta t}{2 \Delta x} (v_{m+1}^k - v_{m-1}^k)$$

$$v_m^{k+1} = v_m^k - \frac{\Delta t}{2 \Delta x} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k) \rightarrow \text{Sostituisco la condizione } [a \Delta t = \Delta x]$$

$$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{a}{2} (v_{m+1}^k - v_{m-1}^k)$$

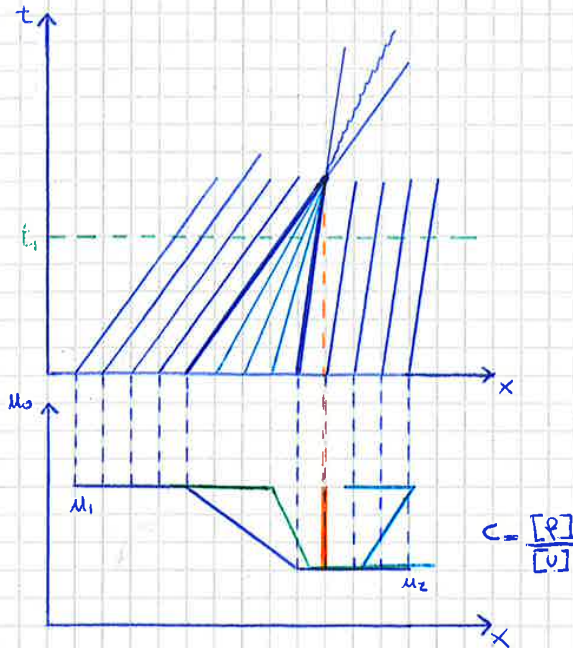
$$v_m^{k+1} = v_m^k - \frac{1}{2a} (U_{m+1}^k - U_{m-1}^k)$$

- Da questo sistema si vede che le soluzioni nei punti m dipendono dalle u e dalle v nei punti $m+1$ ed $m-1$.
- Se guardiamo la soluzione esatta, dicevo il segnale è costante lungo la linea caratteristica, il che significa che i segnali che viaggiano lungo le due linee si combinano.

• Per rafforzare ciò che abbiamo già detto. Andiamo a vedere come si modifica il problema con altre configurazioni di condizioni iniziali, ovvero vediamo diversi tipi di funzione al tempo zero.

$$u_t + uu_x = 0 \quad u(x, t)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \rightarrow \text{Pendenza Linee Caratteristiche}$$



- Il primo esempio che vediamo è una rampa con discesa. Conosciamo la pendenza delle linee caratteristiche che, quindi possiamo tracciarle in ogni punto. Inoltre dall'equazione di compatibilità vediamo che u è costante lungo le linee che quindi sono rette.
- Poiché $u_2 < u_1$ le linee caratteristiche a $u_2 = \text{cost}$ avranno delle pendenze maggiori rispetto alle altre a $u_1 = \text{cost}$. Succede quindi che le rette si intersecheranno in un punto. Poiché nel tratto in mezzo la u varia linearmente fra u_1 e u_2 , tutte le linee caratteristiche in quel tratto si intersecheranno nello stesso punto. (Linee azzurre).
- Col metodo delle linee caratteristiche posso tracciare la soluzione al tempo t_1 . Aumentando il tempo la rampa diventerà sempre più ripida, fino al punto di intersezione delle caratteristiche in cui è dritta.
- Se supero il punto di intersezione, il ramo superiore sopravanza e la configurazione è impossibile poiché per lo stesso x avrei diversi valori di u . Quindi nel momento in cui le linee caratteristiche si intersecano si crea una discontinuità. Dal punto di intersezione in poi la discontinuità (urto) viaggia con una velocità intermedia tra la caratteristica di monte e di valle. Qual è il valore di questa velocità? Dal momento in cui compare la discontinuità la soluzione diventa discontinua e non può più essere descritta dalle equazioni viste in partenza.

• Per descrivere una soluzione discontinua bisogna fare ricorso all'equazione in forma conservativa:

FORMA CONSERVATIVA

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

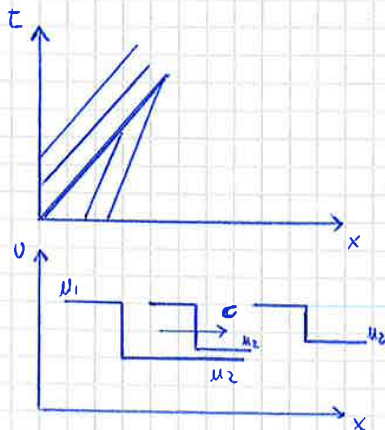
u : Variabile Conservata
 f : Termine di Flusso

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (u^2/2)}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{Forma Conservativa Per il nostro problema}$$

• Allora la velocità può essere scritta come:

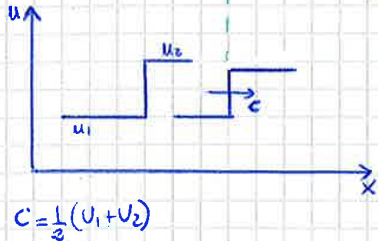
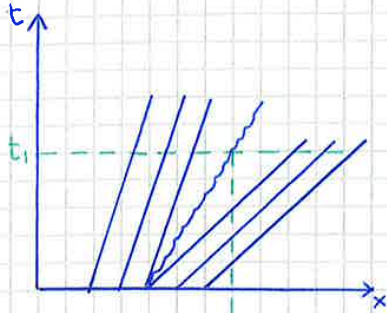
$$c = \frac{u_1^2/2 - u_2^2/2}{u_1 - u_2} = \frac{1}{2} (u_1 + u_2) \Rightarrow \text{Velocità dell'Urto} \rightarrow \text{Viene proprio il valore medio tra } u_1 \text{ e } u_2.$$

• Un'altra configurazione può essere la seguente funzione a scalino.



- In questo caso avremmo un urto che viaggia già dalla condizione iniziale. Sia a monte che a valle avremo linee caratteristiche che vanno a finire sull'urto.
- Per analogia con la fluidodinamica questo urto è chiamato Urto di Compressione, perché ad ogni istante l'urto contribuisce ad incrementare la u_2 .

• La seconda possibilità è quella che dà luogo ad un urto che viaggia con una certa velocità. La discontinuità iniziale viaggia e si mantiene inalterata.



• Questo tipo di soluzione, però, non ha significato dal punto di vista fisico. Dal punto di vista di rispetto delle condizioni di Rankine-Hugoniot c'è soddisfazione, ma non c'è soddisfazione se guardiamo la soluzione come condizione limite ottenuta a partire da una soluzione in cui non c'erano discontinuità iniziali. C'è un altro modo di vedere questo problema, l'equazione di partenza

$[U_t + U U_x = 0] \rightarrow$ Equazione di Burgers

Viene ricavata a partire da un'equazione del tipo

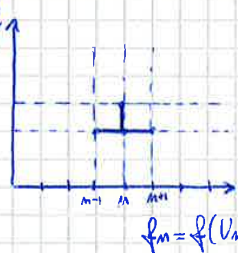
$[U_t + U U_x = \epsilon U_{xx}] \rightarrow$ Equazione di Burgers Viscosa

facendo tendere ϵ a zero. L'introduzione di questa equazione discende dal fatto che questa equazione scalare è molto simile alla quantità di moto di Eulero. Così come, annullando i termini viscosi (ovvero quelli con derivata seconda) si passa dalle Navier-Stokes alle Eulero, esiste un'equazione di Burgers viscosa, cioè in cui non si annulla il termine U_{xx} . Al tendere di ϵ a zero si dimostra che la soluzione non è quella raffigurata qua, ma è la precedente.

- Volendo valutare in modo ancora diverso. Abbiamo interpretato la soluzione nei diversi punti come un'informazione che viaggia con una certa velocità che è proporzionale al valore della U . Allora u_2 dovrebbe viaggiare più velocemente di u_1 e la discontinuità dovrebbe tendere a dissolversi ma così non è. Quindi questa soluzione non è ammissibile dal punto di vista fisico. Viola il secondo principio della termodinamica.
- L'urto raffigurato prende il nome di Urto di Espansione, e non è un urto fisico.

• Abbiamo visto, quindi, che abbiamo a che fare con problemi in cui possono esistere delle discontinuità. La discontinuità nasce perché l'equazione è non lineare. Allora torniamo a ciò che succede dal punto di vista numerico.

$[\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0] \rightarrow$ Forma Conservativa



• Bisogna utilizzare la forma conservativa, o meglio, bisogna discretizzare l'eq. in forma conservativa.

La discretizzazione è la stessa solita:

$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{m+1} - F_{m-1})$

- Discretizzo con uno schemo centrato.
- Per studiare la stabilità dello schemo torno all'eq. in forma quasi lineare.
- Per rendere lo schemo stabile bisogna aggiungere una viscosità numerica.

$U_m^{k+1} = \frac{U_{m+1}^k + U_{m-1}^k}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (F_{m+1} - F_{m-1}) \rightarrow$ Schemo Centrato reso stabile dalla presenza della viscosità numerica

• Nel momento in cui scrivo le equazioni in forma conservativa, nel momento in cui si dovesse presentare una discontinuità nel dominio, quella discontinuità è automaticamente catturata dalla forma conservativa discreta. La soluzione numerica presenterà un errore di diffusione dovuto alla viscosità numerica. Per schemi del primo ordine questo fenomeno non si può mai eliminare.

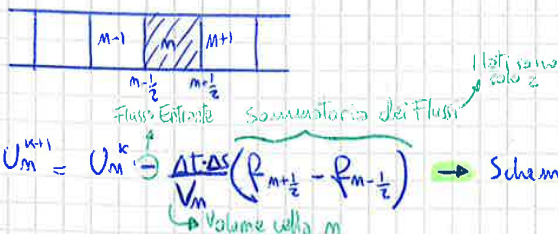
• Vediamo adesso come valutare questi flussi. Vediamo la forma integrale dell'equazione di Eulero, applicata ad un volumetto elementare. U ed F sono vettori colonna, ma gli elementi in F sono vettori.

$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0$ U : grandezza media

La forma discreta rappresenta le evoluzioni delle grandezze medie per il volume della cella più la sommatoria dei flussi estesi ai lati della cella. ΔS è il contorno del volumetto elementare. Questo vale per ogni cella elementare.

$\frac{\partial}{\partial t} U \Delta V + \sum \vec{F} \cdot \vec{n} \Delta S$

• Vediamo come applicare per un problema 1D la forma discreta:



$U_m^{k+1} = U_m^k - \frac{\Delta t \Delta S}{V_m} (F_{m+1/2} - F_{m-1/2}) \rightarrow$ Schemo centrato

• Lo schemo scritto in questa maniera è conservativo. Cioè la sommatoria dei flussi ad ogni interfaccia deve essere uguale a zero.

EQUAZIONE DI EULERO

In una dimensione, l'equazione non stazionaria di Eulero l'abbiamo scritta come sistema:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad f = f(U) \quad \text{con } U: \text{vettore colonna}$$

$$f_i = f_i(p, \rho v, pE)$$

In generale, per studiare le proprietà di un'equazione differenziale in un sistema di equazioni bisogna scriverlo in forma **quasi-lineare**:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial U}}_{\text{Matrice}} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \rightarrow \text{Si passa dalla forma CONSERVATIVA alla forma QUASI-LINEARE}$$

Chiaro essendo f un vettore, $\frac{\partial f}{\partial U}$ sarà una matrice. La chiamo A e scrivo:

$$\left[\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \right] \rightarrow \text{Eq. in forma quasi-lineare in termini di variabili } U \text{ che sono variabili conservate.}$$

Per poter analizzare questo sistema e capire come si comporta bisogna trovare gli **autovalori**, definire gli **autovettori** e da lì, se esistono le linee caratteristiche, descrivere una forma in cui compaiono i segnali che propagano lungo le linee caratteristiche. All'inizio del corso avevamo già scritto l'eq. di Eulero in forma quasi-lineare, quindi conviene riscrivere le equazioni in una forma in cui compaiono le variabili primitive che hanno una struttura più semplice.

Ricondiamo l'equazione di continuità, della q.d.m e dell'energia.

Queste equazioni vanno riscritte in maniera più semplice.

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{q} = 0 \\ \rho \frac{d\vec{q}}{dt} + \nabla p = 0 \\ \rho \frac{dE}{dt} + \nabla \cdot (\vec{q} \cdot p) = 0 \end{cases}$$

Abbiamo visto che l'equazione dell'energia può essere sostituita dalla equazione dell'entropia (per Eulero)

$$\frac{ds}{dt} = 0 \rightarrow \text{L'entropia si conserva lungo la traiettoria di una particella, in assenza di fenomeni dissipativi.}$$

Le altre due equazioni le possiamo rimodellare per far comparire altre variabili, ad esempio:

$$T ds = de + p dv = 0 \rightarrow \text{Per una trasformazione isentropica il primo membro è nullo.}$$

Divido tutto per dt

$$T \frac{ds}{dt} = \frac{de}{dt} + p \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\rightarrow p \frac{dv}{dt} = p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}$$

Otengo

$$\frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{de}{dt} \rightarrow \text{Mi permette di collegare l'equazione di continuità e l'equazione dell'energia.}$$

Posso riscrivere l'equazione di continuità in modo da far comparire l'energia

$$\frac{de}{dt} \frac{\rho^2}{\rho} + \rho \nabla \cdot \vec{q} = 0$$

$$\frac{de}{dt} \frac{\rho}{\rho} + \nabla \cdot \vec{q} = 0 \rightarrow \text{Dall'equazione di stato si ha } \frac{\rho}{p} = \frac{1}{RT}$$

$$\boxed{\frac{de}{dt} + RT \nabla \cdot \vec{q} = 0} \rightarrow \text{Questo è un altro modo per scrivere l'equazione di continuità, fa entrare in gioco l'energia.}$$

A questo punto posso scrivere il sistema in forma compatta:

$$V = \begin{pmatrix} a \\ u \\ s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} + A \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

In forma quasilineare la struttura è sempre la stessa, vettore colonna - matrice - vettore colonna. Questo sistema appare molto più semplice da trattare (scritto in questa forma).

Vediamo se ci sono **Linee Caratteristiche** per questo sistema. Le pendenze delle linee caratteristiche sono date dagli autovalori della matrice A, che si ottengono come segue:

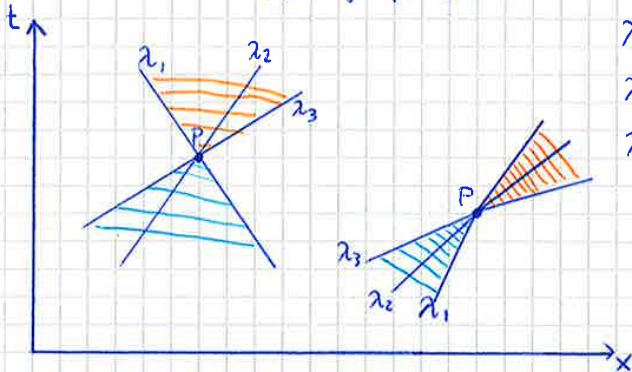
$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} u - \lambda & sa & 0 \\ a & u - \lambda & -\frac{a^2}{\gamma R} \\ 0 & 0 & u - \lambda \end{vmatrix} = (u - \lambda)^3 - a^2(u - \lambda) = 0$$

$$(u - \lambda)[(u - \lambda)^2 - a^2] = 0 \Rightarrow [\lambda = u, \lambda = u \pm a] \quad \lambda = \frac{dx}{dt}$$

Otteniamo 3 linee caratteristiche reali, quindi il sistema lo possiamo classificare come **IPERBOLICO**:

Quindi sul piano x-t, per ogni punto, abbiamo tre linee caratteristiche, che ordino in senso crescente.



$$\lambda_1 = u - a$$

$$\lambda_2 = u$$

$$\lambda_3 = u + a$$

• Se $u < a$, λ_1 avrà pendenza negativa. u è positivo quindi λ_2 e λ_3 hanno pendenza positiva. Se $u < a$ il flusso è subsonico, se lo u fosse maggiore della a , allora il flusso sarebbe supersonico e lo λ_1 avrebbe pendenza positiva. Allora per un flusso supersonico tutti i punti hanno linee caratteristiche solo positive. Le linee caratteristiche definiscono il dominio di dipendenza e il dominio di influenza. Tutto ciò che è fuori dal dominio di dipendenza non intacca il punto P.
• Se il campo di moto non è uniforme, la pendenza delle linee caratteristiche è variabile da punto a punto, quindi diventano delle curve.

Ora, se esistono le tre linee caratteristiche, vediamo come valutare le **variabili caratteristiche**. Per valutare basta trovare gli autovettori di sinistra della matrice A, utilizzare questi autovettori per costruire una combinazione lineare delle variabili primitive che poi mi daranno le variabili caratteristiche.

$$\{l\} [A] = \lambda \{l\}$$

$$l = \{l_1, l_2, l_3\}$$

→ Abbiamo 3 linee caratteristiche, quindi gli autovettori sono 3 per le linee $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Per trovare questi autovettori basta riscrivere le equazioni per ogni autovettore:

$$\begin{cases} u l_1 + \frac{a}{\gamma} l_2 + 0 l_3 = \lambda l_1 \\ sa l_1 + u l_2 + 0 l_3 = \lambda l_2 \\ 0 l_1 - \frac{a^2}{\gamma R} l_2 + u l_3 = \lambda l_3 \end{cases}$$

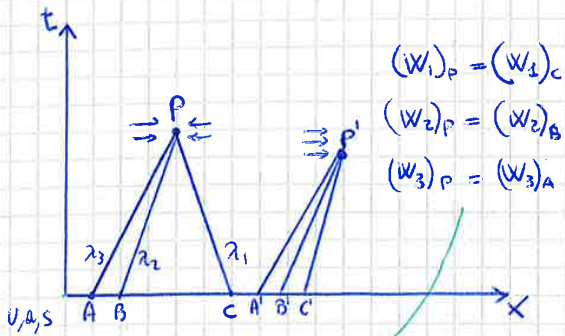
Risolvo:

$$\begin{cases} u l_1 + \frac{a}{\gamma} l_2 + \text{---} = (u-a) l_1 \\ sa l_1 + u l_2 + \text{---} = (u-a) l_2 \\ \text{---} - \frac{a^2}{\gamma R} l_2 + u l_3 = (u-a) l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\gamma} l_2 = -a l_1 \\ sa l_1 = -a l_2 \\ -\frac{a^2}{\gamma R} l_2 = -a l_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l^{(1)} = \left\{ \frac{1}{s}, -1, -\frac{a}{\gamma R} \right\} \\ l^{(3)} = \left\{ \frac{1}{s}, 1, -\frac{a}{\gamma R} \right\} \end{cases}$$

Gli autovettori sono definiti a meno di una costante. Allora scelgo $l_2 = -1$ e trovo $l_1^{(1)}$ ed $l_3^{(1)}$. Quindi ho definito l'autovettore $l^{(1)}$. Scegliendo l'autovettore $l_2^{(3)} = 1$ e trovo l'autovettore $l^{(3)}$.

Per trovare $l^{(2)}$ sostituisco in tutte e tre λ_1 , e così anche per $l^{(3)}$ ed $l^{(2)}$ con λ_2 e λ_3 .

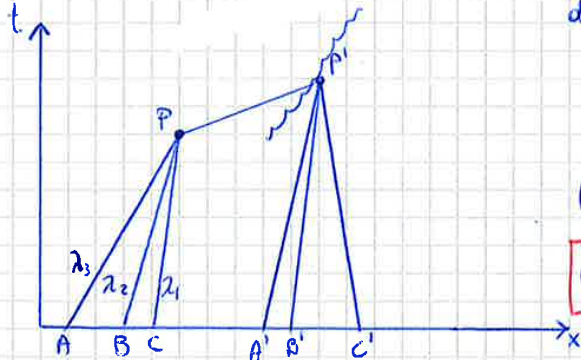
• Ora se considero l_0 sempre costante, ottengo un problema particolarmente semplice. La soluzione con il metodo delle caratteristiche diventa immediata. Al tempo $t=0$ conosco ad ogni punto u, a, s , cioè conosco lo stato di sistema (due grandezze termodinamiche e una cinematica). Per ognuno di questi punti posso tracciare le linee caratteristiche e ottenere la soluzione dalla combinazione di questi segnali. Posso allora applicare il sistema semplificato per $s=\text{cost}$. Su A, B e C è tutto noto, quindi trovo le soluzioni al punto P. Nel caso subsonico sono influenti sia le info da monte che da valle, nel caso supersonico valgono solo quelle da monte.



$$\begin{cases} \left(\frac{a}{s} - u\right)_P = \left(\frac{a}{s} - u\right)_C \\ s_P = s_B \\ \left(\frac{a}{s} + u\right)_P = \left(\frac{a}{s} + u\right)_A \end{cases} \Rightarrow \underline{a_P, s_P, u_P}$$

Soluzione Punto P

• Vediamo ora un problema non lineare. Le pendenze variano da punto a punto, quindi possono intersecarsi. Abbiamo quindi una situazione come quella in basso. Cambiano i valori di u e di a e la pendenza non è più la stessa. Supponiamo che la pendenza aumenti. Posso scrivere l'uguaglianza in basso tra P' e A'. Cambiando la pendenza λ_3 , può succedere che le due linee si incontrino. Allora i punti P', P e A sono collegati, e per via delle uguaglianze scritte sotto possiamo dire che le quantità tra parentesi sono uguali anche tra P' e A, *



$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{s} + u\right)_{P'} &= \left(\frac{a}{s} + u\right)_{A'} \\ \left(\frac{a}{s} + u\right)_{P'} &= \left(\frac{a}{s} + u\right)_P \\ \left[\frac{a}{s} + u\right]_{P'} &= \left(\frac{a}{s} + u\right)_A \end{aligned}$$

Però u è diverso fra A e P', quindi avremo che il punto P' arriverebbe ad assumere due punti diversi, cosa che è impossibile. Allora si forma un URTO. E quest'urto viene ad avere una pendenza intermedia tra le linee caratteristiche che incidenti. Nel momento in cui c'è una discontinuità, le equazioni in forma quasi lineare non valgono più, non possono più descrivere la soluzione di questo problema. Le condizioni di salto di Rankine-Hugoniot dicono che la velocità

$$\left(\frac{a}{s} + u\right)_P = \left(\frac{a}{s} + u\right)_A$$

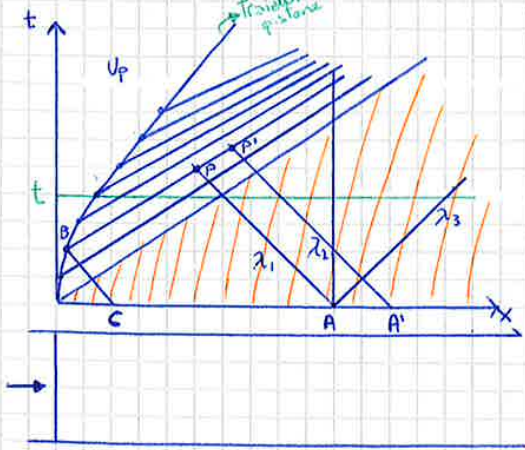
$C = \frac{[P]}{[U]}$

VELOCITÀ URTO

con cui si muove l'urto è pari al rapporto tra il salto di ϕ e il salto di U , dove ϕ sono i flussi e U sono le variabili conservate. La velocità c è medio tra le velocità delle due linee λ_3 .

07/06

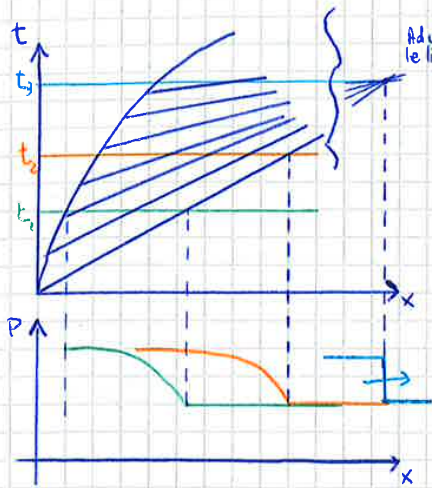
• Vediamo un'applicazione al problema seguente.



• Consideriamo un cilindro all'interno del quale si muove un pistone. Il cilindro ha sezione costante. Le condizioni iniziali sono velocità ed entropia del gas nulle, quindi anche pressione e temperatura sono assenti. Vediamo cosa succede sul piano $x-t$ quando mettiamo in moto il pistone. Appliciamo il Metodo delle Caratteristiche. Conosciamo la soluzione a $t=0$, quindi per ogni punto possiamo tracciare le linee caratteristiche λ_1, λ_2 e λ_3 . Ad un istante successivo il pistone avrà una certa velocità u_p e le particelle a contatto con esso avranno la stessa velocità. Per effetto di questo spostamento c'è anche un incremento di pressione. Poiché questi impulsi sono infinitesimi possiamo considerarli isentropici. Ad una variazione dp ed entropia costante corrisponde una variazione infinitesima della velocità del suono. Allora se prendo un punto che si trova sul pistone (sulla sua traiettoria), la particella in questo punto avrà una velocità incrementata di du e una velocità del suono incrementata di da , quindi λ_3 , rispetto a $t=0$, sarà incrementata di du e da , quindi diminuisce la pendenza. Ripetendo il ragionamento per gli istanti successivi avremo delle λ_3 con pendenza sempre minore. Nel momento in cui il pistone raggiunge velocità costante non ci sono più incrementi di velocità e quindi la pendenza

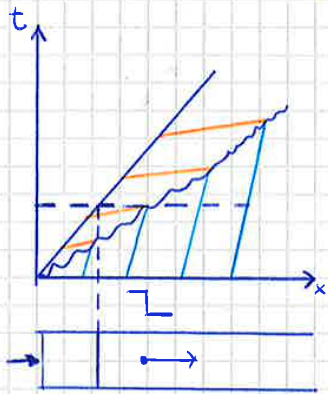
delle λ_3 non varia più. Questo ci fa capire che i segnali lungo le linee caratteristiche viaggiano sempre più velocemente. Cioè, nel momento in cui il pistone parte nasce un disturbo di pressione che viaggia con una certa velocità; man mano che la velocità del pistone aumenta, nascono dei nuovi disturbi che viaggiano nel gas già perturbato, per questo viaggiano più velocemente. La regione sotto l'ultima linea caratteristica è a campo di moto uniforme ($u=\text{cost}$).

• Nel seguente disegno vediamo proprio cosa succede se i disturbi si impaccettono.



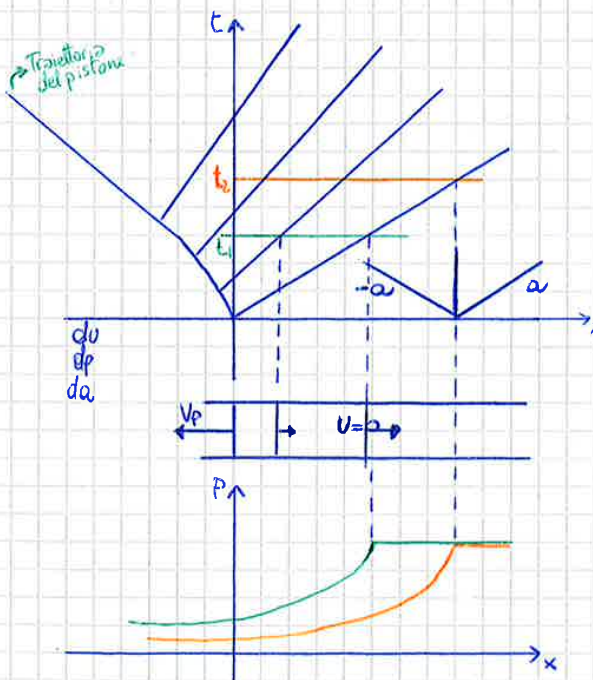
• Vediamo l'andamento delle pressioni per alcuni istanti successivi. Al tempo t_1 la pressione ha un andamento che parte dal valore della condizione iniziale fino al valore che assume quando la particella viene raggiunta dal disturbo della linea caratteristica più in basso, da quel punto in poi, essendo u e a costanti lungo la linea caratteristica anche la p rimane costante. L'andamento decrescente nella regione ad onda semplice è dato dal fatto che vengono "attraversate" linee caratteristiche ad a sempre minore, quindi la p cala. All'istante t_2 l'andamento è lo stesso, per gli stessi motivi, ma il salto di pressione inizia ad essere più ripido, ha pressioni maggiori nella regione ad onda semplice. Non cambiano la condizione iniziale e la p costante finale, quest'ultimo si troverà più a destra. Ad un certo punto le linee caratteristiche si intersecheranno. In quel punto arriveranno più segnali che partono, però, da punti diversi. Questo vorrebbe dire che segnali diversi dovrebbero essere uguali all'intersezione, ma questa è una condizione impossibile, quindi si crea una **DISCONTINUITÀ**. Si forma un **URTO**, che viaggia con una certa velocità. Da monte, però, continuano ad arrivare delle perturbazioni con velocità $u+a$, e questa velocità è maggiore di quella dell'urto (altrimenti non si impaccerebbero). Per contro, l'urto sopravanza le perturbazioni che arrivano da valle.

• Quindi, come si vede nel diagramma in basso, le linee caratteristiche di monte e di valle finiscono entrambe sull'urto. L'urto ha una pendenza intermedia tra le linee caratteristiche di monte e di valle. La particella generica all'interno del cilindro rimane ferma fintanto che non viene raggiunta dall'urto.



• Ora nel momento in cui si forma un urto, abbiamo una discontinuità, quindi le relazioni tra le regioni e la velocità dell'urto stesso non possono essere calcolate con il metodo delle caratteristiche poiché attraverso l'urto le grandezze sono discontinue. L'unico modo per risolvere il problema è quello di ricorrere alle **Leggi di salto**.

• Se il pistone si muovesse subito con velocità finita avrei l'onda d'urto che parte subito. In un punto generico ci si accorge che il pistone ha cominciato a muoversi solo nel momento in cui viene raggiunto dall'urto. Poiché quest'urto porta un incremento di pressione, viene detto **Urto di Compressione**.

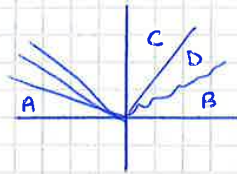


• Adesso vediamo cosa succederebbe se facessi partire il pistone verso sinistra. Abbiamo una condizione iniziale uniforme. Andando avanti nel tempo si ha un incremento relativo di velocità delle particelle, una depressione e una diminuzione di velocità del suono. La pendenza delle linee caratteristiche aumenta. Il fenomeno è, quindi, opposto al precedente. Perturbazioni successive viaggiano delle perturbazioni (verso destra) sempre più lente, poiché la zona già perturbata è tale da fare ciò. Quindi nei due casi cambia il tipo di perturbazione. Questi disturbi allora tendono a **dividersi**, non avrà più impaccettamento.

• Allora guardiamo nuovamente l'andamento delle pressioni. Al tempo t_1 avrà linee attraverso le quali la pressione si riduce, sono **linee di espansione**. Al tempo t_2 avrà pressioni più basse, al contrario di prima. I disturbi tendono a **dividersi** e le pressioni si spalmano lungo la x .

• Se aumento la velocità del pistone e quindi riduco l'arco, il ventaglio da cui partono le linee tende ad essere sempre più corto. Se faccio partire il pistone istantaneamente l'arco si riduce ad un punto. Il fenomeno è **isentropico**.

• Quindi questo è quello che succede in un problema instazionario trattato con il metodo delle caratteristiche.



- Per risolvere analiticamente è sufficiente coordinare i segnali delle varie regioni. In particolare ciò significa scrivere delle relazioni.
- Tra la regione A e la regione C è tutto continuo ed il flusso è isentropico, quindi posso dire che il segnale che viaggia verso sinistra è costante. Inoltre sarà costante anche l'entropia.

A-C) $\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{a}{s} + u \right)_A &= \left(\frac{a}{s} + u \right)_C \rightarrow \text{Segnale Costante} \\ S_A &= S_C \rightarrow \text{Entropia costante} \end{aligned} \right.$

C-D) $\left\{ \begin{aligned} P_C &= P_D \rightarrow \text{Pressione Costante} \\ u_C &= u_D \rightarrow \text{Velocità Costante} \end{aligned} \right.$

D-B) $c = \frac{[P]}{[u]}$

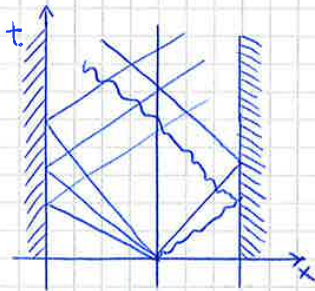
• Poi tra la regione C e la regione D c'è la superficie di contatto. Allora le pressioni e le velocità sono uguali. Le altre grandezze invece sono diverse.

• Infine tra la regione D e la regione B c'è l'urto. Valgono quindi le condizioni di salto di Rankine-Hugoniot, che dicono che la velocità con cui si muove l'urto è uguale al rapporto fra il salto di q e il salto di u , dove q rappresenta il vettore dei termini di flusso delle leggi di conservazione e u sono le grandezze conservate.

• Questo problema in 1D è risolvibile esattamente. Risolvere esattamente questo problema significa sapere come si comporteranno le perturbazioni nelle quattro regioni.

• Cosa succede se il condotto è chiuso?

Nel momento in cui la linea di espansione raggiunge la parete viene riflessa ancora come linea di espansione. E così anche tutte le linee successive. La zona delimitata dalla riflessione non è più ad onda semplice, i segnali sono ottenuti combinazione di diversi. La stessa cosa avviene con l'urto. Nonostante la regione C non sia più uniforme dal punto in cui si intersecano le linee, posso ancora risolvere il problema attraverso le condizioni di Rankine-Hugoniot. Diventa solo un po' più complicato.



→ Linee di espansione e urto riflessi

• Finora noi abbiamo visto il metodo numerico ai volumi finiti relativo al problema con urti, superfici di contatto, onde che viaggiano ecc. Il problema è sempre governato dalla seguente equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

Questa equazione possiamo risolverla in forma quasi lineare, in forma conservativa, in forma lineare. Abbiamo visto inoltre le problematiche relative alle diverse forme. In particolare abbiamo visto come ci sono problemi legati alla stabilità dei metodi numerici, e abbiamo visto che si può ricorrere a metodi di tipo upwind o di tipo centrato con introduzione di viscosità numerica, per stabilizzare lo schema. Inoltre si è detto che serve la forma conservativa quando abbiamo a che fare con discontinuità. Ma cosa significa esattamente Metodo Centrato Stabilizzato e Metodo Upwind? Il primo lo abbiamo già visto, calcoliamo ad esempio i termini di flusso introducendo un termine di viscosità numerica. Definiamo una serie di volumi elementari come a fianco. Finora abbiamo calcolato questi termini di flusso senza mai preoccuparci



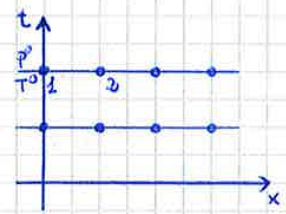
del fatto che le equazioni fossero di tipo iperbolico.

• Allora quale può essere lo schema di tipo Upwind che risolve l'equazione in forma conservativa? Nella costruzione dei termini di flusso bisogna tenere conto della natura iperbolica dell'equazione, cioè bisogna tenere conto di come viaggiano le onde. In pratica devo introdurre un po' di fisica. È proprio la fisica a dirci che l'equazione ha natura iperbolica.

• Esistono diversi metodi per costruire i flussi in questo modo, lo schema che ha la massima integrazione della fisica nello schema numerico è lo Schema di Godunov.

• Se guardo la sezione d'ingresso avrà: $U_1 = \int_{pE}^p p u$ che sono le tre variabili indipendenti che rappresentano il vettore soluzione. Ho tre valori da calcolare, ma la teoria delle linee caratteristiche mi dice che ci sono solo due condizioni al contorno. Bisogna costruire una terza informazione per ottenere la soluzione.

• Innanzi tutto le due condizioni che vengono imposte per un flusso subsonico in genere sono **pressione totale** e **temperatura totale** in ingresso. La terza la devo prendere dall'interno, ma non rispecchia lo schema numerico che abbiamo visto. L'analisi di stabilità viene tralasciata poiché sappiamo che la stabilità è assicurata anche sul contorno anche per un problema non lineare. Un modo per attenuare le possibili oscillazioni sul contorno è abbassare il Δt che calcolavamo con la condizione CFL.

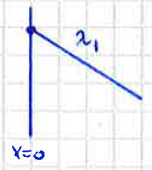


• Abbiamo visto lo schema numerico centrato senza preoccuparci della natura fisica dell'equazione, non abbiamo parlato di propagazione di onde o di segnali, abbiamo semplicemente costruito i flussi e poi abbiamo stabilizzato introducendo la viscosità numerica. A questo punto, per il contorno posso fare un ragionamento analogo, non preoccuparmi delle informazioni che viaggiano da una certa direzione piuttosto che un'altra, ma costruire, ad esempio, una soluzione nel punto 1 combinando p^0 e T^0 e facendo un'estrapolazione nell'altra direzione.

Punto 1) $p^0 = f(p, pu, pE)_1$
 $T^0 = f(p, pu, pE)_1$ \rightarrow Dopodiché estropolo pu e scrivo $(pu)_1 = (pu)_2 \Rightarrow$ Così ottengo $(pu)_2$!

- Quindi ho costruito un sistema di 3 equazioni in 3 incognite!
- Potrei coinvolgere più punti per avere maggiori precisioni. Poiché lo schema numerico per i punti interni è del primo ordine è inutile coinvolgere punti che mi darebbero approssimazioni di ordine superiore.
- Per quanto riguarda il bordo di uscita impongo la p (pressione statica ambiente) ed estropolo due informazioni dall'interno.
- In generale, le condizioni al contorno che si usano sono le grandezze totali di monte e la pressione di scarico.

• Tornando all'ingresso abbiamo detto che una condizione dipende dal segnale che arriva dall'interno. Posso allora pensare di costruire il segnale w_1 , che viaggia lungo la linea caratteristica λ_1 , a partire dalla soluzione che ho all'interno, farlo propagare fino al contorno e combinarlo con le condizioni al contorno. Ottengo quindi:

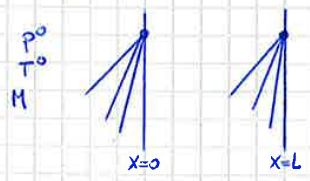


$$w_1 = \frac{q}{s} - u$$

$$\begin{cases} p^0 = f(p, pu, pE)_1 \\ T^0 = f(p, pu, pE)_1 \\ w_1 = \frac{q}{s} - u \end{cases}$$

Trovo delle condizioni al contorno in maniera più sofisticata, ma più complicata.

• Vediamo cosa succederebbe se il flusso fosse **SUPERSONICO** ($u > a$). Le linee caratteristiche avrebbero pendenza positiva, quindi non c'è nessuna condizione che viene dall'interno. Posso fissare liberamente tutti e tre i parametri nella sezione d'ingresso. Tipicamente si definiscono **pressione totale**, **temperatura totale** e **numero di Mach**. Per gli stessi motivi sulla sezione di uscita non bisogna imporre nessuna condizione al contorno in quanto le tre info provenienti dall'interno sono sufficienti a determinare la soluzione nel punto.



• Tutto questo vale per gli schemi di tipo centrato; se uso uno schema di tipo upwind è più facile perché il segnale dall'interno è già disponibile e non lo devo costruire.