



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2332A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Faedda Federico

MATERIA: Dimostrazioni e Domande d'esame Plasticità e Frattura 2018 - Prof. Carpinteri

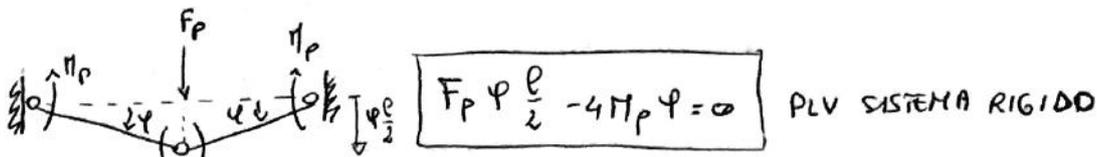
Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

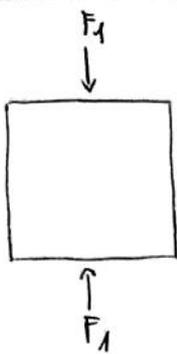
Avendo speso molto tempo per ricavare tutte le dimostrazioni degli argomenti del corso, ho pensato di raccogliere in questi appunti. Spero che possano esservi di aiuto per preparare l'esame più velocemente.

INTRODUZIONE



$\rightarrow F_p = 8 \frac{M_p}{l}$

$F_p \frac{l}{2} - 4M_p = 0 \rightarrow 4M_p = F_p \frac{l}{2} \rightarrow M_p = \frac{1}{8} F_p l$



Si formano le cerniere plastiche nelle sezioni più sollecitate.
 Que il momento massimo si ha in corrispondenza di F_1



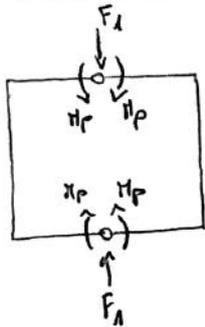
$M_{MAX} = \frac{3}{16} F_1 l$

1° plasticizzazione
 \uparrow
 F_1
 \uparrow

Quindi si ha plasticizzazione per $M_{MAX} = M_p \rightarrow M_p = \frac{3}{16} F_1 l$

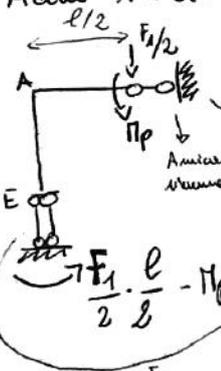
$F_1 = \frac{16 M_p}{3 l}$

Forze di prima plasticizzazione \rightarrow PRIMA CERNIERA PLASTICA



CONDIZIONE DI PRIMA PLASTICIZZAZIONE

Adesso studio ~~intra~~ le strutture con il numero $\frac{1}{4}$, per le doppie simmetrie.



Trovo la posizione del doppio pendolo sommato $\Sigma M_E = 0$

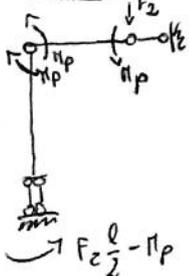
Pendolo semplice parte da dove c'è la cerniera plastica!
 Cerco il momento massimo.

$M_A = \frac{F_1 \cdot \frac{l}{2}}{2} - M_p = \frac{F_1 l}{4} - M_p = \frac{16 M_p}{3} \frac{l}{4} - M_p = \frac{4}{3} M_p - M_p = \frac{1}{3} M_p$

Il doppio pendolo avviene la simmetria orizzontale!

CONDIZIONE DI SECONDA PLASTICIZZAZIONE $\rightarrow M_A = M_p \rightarrow$ lo rimpango io!

$M_A = M_p = \frac{F_2 l}{4} - M_p \Rightarrow F_2 = 2 M_p \frac{4}{l} \rightarrow F_2 = 8 \frac{M_p}{l}$



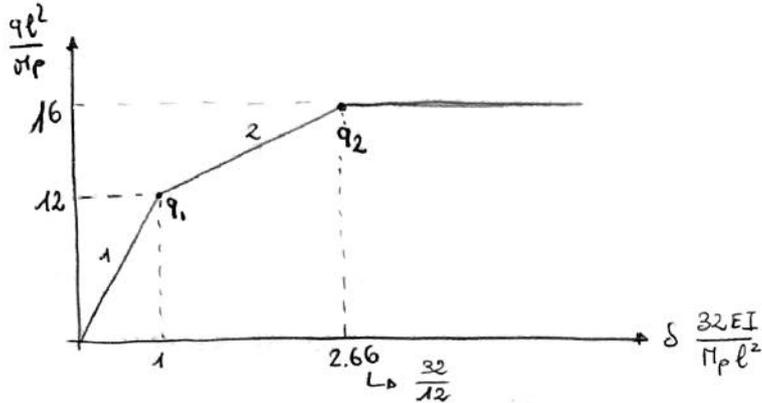
• Incremento

$$\delta_1 = \underbrace{\frac{5}{384} \frac{q_1 l^4}{EI}}_{\text{contributo } q_1} - \underbrace{\frac{Mpl^2}{8EI}}_{\text{contributo del } 2M_p} \rightarrow \delta_1 = \frac{Mpl^2}{32EI} \rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{5}{384} l^4 \cdot \frac{1}{l^2} \frac{M_p}{l^2} - \frac{M_p l^2}{8EI} \right) = \frac{Mpl^2}{EI} \left(\frac{5}{384} - \frac{1}{8} \right) = \frac{Mpl^2}{32EI}$$

$320 + 336 + 384 + 384 + 384$

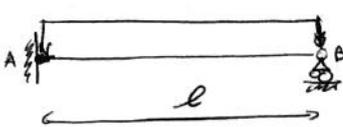
$$\delta_2 = \frac{5}{384} \frac{q_2 l^4}{EI} - \frac{Mpl^2}{8EI} = \frac{Mpl^2}{12EI} \quad \frac{5}{384} \cdot 16 - \frac{1}{8} = \frac{5}{24} - \frac{1}{8} = \frac{5-3}{24} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12} \text{ OK!}$$

Diagramma adimensionato forze - spostamenti



T tratto 1 → elastico, pensa per l'origine

T tratto 2 → lineare, non pensa per l'origine, incidente!

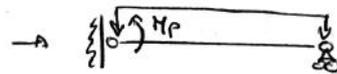


Dalla soluzione elastica $M_{MAX} = M_A = \frac{ql^2}{8} = M_p$

Rinunciando la plasticità!

$$q_1 = \frac{Mpl^2}{8}$$

$$q_1 = 8 \frac{M_p}{l^2}$$



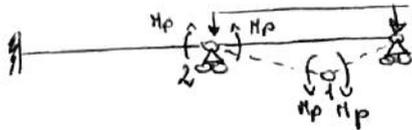
$$M(z) = -\frac{M_p}{l} z + \left(\frac{1}{2} q l z - \frac{1}{2} q z^2 \right)$$

$$T(z) = \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{M_p}{l} + \frac{1}{2} q l - q z \rightarrow T(z) = 0 \rightarrow z = \frac{l}{2} - \frac{M_p}{l q} \rightarrow$$

$$\rightarrow M_{MAX} \left(z = \frac{l}{2} - \frac{M_p}{l q} \right) = \frac{1}{8} q l^2 \left(1 - \frac{2M_p}{q l^2} \right)^2 = M_p \rightarrow \text{Equazione algebrica di secondo grado!}$$

$$\text{Si trova } q_2 = \frac{M_p}{l^2} \frac{2}{3 - 2\sqrt{2}} \rightarrow q_2 \approx 11,65 \frac{M_p}{l^2}$$

$$\frac{q_{pu}}{q_e} = \frac{q_2}{\frac{2}{3} q_1} \approx 2,2$$

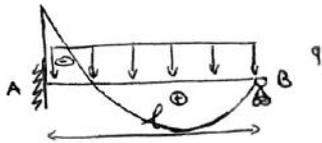


Qui si forma un meccanismo di collasso parziale!

La prima cerniera plastica non si forma in mezzecchia!

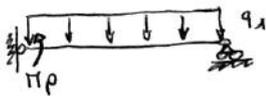
CONTINUARE IN AUTONOMA FINO A PAGINA 285!

FARE CRITERI DI RESISTENZA $\left\{ \begin{array}{l} TRESCA \\ VON MISES \end{array} \right.$



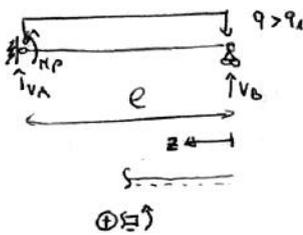
$$\rightarrow M_{MAX} = M_A = \frac{ql^2}{8} \rightarrow \boxed{q_1 = 8 \frac{M_p}{l^2}}$$

PRIMA PLASTICIZZAZIONE



Adesso c'è un carico distribuito, non sappiamo direttamente dove si forma la seconda cerniera plastica.

Dallo studio di M_{MAX} in funzione di z (schema dopo prima plasticizzazione).



$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -V_B l + \frac{ql^2}{2} - M_p = 0 \rightarrow V_B l = \frac{ql^2}{2} - M_p \rightarrow V_B = \frac{ql}{2} - \frac{M_p}{l}$$

$$M(z) = \left(\frac{ql}{2} - \frac{M_p}{l} \right) z - q \frac{z^2}{2} = -\frac{M_p}{l} z + \frac{ql}{2} z - q \frac{z^2}{2}$$

Derivo una volta e trovo il taglio.

$$T(z) = \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{M_p}{l} + \frac{ql}{2} - qz \rightarrow \text{Imposto uguale a } 0 \text{ e trovo } z \text{ di } M_{MAX}$$

$$-\frac{M_p}{l} + \frac{ql}{2} - qz = 0 \rightarrow qz = -\frac{M_p}{l} + \frac{ql}{2} \rightarrow z = -\frac{M_p}{lq} + \frac{l}{2} \rightarrow M_{MAX} = -\frac{M_p}{l} \left(-\frac{M_p}{lq} + \frac{l}{2} \right) + \frac{ql}{2} \left(-\frac{M_p}{lq} + \frac{l}{2} \right) - q \left(-\frac{M_p}{lq} + \frac{l}{2} \right)^2$$

$$M_{MAX} = \frac{1}{8} ql^2 \left(1 - \frac{2M_p}{ql^2} \right)^2 \rightarrow \text{se } \frac{2M_p}{ql^2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \rightarrow \text{la prima radice in scote } \rightarrow q_2 < q_1$$

Dalla seconda radice $q_2 = \frac{M_p}{l^2} \frac{2}{3-2\sqrt{2}} \rightarrow \boxed{q_2 \approx 11,66 \frac{M_p}{l^2}}$ SECONDA PLASTICIZZAZIONE

$$\frac{q_{pm}}{q_1} = \frac{q_2}{q_1} = \frac{11,66 \frac{M_p}{l^2}}{\frac{2}{3} q_1} \approx 2,19 \quad \text{Fattore di sicurezza}$$

Adesso si vuole procedere rappresentando lo spostamento strutturale all'incremento del carico q .

Bisogna scegliere un opportuno parametro cinematico.

Consideriamo la rotazione in B.

VERIFICHE DI RESISTENZA

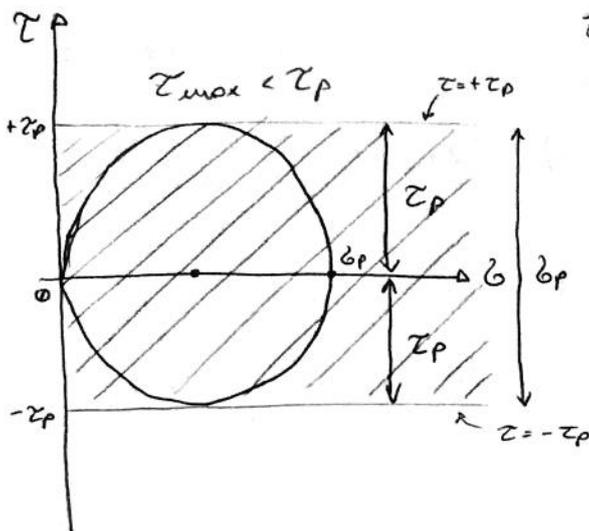
• CRITERIO DI TRESCA - Massima tensione tangenziale

Per uno stato tensionale triassiale il materiale si snerva per cause delle tensioni tangenziali.

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1 - \sigma_3|; |\sigma_2 - \sigma_3| \}$$

$\max \{ |\sigma_i - \sigma_j| \} \leq \sigma_p$
 Tensione equivalente di Tresca

$\rightarrow \tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$ TENSIONE TANGENZIALE DI SUPERAVVANTO
 ↳ Dal cerchio di Mohr!



La condizione $\tau_{max} < \tau_p$ è rappresentata nel piano di Mohr come con un semicerchio compreso tra due rette orizzontali parallele di equazione:

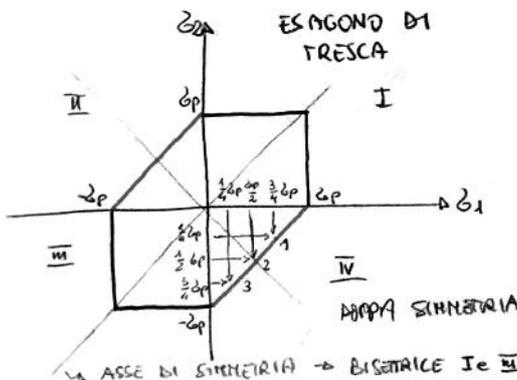
$$\tau = \pm \tau_p$$

$$\tau_p = \frac{1}{2} \sigma_p$$

Ragionando in uno spazio piano (2 dimensioni; 1,2) le tensioni principali relative alle dimensioni si annullano. $\rightarrow \sigma_3 = 0$ (2 dimensioni)

Risolviamo la tensione equivalente di Tresca:

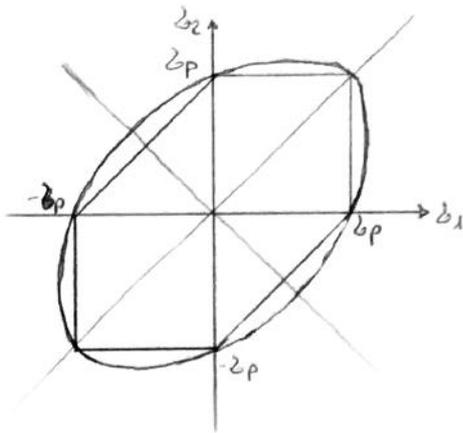
$$\max \{ |\sigma_1 - \sigma_2|; |\sigma_1|; |\sigma_2| \} \leq \sigma_p \quad \left\{ \begin{array}{l} |\sigma_1| < \sigma_p \\ |\sigma_2| < \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_p \end{array} \right. \text{ RANKINE } \rightarrow \text{Massima tensione Normale}$$



N.B. Per dunque la funzione al posto della disuguaglianza < si mette l'uguaglianza =

$$\begin{cases} |\sigma_1| = \sigma_p \\ |\sigma_2| = \sigma_p \\ |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1) \left| \frac{3}{4} \sigma_p - (-\frac{1}{4} \sigma_p) \right| = \sigma_p \\ 2) \left| \frac{1}{2} \sigma_p - (-\frac{1}{2} \sigma_p) \right| = \sigma_p \\ 3) \left| \frac{1}{4} \sigma_p - (-\frac{3}{4} \sigma_p) \right| = \sigma_p \end{cases}$$

CONFRONTO TRESCA - VON MISES



TRESCA INSCRITTO IN VON MISES

↳ TRESCA PIÙ CAUTELATIVO → Dominio minore

VON MISES PIÙ SEMPLICE

↳ 1 MISQUAZIONE CONTRO 3!

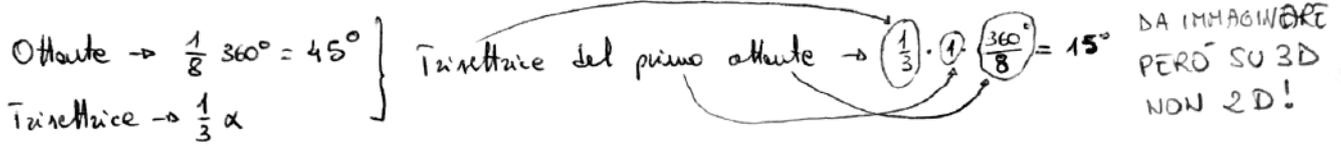
IN 3D SONO ENTRAMBI CILINDRI CHE HANNO GENERATRICI PARALLELE ALLA TRISSETTRICE DEL PRIMO OTTANTE.

LEGGI DI NORMALITÀ DELLA DEFORMAZIONE INCREMENTALE PLASTICA

• IPOTESI DI DRUCKER

Il materiale può deformarsi stabile se il lavoro compiuto nel ciclo di carico risulta > 0 .
 Studieremo adesso il problema da un punto di vista bidimensionale (di superficie).
 L'ipotesi di DRUCKER parte dal concetto di superficie plastica.

N.B. L'ESAGONO di TRESCA } → sono delle sezioni di cilindri che hanno per asse
 L'ELLISSE di VON MISES } la trisettrice del primo ottante (non si parla più di quadranti)



Si parte dalla superficie $F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, che in Tresca e Von Mises sono dei cilindri infiniti che ricoprono lungo la trisettrice del primo ottante.

$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ → Superficie di plasticizzazione nello spazio delle tensioni principali.

Se $F = 0$ → Per trovarci in elasticità → $F < 0$.

Ragionando nella condizione biassiale:

$F(\sigma_1, \sigma_2) < 0$ → Elasticità! $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 < \sigma_p^2$ VON MISES

Richiamiamo ora i criteri di resistenza di Von Mises e Tresca: $\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} < \sigma_p$

• $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) < \sigma_p^2$ → $F_{VM} = 0$ → $F_V = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2) - \sigma_p^2$ VON MISES

• $\max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} < \sigma_p$ → $F_T = 0$ → $F_T(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_2|\} - \sigma_p$ TRESCA

Stipizziamo una generica superficie di plasticizzazione.

$\{\sigma_0\} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}$ Stato tensionale iniziale.

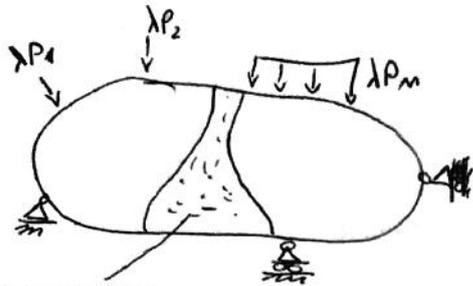
Da questo stato tensionale iniziale σ_0 si inizia un caricamento sino al raggiungimento della frontiera, plasticizzando quindi il materiale. Si raggiunge la frontiera con il vettore $[\{\sigma\} - \{\sigma_0\}]^T$.

Il VECTORE DI DEFORMAZIONE PLASTICA INCREMENTALE sarà ortogonale alla superficie (in quanto così si deve individuare la tangente). La Applicato nel suo spazio E_1, E_2 .

$\dot{\epsilon}$ → $d\epsilon$ → VETTORE INCREMENTALE

TEOREMI DELL' ANALISI LIMITE PLASTICA

Si considera un solido rigido perfettamente plastico soggetto ad una condizione di carico proporzionale, espone tramite il moltiplicatore dei carichi λ .



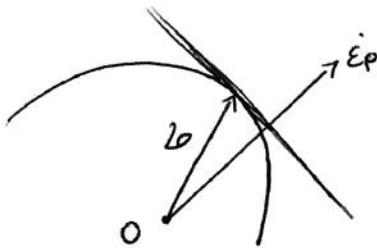
Allo stato limite plastico si ha una zona volumetrica plasticizzata.

LIMITE SUPERIORE (STATICO)

• Teorema della minima energia dissipata

Si considera un vettore di deformazione plastica $\dot{\epsilon}_p$ del punto O.

Si considera una superficie convessa e si traccia la tangente alla superficie che sia normale al vettore $\dot{\epsilon}_p$. Si trova la $\dot{\sigma}$ legata al mio vettore $\dot{\epsilon}_p$.



L'energia dissipata della tensione $\dot{\sigma}(\dot{\epsilon}_p)$ è la minima fra tutte le altre $\dot{\sigma}$ possibili.

$$\dot{\phi}(\dot{\epsilon}_p) = \{\dot{\sigma}\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} \geq \{\dot{\sigma}'\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} \quad \text{Lavoro dissipativo massimo}$$

POSTULATO/IPOTESI DI DRUCKER

Se stesso estendiamo il ragionamento all'intero volume:

$$\int_V \dot{\phi}(\{\dot{\epsilon}_p\}) dV \geq \int_V \{\dot{\sigma}'\}^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV$$

LAVORO PLASTICO VERO \geq LAVORO PLASTICO ASTRATTO

A questo punto si applica il PLV due

volte, la prima volta si considera un generico stato tensionale $\{\dot{\sigma}^-\}$ generato con λ^- ; la seconda volta si considera il carico di collano $\{\dot{\sigma}\}$ dato da λ_p . $\{\dot{\sigma}^-\} < \{\dot{\sigma}\}$

$$\text{PLV} \rightarrow \int_V \dot{\sigma} \dot{\epsilon} dV = \sum F_i \dot{\eta}_i \rightarrow \begin{cases} \int_V \{\dot{\sigma}^-\} \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda^- P_i \dot{\eta}_i \\ \int_V \{\dot{\sigma}\} \{\dot{\epsilon}_p\} dV = \sum_i \lambda_p P_i \dot{\eta}_i \end{cases} \rightarrow \int_V [\{\dot{\sigma}\} - \{\dot{\sigma}^-\}]^T \{\dot{\epsilon}_p\} dV \geq 0$$

POSTULATO DRUCKER

Ne segue che $\lambda_p \geq \lambda^-$ LIMITE SUPERIORE DEI CARICHI

N.B. Tensioni o deformazioni devono essere ammissibili staticamente!

$\{\dot{\epsilon}_p\}; \{\dot{\eta}_i\} \rightarrow$ Campi ammissibili di spostamento e deformazione all'otto di collano.

$$\text{PLV} = \int_V \dot{\sigma} \dot{\epsilon} dV = \sum_i F_i \dot{\eta}_i$$

Forze esterne applicate \rightarrow LAVORO ESTERNO

$\int_V \dot{\sigma} \dot{\epsilon} dV \rightarrow$ Tensioni interne del materiale \rightarrow LAVORO INTERNO

È una trattazione che permette di entrare in laboratorio col solo incremento elastico plasticizzando le sollecitazioni finali tramite i teoremi dell'analisi limite plastica. Per applicare i teoremi la superficie di plasticizzazione deve avere 2 proprietà:

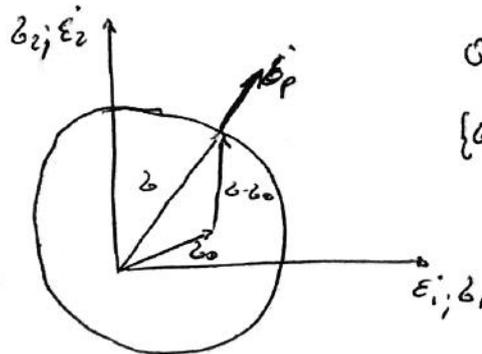
- $\{\epsilon_p\} \perp$ superficie di plasticizzazione
 - superficie di plasticizzazione convessa
- } IPOTESI DI DRUCKER

Da dove derivano?

- 1) Si considera un solido bidimensionale soggetto ad una tensione iniziale σ_0 .
- 2) Si incrementa il carico sino al raggiungimento delle frontiere \rightarrow PLASTICIZZAZIONE DEL MATERIALE
- 3) POSTULATO DI DRUCKER

Il ciclo di carico sempre lavoro ≥ 0 , dunque energia sempre e stabile.

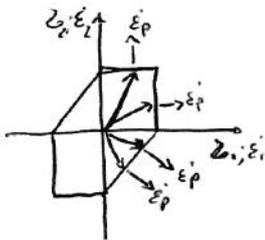
$$\left(\{\sigma\} - \{\sigma_0\} \right)^T \{\epsilon_p\} \geq 0$$



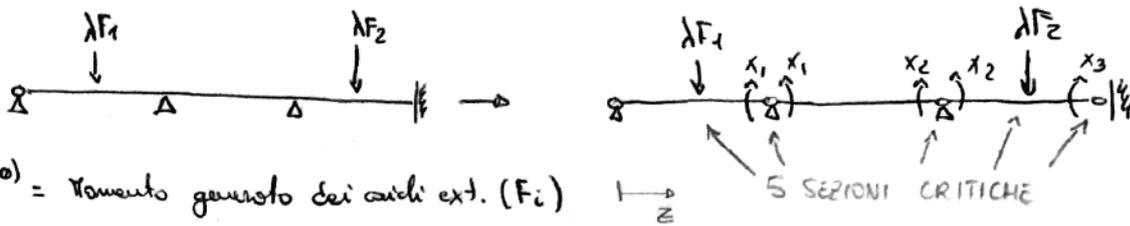
Quando $\{\sigma_0\}^T = 0$
 $\{\sigma - \sigma_0\}^T = \phi \{\epsilon_p\}$

4) da conseguenza necessaria genera le 2 ipotesi di Drucker.

5) LEGGE DI NORMALITÀ DEL FLUSSO PLASTICO



CARICHI PROPORZIONALI - FORZE CONCENTRATE (Applicazione teorema statico)



$M^{(0)}$ = Momento generato dai carichi est. (F_i)

$M^{(j)}$ = Momento iperstatico generato dalle sezioni iperstatiche (x_j) $\rightarrow x_j = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$M(z)$ = Momento totale

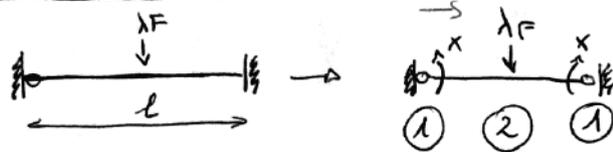
3. nel nostro caso

$$M(z) = \lambda M^{(0)} + \sum_{j=1}^m x_j M^{(j)} \rightarrow M_i = \lambda M_i^{(0)} + \sum_{j=1}^m x_j M_i^{(j)} \quad i=1, \dots, m$$

• Teorema statico $\rightarrow -M_p \leq M_c \leq M_p \rightarrow 2m$ disequazioni

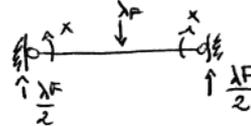
Si risolve per via numerica \rightarrow Programmazione lineare.

• MECCANISMO CANTILE (T.S.)



$m=1$ Sostegno iperstatico (x numerico)

$m=2$ Sezioni cuticole (x numerico)



$M_1 = -X$

$M_2 = -X + \frac{\lambda F l}{4}$

Domínio:

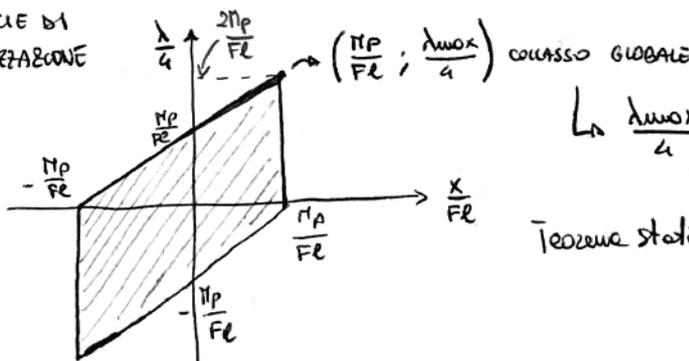
$x \leq M_p \rightarrow \frac{x}{Fl} \leq \frac{M_p}{Fl}$ RETTE VERTICALI
 $x \geq -M_p \rightarrow \frac{x}{Fl} \geq -\frac{M_p}{Fl}$ RETTE VERTICALI

• Teorema statico (prima M_1 poi M_2)

$-M_p \leq -x \leq M_p$
 $-M_p \leq -x + \frac{1}{4} \lambda F l \leq M_p$
 $M_p \geq x - \frac{1}{4} \lambda F l \geq -M_p$

$x \geq -M_p + \frac{1}{4} \lambda F l \rightarrow \frac{x}{Fl} \geq -\frac{M_p}{Fl} + \frac{\lambda}{4}$ RETTE INCLINATE
 $x \leq M_p + \frac{1}{4} \lambda F l \rightarrow \frac{x}{Fl} \leq \frac{M_p}{Fl} + \frac{\lambda}{4}$ RETTE INCLINATE

SUPERFICIE DI PLASTICIZZAZIONE

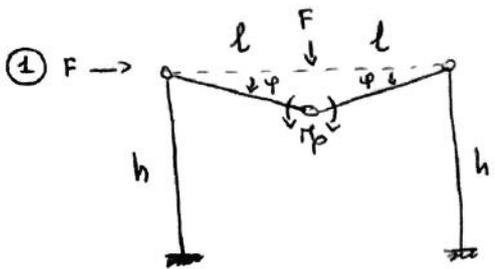
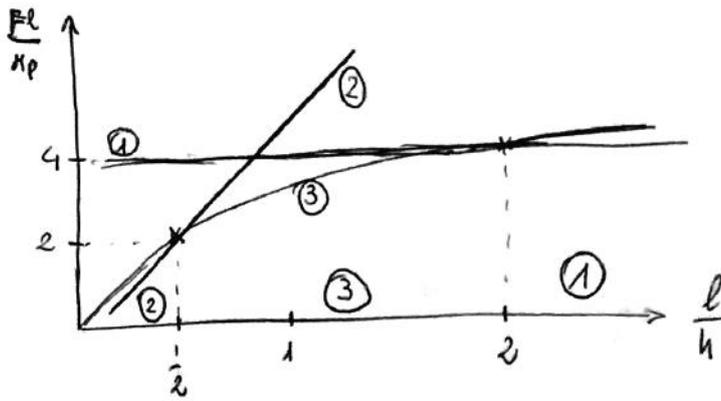


$\lambda_{max} \frac{1}{4} = 2 \frac{M_p}{Fl} \rightarrow \lambda_{max} = 8 \frac{M_p}{Fl}$

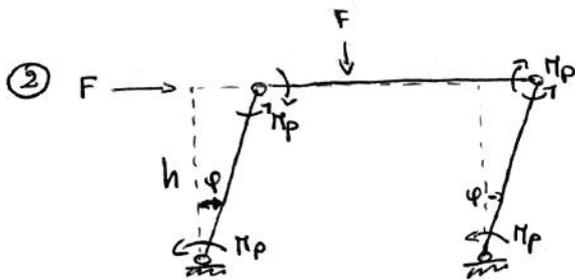
Teorema statico $\rightarrow F_p = \lambda_{max} F$

$F_p = 8 \frac{M_p}{l}$

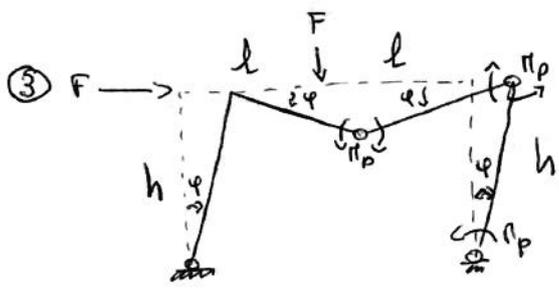
Mecanismo combinato generico



PLV $\rightarrow F l \varphi - 4 M_p \varphi = 0 \rightarrow \boxed{\frac{F_p l}{M_p} = 4}$ (1) VERTICALE

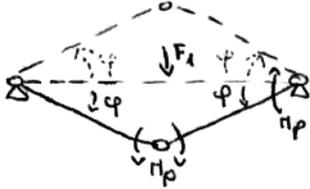
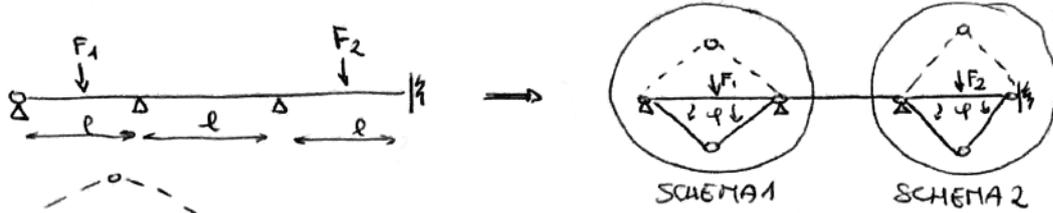


PLV $\rightarrow F l h \varphi - 4 M_p \varphi = 0 \rightarrow \boxed{\frac{F_p h}{M_p} = 4}$ (2) ORIZZONTALE
 $\hookrightarrow \frac{F_p l}{M_p} = \frac{4 l}{h}$



PLV $\rightarrow F_p \varphi l + F_p \varphi h - 6 M_p = 0 \rightarrow$
 $\rightarrow \frac{F_p l}{M_p} = \frac{6}{\frac{h}{l} + 1}$ (3) COMBINATO

CARICHI NON PROPORZIONALI - FORZE CONCENTRATE (Teorema cinematico)



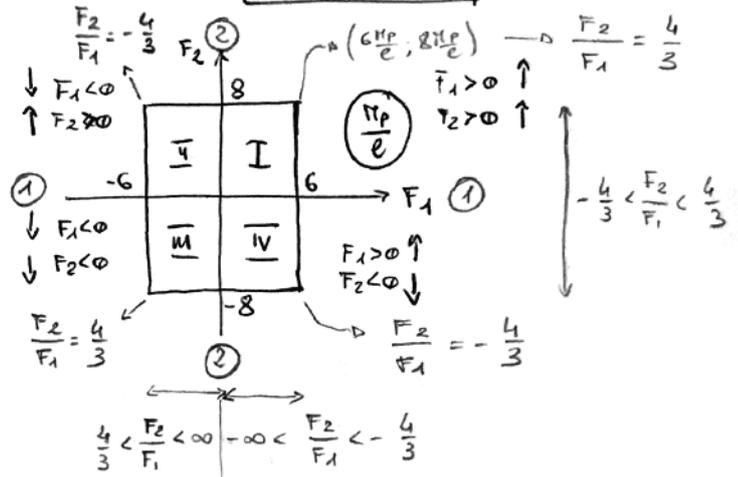
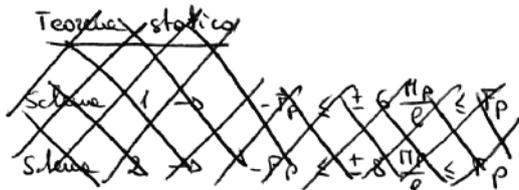
SCHEMA 1

PLV $\rightarrow \pm F_1 \varphi \frac{l}{2} - 3\pi_p \varphi = 0 \rightarrow F_1 = \pm 6 \frac{\pi_p}{l}$ Schema 1



SCHEMA 2

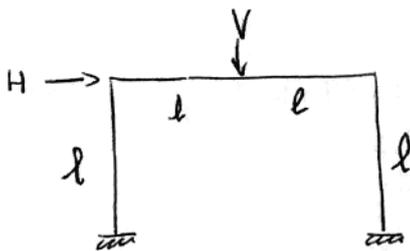
PLV $\rightarrow \pm F_2 \varphi \frac{l}{2} - 4\pi_p \varphi = 0 \rightarrow F_2 = \pm 8 \frac{\pi_p}{l}$ Schema 2



$-\frac{4}{3} < \frac{F_2}{F_1} < \frac{4}{3}$ MECCANISMO 1 (Schema 2)

Per i valori esterni a questo intervallo
MECCANISMO 2 (Schema 1)

MECCANISMO COMBINATO



Si generano 4 meccanismi diversi di collano che diventavano 8 quando, nel PLV, applicheremo il segno \pm .

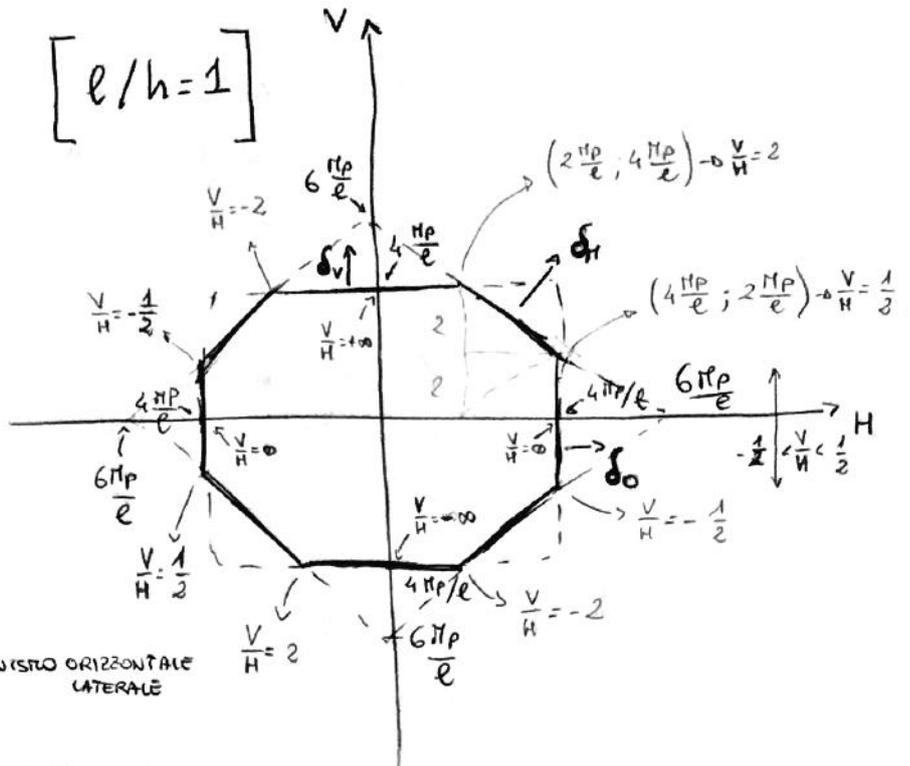
34 meccanismi sono dati da

$\left. \begin{array}{l} \rightarrow \text{SOLO H} \\ \rightarrow \text{H+V} \\ \rightarrow \text{SOLO V} \\ \rightarrow \text{H-V} \end{array} \right\} \rightarrow \pm \rightarrow 8 \text{ MECCANISMI}$

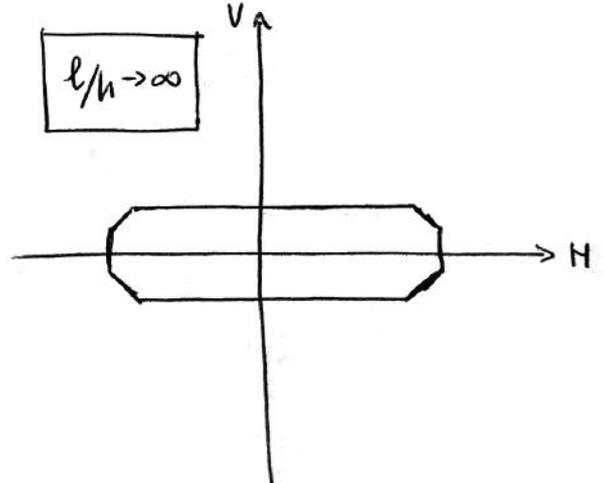
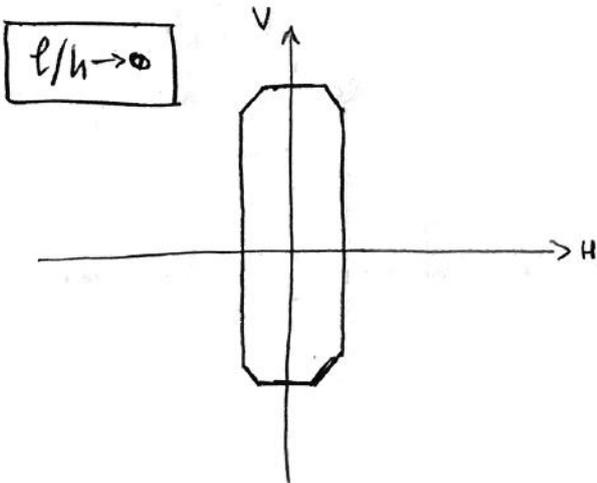
Frontiera di collasso

$$\begin{cases} -4M_p \pm Hl = 0 \\ -6M_p \pm (Hl + Ve) = 0 \\ -4M_p \pm Ve = 0 \\ -6M_p \pm (Hl - Ve) = 0 \end{cases}$$

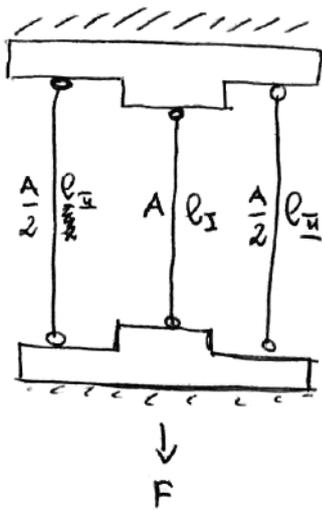
$$\begin{cases} H = \pm 4 \frac{M_p}{e} \\ V = \pm 4 \frac{M_p}{e} \end{cases}$$



- $-\frac{1}{2} < \frac{V}{H} < \frac{1}{2} \rightarrow \left| \frac{V}{H} \right| < \frac{1}{2}$ MECCANISMO ORIZZONTALE LATERALE
- $+2 < \frac{V}{H} ; \frac{V}{H} < -2 \rightarrow \left| \frac{V}{H} \right| > 2$ MECCANISMO VERTICALE
- $\frac{1}{2} < \left| \frac{V}{H} \right| < 2$ MECCANISMO COMBINATO



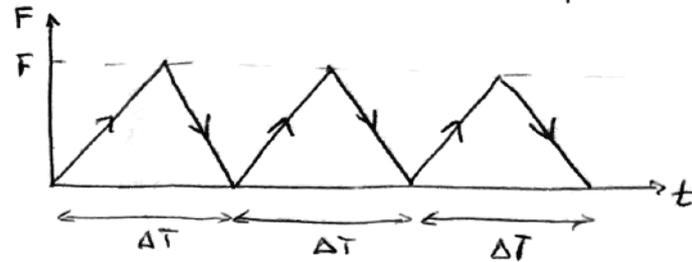
CARICHI ciclici



• Bietta centrale tozza

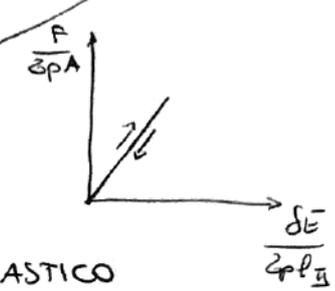
• Biette laterali snelle

Si applica un carico ciclico, forza pulsante a $\Delta T = \text{cost.}$



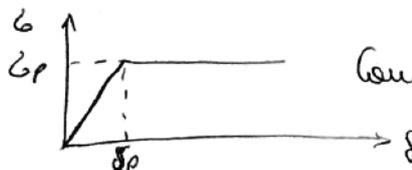
$$X_I = F \frac{\frac{A}{e_I}}{\frac{A}{e_I} + \frac{A}{2} \frac{1}{e_{II}} + \frac{A}{2} \frac{1}{e_{II}}} = F \frac{\frac{A}{e_I}}{\frac{A}{e_I} + \frac{A}{e_{II}}} = F \frac{e_{II}}{e_I + e_{II}} = 2A \left(1 + \frac{e_{II}}{e_I} \right)$$

$$X_I = F \frac{\frac{A}{e_I}}{A \left(\frac{e_{II} + 1}{e_I e_{II}} \right)} = F \frac{e_{II}}{e_I + e_{II}} = 2A \left(1 + \frac{e_{II}}{e_I} \right)$$



$0 \leq F \leq 2pA \left(1 + \frac{e_{II}}{e_I} \right)$ CARICO MASSIMO ELASTICO

$F_{1p} = 2pA \left(1 + \frac{e_{II}}{e_I} \right)$
 Plasticizzazione a trazione delle prime bielle

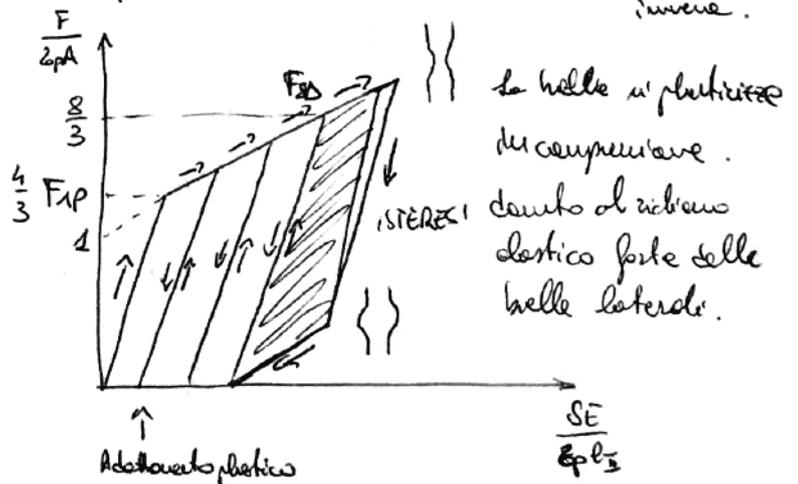
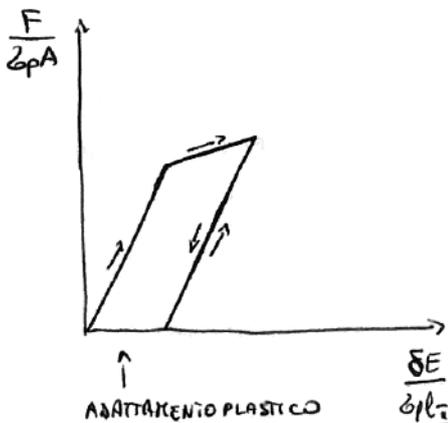


Comportamento d'un singolo elemento

In un sistema di più elementi diversi c'è una plasticizzazione dell'elemento più rigido, mentre il resto del sistema risulta un corpo elastico.

Supero le F_{1p} !

Supero F_{SD} (SHAKE-DOWN). Plasticizzazione inversa.



Le bielle si plasticizzano in compressione. causa di ricambio elastico forte delle bielle laterali.

Quanto vale F_{SD} ?

$$F_{SD} = X_{I \max} + 2X_{II \max}$$

$$0 = X_{I \min} + 2X_{II \min} \rightarrow X_{II \min} = -\frac{1}{2} X_{I \min}$$

$$E_{I \min} = E_{II \min} \frac{l_{II}}{l_I} = \frac{X_{2 \min}}{E \frac{A}{2}} \cdot \frac{l_I}{l_{II}}$$

$$E_{I \max} = E_{II \max} \frac{l_{II}}{l_I} = \frac{X_{2 \max}}{E \frac{A}{2}} \frac{l_{II}}{l_I}$$

$$E_{II \min} = E_{II \max} - 2 \frac{\sigma_p}{E} \rightarrow \frac{X_{2 \min}}{E \frac{A}{2}} \frac{l_{II}}{l_I} = \frac{X_{2 \max}}{E \frac{A}{2}} \frac{l_{II}}{l_I} - 2 \frac{\sigma_p}{E}$$

$$\frac{l_{II}}{l_I} \frac{X_{2 \max}}{A} = \frac{X_{2 \min}}{A} \frac{l_{II}}{l_I} + \sigma_p \rightarrow X_{2 \max} = X_{2 \min} + \sigma_p A \frac{l_I}{l_{II}}$$

$$X_{2 \max} = -\frac{1}{2} \overbrace{X_{I \min}}^{-\sigma_p A} + \sigma_p A \frac{l_I}{l_{II}} = \frac{1}{2} \sigma_p A + A \sigma_p \frac{l_I}{l_{II}}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\sigma_p A \left(\frac{l_I}{l_{II}} + \frac{1}{2} \right)}$$

$$F_{SD} = \sigma_p A + 2 \sigma_p A \left(\frac{1}{2} + \frac{l_I}{l_{II}} \right)$$

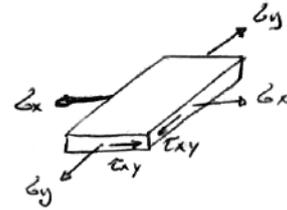
ELASTICITÀ PIANA

Funzione delle tensioni → Funzione di Airy.

Stato tensionale piano → Strumento in lastre sottili conotate da forze costanti nel piano medio.

STATO TENSIONALE PIANO

5 INCOGNITE → $\sigma_x; \sigma_y; \tau_{xy}; u; v$



SEQUAZIONI RISOLVENTI

→ 2 EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO (Stato tensionale / deformativo piano, 2D)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0$$

F_x, F_y → Forze di volume (per unità di superficie)
↳ Forze di superficie

→ 3 EQUAZIONI COSTITUTIVE ELASTICHE

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

↳ δ borze tese o compresse

PROBLEMA STATICO - CINEMATICO

5 EQUAZIONI IN 5 INCOGNITE

ϵ_x e ϵ_y SONO IN FUNZIONE DEGLI SPOSTAMENTI u e v

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \gamma_{xy} = \frac{\epsilon_x \partial y}{\partial y} + \frac{\epsilon_y \partial x}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\epsilon_x \partial x}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x \partial y} + \frac{\epsilon_y \partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x \partial y}$$

La relazione si ottiene generalmente con metodi numerici, ma volendo trovare una relazione analitica si richiama:

$$\gamma_{xy} = \frac{\epsilon_x \partial x}{\partial y} + \frac{\epsilon_y \partial y}{\partial x} \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

EQUAZIONE DI COMPATIBILITÀ / CONGRUENZA

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\epsilon_x \partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial x \partial y} + \frac{\epsilon_y \partial y}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x \partial y} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \rightarrow \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{2(1+\nu)}{E}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x)$$

Combinando le due espressioni di $\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$ si ottiene:

$$\frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) = \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \frac{2(1+\nu)}{E}$$

FUNZIONE DI AIRY

Non ha un significato fisico ben preciso, ma dal punto di vista matematico risolve il problema.

Possiamo dall'aver 3 incognite $\epsilon_x, \epsilon_y, \tau_{xy}$ ed avere una sola Φ , con la quale esprimiamo le 3 grandezze precedentemente incognite.

Le espressioni delle tensioni tramite la funzione di Airy soddisfanno le 2 equazioni indefinite di equilibrio.

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ \epsilon_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \end{array} \right.$$

Con F_x e $F_y = 0!$
 \uparrow

Inserisco nelle due equazioni di equilibrio e trovo un'identità:

$$\bullet \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial y^2}}$$

$$\bullet \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \right) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^2 \partial y}}$$

$$\bullet \nabla^2 (\epsilon_x + \epsilon_y) = 0$$

$$\nabla^2 \epsilon_x = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 \epsilon_y = \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \rightarrow \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \rightarrow \nabla^4 \phi = 0$$

NOTO $\phi \rightarrow$ NOTE LE TENSIONI

A questo punto introduco le caratteristiche elastiche rigide (perché maggiori di quelle di partenza).

$$\bullet E' = \frac{E}{1-\nu^2} \rightarrow \frac{1}{E} = \frac{1}{E'(1-\nu^2)}$$

$$\bullet \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \rightarrow \nu = \nu'(1-\nu)$$

Introduco nelle espressioni delle deformazioni traso:

$$\bullet \epsilon_x = \frac{1}{E} \left((1-\nu^2)\epsilon_x - \nu(1+\nu)\epsilon_y \right) \text{ diventa } \frac{1}{E'(1-\nu^2)} \left[(1-\nu^2)\epsilon_x - \nu' \frac{(1-\nu^2)}{(1-\nu)(1+\nu)} \epsilon_y \right]$$

$$\epsilon_x = \frac{1}{E'(1-\nu^2)} \left[(1-\nu^2)\epsilon_x - \nu' \epsilon_y \right] \rightarrow \underline{\underline{\epsilon_x = \frac{1}{E'} [\epsilon_x - \nu' \epsilon_y]}}$$

Analogamente:

$$\bullet \underline{\underline{\epsilon_y = \frac{1}{E'} [\epsilon_y - \nu' \epsilon_x]}}$$

$$\bullet \underline{\underline{\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu')}{E'} \tau_{xy}}}$$

Quindi, con la stessa procedura adottata per ricavare l'espressione dello stato tensionale piano, si esprime l'equazione di compatibilità/convergenza nella forma:

$$\bullet \nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = -(1+\nu') \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right] \rightarrow \nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = - \left(1 + \frac{\nu'}{1-\nu} \right) \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right]$$

$$\nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = - \left(\frac{(1-\nu) + \nu'}{1-\nu} \right) \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right] \rightarrow \underline{\underline{\nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = - \frac{1}{1-\nu} \left[\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right]}}$$

Quindi le forze di volume (superficie) sono nulle si ottiene:

$$\bullet \nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = 0$$

$$\bullet \epsilon_z = \nu(\epsilon_x + \epsilon_y) \rightarrow \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0 \rightarrow \epsilon_z = \text{cost} \text{ ma } \neq 0!$$

IL PROBLEMA DEFORMATIVO PIANO SI RISOLVE CON

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} = 0 \\ \nabla^2(\epsilon_x + \epsilon_y) = 0 \end{array} \right.$$

TIMOSHENKO propone 3 espressioni polinomiali per z_x, z_y e z_{xy} , che dipendono da 3 coefficienti incogniti a, b, c .

Quelle 3 espressioni soddisfanno le ^{STATICA} relazioni di equilibrio e l'equazione di convergenza. ^{CINETICA}

Espressioni delle tensioni di TIMOSHENKO \rightarrow

$$\begin{cases} z_x = ax^2y - \frac{2}{3}ay^3 \\ z_y = \frac{1}{3}ay^3 + by + c \\ z_{xy} = -axy^2 - bx \end{cases}$$

Devono rispettare statica (equilibrio) e cinetica (convergenza).

$$\begin{cases} \frac{\partial z_x}{\partial x} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial z_y}{\partial y} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \nabla^2(z_x + z_y) = 0 \end{cases}$$

• $\frac{\partial z_x}{\partial x} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} [ax^2y - \frac{2}{3}ay^3] + \frac{\partial}{\partial y} [-axy^2 - bx] = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2axy + 0 - 2axy + 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$ SODDISFATTA!

• $\frac{\partial z_y}{\partial y} + \frac{\partial z_{xy}}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y} [\frac{1}{3}ay^3 + by + c] + \frac{\partial}{\partial x} [-axy^2 - bx] = 0 \rightarrow$

$\rightarrow ay^2 + b + 0 - ay^2 - b = 0 \rightarrow 0 = 0$ SODDISFATTA!

• $\nabla^2(z_x + z_y) = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 z_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z_y}{\partial y^2} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} [ax^2y - \frac{2}{3}ay^3] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [ax^2y - \frac{2}{3}ay^3] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\frac{1}{3}ay^3 + by + c] + \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\frac{1}{3}ay^3 + by + c] = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2xy + 0 + 0 - 4xy + 0 + 0 + 0 + 2xy + 0 + 0 = 0 \rightarrow 0 = 0$ SODDISFATTA!

Per determinare i valori dei coefficienti a, b, c delle espressioni polinomiali di TIMOSHENKO risolvere le condizioni al contorno con l'espressione polinomiale.

N.B. Mi bastano le condizioni al contorno delle forze orizzontali.

$$\bullet \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_x dy \left(x = \pm \frac{l}{2} \right) = 0 \rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{9}{2I} \left(\frac{l^2}{4} y - \frac{2}{3} y^3 \right) dy = 0$$

L'integrale è nullo perché integrando la variabile y con esponente dispari in estremi simmetrici (uguali e opposti) la somma si annulla!

Resta da trovare un'espressione di z_x che permetta di soddisfare la condizione al contorno di annullamento del momento. Si suppone allora lo stato tensionale di una flangia:

$$\begin{cases} z_x = yd \\ z_y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad \text{dove } d \text{ è una nuova incognita che si ricava imponendo le condizioni al contorno.}$$

N.B. \rightarrow È un campo tensionale che va sommato al precedente!

Determiniamo quindi che viene soddisfatta anche la condizione del momento, ricavando il valore di d che la soddisfa più impostazione di condizione.

$$\bullet \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z_x \cdot y \left(x = \pm \frac{l}{2} \right) dy = 0 \rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[-\frac{9}{2I} \left(\frac{l^2}{4} y - \frac{2}{3} y^3 \right) + yd \right] dy = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{9l^2}{8I} y^2 + \frac{9}{3I} y^4 + y^2 d \, dy = 0 \rightarrow -\frac{9l^2}{8I} \cdot \frac{1}{3} y^3 \Big|_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} + \frac{9}{3I} \cdot \frac{1}{5} y^5 \Big|_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} + \frac{1}{3} y^3 d \Big|_{y=-\frac{h}{2}}^{y=\frac{h}{2}} = 0$$

$$\rightarrow -\frac{9l^2}{24I} \left(\frac{h^3}{8} - \left(-\frac{9l^2}{24I} \left(-\frac{h^3}{8} \right) \right) \right) + \frac{9}{15I} \cdot \frac{h^5}{32} - \frac{9}{15I} \left(-\frac{h^5}{32} \right) + \frac{1}{3} d \frac{h^3}{8} - \frac{1}{3} d \left(-\frac{h^3}{8} \right) = 0$$

$$\rightarrow \frac{9l^2}{96I} h^3 + \frac{9}{240I} h^5 + \frac{1}{12} d h^3 = 0 \rightarrow -\frac{1}{8} \frac{9l^2}{I} + \frac{1}{20} \frac{9h^2}{I} + d = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{9l^2}{8I} \cdot \frac{1}{h^3} + \frac{9h^2}{20I} \cdot \frac{1}{h^3} + d = 0 \rightarrow d = \frac{3}{2} \frac{9l^2}{h^3} - \frac{3}{5} \cdot \frac{9}{h} \rightarrow d = \frac{3}{2} \frac{9}{h} \left(\frac{l^2}{h^2} - \frac{2}{5} \right)$$

Adesso ricaviamo l'espressione completa di z_x .

$$z_x = z_{x1} + z_{x2} \begin{cases} z_{x1} = -\frac{9}{2I} \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 \right) \\ z_{x2} = \frac{9}{2I} \left(\frac{l^2}{4} - \frac{h^2}{10} \right) \rightarrow \text{Come si ottiene questa espressione?} \end{cases}$$

$$\frac{q}{2EI} \left[\frac{5}{192} l^4 \left(1 + \frac{48}{5} \frac{1}{4} \frac{h^2}{l^2} \left(\frac{1}{5} + \frac{\nu}{8} \right) \right) \right] = \delta \rightarrow \frac{qsl^4}{2EI192} \left[1 + \frac{48}{5} \frac{h^2}{l^2} \left(\frac{1}{5} + \frac{\nu}{8} \right) \right] = \delta$$

$$\frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{48}{25} \frac{h^2}{l^2} \left(1 + \frac{5}{8} \nu \right) \right] = \delta \rightarrow \delta''$$

N.B. Se l'istantanea viene fatta per $v(x=\pm \frac{l}{2}; y=0)=0$ che rappresenta la condizione al contorno agli estremi e sostituisce il valore dell'abbassamento in mezzo δ perché il termine δ è contenuto nell'espressione!

Vediamo adesso l'effetto del taglio

$$\begin{aligned} \delta^T &= \int_0^{l/2} \delta y \, dx = \int_0^{l/2} \frac{6}{5} \frac{T y}{Gh} \, dx = \frac{6}{5} \frac{1}{Gh} \int_0^{l/2} T y \, dx = \frac{6}{5Gh} \int_0^{l/2} q \left(\frac{l}{2} - x \right) \, dx = \\ &= \frac{6}{5Gh} \left[\frac{ql}{2} x - \frac{qx^2}{2} \right]_{x=0}^{x=\frac{l}{2}} = \frac{6}{5Gh} \left[\frac{ql^2}{4} - \frac{ql^2}{8} - 0 + 0 \right] = \frac{6}{5} \frac{1}{Gh} \frac{ql^2}{8} = \frac{6ql^2}{40Gh} \end{aligned}$$

Ricordando che $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ diventa

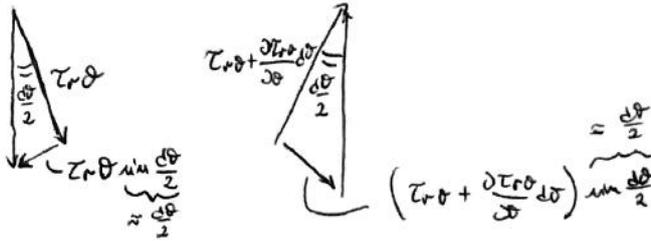
$$\delta^T = \frac{ql^2}{h} \cdot \frac{6}{40} \cdot \frac{2(1+\nu)}{E} = \frac{12}{40} (1+\nu) \frac{ql^2}{E} \cdot \frac{h^2}{h^2} = \frac{(1+\nu)}{40} \frac{ql^2}{EI} h^2 \cdot \frac{E^2}{E^2} = \frac{(1+\nu)}{40} \frac{ql^4}{EI} \frac{h^2}{E^2}$$

$$\delta = \delta'' + \delta^T = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{48}{25} \frac{h^2}{l^2} \left(1 + \frac{5}{8} \nu \right) \right] + \frac{(1+\nu)}{40} \frac{ql^4}{EI} \frac{h^2}{E^2} \rightarrow$$

$$\delta = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI} \left[1 + \frac{48}{25} \frac{h^2}{l^2} (1+\nu) \right] \quad \frac{ql^4}{EI} = x \quad \frac{h^2}{E^2} = y$$

$$\frac{5}{384} x \left[1 + \frac{48}{25} y \left(1 + \frac{5}{8} \nu \right) \right] + \frac{1+\nu}{40} xy$$

• EQUILIBRIO NELLA DIREZIONE CIRCONFERENZIALE



$$\cdot z_{r\theta} dr + z_{r\theta} r d\theta = \left(z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) dr + \left(z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} dr \right) (r + dr) d\theta + \int_{\theta} r d\theta dr + z_{r\theta} \sin \frac{d\theta}{2} dr + \left(z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta \right) \sin \frac{d\theta}{2} dr \rightarrow$$

$$\rightarrow \cancel{z_{r\theta} dr} + \cancel{z_{r\theta} r d\theta} = \cancel{z_{r\theta} dr} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr + \cancel{z_{r\theta} r d\theta} + z_{r\theta} dr d\theta + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} dr r d\theta + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} dr r d\theta + \int_{\theta} r d\theta dr + z_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + z_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} dr \frac{d\theta}{2} dr \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr + z_{r\theta} dr d\theta + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} dr r d\theta + \int_{\theta} r d\theta dr + \cancel{z_{r\theta} dr \frac{d\theta}{2}} = 0 \rightarrow \text{DIVIDO TUTTO PER } r d\theta dr$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} + \int_{\theta} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{r} \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} + \int_{\theta} = 0}$$

↳ Termine derivato lunghezza. Termine non classico, viene fuori dalle coordinate.

$$\begin{cases} \frac{z_r}{r} - \frac{z_{\theta}}{r} + \frac{\partial z_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} + \int_{\theta} = 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} z_{r\theta} + \frac{\partial z_{r\theta}}{\partial r} + \int_{\theta} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Si può scrivere in forma matriciale}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) & \left(-\frac{1}{r}\right) & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\ 0 & \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}\right) & \left(\frac{2}{r} + \frac{\partial}{\partial r}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_r \\ z_{\theta} \\ z_{r\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{\theta} \\ \int_{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2 equazioni in 3 incognite!

STATICA

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO $\begin{cases} \text{RADIALE} \\ \text{CIRCONFERENZIALE} \end{cases}$

STATICA

Quando le forze di volume sono nulle le eq. di equilibrio sono soddisfatte da

$$\cdot \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} - \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} - 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \sin^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin^2 \theta \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + 2 \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)$$

$$\cdot \nabla^2 (\phi_x + \phi_y) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \left(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) \right] (\phi_r + \phi_\theta) = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

$$\boxed{\nabla^2 (\phi_x + \phi_y) = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi = 0 \rightarrow \nabla^4 \phi = 0}$$

N.B. QUANDO C'È SIMMETRIA POLARE $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ quindi

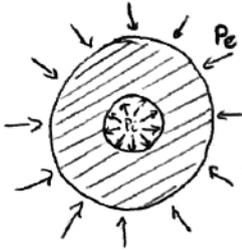
$$\begin{aligned} \nabla^2 (\phi_x + \phi_y) &= \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \\ &= \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} =$$

BASTA!

TUBO CILINDRICO GROSSO SPAESORE

$$\nabla^2 (\epsilon_r + \epsilon_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)^2 \phi$$



CORONA CIRCOLARE CARICATA IN MODO POLAR SIMMETRICO

- Materiale elastico
- Pressione interna P_i
- Pressione esterna P_e

Per simmetria polare $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \rightarrow \nabla^2 (\epsilon_r + \epsilon_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \phi$

$$\hookrightarrow \nabla^4 (\epsilon_r + \epsilon_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) =$$

$$\overbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)}^{\nabla^2} \overbrace{\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)}^{\nabla^2 \phi} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)}_{\text{Derivate di prodotto (LEIBNIZ)}} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \right) + \underbrace{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)}_{\text{Derivate di prodotto (II ORDINE)}}$$

$$\bullet \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{2}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{r^3} \right]$$

$$\bullet \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \left(-\frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = -\frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial^4 \phi}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 \phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0$$

$$\phi = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + D$$

$\nabla^4 \phi = 0$
Equazione di biarmonicità / conguagliata / compatibilità per simmetria polare!

Esprimere della funzione di Airy da risolvere l'equazione di biarmonicità.

• QUANDO $P_e = 0$



$$\begin{cases} \zeta_r = \frac{1}{r^2} \frac{-R_i^2 R_e^2 P_i}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right) \\ \zeta_\theta = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right) \end{cases}$$

Quanto valgono le tensioni ζ_r e ζ_θ per max e min?

• $\zeta_r =$

- max = 0 ($r = R_e$) $\rightarrow \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{R_e^2}\right) = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} (0) = 0$
- min = $-P_i$ ($r = R_i$) $\rightarrow \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 - \frac{R_e^2}{R_i^2}\right) = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(\frac{R_i^2 - R_e^2}{R_i^2}\right) = \frac{R_i^2 - R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} P_i = -\frac{1}{R_e^2 - R_i^2} P_i = -P_i$

• $\zeta_\theta =$

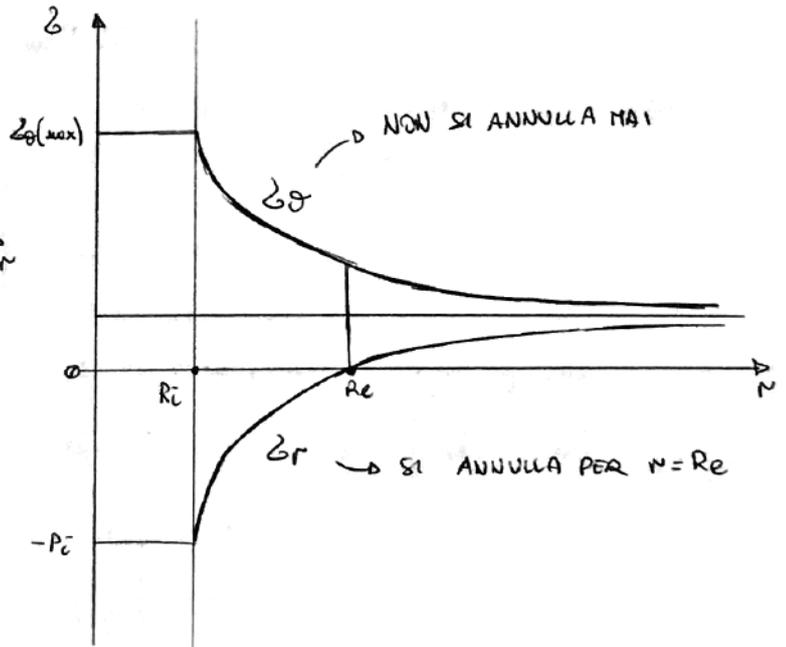
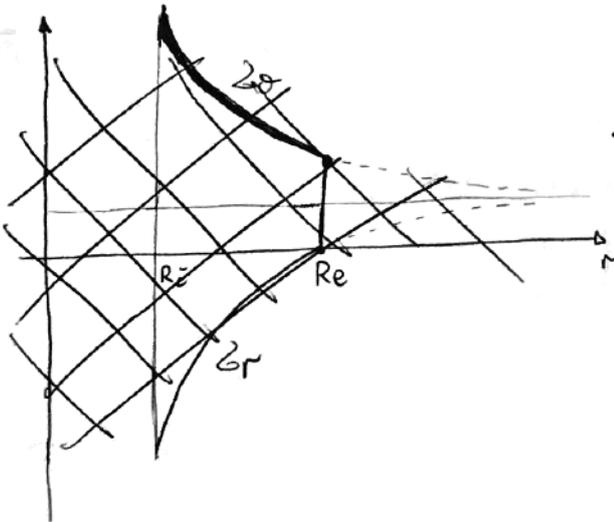
- min ($r = R_e$) $\rightarrow \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{R_e^2}\right) = 2 \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}$
- max ($r = R_i$) $\rightarrow \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left(1 + \frac{R_e^2}{R_i^2}\right) = \frac{P_i R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{R_i^2 + R_e^2}{R_i^2} = \frac{P_i (R_e^2 + R_i^2)}{R_e^2 - R_i^2}$

OSS.

- $\zeta_r < 0$ sempre (COMPRESSIONE)

- $\zeta_\theta > 0$ sempre (TRAZIONE)

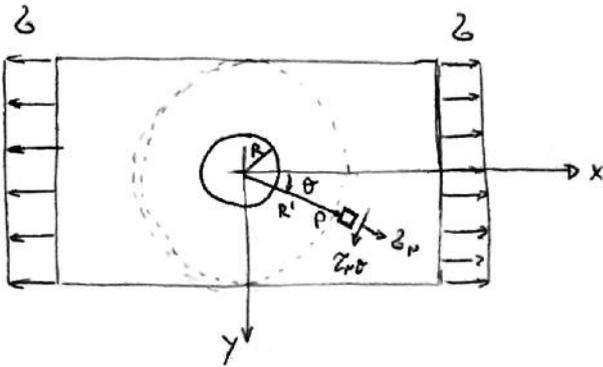
- $\frac{R_e^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} > 1$ sempre, per qualsiasi valore di $\frac{R_e}{R_i}$ ($R_e > R_i$ per definizione) $\rightarrow \zeta_\theta > P_i$ SEMPRE



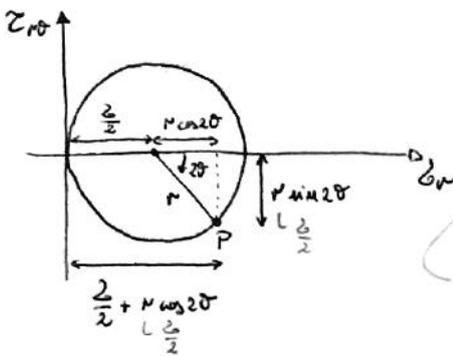
lim ζ_θ (max) = P_i
 $\frac{R_e}{R_i} \rightarrow \infty$

lim ζ_θ (max) = $\frac{P_i R}{t}$
 $\frac{R_e}{R_i} \rightarrow 1$
 ↳ Tutti punti nodali

FORO CIRCOLARE LASTRA TESA



Quanto valgono le tensioni sulla circonferenza R' ?



$\nu = \frac{2}{3}$ Quindi lo stato tensionale nel punto P vale:

$$\begin{cases} \sigma_r^{(R')} = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\theta) \rightarrow \sigma_r = \sigma_0 \text{ per } \cos 2\theta = 1 \rightarrow \theta = 0 \\ \sigma_\theta^{(R')} = -\frac{\sigma_0}{2} \sin 2\theta \rightarrow \sigma_\theta = 0 \text{ per } \theta = 0 \end{cases}$$

TENSIONI AGENTI SULLA CIRCONFERENZA EXT.

Non c'è simmetria polare
Tensioni all'interfaccia

N.B. $\sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} (1 + \cos 2\theta) \rightarrow \frac{\sigma_0}{2}$ è costante, c'è sempre, e ciò equivale a dire che $\frac{\sigma_0}{2}$ può essere considerata una pressione esterna. E' un po' strana specie di trazione, opposta rispetto al caso di studio del tubo!

STUDIO DI $\frac{\sigma_0}{2}$ (cost.)

Per studiare il campo tensionale all'interno della circonferenza di raggio R' prendo le equazioni delle tensioni radiale e circonferenziale di espressione generale e mi impongo le condizioni al centro

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R_i^2 R_e^2 (P_e - P_i)}{R_e^2 - R_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \\ \sigma_\theta = -\frac{R_i^2 R_e^2 (P_e - P_i)}{R_e^2 - R_i^2} \frac{1}{r^2} + \frac{P_i R_i^2 - P_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \end{cases}$$

$P_i = 0 \quad P_e = -\frac{\sigma_0}{2} \quad R_i = R \quad R_e = R'$

senza distinzioni di P_e e di compressione e $\frac{\sigma_0}{2}$ di trazione, quindi di segno opposto

$$\begin{cases} \sigma_r = -\frac{\sigma_0}{2} \frac{R^2 R'^2}{R'^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_0}{2} \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \frac{R^2 R'^2}{R'^2 - R^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\sigma_0}{2} \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} \end{cases}$$

Cosa succede quando $R' \rightarrow \infty$ (lastre infinite)

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{R'^2}{R'^2 - R^2} - \frac{1}{r^2} \frac{R'^2 R^2}{R'^2 - R^2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(\frac{R'^2}{R'^2 - R^2} + \frac{1}{r^2} \frac{R'^2 R^2}{R'^2 - R^2} \right) \end{cases}$$

$$\frac{R'^2}{R'^2 - R^2} = \frac{1}{\frac{R'^2 - R^2}{R'^2}} \rightarrow = \frac{1}{1 - \frac{R^2}{R'^2}}$$

$$\lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{R^2}{R'^2}} = \frac{1}{1 - \frac{R^2}{\infty}} = 1$$

$$\lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{1}{r^2} \frac{R'^2 R^2}{R'^2 - R^2} = R^2 \lim_{R' \rightarrow \infty} \frac{R'^2}{R'^2 - R^2} = \frac{R^2}{1} = \frac{R^2}{r^2}$$

$$\lim_{R' \rightarrow \infty} \begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \\ \sigma_\theta = \frac{\sigma_0}{2} \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \end{cases}$$

TENSIONI RADIALI E CIRCONFERENZIALI
PER LASTRA INFINITA CON FORO SOGGETTO
A PRESSIONE ESTERNA COSTANTE $\frac{\sigma_0}{2}$

Non c'è l'esperienza delle tensioni
per il restante campo tensionale.

$$\begin{aligned} \bullet \underline{\underline{\zeta_r}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{r} \left(2Ar + 4Br^3 - 2 \frac{C}{r^3} \right) \cos(2\theta) + \frac{1}{r^2} \left(An^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) (-4 \cos(2\theta)) = \\ &= \left(2A + 4B r^2 - 2 \frac{C}{r^4} \right) \cos(2\theta) + \left(-4A - 4B r^2 - 4 \frac{C}{r^4} - \frac{4}{r^2} D \right) \cos(2\theta) = \\ &= - \left(2A + 6 \frac{C}{r^4} + 4 \frac{D}{r^2} \right) \cos(2\theta) \end{aligned}$$

$$\bullet \underline{\underline{\zeta_{\theta\theta}}} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(2A + 12Br^2 + 6 \frac{C}{r^4} \right) \cos(2\theta)$$

(IORDINE) → solo $\frac{1}{r}$ dipende da r !

$$\begin{aligned} \bullet \underline{\underline{\zeta_{r\theta}}} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \left(An^2 + Br^4 + \frac{C}{r^2} + D \right) (-2 \sin(2\theta)) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(An + Br^3 + \frac{C}{r^3} + \frac{D}{r} \right) 2 \sin(2\theta) = \left(A + 3Br^2 - 3 \frac{C}{r^4} - \frac{D}{r^2} \right) 2 \sin(2\theta) = \\ &= \left(2A + 6Br^2 - 6 \frac{C}{r^4} - 2 \frac{D}{r^2} \right) \sin(2\theta) \end{aligned}$$

Ora devo trovare l'espressione delle costanti: A, B, C, D.

Si impongono le condizioni al contorno sulle circonferenze $\begin{cases} \text{esterna} \\ \text{interna} \end{cases}$.

Condizioni al contorno circonferenza esterna ($r=R'$)

N.B. L'espressione completa di ζ_r è

$$\bullet \zeta_r(R') = \frac{\zeta}{2} \cos 2\theta$$

$$\zeta_r = \frac{\zeta}{2} (1 + \cos 2\theta) \text{ ma}$$

$$\bullet \zeta_{r\theta}(R') = -\frac{\zeta}{2} \sin 2\theta$$

Ma $\zeta_r = \frac{\zeta}{2} \cos$ è stato già studiato, si studia l'altro

Condizioni al contorno circonferenza interna ($r=R$)

$$\bullet \zeta_r(R) = 0$$

$$\bullet \zeta_{r\theta}(R) = 0$$

Ottengo un sistema di 4 equazioni (le 4 condizioni al contorno) in 4 incognite (A, B, C, D):

$$\bullet \frac{\zeta}{2} \cos 2\theta = - \left(2A + 6 \frac{C}{R'^4} + 4 \frac{D}{R'^2} \right) \cos 2\theta \quad \text{con } r=R'$$

$$\bullet - \frac{\zeta}{2} \sin 2\theta = \left(2A + 6BR^2 - 6 \frac{C}{R^4} - 2 \frac{D}{R^2} \right) \sin 2\theta \quad \text{con } r=R$$

$$\bullet - \left(2A + 6 \frac{C}{R^4} + 4 \frac{D}{R^2} \right) \cos(2\theta) = 0 \quad \text{con } r=R$$

$$\bullet \left(2A + 6BR^2 - 6 \frac{C}{R^4} - 2 \frac{D}{R^2} \right) \sin(2\theta) = 0 \quad \text{con } r=R$$

Per $r \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{\sigma}{2} (1 + \cos(2\theta)) \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\sigma}{2} \sin(2\theta) \end{cases}$$

Per $r \rightarrow R$

$$\begin{cases} \sigma_r = 0 \\ \sigma_\theta = \sigma (1 - 2 \cos(2\theta)) \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases}$$

Focalizzandosi sul foro:

$$\sigma_\theta = \sigma (1 - 2 \cos(2\theta))$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\theta = \pi \rightarrow \cos(\pi) = -1 \rightarrow \sigma_\theta = 3\sigma$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \rightarrow 2\theta = 3\pi \rightarrow \cos(3\pi) = -1 \rightarrow \sigma_\theta = 3\sigma$$

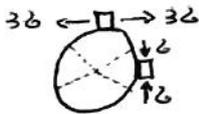
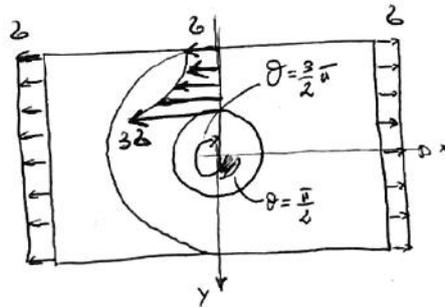
$$\sigma_\theta(\max) = 3\sigma$$

FATTORE DI CONCENTRAZIONE DELLE TENSIONI

$$\sigma_\theta(\min) = -\sigma$$

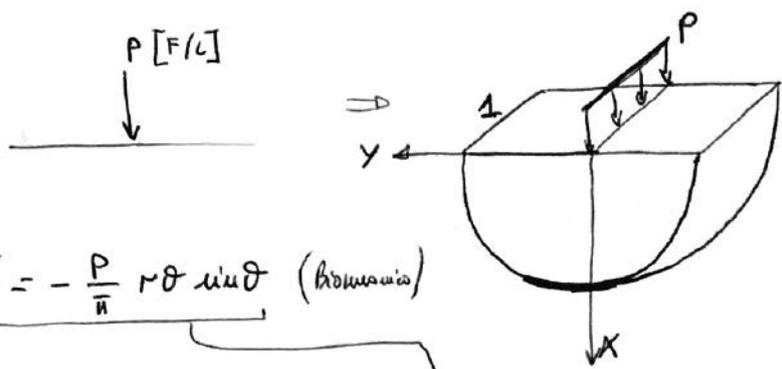
COMPRESSIONE

Valore per $\theta = 0 \rightarrow \cos(2\theta) = 1 \rightarrow \sigma_\theta = -\sigma$



$$\sigma_\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pm 30^\circ = \pm \frac{\pi}{6} = \begin{cases} \frac{\pi}{6} \\ \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

FORZA CONCENTRATA SU SEMIPIANO ELASTICO



In questo caso la
funzione di Airy che
risolve identicamente
le equazioni di equilibrio.
È BIARMONICA

$$\phi = -\frac{P}{\mu} r \theta \sin \theta \quad (\text{biarmonica})$$

$$\begin{cases} \Delta_N = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \Delta_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \Rightarrow \text{Sono malgre le derivate:}$$

$$\begin{aligned} \cdot \underline{\underline{\Delta_N}} &= \frac{1}{r} \left(-\frac{P}{\mu} \theta \sin \theta \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[-\frac{P}{\mu} r \theta \sin \theta \right] = \\ &= \quad // \quad - \frac{P}{\mu r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\theta \cos \theta + \sin \theta \right] = \\ &= \quad // \quad - \frac{P}{\mu r} \left[(-\theta \sin \theta + \cos \theta) + (\cos \theta) \right] = \\ &= -\frac{P}{\mu r} (\cancel{\theta \sin \theta}) - \frac{P}{\mu r} (-\cancel{\theta \sin \theta} + 2 \cos \theta) = \underline{\underline{-\frac{2P}{\mu r} \cos \theta}} \end{aligned}$$

$$\cdot \underline{\underline{\Delta_\theta}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[-r \frac{P}{\mu} \theta \sin \theta \right] = \underline{\underline{0}}$$

$$\cdot \underline{\underline{\tau_{r\theta}}} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \left(-r \frac{P}{\mu} \frac{\partial}{\partial \theta} (\theta \sin \theta) \right) \right] = \underline{\underline{0}} \quad (\text{Resta } \frac{\partial}{\partial r} \text{ di una funzione nulle } r)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_N = -\frac{2P}{\mu} \frac{\cos \theta}{r} \\ \Delta_\theta = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{array} \right.$$

Campo di tensione di COMPRESSIONE RADIALE.

N.B. ANOMALIA MATEMATICA \rightarrow Per $r \rightarrow 0$ $\Delta_N \rightarrow \infty$ INFOX!
È una singolarità in $r=0$.

$$\bullet \epsilon_r \rightarrow \frac{\mu}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = v \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \rightarrow -\frac{2P}{\pi E r} \cos \theta \log(r) + \frac{f(\theta)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = v \frac{2P}{\pi E} \frac{\cos \theta}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = v \frac{2P}{\pi E} \cos \theta - f(\theta) + \frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log(r) \rightarrow \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{2P}{\pi E} \cos \theta (v + \log(r)) - f(\theta)$$

$$\rightarrow \underline{v} = \int \left[\frac{2P}{\pi E} \cos \theta (v + \log(r)) - f(\theta) \right] d\theta = \frac{2P}{\pi E} \sin \theta (v + \log(r)) - \int f(\theta) d\theta + g(r)$$

cost. di integr.

Devo determinare $f(\theta)$ e $g(r)$. Uso l'equazione di $\gamma_{r\theta}$.

$$\bullet \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \left[\frac{2P}{\pi E} \sin \theta \log(r) + \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{2P}{\pi E r} \sin \theta + \frac{\partial g(r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{2P}{\pi E} \sin \theta (v + \log(r)) + \int \frac{1}{r} f(\theta) d\theta - \frac{g(r)}{r} = 0$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{2P}{\pi E r} \sin \theta + \frac{\partial g(r)}{\partial r} - \frac{2P}{\pi E r} v \sin \theta + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \frac{g(r)}{r} = 0$$

Supponendo $g(r) = Cr$, dove C è una costante arbitraria, si ottiene l'espressione delle due funzioni incognite a variabili separate. Ovvero:

$$\bullet \underline{g(r) = Cr} \quad \text{quindi} \quad \frac{\partial g(r)}{\partial r} = +C \quad \text{e} \quad -\frac{g(r)}{r} = -C \quad \text{che si elidono!}$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{2P}{\pi E r} \sin \theta + \cancel{C} - \frac{2P}{\pi E r} v \sin \theta + \frac{1}{r} \int f(\theta) d\theta - \cancel{C} = 0 \rightarrow -\int f(\theta) d\theta = \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} + \frac{2P}{\pi E} (1-v) \sin \theta$$

L'espressione di $f(\theta)$ che soddisfa l'uguaglianza è:

$$\underline{f(\theta) = -P \frac{(1-v)}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta}$$

$A, B, C = \text{costanti arbitrarie}$

$$\frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta} = -\frac{P}{\pi E} (1-v) (\theta \cos \theta + \sin \theta) + A \cos \theta - B \sin \theta$$

Campo degli spostamenti

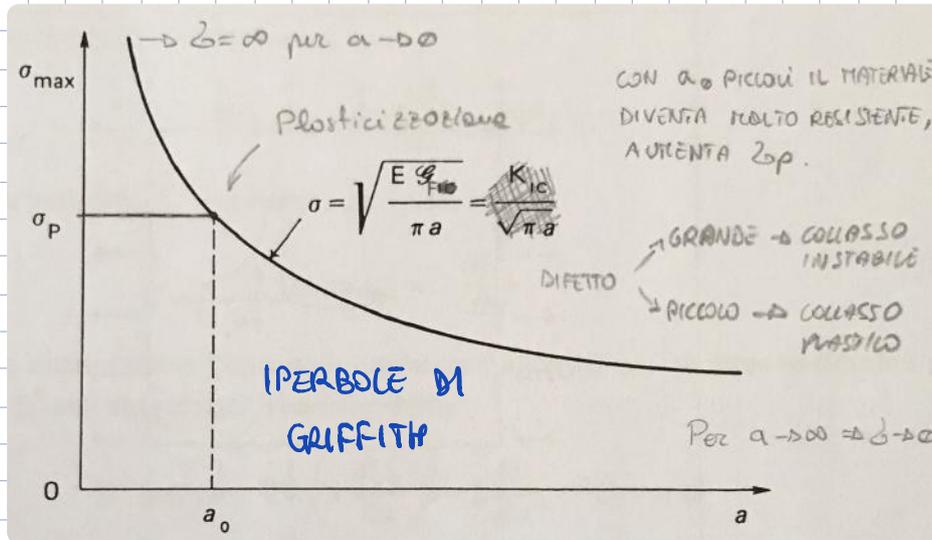
$$v = \frac{2P}{\pi E} \sin \theta (v + \log r) - \int f(\theta) d\theta + g(r)$$

$$\bullet \mu = -\frac{2P}{\pi E} \cos \theta \log(r) - P \frac{(1-v)}{\pi E} \theta \sin \theta + A \sin \theta + B \cos \theta$$

$$\bullet v = \frac{2P}{\pi E} \sin \theta (v + \log r) - \frac{P}{\pi E} (1-v) (\theta \cos \theta + \sin \theta) + A \cos \theta - B \sin \theta + 2 \frac{P}{\pi E} (1-v) \sin \theta + Cr$$

$$v = \frac{2P}{\pi E} \sin \theta (v + \log r) - \frac{P}{\pi E} (1-v) \theta \cos \theta + \frac{P}{\pi E} (1-v) \sin \theta + A \cos \theta - B \sin \theta + Cr$$

CRITERIO ENERGETICO DI GRIFFITH



N.B. Non è stato ancora definito il valore critico per la propagazione reale delle fessure.

$$\sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_f E}{\sigma_p^2} \begin{cases} \sigma > \sigma_0 & \text{COLLASSO FRAGILE INSTABILE} \\ \sigma < \sigma_0 & \text{COLLASSO PLASTICO} \end{cases}$$

Questa spiegazione era un modo di spiegare l'elevata duttilità e resistenza dei filamenti vetrosi ed i colli fragili improvvisi delle grandi navi Liberty.

Deriviamo la funzione analitica nelle tre componenti del piano.

• $\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \bar{z}$ perché $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = \bar{z}$ e $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x+iy) = 1$

• $\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \bar{z} \frac{\partial}{\partial y} (x+iy) = \underline{\underline{i\bar{z}}}$

Ora derivo parte Reale e parte Immaginaria rispetto a x e y. Scriviamo 4 derivate $\begin{matrix} \text{Re} = x \\ \text{Im} = y \end{matrix}$

• $\frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \text{Re} \bar{z}$

• $\frac{\partial}{\partial y} \text{Re}(\bar{z}) = \text{Re} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \text{Re} \underline{\underline{i\bar{z}}} = \text{Re} [i(\text{Re } \bar{z} + i \text{Im } \bar{z})] = \text{Re} [i \text{Re } \bar{z} - \text{Im } \bar{z}] = -\text{Im } \bar{z}$
ci è i, non è un termine reale
 $i \times i = -1$

• $\frac{\partial}{\partial x} \text{Im}(\bar{z}) = \text{Im} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \text{Im} \bar{z}$

• $\frac{\partial}{\partial y} \text{Im}(\bar{z}) = \text{Im} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \text{Im} \underline{\underline{i\bar{z}}} = \text{Im} [i(\text{Re } \bar{z} + i \text{Im } \bar{z})] = \text{Im} [i \text{Re } \bar{z} - \text{Im } \bar{z}] = \text{Re } \bar{z}$
 $i \times i = i^2 = -1$
 $\text{Im}(i \text{Re } \bar{z}) = \text{Re } \bar{z}$
Non si prende i

N.B.

Se \bar{z} è analitica valgono le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \text{Re}(\bar{z}) = \frac{\partial}{\partial y} \text{Im}(\bar{z}) \\ \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \text{Re}(\bar{z}) = -\frac{\partial}{\partial x} \text{Im}(\bar{z}) \end{array} \right\} \text{CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN}$$

PRIMA IPOTESI DI WESTERGAARD

Si impone la simmetria rispetto all'asse x tramite il pedice I.

È l'ipotesi di TODD I, OPENING, Apertura della fessura con simmetria rispetto all'asse x. Si aggancia alla trattazione di Muskhelishvili un po' fraudolenta.

$$\phi_I = \text{Re } \bar{z}_I + y \text{Im } \bar{z}_I + \frac{1}{2} B (y^2 - x^2)$$

Parte Reale e Parte Immaginaria di una funzione analitica sono armoniche.

$$\bullet \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{Re} \bar{Z}_I + y \operatorname{Im} \bar{Z}_I + \frac{1}{2} B(y^2 - x^2) \right) =$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Re} \bar{Z}_I = - \cancel{\operatorname{Im} \bar{Z}_I}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{y \operatorname{Im} \bar{Z}_I}^{\text{Der. prod.}} = \operatorname{Im} \bar{Z}_I + y \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \bar{Z}_I = \cancel{\operatorname{Im} \bar{Z}_I} + y \operatorname{Re} Z_I$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{2} B(y^2 - x^2) = By$$

$$= \frac{\partial \phi_I}{\partial y} = y \operatorname{Re} Z_I + By \rightarrow \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \overbrace{(y \operatorname{Re} Z_I + By)}^{\text{Der. prod.}} = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' + B$$

Ricordiamo che le funzioni sono espresse tramite la funzione di Arzy come:

$$\bullet \underline{\underline{\zeta_x}} = \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial y^2} = \underline{\underline{\operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' + B}}$$

$$\bullet \underline{\underline{\zeta_y}} = \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial x^2} = \underline{\underline{\operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' - B}}$$

$$\bullet \underline{\underline{\tau_{xy}}} = - \frac{\partial^2 \phi_I}{\partial x \partial y} = \rightarrow - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_I}{\partial y} \right) = - \frac{\partial}{\partial x} (y \operatorname{Re} Z_I + By) = \underline{\underline{-y \operatorname{Re} Z_I'}}$$

$$\rightarrow - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_I}{\partial x} \right) = - \frac{\partial}{\partial y} \left(\operatorname{Re} \bar{Z}_I + y \overbrace{\operatorname{Im} \bar{Z}_I}^{\text{Der. prod.}} - Bx \right) =$$

$$= - \left(\cancel{\operatorname{Im} \bar{Z}_I} + \cancel{\operatorname{Im} \bar{Z}_I} + y \operatorname{Re} Z_I' + 0 \right) = \underline{\underline{-y \operatorname{Re} Z_I'}}$$

N.B. Le funzioni ζ_x ; ζ_y ; τ_{xy} così ottenute sono uguali a quelle trovate da Pwshkelishvili (1933).

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta_x = \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' + B \\ \zeta_y = \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' - B \\ \tau_{xy} = -y \operatorname{Re} Z_I' \end{array} \right.$$

CONDIZIONI
AL
CONTORNO

Qual è l'espressione di
 Z_I di la retto?
La introduciamo con la 2° HP.

Vediamo come compilate questo cambio di variabile ($z = g+a$):

→ $(z-a) = (g+a-a) = g$

→ $(z+a) = (g+a+a) = g+2a$

→ $\sqrt{(z-a)(z+a)} = \sqrt{g(g+2a)} = g^{1/2} \cdot (g+2a)^{1/2}$

→ $g(z) = g(g+a)$

$g =$ coordinate complessa nell'intorno del tip.

Riesprimando Z_I ora si ottiene

$$\bullet Z_I = \frac{g(z)}{\sqrt{(z-a)(z+a)}} + B = \frac{g(g+a)}{g^{1/2} \cdot (g+2a)^{1/2}} + B = \frac{g(g+a) / (g+2a)^{1/2}}{g^{1/2}} + B$$

Viene portato al numeratore perché non è più singolare.

Nell'intorno dell'asintoto destro della fessura $g \rightarrow \infty$ quindi posso esprimere Z_I come

$$Z_I = \frac{g(a) / \sqrt{2a}}{g^{1/2}} + B$$

N.B. $g(a)$ non è stata ancora definita perché non è chiaro le condizioni all'infinito.

Viene fatte le seguenti ipotesi:

$$\frac{g(a)}{\sqrt{a}} = \frac{K_I}{\sqrt{a}} \rightarrow K_I = \frac{g(a)\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} g(a)$$

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2a}g} + B$$

dove

$K_I =$ FATTORE DI INTENSIFICAZIONE DEGLI SFORZI

$$\frac{K_I}{\sqrt{2a}} g^{1/2} + B$$

Quanto vale K_I ?

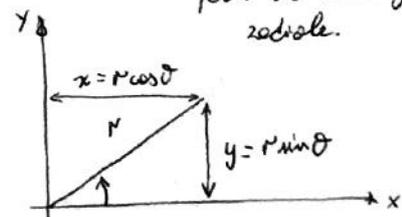
Dobbiamo trovare l'espressione di g e per far questo ci servono le coordinate polari.

perché c'è un'ambiguità radiale.

$\bullet g = r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

→ $g^{-1/2} = r^{-1/2} e^{-1/2 i\theta} = r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$

→ $g^{-3/2} = r^{-3/2} e^{-3/2 i\theta} = r^{-3/2} \left(\cos \frac{3\theta}{2} - i \sin \frac{3\theta}{2} \right)$



$\bullet y = r \sin\theta = 2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ Formula trigonometrica

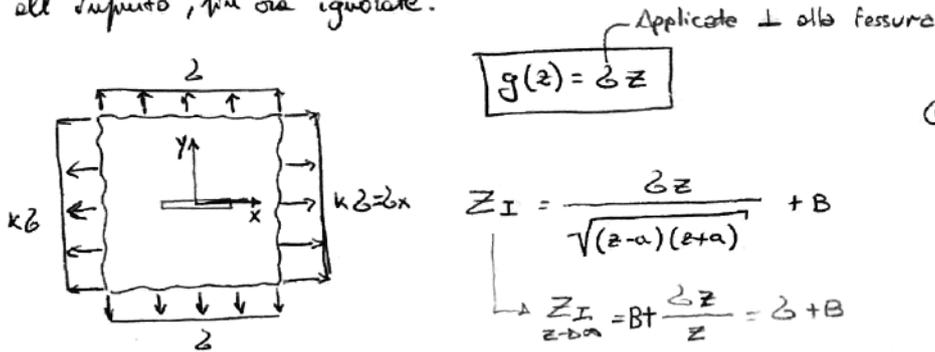
OSSERVAZIONI

La singolarità è sempre la stessa.

- K_I È SEMPRE DIVISO PER $\sqrt{2\pi r}$, LA PARTE RADIALE (σ_r) È SEMPRE LA STESSA, IN TUTTE E 3 LE TENSIONI! QUINDI C'È UN'OMOGENEITÀ, UN'UNIFORMITÀ DI COMPORTAMENTO ASINTOTICO. LA POTENZA $-\frac{1}{2}$ DELLA SINGOLARITÀ $r^{-\frac{1}{2}}$ DIPENDE SOLO DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO SULLE FACCE DELLA FESSURA
- K_I MODULA IL CAMPO TENSIONALE, PERCHÉ LA PARTE ANGOLARE (I TERMINI σ_θ), È SEMPRE LA STESSA, E DIPENDE SOLO DALLE CONDIZIONI AL CONTORNO SULLA FESSURA. LA PARTE ANGOLARE NON VARIA AL VARIARE DI K_I .
- $K_I = \left[\frac{F}{L^{3/2}} \right]$ QUESTA DISPARITÀ RISPETTO ALLA DIMENSIONE DELLA TENSIONE $\left[\frac{F}{L^2} \right]$ CREA DEGLI EFFETTI DI SCALA NOTEVOLI!

TERZA IPOTESI DI WESTERGARD

Per trovare l'espressione di K_I , con la 3^a HP, Westergard impone le condizioni all'infinito, fin ora ignorate.



Questa espressione di $g(z)$ rispetta le condizioni al contorno all'infinito.

Per verificare le condizioni all'infinito si fa tendere $z \rightarrow \infty$, di vuol dire andare in tutte le direzioni perché z è complesso! All' ∞ $(z-a)(z+a) \rightarrow z^2$ (a diventa infinitesimo) $\rightarrow Z_I$ REALE

$\rightarrow Z_I$ È REALE, LO È ANCHE Z_I'

- $\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_x = \lim_{z \rightarrow \infty} (Re Z_I - y Im Z_I' + B) = Re \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} + B \right) - y \frac{0}{z^2} + B = z + 2B$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_y = \lim_{z \rightarrow \infty} (Re Z_I + y Im Z_I' + B) = z + B - B = z$
- $\lim_{z \rightarrow \infty} \tau_{xy} = \lim_{z \rightarrow \infty} (-y Re Z_I') = -y Re \frac{\partial}{\partial z} (z + B) = 0$

$\lim_{z \rightarrow \infty} \sigma_x = z + 2B \Rightarrow K_I = z + 2B \rightarrow B = \frac{1}{2} z (K_I - 1)$

Quando $K=1 \rightarrow$ Situazione isotropa alla Griffiths.
 Quando $K=0 \rightarrow B = -\frac{1}{2} z$
 $\sigma_x = 0$. Tracciamo la compressione uniforme di compressione nella fessura

CRACK OPENING DISPLACEMENT

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E} (\partial_y - \nu \partial_x) v$$

$$\int y \operatorname{Im} Z_I' dy \rightarrow \int t y g' y dy = t y g y - \int t' y g y$$

$$\begin{aligned} t y &= y & t' y &= 1 \\ g y &= \operatorname{Im} Z_I' & g y &= -\operatorname{Re} Z_I \end{aligned} \Rightarrow -y \operatorname{Re} Z_I + \int \operatorname{Re} Z_I dy \Rightarrow -y \operatorname{Re} Z_I + \operatorname{Im} Z_I$$

$$v = \frac{1}{E} \left[\int \operatorname{Re} Z_I + y \operatorname{Im} Z_I' - B dy - \nu \int \operatorname{Re} Z_I - y \operatorname{Im} Z_I' + B dy \right] =$$

$$= \frac{1}{E} \left[\operatorname{Im} \bar{Z}_I - \underline{y \operatorname{Re} Z_I} + \operatorname{Im} \bar{Z}_I - \underline{By} - \cancel{\nu \operatorname{Im} \bar{Z}_I} - \underline{\nu y \operatorname{Re} Z_I} + \nu \operatorname{Im} \bar{Z}_I - \underline{\nu By} \right] =$$

$$= \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{Z}_I - \frac{1+\nu}{E} y \operatorname{Re} Z_I - \frac{B}{E} y (1+\nu)$$

Ricorda $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$

Ricordando che

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} j^{-1/2} + B \rightarrow \bar{Z}_I = 2j^{1/2} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} + Bj + C$$

$$\bar{Z}_I = 2 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) + Br (\cos \theta + i \sin \theta) + C$$

cerco v e poi condiz.

~~$$v(\theta=0) = \frac{2}{E} \left[\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \left(\frac{2 \sin \frac{\theta}{2}}{2} \right) + Br \sin \theta \right] - \frac{1+\nu}{E} \left[\left(2 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + B \right) - \frac{B}{E} y (1+\nu) \right]$$~~

$$v = \frac{2}{E} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + Br \sin \theta \right) - \frac{1+\nu}{E} \left(2 \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + B \right) - \frac{1+\nu}{E} y B$$

$$v(\theta=\pi) = \frac{2}{E} \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \left(-2 \frac{1+\nu}{E} y B \right) ?$$

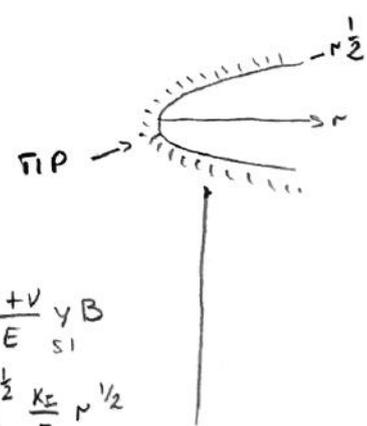
$$v = \frac{2}{E} \operatorname{Im} \bar{Z}_I - \frac{1+\nu}{E} y \operatorname{Re} Z_I - \frac{1+\nu}{E} y B$$

$$\bar{Z}_I = \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \right) + Br (\cos \theta + i \sin \theta) + C$$

$$Z_I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} j^{-1/2} + B = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right) + B$$

$$v = \frac{2}{E} \left(\frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} + Br \sin \theta \right) - \frac{1+\nu}{E} y \left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2} + B \right) - \frac{1+\nu}{E} y B$$

$$v(\theta=\pi) = \frac{2}{E} \frac{2K_I}{\sqrt{2\pi}} r^{1/2} - \frac{1+\nu}{E} y (2B) \rightarrow v(\theta=\pi) = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{K_I}{E} r^{1/2}$$



$$2 \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

QUESTO NON COMPARE PERCHÉ SULLA FESSURA $y=0$?

LA DEFORMAZIONE HA UN ANDAMENTO PARABOLICO CON SINGOLARITÀ $\frac{1}{2}$. LA SINGOLARITÀ TENSIONALE IMPLICA LA SINGOLARITÀ NELLE DEFORMAZIONI.

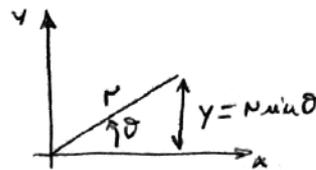
Come prima introduce le coordinate polari:

$$\bullet g = r e^{i\theta} = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$\bullet g^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}i\theta} = r^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\bullet g^{-\frac{3}{2}} = r^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{3}{2}i\theta} = r^{-\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{3}{2}\theta - i \sin \frac{3}{2}\theta \right)$$

$$\bullet y = r \sin \theta = 2r \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$



Nelle funzioni z_x, z_y, z_{xy} compaiono $Z_{\underline{u}}$ e $Z_{\underline{u}}'$, li esprimo in coordinate polari:

$$\bullet Z_{\underline{u}} = \frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} r^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

$$\bullet Z_{\underline{u}}' = \frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \left(-\frac{1}{2} g^{-\frac{3}{2}} \right) = -\frac{K_{\underline{u}}}{2\sqrt{2\pi r}} r^{-\frac{3}{2}} \left(\cos \frac{3}{2}\theta - i \sin \frac{3}{2}\theta \right)$$

$\frac{1}{r^{3/2}} = \frac{1}{r\sqrt{r}}$

Quindi posso trovare le funzioni:

$$\bullet \underline{z}_x = 2 \operatorname{Im} Z_{\underline{u}} + y \operatorname{Re} Z_{\underline{u}}' =$$

$$= 2 \left(-\frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \right) + \cancel{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(-\frac{K_{\underline{u}}}{\cancel{r} \sqrt{2\pi r}} \cos \frac{3}{2}\theta \right) =$$

$$= -\frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta \right)$$

$$\bullet \underline{z}_y = -y \operatorname{Re} Z_{\underline{u}}' = -\cancel{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(-\frac{K_{\underline{u}}}{\cancel{r} \sqrt{2\pi r}} \cos \frac{3}{2}\theta \right) = \frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2}\theta$$

$$\bullet \underline{z}_{xy} = \operatorname{Re} Z_{\underline{u}} - y \operatorname{Im} Z_{\underline{u}}' =$$

$$= \frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \cancel{r} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \left(+\frac{K_{\underline{u}}}{\cancel{r} \sqrt{2\pi r}} \sin \frac{3}{2}\theta \right) =$$

$$= \frac{K_{\underline{u}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2}\theta \right)$$

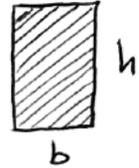
CRITERIO DI PROPAGAZIONE DELLA FESSURA IN CONDIZIONI DI CARICO MISTO

MODO I → OPENING →  CAUSA σ

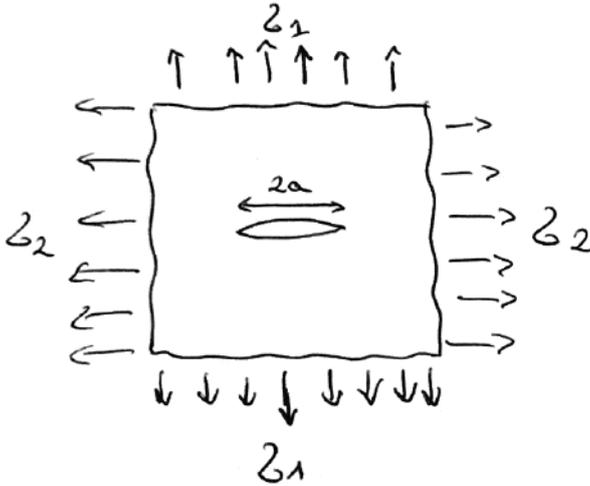
MODO II → SLIDING →  CAUSA τ

$$\sigma = \frac{M}{J} y = \frac{M}{\frac{1}{6} b h^2} \quad (\text{NAVIER})$$

Tensioni per la sezione rettangolare



$$\tau = \frac{T S}{J b} = \frac{3T}{2A} = \frac{3}{2} \frac{T}{b h} \quad (\text{JOURAWSKY})$$



$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a}$$

Quando ho la contemporanea di σ e τ devo moltiplicare il criterio di mixtura.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{3\tau^2 + \sigma^2} \quad \text{Prin stressato di Tresca}$$

$$\sigma_T = \sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}$$

CRITERIO DI PROPAGAZIONE DELLA MASSIMA TENSIONE CIRCONFERENZIALE

La massima tensione circonferenziale è valutabile col criterio di Mohr.

Le fessure si aprono nella direzione normale alla massima tensione circonferenziale valutabile col criterio di Mohr.

Da Westergaard ho trovato $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ coordinate in coordinate polari, quindi ho per modo I che per modo II, quindi lo traduco in coordinate polari e trovo:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right]$$

QUANTO VALE θ = ANGOLO DI DIRAMAZIONE

$$\tau_{\theta\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right]$$

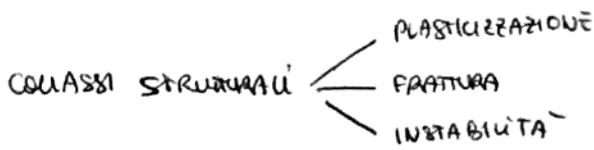
LO TROVO IMPONENDO LA CONDIZIONE DI STAZIONARIETA'!

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \left[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) \right] \cos \frac{\theta}{2} \equiv -\frac{3}{2} \tau_{\theta\theta} = 0$$

$$\rightarrow \frac{3}{2} \tau_{\theta\theta} = 0 \begin{cases} \theta = \pm \pi & \text{soluzione banale} \\ K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \end{cases}$$

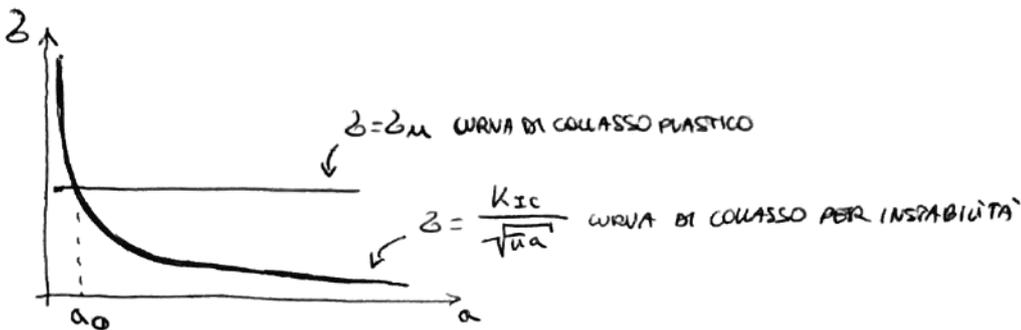
TRANSIZIONE TRA COLASSI STRUTTURALI



Il collasso per fratture ha un'interazione col collasso per plasticità i quali a loro volte hanno un'interazione col collasso per instabilità!

L'interazione avviene in termini di TRANSIZIONE.

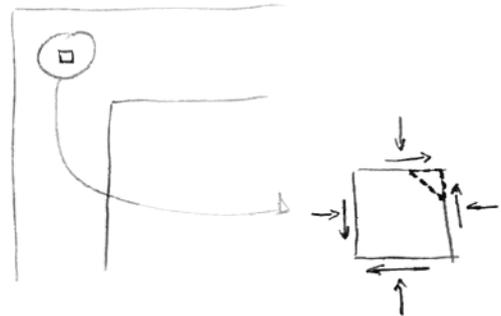
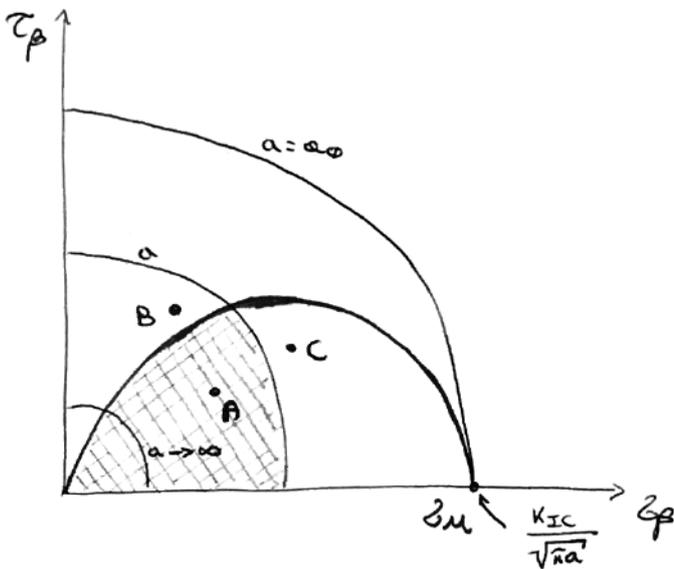
PROBLEMA DEL CUT-OFF



$2a$ = dimensione del difetto

- grande \rightarrow Collasso per instabilità
- piccolo \rightarrow Collasso plastico

NODO TELAIO



τ diseguate secondo il principio di reciprocità! OVVERO CAZZO!

CONSIDERO UN ELEMENTO CON UN DIFETTO INIZIALE a .

- A NON COLASSA
- B COLASSO PLASTICO
- C COLASSO FRAGILE

METODO DI WILLIAMS SVILUPPO IN SERIE

$$\bullet \frac{\partial \phi}{\partial r} = \sum_m (\lambda_m + 1) r^{\lambda_m} f_m(\theta)$$

$$\bullet \frac{\partial \phi}{\partial r^2} = \sum_m \lambda_m (\lambda_m + 1) r^{\lambda_m - 1} f_m(\theta)$$

$$\bullet \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \sum_m r^{\lambda_m + 1} f'_m(\theta)$$

$$\bullet \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \sum_m r^{\lambda_m + 1} f''_m(\theta)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \underline{\underline{\partial_r}} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(\frac{1}{r} \right) \sum_m (\lambda_m + 1) r^{\lambda_m} f_m(\theta) + \left(\frac{1}{r^2} \right) \sum_m r^{\lambda_m + 1} f''_m(\theta) = \\ &= \sum_m (\lambda_m + 1) r^{\lambda_m - 1} f_m(\theta) + \sum_m r^{\lambda_m - 1} f''_m(\theta) = \\ &= \underline{\underline{\sum_m r^{\lambda_m - 1} [(\lambda_m + 1) f_m(\theta) + f''_m(\theta)]}} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\partial_\theta}} = \sum_m r^{\lambda_m - 1} [\lambda_m (\lambda_m + 1) f'_m(\theta)]$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\partial_{r\theta}}} = - \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \sum_m r^{\lambda_m + 1} f'_m(\theta) \right] = - \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_m r^{\lambda_m} f'_m(\theta) \right] = \underline{\underline{- \sum_m \lambda_m r^{\lambda_m - 1} f'_m(\theta)}}$$

Equazioni di convergenza/biancheria:

$$\nabla^2 (\partial_r + \partial_\theta) = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\partial_r + \partial_\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\partial_r + \partial_\theta}} &= \sum_m r^{\lambda_m - 1} [(\lambda_m + 1) f_m(\theta) + f''_m(\theta) + \lambda_m (\lambda_m + 1) f'_m(\theta)] = \\ &= \sum_m r^{\lambda_m - 1} \left[\underbrace{[(\lambda_m + 1) + \lambda_m (\lambda_m + 1)]}_{\lambda_m + 1 + \lambda_m^2 + \lambda_m = \lambda_m^2 + 2\lambda_m + 1 = (\lambda_m + 1)^2} f_m(\theta) + f''_m(\theta) \right] = \underline{\underline{\sum_m r^{\lambda_m - 1} [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)]}} \end{aligned}$$

$$\bullet \underline{\underline{\frac{\partial^2}{\partial r^2} (\partial_r + \partial_\theta)}} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\sum_m (\lambda_m - 1) r^{\lambda_m - 2} [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)] \right] = \underline{\underline{\sum_m (\lambda_m - 2)(\lambda_m - 1) r^{\lambda_m - 3} [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)]}}$$

$$\bullet \underline{\underline{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\partial_r + \partial_\theta)}} = \sum_m (\lambda_m - 1) r^{\lambda_m - 3} [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)]$$

$$\bullet \underline{\underline{\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\partial_r + \partial_\theta)}} = \frac{1}{r^2} \sum_m r^{\lambda_m - 1} [(\lambda_m + 1)^2 f''_m(\theta) + f''''_m(\theta)] = \underline{\underline{\sum_m r^{\lambda_m - 3} [(\lambda_m + 1)^2 f''_m(\theta) + f''''_m(\theta)]}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla^2 (\partial_r + \partial_\theta)}} &= \sum_m r^{\lambda_m - 3} \left[\underbrace{[(\lambda_m - 2)(\lambda_m - 1) + (\lambda_m - 1)]}_{\lambda_m^2 - 2\lambda_m + 2 - \lambda_m + \lambda_m - 1 \rightarrow \lambda_m^2 - 2\lambda_m + 1 = (\lambda_m - 1)^2} [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)] + [(\lambda_m + 1)^2 f''_m(\theta) + f''''_m(\theta)] \right] = \\ &= \underline{\underline{\sum_m r^{\lambda_m - 3} [(\lambda_m - 1)^2 [(\lambda_m + 1)^2 f_m(\theta) + f''_m(\theta)] + [(\lambda_m + 1)^2 f''_m(\theta) + f''''_m(\theta)]}} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{MODO I} \begin{cases} A_m \cos(\lambda_m + 1)\alpha + B_m \cos(\lambda_m - 1)\alpha = 0 \\ A_m (\lambda_m + 1) \sin(\lambda_m + 1)\alpha + B_m (\lambda_m - 1) \sin(\lambda_m - 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\text{MODO II} \begin{cases} C_m \sin(\lambda_m + 1)\alpha + D_m \sin(\lambda_m - 1)\alpha = 0 \\ C_m (\lambda_m + 1) \cos(\lambda_m + 1)\alpha + D_m (\lambda_m - 1) \cos(\lambda_m - 1)\alpha = 0 \end{cases}$$

Perché ho spezzato in 2 parti il problema? Perché, per ciascuna delle soluzioni ammesse, devono annullarsi i due determinanti dei due sistemi, e calcolare il determinante 2x2 è più facile del 4x4. $\det[A=2x2] = a_{ii}a_{jj} - a_{ji}a_{ij}$

$$[\text{MODO I}] = \begin{bmatrix} \overset{a_{ii}}{\cos(\lambda_m + 1)\alpha} & \overset{a_{ij}}{\cos(\lambda_m - 1)\alpha} \\ \underset{a_{ji}}{(\lambda_m + 1) \sin(\lambda_m + 1)\alpha} & \underset{a_{jj}}{(\lambda_m - 1) \sin(\lambda_m - 1)\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_m \\ B_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[\text{MODO I}] = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{x}{a_{ii}}}_{\cos(\lambda_m + 1)\alpha} \underbrace{\frac{y}{a_{jj}}}_{(\lambda_m - 1) \sin(\lambda_m - 1)\alpha} - \underbrace{\frac{y}{a_{ij}}}_{\cos(\lambda_m - 1)\alpha} \underbrace{\frac{x}{a_{ji}}}_{(\lambda_m + 1) \sin(\lambda_m + 1)\alpha} = 0$$

$$[\text{MODO II}] = \begin{bmatrix} \sin(\lambda_m + 1)\alpha & \sin(\lambda_m - 1)\alpha \\ (\lambda_m + 1) \cos(\lambda_m + 1)\alpha & (\lambda_m - 1) \cos(\lambda_m - 1)\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_m \\ D_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[\text{MODO II}] = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{x}{a_{ii}}}_{\sin(\lambda_m + 1)\alpha} \underbrace{\frac{y}{a_{jj}}}_{(\lambda_m - 1) \cos(\lambda_m - 1)\alpha} - \underbrace{\frac{y}{a_{ij}}}_{\sin(\lambda_m - 1)\alpha} \underbrace{\frac{x}{a_{ji}}}_{(\lambda_m + 1) \cos(\lambda_m + 1)\alpha} = 0$$

N.B. Nel libro e nelle slides $\det[\text{MODO II}]$ è riportato con segno opposto! Non cambiare niente.

α è un dato del problema, λ_m è l'incognita, la si esprime in termini di α , l'autovalore.

A_m e B_m sono proporzionali a K_I , lo determinano a meno di un fattore. Lo stesso vale per C_m e D_m con K_{II} .

Per proseguire nel risolvere la incognita si deve fare ricorso a delle celeberrime tecniche matematiche:

$$X = (\lambda_m + 1)\alpha$$

$$Y = (\lambda_m - 1)\alpha$$

$$\begin{cases} -\lambda u \sin 2\alpha = \sin 2\lambda u \alpha & \text{MODO I} \\ +\lambda u \sin 2\alpha = \sin 2\lambda u \alpha & \text{MODO II} \end{cases}$$

α = DATO DEL PROBLEMA

↳ Sembrapuzze dell'angolo ventriante

λu = POTENZA DELLA SINGOLARITÀ

Poche assumere i risultati come:

$$\mp \lambda u \sin 2\alpha = \sin 2\lambda u \alpha \rightarrow \frac{\sin(2\lambda u \alpha)}{2\lambda u \alpha} = \begin{cases} \text{MODO I} \\ \text{MODO II} \end{cases} \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}$$

↳ Al 2° punto tensione zero!

↳ Risolvendo lo trovato una forma del tipo $\frac{\sin x}{x} = \mp \frac{\sin y}{y}$.

$\frac{\sin x}{x}$ è una funzione che si smorza!

$$2\alpha = [0; 2\pi]$$

$\lambda u = R$ è un numero puro, è la potenza della singolarità, È LA NOSTRA INCOGNITA!

Essendo 2α noto, pochi si studia il problema per un determinato ρ valore di α , il termine a destra è noto e costante!

N.B. Ci interessano le soluzioni con $0 \leq \lambda u \leq 1$ perché:

- $\lambda u \geq 1$ → le tensioni sono finite e ripetitive e non rappresentano singolarità
- $\lambda u \leq 0$ → l'energia diverge.

4 CASI

- $0 \leq 2\alpha \leq \pi$
- $\pi \leq 2\alpha \leq 1,43\pi$
- $1,43 \leq 2\alpha < 2\pi$
- $2\alpha = 2\pi$

$$y = \frac{\sin(2\lambda u \alpha)}{2\lambda u \alpha}$$

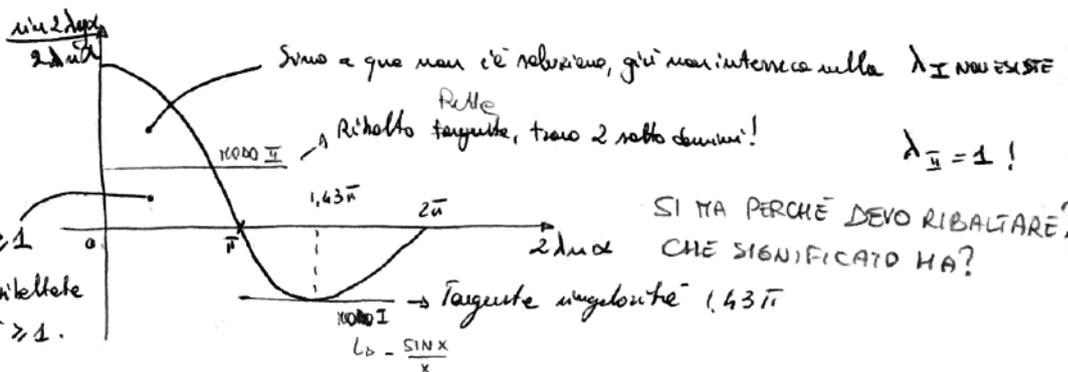
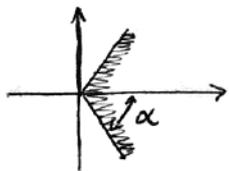
$$y = \mp \frac{\sin(2\alpha)}{2\alpha}$$



1) CUNEO $0 \leq 2\alpha \leq \pi$ - ANGOLO NON RIENTRANTE

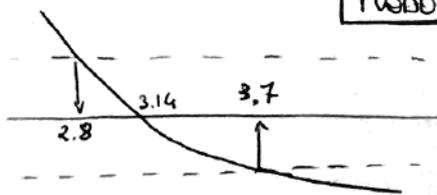
N.B. Sotto zero lo modo

NON C'È SINGOLARITÀ TENSIONALE!



Il rapporto tra l'ossatura ribaltata e quella non ribaltata è ≥ 1 .

MODO I



$$\frac{3.7}{2.8} > 1$$

$$\lambda_I \geq 1$$

$$\lambda_{II} = 1$$

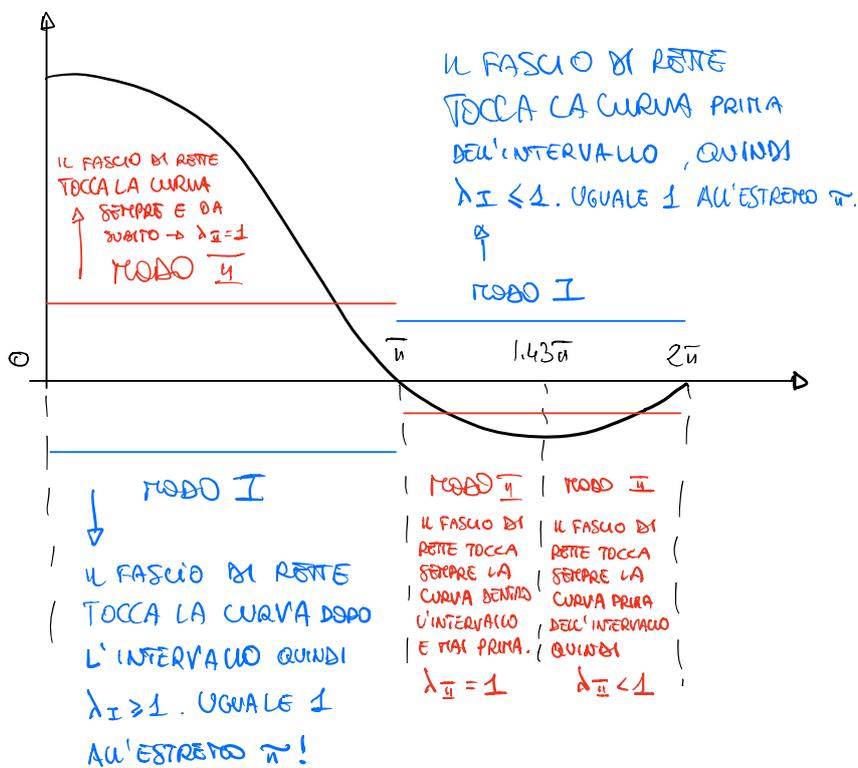
CHIEDERE COME SI RICAVALO

I VALORI DI λ_I e λ_{II} !

E COME MAI SI RIBALTA LA

RETTA PER IL MODO I E NON

ANCHE PER IL MODO II?



N.B. Dopo \tilde{n} il rim curva regno quindi i due fasci di rette si invertono!