NUMERO: 2331A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Perrone Davide

MATERIA: Fluidodinamica delle Turbomacchine - Teoria - Esercitazioni - Allegati - Prof. Larocca

Fluidodinamica delle turbomacchine

a.a. 2017/2018

Davide Perrone

Antonino Alesci

Prof. Francesco Larocca

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 368

Sommario

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 368

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 368

Il motivo per cui si utilizzano due alberi è legato al comportamento fuori progetto del compressore ed a problemi dovuti all'inerzia. Dopo l'espansione in turbina l'energia residua del fluido viene utilizzata per ottenere la spinta.

La prima cosa che salta in evidenza è la presenza di un elevato numero di stadi di compressione, dove si ha un valore di 40 di rapporto di compressione, in turbina si ha un numero di stadi inferiore ed il motivo è legato al fatto che non è possibile usare tutto il rapporto di compressione su un singolo stadio, quindi si deve frazionare. Un'altra cosa evidente è la presenza della turbina di bassa pressione che è costituita da 6 stadi e di dimensioni abbastanza notevoli perché questa turbina ha una determinata influenza in termini di peso (circa l'80% del motore). In termini aeronautici è importante che il peso sia minimo.

L'andamento delle sezioni di passaggio è convergente nella parte fredda e divergente nella parte calda ed in particolare l'andamento del numero di stadi del compressore ha un andamento più grande (dimensioni maggiori) rispetto a quelle della turbina.

2. Propfan: è ancora in fase di progetto e la spinta è ottenuta dalle pale controrotanti. Il nome deriva dalle eliche e dal fan
3. Turbo elica: In questo caso si hanno due stadi di compressore centrifugo che due stadi di turbina, in questo caso la turbina da energia al compressore ed all'elica. In questo caso si ha una configurazione diversa da una macchina assiale ed in qualche modo si può intuire come la direzione del fluido è più complicata rispetto a quella di una macchina assiale. Le macchine che utilizzano compressori centrifughi hanno un andamento del fluido più complicato e delle efficienze più basse.
4. Turbopompa: è caratterizzata da profili da una forma diversa da una macchina assiale ed ha applicazioni spaziali.
5. Produzione di energia, quindi le macchine industriali, dove vi è un albero dove sono calettate le pale. La concezione del progetto è diversa rispetto a quella aeronautica, infatti vi è un unico grande albero con I corrispettive pale relative alla turbina e compressore calettate su di esso, anche qui il numero di stadi del compressore e della turbina sono diversi da quelli aeronautici.
   Questi motori fondamentalmente lavorano a numero di giri costante, quindi non hanno problemi di funzionare a diverse condizioni di progetto, non è necessario disaccoppiare le macchine di alta e bassa pressione. Quindi al di fuori della condizione di progetto in ambito aeronautico, il compressore varia il funzionamento per tale motivo si va ad effettuare questo disaccoppiamento. I due motori utilizzati nei diversi ambiti hanno potenze intorno alle decine di MWatt, ma la struttura è diversa, infatti in campo aeronautico ci si concentra sulla potenza specifica, mentre in ambito industriale ci si concentra sui rendimenti e quindi sui costi.
6. Gruppo di sovralimentazione: si ha solo uno stadio di compressione ed una turbina che sfruttando l'energia dei gas di scarico produce una potenza necessaria ad azionare il compressore centrifugo.
   Numero di giri elevato vuol dire potenze elevate, però elevate sollecitazioni meccaniche.
7. Ambito navale: è riportata un'elica per la propulsione navale, la forma delle pale è simile a quella aeronautica, anche se il fluido cambia e quindi nel caso di fluido incompressibile si verifica la cavitazione, mentre con fluido compressibili si verifica la compressibilità. La dimensione di queste eliche sono dell'ordine di qualche metro.
8. Ambito medico: numero di giri elevatissimo e dimensioni molto piccole.

Elevate efficienze si ripercuote sul consumo specifico del combustibile, quindi consumi minori e quindi i miglioramenti dell'efficienza possono portare a miglioramenti sul piano economico a livello globale. Quindi negli anni vi è stato un notevole miglioramento delle macchine in

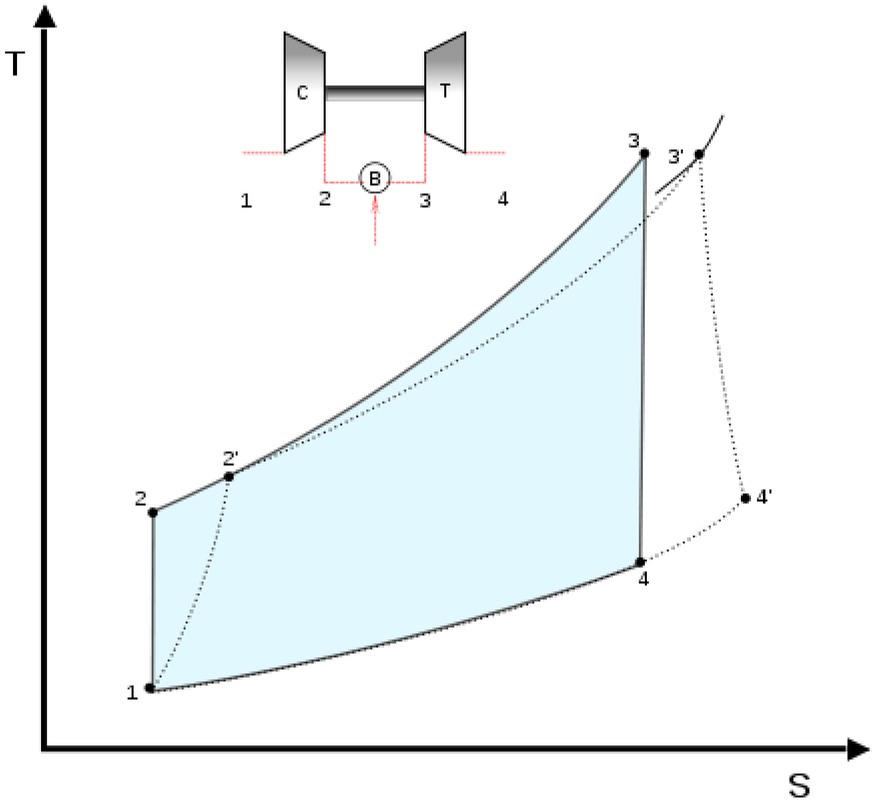
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 368

favorevole anche se l'efficienza di questi motori inizialmente era molto bassa. Poi in pochi anni si ebbero grandi vantaggi.

I.3-Breve riassunto riguardo l'influenza delle prestazioni e lo sviluppo negli anni

Allora a cosa è dovuto questo progresso? Al campo aeronautico ed i parametri che hanno spinto verso i miglioramenti delle prestazioni si fa un piccolo accorgimento.

Il motore a getto fa riferimento al ciclo Brayton-Joule e questo ciclo è legato al rapporto di compressione tra il punto 1-2 ed espansione tra il punto 3-4.



Il lavoro utile: $L_u = L_t - L_c$, viene utilizzato per vedere quale è l'energia utile che deve essere convertita in energia di spinta, ciò è legato essenzialmente alla temperatura T_3°. Il rendimento ideale è legato essenzialmente al rapporto di compressione (β), mentre il lavoro utile è legato alla temperatura massima in uscita dal combustore, sia al rapporto di compressione e se si guarda il diagramma di queste due grandezze, se si guarda il diagramma di queste due grandezze ci dice che il rendimento ideale del ciclo termodinamico cresce sempre al crescere del rapporto di compressione. Il lavoro utile invece è funzione delle due grandezze (β, T_3°), inoltre questo lavoro si annulla per rapporto di compressione uguale ad uno ed uguale a 0 e per avere elevati lavori utili, conviene avere elevate temperature, ma le due cose non possono essere separate ed all'aumentare di beta significa aumentare il rendimento.

Figura

Elevate temperature in camera di combustione vuol dire avere resistenze più elevat in turbina, infatti fin quando non sono stati messe appunto dei materiali e sistemi di refrigerazione della turbina, non era possibile costruire questi motori, perché non vi era l possibilità di avere motori efficienti.

Per quanto riguarda il motore quindi è stato necessario lo sdoppiamento del flusso, mettendo a rapporto l'aria fredda e calda. Introducendo questo rapporto si è verificato un miglioramento del rendimento propulsivo, che moltiplicato per il rendimento termodinamico si ottiene quello globale il quale è legato al consumo specifico della spinta.

Negli anni questo rapporto è aumentato portando ad un miglioramento del TSFC, questo miglioramento durante gli anni ammonta al 50%.

La tendenza è quella di avere motori con BPR elevato, ma questo ha portato ad aumentare le dimensioni frontali del motore, aumentare la velocità periferica e quindi le sollecitazioni meccaniche, con ciò si verificano dei fenomeni di compressibilità al tip che diminuiscono l'efficienza, quindi bisogna contenere il numero di giri. Ma numero di giri più basso vuol dire avere numeri di giri della turbina di bassa più bassi e quindi quest'ultima fornirà una potenza minore. Per evitare ciò si disaccoppia la velocità di rotazione del fan dalla turbina di bassa con un sistema di ingranaggi.

I.3.1-Utlimi accorgimenti 07/03/2018

Una turbomacchina estrae lavoro dal fluido che la attraversa in modo continuo ed alla base di questo trasferimento ci sono delle pale rotanti. Questo meccanismo dipende da ciò che avviene nell'intorno delle pale rotanti ed il tipo di moto che si realizza in questi profili sviluppa dei fenomeni che determinano le efficienze delle turbomacchine.

Alla base del meccanismo di trasferimento di energia, ci sarà quello che noi andremo ad analizzare, ovvero ciò che avviene nell'intorno dei profili.

Date due schiere palari, tutto ciò che succede dipende da come il flusso investe i profili e cosa accade nel canale interpalare. Il fluido che attraversa queste macchine è un fluido che può essere compressibile, incompressibile, viscoso e non, sub/super-sonico e queste condizioni possono verificarsi tutte all'interno della singola schiera, quindi si ha a che fare con campi di moto di difficile previsione. La bontà del trasferimento di energia è legato al tipo di fluido e le perdite sono dovute al fatto che si ha a che fare con fluidi viscosi, quindi la realtà del fluido dà luogo a perdite nella trasformazione del moto in energia e questi fenomeni sono più o meno grandi. Il campo di moto può presentare anche dei fenomeni di urto i quali anche essi sono responsabili di perdite. Ma all'interno del canale vi sono anche dei fenomeni che danno luogo a flussi secondari i quali sono anch'essi responsabili di perdite dato che possono generare vortici.

Vi sono infatti vortici di estremità sia nelle turbine che nei compressori, poi se si immagina che a valle di una schiera vi è un'altra schiera in moto relativo con la prima, si intuisce che quest'ultima viene investita da un flusso non uniforme, inoltre anche quest'ultima cambia la direzione del flusso, questo comporta fenomeni che possono indurre ulteriori perdite.

Qui è riportata la simulazione del campo di moto di una schiera con pale rotanti, dove si trova un urto nel bordo d'attacco ed uno all'interno del canale interpalare, quindi la regione dove si verifica questo urto è solo una parte.

Se si guarda l'accoppiamento tra rotore e statore, quindi di due schiere in moto relativo, si intuisce che il flusso non è stazionario, quindi si ha la variazione di determinate grandezze fisiche al passaggio del flusso, questo dà luogo anche a sollecitazioni variabili nel tempo, ma la variazione nel tempo significa anche problematiche di natura aero acustica.

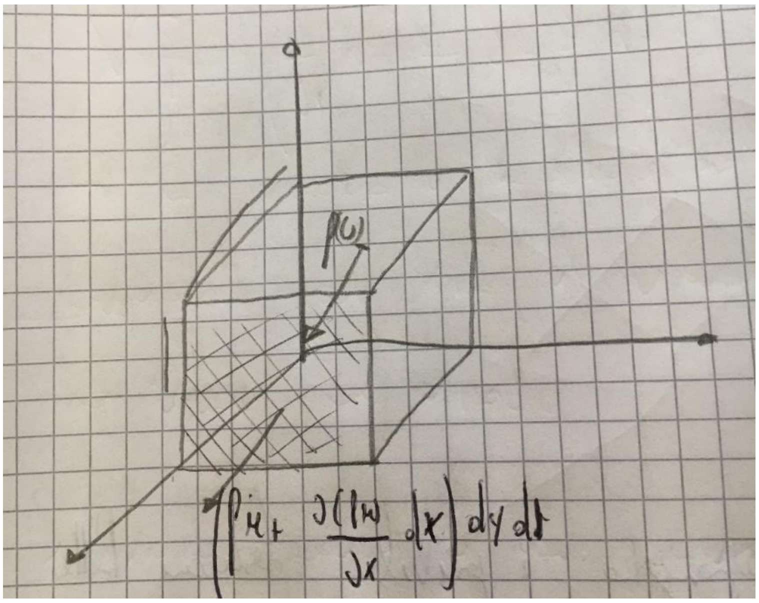
Quindi il campo di moto è di tipo non stazionario e sotto si riporta cosa accade in presenza di un campo di moto di tipo supersonico non stazionario che attraversa due schiere in moto relativo, le linee in rosso evidenziano gli urti.

movimento della scia determina piccoli spostamenti dell'urto e quindi carichi variabili della pala nel tempo ovvero sollecitazioni e vibrazioni che possono creare risonanze.

Quindi il progetto di una turbomacchina coinvolge una serie di discipline: meccanica dei fluidi, termodinamica, meccanica strutturale, aero acustica, studio dei materiali, matematica applicata ed analisi numerica.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 368

Consideriamo l'approccio euleriano e vediamo cosa accade localmente. La legge di conservazione dice che la massa elementare contenuta nel volumetto è: $\rho dxdydz$. La massa nel volumetto varia nel tempo e la variazione è dovuta alla variazione di flusso di massa che attraversa il volume, quindi dipende dal flusso entrante ed uscente. La variazione della massa all'interno del volume elementare fisso nello spazio è:



Vediamo come indichiamo il flusso di massa: $\bar{q} = ui + vj + wk$, dove u, v e w sono le componenti del vettore ed i, j e k sono i versori. Prendendo la faccia di normale x, la componente assiale è pari ad u.

Quale è il flusso di massa attraverso la prima faccia? $\left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz$.

Quindi facendo flusso entrante meno flusso uscente: $\rho udydz - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz$, si ottiene il flusso relativo alla direzione x. Questo ragionamento è possibile farlo anche per le altre facce:

- $\rho udydz - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz \rightarrow direzione\ x$
- $\rho vdxdz - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dxdz \rightarrow direzione\ y$
- $\rho wdxdy - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dxdy \rightarrow direzione\ z$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz = \rho udydz - \left(\rho u + \frac{\partial \rho u}{\partial x} dx\right) dydz + \rho vdxdz - \left(\rho v + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy\right) dxdz + \rho wdxdy - \left(\rho w + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dz\right) dxdy$$

Se la variazione di massa è nulla, allora: $\frac{d\rho}{dt} = 0$, quindi se non cambia nel tempo quello che entra è uguale a quello che esce ed il flusso è stazionario.

Se sviluppiamo queste equazioni e semplifichiamo si ottiene l'equazione della massa in forma differenziale (legge di conservazione della massa in forma differenziale):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0$$

Quando il primo termine non dipende dal tempo $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, il flusso è stazionario.

Sviluppando l'equazione differenziale della massa si ottiene:

altro punto in un determinato istante, ovvero è una variazione locale, poi la particella si sposta e raggiunge un punto diverso, o meglio molto più lontano, grazie a questo spostamento incontra una variazione di densità espressa da un gradiente. Questo spostamento è una variazione nel tempo della proprietà, quindi questo termine $\bar{q}\nabla\rho$ è la derivata convettiva. La somma dei due termini $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \bar{q}\nabla\rho$ mi dà luogo ad una variazione totale della densità della particella.

Tornando all'approccio lagrangiano e considero una particella lungo la sua traiettoria, la legge mi dice che la variazione totale sostanziale evolve nel tempo secondo una legge e questa variazione prende il nome di derivata totale o sostanziale e si indica così:

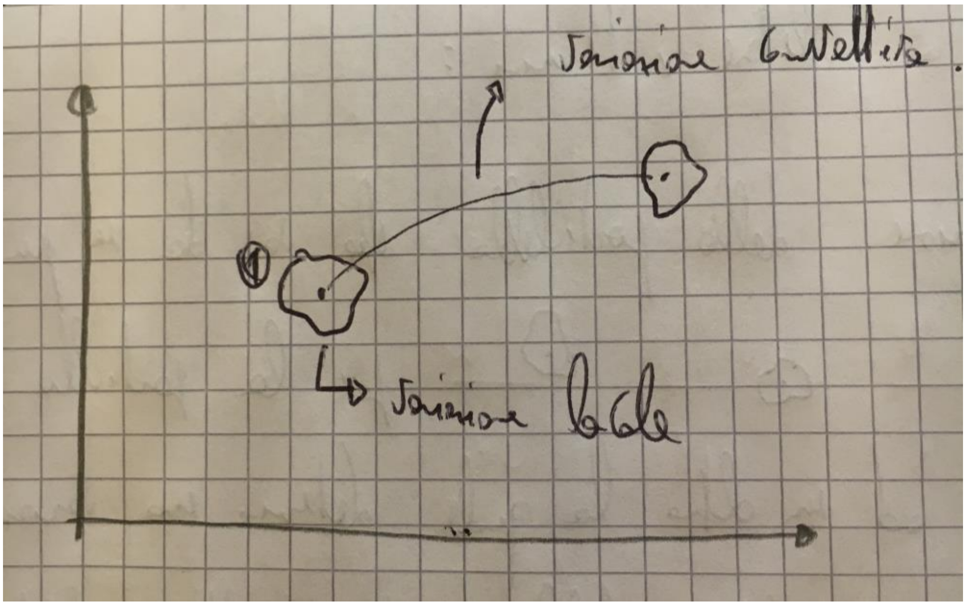
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{D}{Dt}$$

<u>Def.</u> Sostanziale: la sostanza dell'elemento di massa cambia di densità seguendo la particella lungo la sua traiettoria.

Prendendo qualsiasi grandezza:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{d()}{dt} = \frac{\partial()}{\partial t} + \bar{q}\nabla()$$

Ho un termine che rappresenta la variazione locale ed uno convettivo, la somma dei due mi dà la derivata sostanziale.



Guardando il punto la particella assume una variazione locale (nell'intorno del suo punto), poi spostandosi assume una variazione convettiva. Questo è quando il campo di moto è variabile nel tempo, se il campo di moto è costante, allora non c'è una variazione locale ma solo una variazione convettiva, le altre particelle subiranno anche solo variazione convettiva.

Quindi l'equazione di continuità si può scrivere anche in modo compatto:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho\nabla\bar{q} = 0$$

Questa stessa espressione avrei potuto ottenerla anche con l'approccio lagrangiano applicando la legge di conservazione della massa, ovvero: la massa contenuta in un volume di controllo deve rimanere invariata:

Se considero un punto fisso nello spazio, posso suddividere l'integrale, e posso portare il segno di derivazione fuori dal segno di integrale:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla(\rho\bar{q})\, dV = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV + \int_S (\rho\bar{q})\bar{n}\, dS = 0$$

Attraverso il teorema di Gauss il secondo integrale può essere scritto come flusso della grandezza che sta sotto il segno di divergenza, quindi il flusso è il prodotto scalare tra il vettore per il versore normale alla superficie s. Quindi un'altra forma di scrittura della conservazione della massa, ed il primo integrale individua la massa contenuta all'interno del volume di controllo, mentre il secondo integrale è il flusso di massa attraverso le superfici di controllo. Quindi la massa nel volume di controllo cambia nel tempo a causa del flusso di massa che attraversa la superficie di controllo, quindi in sostanza questo è un altro modo per esprimere la conservazione della massa.

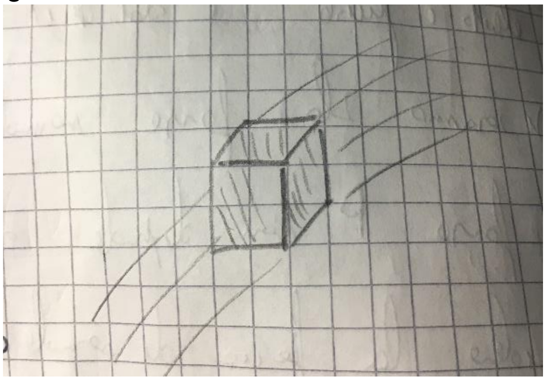
La forma integrale o differenziale è possibile ottenerla passando dall'una all'altra. Spesso servirà scrivere l'equazione di governo nella forma integrale e considereremo il flusso stazionario eliminando la variabile dipendente dal tempo.

II.2-Conservazione della quantità di moto (08/03/2018)

Questa è la seconda legge di Newton ed anche qui possiamo applicare quest'ultima a diversi modelli e possiamo ricavare la legge guardando la particella e descrivendo il comportamento lungo la traiettoria. La seconda legge di Newton è:

$$F = m\bar{a}$$

- F: rappresenta tutte le forze agenti nel sistema e per valutarle consideriamo un volumetto come quello riportato in figura.

  Queste forze sono quelle che agiscono sul volumetto e vi sono forze di superficie, ovvero tutte le forze che il fluido circostante esercita sul suddetto volumetto, le altre sono le forze di volume come la forza peso, anche se qui ha poca importanza dal punto di vista energetico e quindi non sarà presa in esame. Quindi si considerano solo le forze di superficie ed in particolare gli sforzi per unità di superficie. Questa forza può essere normale e tangenziale, le tangenziali nascono per moto relativo tra le diverse particelle, ma considerando un fluido ideale allora non si hanno forze tangenziali, ma solo forze normali ovvero forze di pressione (compressione). Queste forze di pressione P saranno indipendenti dal piano sulle quali sono applicate.
- a: rappresenta l'accelerazione dell'elemento e per definizione è la derivata totale della velocità sul tempo:

Questo termine derivata totale di q rispetto al tempo non è altro che la derivata locale più la derivata convettiva applicata per qualsiasi grandezza. Noi l'abbiamo vista applicata per le grandezze scalari, ma vale anche per le grandezze vettoriali e tensoriali, quindi è possibile ancora scriverla come:

$$\rho\left[\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}+(\bar{q}\nabla)\bar{q}\right]=-\nabla P$$

Questa è una scrittura vettoriale ed ogni membro è un vettore e questa equazione scomponendola lungo gli assi è possibile riscriverla in equazioni scalari o meglio avendo una terna di assi in tre equazioni scalari.

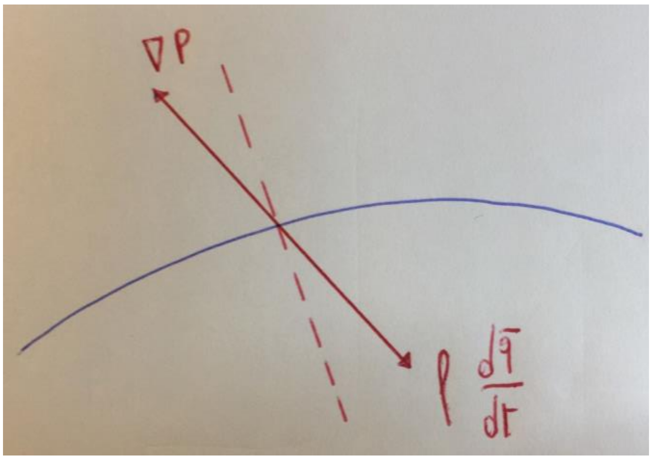
Quindi fin ora abbiamo:

- Un'equazione scalare
- Un'equazione vettoriale

Prima di sviluppare questa equazione facciamo un'osservazione sulla conservazione della quantità di moto. Consideriamo la particella lungo la traiettoria (figura seguente). E la relazione:

$$F=m\bar{a}$$

Per ogni punto della traiettoria avremo che c'è un vettore che va ad eguagliare il gradiente di P per ogni punto (guarda figura). Proiettando il termine in direzione ortogonale otteniamo le componenti dell'accelerazione centripeta che dipendono dalla curvatura, più è grande la curvatura e maggiore è l'accelerazione centripeta. Questo fatto spiega la portanza in un profilo.



Consideriamo un profilo investito da una corrente, si vede come sotto il profilo il gradiente cresce in direzione della freccia, considerando il gradiente applicato nel punto A. Nel punto B il gradiente aumenta sempre in direzione della freccia, quindi le pressioni all'infinito a monte sono maggiori delle linee di corrente sul profilo, quindi si determina una depressione.

Bisogna fare attenzione perché quando ci troviamo in un sistema di riferimento cartesiano, se sbagliamo ad applicare i suddetti operatori non si arriva al risultato.

Quindi applicando questo operatore scritto in forma compatta al vettore q:

$$\rho\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial\bar{q}}{\partial x}+v\frac{\partial\bar{q}}{\partial y}+w\frac{\partial\bar{q}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}$$

Applicandolo a ciascuna componente si ottiene:

- $\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}$
- $\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}$
- $\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}$

Queste rappresentano le tre equazioni scalari della conservazione della quantità di moto in un sistema di riferimento cartesiano.

In un sistema cilindrico le equazioni si complicano perché quando applico l'operatore i versori non hanno direzione fissa, quindi vi sono anche le derivate dei versori. Al momento lo accantoniamo anche se parlando di turbo macchine non sarebbe il caso perché sono a sviluppo radiale.

Ritorniamo sulle singole equazioni scritte in forma scalare, ritornando alla scrittura precedente si ha:

$$\left[\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}+(\bar{q}\nabla)\bar{q}\right]=-\frac{\nabla P}{\rho}$$

Esiste una identità vettoriale in cui si può vedere il termine $(\bar{q}\nabla)\bar{q}$:

$$(\bar{q}\nabla)\bar{q}=\nabla\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right)-\bar{q}\ x\ \nabla\ x\ \bar{q}$$

Questo termine è stato ottenuto dallo sviluppo dei termini, ma lo prendiamo per buono. Adesso vediamo il rotore del vettore q:

$$\omega=\nabla\ x\ \bar{q}$$

Questo prende il nome di vorticità e sostituendo si ottiene:

$$\frac{\partial\bar{q}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right)-\bar{q}\ x\ \omega=-\frac{\nabla P}{\rho}$$

Facendo l'ipotesi di fluido incomprimibile, quindi densità costante. Se la densità è costante posso scrivere:

$$\frac{\nabla P}{\rho}=\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

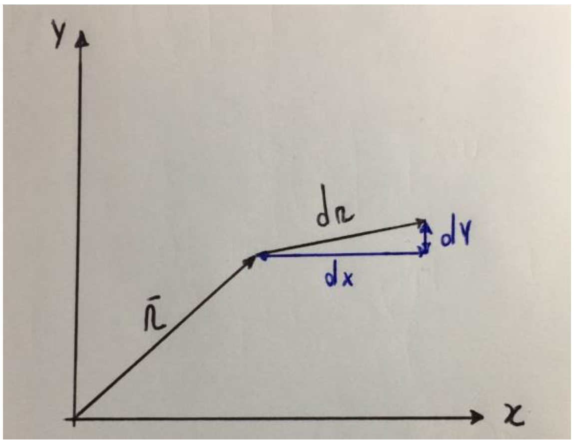
Se faccio l'ipotesi di flusso stazionario, quindi derivata rispetto al tempo nulla, quindi l'equazione scritta precedentemente diventa:

$$\nabla\left(\frac{\bar{q}^2}{2}\right)-\bar{q}\ x\ \omega=-\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

Posso raggruppare sotto un unico operatore differenziale i due scalari:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Moltiplicando il gradiente di f per dr esplicitati è possibile ottenere il seguente risultato.



dx dy rappresentano il vettore dr di componente dx dy ed il gradiente di f è il prodotto scalare di:

$$df = \nabla f * d\bar{r}$$

Quindi il gradiente è la variazione della funzione che rappresenta la funzione.

- Fine precisazione

Il gradiente di questa grandezza è costante lungo la linea di flusso e questa grandezza rappresenta la pressione totale, quindi la pressione totale lungo la linea di flusso è costante. Bisogna però precisare come siamo arrivati a questa conclusione, ovvero abbiamo fatto l'ipotesi di fluido:

- Incomprimibile
- Stazionario
- Ideale (solo presenza di forze di pressione ed assenza di forze viscose)

Quindi prendendo la particella e seguendola lungo la linea di flusso, la pressione rimane costante e dato che il campo di moto è stazionario, tutte le particelle che seguono la seguente linea di flusso hanno pressione totale costante.

Il valore però della pressione totale cambia al variare della linea di flusso. Quindi per la singola linea è costante, ma varia da linea a linea.

Riprendendo l'equazione scritta prima, se il campo di moto è caratterizzato da $\omega = 0$, vuol dire che il rotore di q è uguale a zero, quindi il terzo termine è nullo. Con flusso stazionario il primo termine $\left(\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}\right)$ è nullo, quindi la pressione totale è costante:

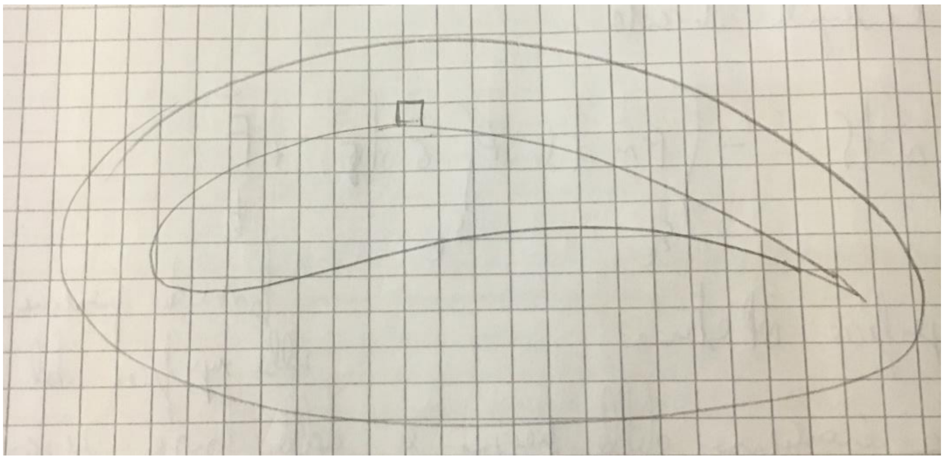
$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{P}{\rho} + \frac{\bar{q}^2}{2}\right) - \bar{q}\ x\ \omega = 0$$

Sempre considerando le assunzioni fatte sul flusso.

Questa equazione rappresenta l'equazione di Bernoulli che esprime la costanza della pressione totale lungo una linea di flusso e quando il fluido è comprimibile decade questa ipotesi.

Un'applicazione immediata, può essere il calcolo delle forze che un fluido esercita su un profilo isolato, si considera un volume di controllo e supponiamo un flusso stazionario. Questa relazione ci permette di valutare subito le forze che un fluido esercita su un profilo e queste forze sono esercitate in particolare dall'elementino di fluido sul profilo o viceversa. Le forze sono di pressione e viscose, quindi se voglio calcolare le forze agenti sul profilo bisogna fare l'integrale delle forze di pressione e viscose e trovo la risultante.

$\int_S (\rho q q) * n \, dS$, il seguente integrale è nullo perché su una superficie solida, non può esserci flusso di massa attraverso la parete stessa e quindi la velocità è tangente, a tal proposito il prodotto scalare è uguale a zero anche se si ha a che fare con flussi viscosi



$$\int_S (\rho q q) * n \, dS = -\int_S P \, n \, dS + \int_S \tau \, dS$$

La conoscenza del campo di moto sulla superficie di controllo e degli effetti viscosi mi permette di valutare la forza F, quindi note le condizioni all'infinito, nota la relazione è possibile valutare le forze sul profilo:

$$\int_{Se} (\rho q q) * n \, dS = -\int_{Se} P \, n \, dS + \int_{Se} \tau \, dS + F$$

II.3-Equazione di conservazione dell'energia

II.3.1-Forma differenziale

L'energia è la somma di: "e" l'energia interna, $\frac{q^2}{2}$ l'energia cinetica.

$$E = e + \frac{q^2}{2}$$

Il primo principio della termodinamica dice che nel momento in cui la particella evolve la variazione di energia nel tempo è dovuta alla variazione di lavoro svolta dal sistema e dal calore scambiato nell'unità di tempo, in questo modo abbiamo anche ottenuto la derivata totale o sostanziale:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dQ}{dt}$$

Andiamo ad esplicitare i suddetti termini considerando un volumetto elementare in un sistema di riferimento cartesiano e costruiamo i termini di lavoro e poi successivamente il calore. Il fluido è sempre ideale, quindi vi sono solo forze di pressione ed il lavoro è dovuto solo alle pressioni.

Andando a sostituire:

$$m\frac{dE}{dt} = (-q\nabla P - P\nabla q)dxdydz$$

La massa m è pari a $\rho dxdydz$ e andando a sostituire posso riformulare l'equazione e ricordandoci la definizione di derivata totale o sostanziale (scrittura della conservazione dell'energia seguendo la particella lungo la traiettoria):

$$\rho\left(\frac{\partial E}{\partial t} + q\nabla E\right) = -P\nabla q - q\nabla P$$

Ritornando all' equazione iniziale dell'energia, l'ultima equazione scritta può essere riformulata nel seguente modo:

$$\rho\frac{de}{dt} + \rho\frac{d\left(\frac{q^2}{2}\right)}{dt} = -P\nabla q - q\nabla P$$

Se riprendo l'equazione della conservazione della quantità di moto:

$$\rho\frac{dq}{dt} = -\nabla P$$

La moltiplico scalarmente per la velocità q:

$$q\rho\frac{dq}{dt} = -q\nabla P$$

Questo termine è anche (il che rappresenta un altro modo di scrivere la conservazione della quantità di moto):

$$\rho\frac{d\left(\frac{q^2}{2}\right)}{dt} = -q\nabla P$$

$$\rho\frac{de}{dt} + \cancel{\rho\frac{d\left(\frac{q^2}{2}\right)}{dt}} = -P\nabla q - \cancel{q\nabla P}$$

Quindi l'equazione di conservazione dell'energia diventa:

$$\rho\frac{d(e)}{dt} = -P\nabla q; (A)$$

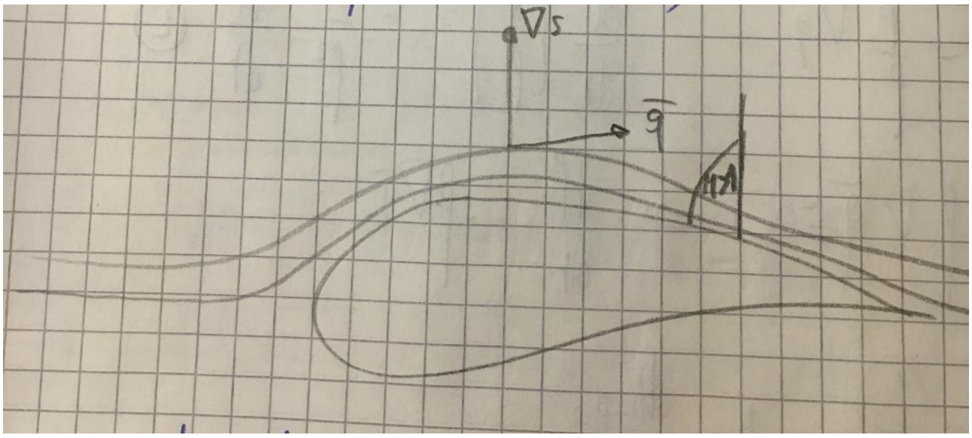
Quest'ultima equazione in forma lagrangiana mette in evidenza come la variazione di energia interna è legata al lavoro PdV che sarebbe il gradiente di P per il prodotto scalare q (io direi il gradiente di q per il prodotto scalare di P).

Richiamiamo adesso alcune equazioni della termodinamica per continuare lo sviluppo dell'equazione di conservazione dell'energia in forma differenziale.

La TdS, quindi l'entropia può essere messa in relazione con l'energia interna, dividendo per dt, vedo come varia l'entropia:

$$T\frac{dS}{dt} = \frac{de}{dt} + P\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt};\ (B)$$

La derivata rispetto al tempo di $\frac{1}{\rho}$ la posso scrivere come:



Adesso partiamo nuovamente dalla conservazione della quantità di moto:

$$\left(\frac{\partial q}{\partial t} + q\nabla q\right) = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

Il termine all'interno è un'identità vettoriale:

$$\mathrm{q}\nabla\mathrm{q} = \nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) - qx\nabla xq$$

$$\nabla xq = \omega$$

Quindi sostituendo si ricava:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) - qx\omega = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

Considerando la relazione differenziale:

$$TdS = de + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = dh - \frac{dP}{\rho}$$

- Precisazione

$$dh = de + \frac{dP}{\rho} - \frac{P}{\rho^2}\,d\rho$$

$$TdS = de + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = de + \frac{P}{\rho^2}d\rho$$

Ricavando dalla prima equazione la derivata dell'energia e sostituendola nella seconda ricavo:

$$TdS = dh - \frac{dP}{\rho}$$

- Fine precisazione

Quest'ultima è possibile scriverla anche come:

$$T\nabla S = \nabla h - \frac{dP}{\rho}$$

Il gradiente di P sulla densità è possibile legarlo al gradiente dell'entropia ed entalpia:

$$\frac{\nabla P}{\rho} = -T\nabla S + \nabla h$$

allora la pressione totale è costante. Queste grandezze non sono relative a quelle di un fluido incomprimibile, infatti dipendono dal mach, ciò comporta che sono relative a flussi comprimibili.

Un'altra considerazione sull'energia, riprendiamo l'equazione precedente:

$$\rho\frac{dE}{dt} = -P\nabla q - q\nabla P$$

Ricordando sempre la relazione scritta precedentemente:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = \frac{1}{\rho}\nabla q$$

$$\rho\frac{dE}{dt} = -q\nabla P - P\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial t} + q\nabla P$$

$$-q\nabla P = -\frac{dP}{dt} + \frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} - P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$\frac{d\left(\frac{P}{\rho}\right)}{dt} = P\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dt}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{d}{dt}\left(\frac{P}{\rho}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(E + \frac{P}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}$$

$$\frac{dh^{\circ}}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial t}$$

Ritornando alle equazioni di governo nel campo delle turbomacchine è necessaria la forma integrale e vediamo come passare dalla differenziale all'integrale:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho q\nabla E=-\nabla Pq$$

Raggruppo i due addendi ed aggiungo l'equazione di continuità, aggiungere l'equazione di continuità ha lo stesso peso di aggiungere zero alla seguente equazione, dato che quest'ultima è uguale a zero $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho q=0\right)$:

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\rho q\right)E+\rho q\nabla E=-\nabla Pq$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+E\frac{\partial\rho}{\partial t}+E\nabla\rho q+\rho q\nabla E=-\nabla Pq$$

I primi due termini li posso riscrivere:

$$E\nabla\rho q+\rho q\nabla E=\nabla\rho Eq$$

$$\rho\frac{\partial E}{\partial t}+E\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\partial\rho E}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho E}{\partial t}+\nabla\rho Eq=-\nabla Pq$$

Faccio un'integrazione rispetto ad un volume V:

$$\int_V \frac{\partial(\rho E)}{\partial t}dV+\int_V \nabla(\rho Eq)dV=-\int_V \nabla Pq dV$$

Se il volume è fisso nello spazio, allora è possibile portare fuori la derivata ed applico il teorema di Gauss passando dall'integrale di volume della divergenza all'integrale della superficie del flusso:

$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho E\,dV+\int_S \rho\,Eq*n\,dS=-\int_S Pq*n\,dS$ (equazione di conservazione dell'energia in forma integrale)

La variazione di energia nel volume di controllo è pari al flusso di energia attraverso la superficie di controllo più il lavoro delle forze di pressione. L'ipotesi di partenza era: fluido ideale, quindi non compaiono i lavori delle forze viscose, se ci fossero state avrei dovuto aggiungere le forze viscose e quindi τ, il quale determina l'attrito tra le particelle. In generale quindi si aggiunge il lavoro delle forze viscose. Un altro termine è quello relativo al flusso di calore scambiato tra sistema ed ambiente circostante.

Vediamo un'applicazione di questa legge ad una turbomacchina. Questa legge vale per qualsiasi volume.

Consideriamo una turbomacchina come rappresentata successivamente, in cui c'è un fluido che la attraversa con una velocità q. La linea tratteggiata è il volume di controllo definito dalla sezione di ingresso, contorno della macchina, sezione di uscita e contorno. I due contorni sono superfici impermeabili ed è possibile tracciare la normale n per ogni superficie. Dato che all'interno ci sono le pale rotanti, quindi rappresentiamo delle pale che danno luogo ad un lavoro perché determinano forze viscose e di pressione. Il fluido esercita una forza sulle pale e le pale sul fluido e parte del lavoro del fluido è possibile convertirlo in potenza meccanica. Ovviamente la potenza meccanica può essere fornita od ottenuta, in base se si sta parlando di turbina o compressore. Il rotore genera un Li, il quale è il lavoro nell'unità di tempo fornito al fluido.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 368

Nell'approssimazione 1-D le grandezze che compaiono nell'equazione successiva sono costanti, quindi è possibile riformulare l'equazione integrale:

$$-(\rho EqS)_1 + (\rho EqS)_2 = (PqS)_1 - (PqS)_2 + \dot{L}_i$$

I segni sono relativi alla direzione di n e velocità.

Ri-arrangiando l'equazione si ottiene:

$$-q\rho\left(E + \frac{P}{\rho}\right)S_1 + q\rho\left(E + \frac{P}{\rho}\right)S_2 = \dot{L}_i$$

$q\rho S_1 = \dot{m}$ (flusso di massa attraverso la superficie)

Considerando l'equazione iniziale dell'energia:

$$E = e + \frac{q^2}{2}$$

$$e + \frac{q^2}{2} + \frac{P}{\rho} = h + \frac{q^2}{2} = h°$$

Quindi sostituendo i termini ottenuti l'equazione diventa:

$$-\dot{m}_1 \mathring{h}_1 + \dot{m}_2 \mathring{h}_2 = \dot{L}_i$$

Ma dalla legge di conservazione della massa, la portata in entrata ed uscita è uguale

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2$$

$$\mathring{h}_2 - \mathring{h}_1 = \frac{\dot{L}_i}{\dot{m}} = L_i$$

Ma $\dot{L}_i$ che è una potenza, fratto la portata, mi dà il lavoro nell'unità di massa e questa relazione mi dice che il lavoro Li è il lavoro fornito al fluido e mi dà la variazione dell'entalpia, quindi all'uscita della macchina ottengo un incremento di entalpia:

$$\mathring{h}_2 = \mathring{h}_1 + L_i$$

Nel caso di compressore:

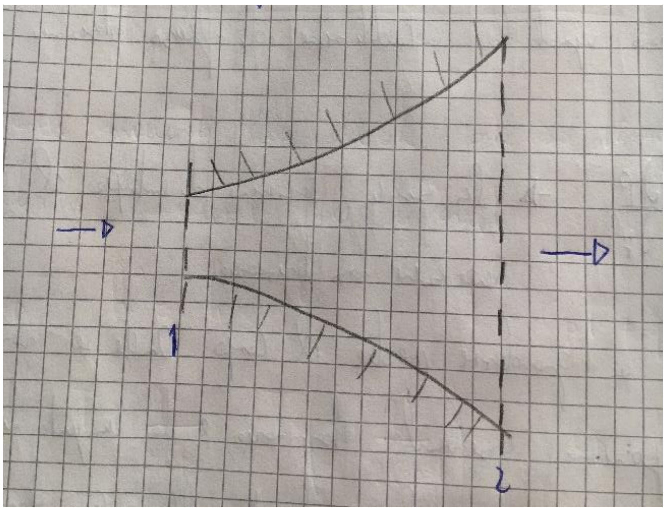
$$L_c = \mathring{h}_2 - \mathring{h}_1$$

Nel caso di turbina:

$$L_t = \mathring{h}_1 - \mathring{h}_2$$

Nello scrivere questa equazione abbiamo scritto delle relazioni stazionarie, ma l'entalpia cambia in condizioni di non stazionarietà, quindi sembrerebbe che siamo in contraddizione. In verità quando scriviamo questa relazione ci riferiamo a grandezze medie, quindi il flusso è non stazionario ma scritto con riferimento a grandezze medie e quest'ultima quindi è l'equazione di conservazione dell'energia per una turbomacchina e l'unica considerazione fatta è che il flusso sia stazionario e adiabatico, inoltre la trasformazione può essere isoentropica o meno, quindi il lavoro può essere dovuto sia alle forze di pressione che viscose.

Quindi la conservazione dell'energia vale sia per fluidi ideali che non, se il fluido è ideale allora vale per un valore isoentropico quindi non vi è attrito e senza generazione di energia e quindi di calore. Nel caso di una trasformazione reale vi sono perdite di lavoro dovute alle forze di attrito e quindi si determina la variazione di entalpia.



Dato che il lavoro è uguale a zero:

$$h_1° = h_2° = h°$$

Quindi per il primo principio della termodinamica, senza fornire calore, determina un'entalpia costante. Inoltre anche se il flusso è viscoso o non a parete il termine è uguale a zero perché i lavori delle forze viscose sono molto piccoli. In particolare il lavoro viscoso nasce dall'interazione di due particelle o meglio dal loro moto relativo, ma dato che a parete la particella è ferma allora il prodotto scalare è nullo perché la velocità è nulla. Quindi la trasformazione può essere ideale o non ma la legge di conservazione vale sempre.

Quindi ritornando alla relazione dell'entalpia, questa relazione è stata scritta facendo le seguenti approssimazioni:

- Stazionario
- Adiabatico
- 1-D
- Assenza di lavoro

Con le seguenti approssimazioni abbiamo potuto dire che:

$$h_1° = h_2° = h°$$

L'entalpia totale è possibile scriverla e scomporla per ogni sezione:

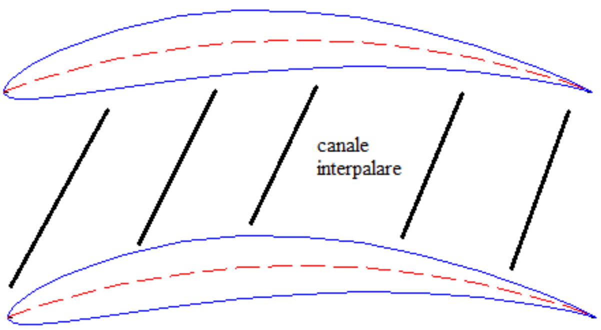
$$h_1 + \frac{q_1^2}{2} = h_2 + \frac{q_2^2}{2}$$

Questa relazione è possibile scriverla per qualsiasi volumetto perché l'entalpia si mantiene costante, inoltre l'entalpia raggiunge il valore massimo dove la velocità si annulla, infatti supponiamo di allungare all'infinito i margini 2, quindi nella sezione 3 ottengo il valore massimo di entalpia totale che si raggiunge arrestando la corrente, infatti può essere chiamata anche entalpia di arresto ed è costante a patto che abbiamo a che fare con fluido in cui non viene fornito lavoro e non ci sono scambi termici.

Quindi l'equazione che ottengo vale per fluidi incomprimibili:

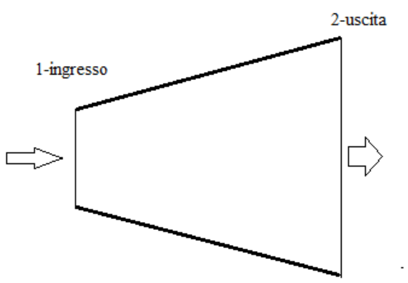
$$P^{\circ} = P\left(1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}$$

Sempre nell'approssimazione unidimensionale, consideriamo un condotto convergente o divergente. È importante considerare un condotto perché riprendendo il profilo in schiera rappresentato, il campo di moto è dettato da una serie di profili che vengono investiti da una corrente. È utile guardare non tanto al singolo profilo, bensì al canale interpalare individuato da due profili adiacenti:

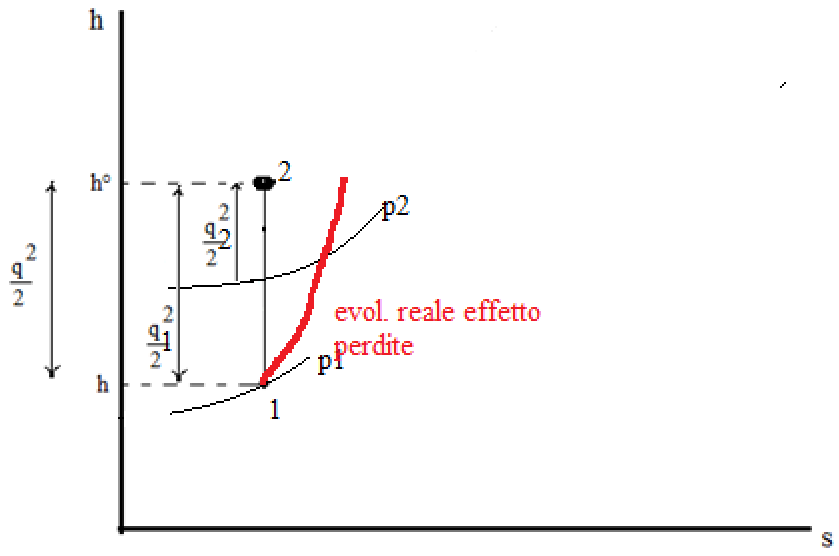


Nel caso del compressore, il canale interpalare assume forma di un diffusore, cioè condotto DIVERGENTE. Il motivo per il quale si studia il canale interpalare come condotto convergente-divergente a seconda di compressore o turbina, è che è possibile capire meglio i fenomeni che avvengono.

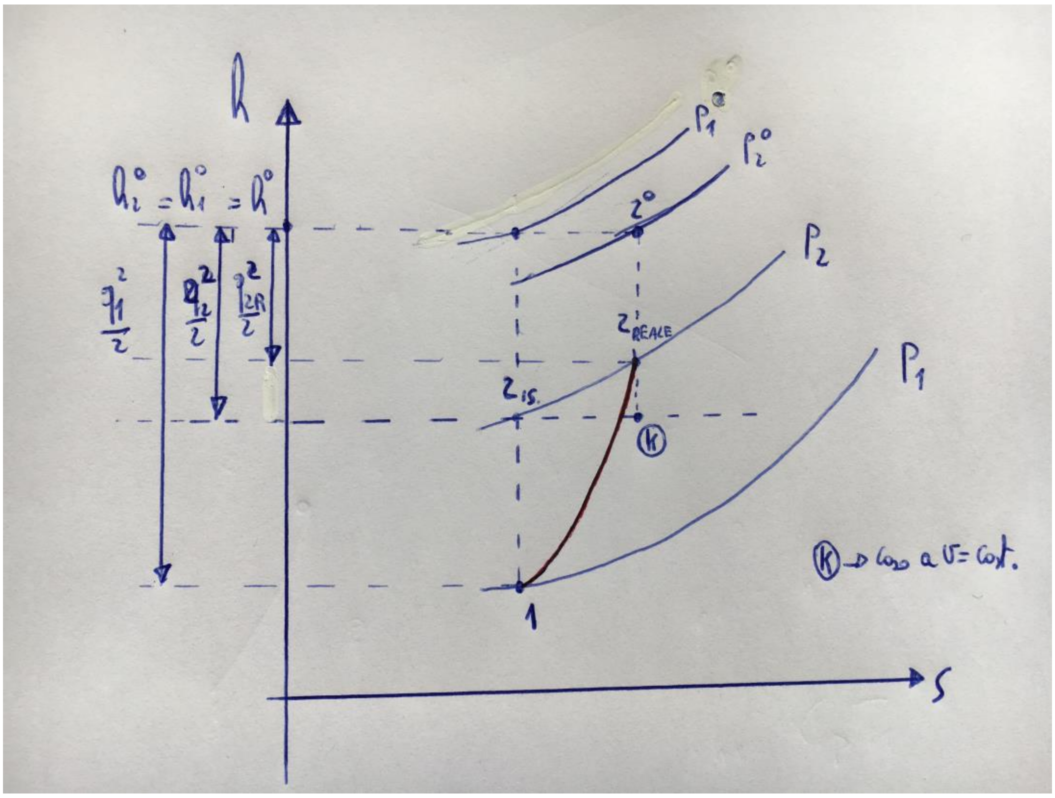
Il DIVERGENTE è rappresentativo di un canale interpalare del COMPRESSORE:



Indichiamo con 1 la sezione di ingresso, con 2 la sezione di uscita e proviamo a seguire la trasformazione sul piano h-s:



Se facessimo ora un confronto tra una trasformazione isentropica e reale a parità di pressione di uscita p2, il punto 2° non isentropico si sposta a destra perché dipende dalla quantità di entropia che viene introdotta dalla trasformazione.



Si nota che a parità di pressione di uscita p2, rispetto al caso isentropico, la velocità di uscita diminuisce rispetto e la pressione totale in 2 è più bassa rispetto a quella in 1 (le isobare sono spostate).

Se avessimo ragionato in modo diverso, ovvero, date le condizioni di ingresso, vediamo cosa succede a parità di velocità di uscita rispetto alle condizioni isentropiche, significa che se le perdite fossero esattamente le stesse, il punto d'uscita sarebbe coincidente con una pressione più bassa rispetto al caso isentropico, in uscita. Quindi se guardo quello che succede in un condotto e faccio un confronto a parità di pressioni in uscita, la velocità non isentropica sarà statico, sottraendo la quantità $\frac{q_2^2}{2}$ che è diversa da quella nel caso isentropico. La trasformazione è la linea da 1 a 2.

Se considero un convergente che scarica in ambiente con pressione p2, allora la velocità di uscita è minore di quella che otterrei se la trasformazione fosse isentropica, per effetto delle perdite o viceversa, a parità di velocità d'uscita, allo scarico otterrei una pressione più bassa.

Queste sono le due trasformazioni alle quali si fa riferimento quando si considerano le trasformazioni in una turbomacchina.

Tutto questo è relativo all'approssimazione unidimensionale della macchina e nell'ipotesi adiabatica e senza fornitura di lavoro. In realtà quello che succede in una turbomacchina è tridimensionale (dir. Radiale, assiale, tangenziale) o al limite bidimensionale se si trascura la componente radiale, in ogni caso si tratta di un problema governato dalle equazioni differenziali scritte all'inizio, la cui soluzione porta alla risoluzione del campo di moto, ma la soluzione di quelle equazioni lo sappiamo risolvere analiticamente soltanto per casi molto particolari.

III.1-FLUSSI BIDIMENSIONALI INCOMPRIMIBILI E STAZIONARI: PROBLEMA 2D

Cerchiamo di ottenere una soluzione a quelle equazioni che riguardano i flussi incomprimibili e stazionari, in forma analitica, in approssimazione bidimensionale. Questo ci può dare una prima idea di come è fatto il campo di moto attraverso una schiera di palette.

La condizione particolare che andiamo ad esaminare è la seguente:

- Dall'equazione di conservazione della QDM in forma vettoriale, facendo intervenire l'equazione dell'energia, chiamandola in definitiva equazione di Crocco, in cui:

$$\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} + \nabla h^{\circ} - \overline{q} \times \overline{\omega} = -\frac{\nabla p}{\rho} + T\nabla S$$

➢ Precisazione:

$$TdS = dh - \frac{dp}{\rho} \ \rightarrow T\nabla S = \nabla h - \frac{\nabla p}{\rho}$$

Questa relazione vale sempre e mi lega la variazione di velocità al gradiente di entropia, entalpia totale e a omega.

➢ Fine precisazione.

Semplificazione:

- Per un flusso stazionario $\frac{dq}{dt} = 0$
- Per un flusso in cui h°=cost dappertutto, ∇h°=0
- Per un flusso isentropico, S=cost e $\nabla S = 0$

L'equazione del moto si riduce semplicemente a:

$$-\overline{q} \times \overline{\omega} = 0$$

Se anche q=0 ovunque allora ω=0. La definizione di vorticità ω è:

$\overline{\omega} = \nabla \times \overline{q}$ e se $\overline{\omega} = 0\ allora\ il\ flusso$ è $irrotazionale$: $\nabla \times \overline{q} = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \overline{q}) = 0$$

Problema stazionario, bidimensionale, quindi:

$\nabla(\rho\overline{q}) = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) = 0 \quad EQUZIONE\ DI\ CONTINUITA'$

Definisco un vettore $\overline{b} = -\rho v\overline{i} + \rho u\overline{j}$ (così definito perché so dove voglio arrivare) se ne faccio il rotore, sarà:

$$\nabla \wedge \overline{b} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\rho v & \rho u & 0 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y}\right) k = 0$$

Che è esattamente l'equazione di continuità scritta prima. In questo modo il rotb=0. Se definiamo una funzione del punto Ψ=Ψ (x, y) e ne faccio il gradiente, il rotore del gradiente di una funzione è identicamente nullo come prima. Questo significa che posso scrivere b=$\nabla\psi$. Inoltre dice anche che:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\rho v \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \rho u$$

Chiamiamo allora:

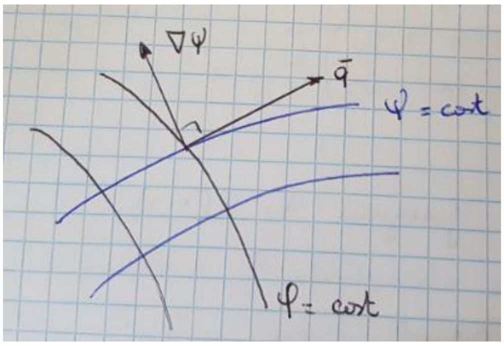
- φ FUNZIONE POTENZIALE
- Ψ FUNZIONE DI CORRENTE

Significato delle due grandezze: se considero il prodotto scalare tra i due gradienti, se prendo una linea lungo la quale la Ψ è costante, allora il gradiente di φ sarà diretto ortogonalmente alla linea. Sviluppando i due gradienti, si ha:

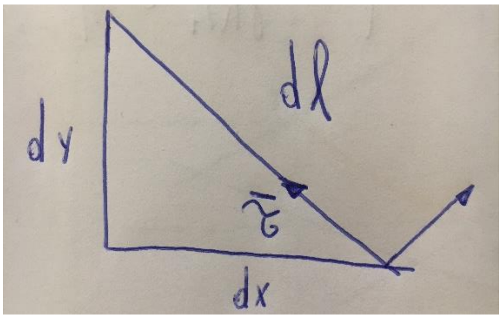
$$\nabla\phi * \nabla\psi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j\right)\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} i + \frac{\partial \psi}{\partial y} j\right) = -u\rho v + v\rho u = 0$$

$$\nabla\phi \perp \nabla\psi$$

Il prodotto scalare uguale a 0 significa che i due gradienti sono ortogonali tra loro e le linee a φ=cost sono ortogonali alle linee a Ψ=cost:



Se adesso scrivo $\overline{q}\nabla\psi = 0 \ \rightarrow \ \overline{q} \perp \nabla\psi \ \rightarrow \ \overline{q}\ tangente\ a\ \psi$ = cost. Il vettore q è in ogni punto delle linee a ψ = cost tangente alle linee stesse. Questo è il significato di linee di flusso. Se consideriamo il profilo investito da una corrente uniforme e tracciando le linee di flusso esse saranno così fatte:



Il segno delle grandezze dipende dal verso della normale.

$$\tau = \tau_x i + \tau_y j = \frac{dx}{dl} i + \frac{dy}{dl} j$$

$$\tau_x\, n_x + \tau_y\, n_y = 0$$

$$\frac{\tau_y}{\tau_x} = -\frac{n_x}{n_y} \rightarrow n_x = \tau_y = \frac{dx}{dl}$$

$$n_y = -\tau_x = -\frac{dx}{dl}$$

Riprendendo la relazione precedente, si ha:

$$\rho u\, dy - \rho v\, dx \;= \left[(\rho u)\bar{i} + (\rho v)\bar{j}\right] \;\cdot\; \frac{\left(dy\, \bar{i} - dx\, \bar{j}\right)}{dl} dl = \rho \bar{q} \cdot \bar{n}\, dl$$

Quindi l'integrale tra A e B diventa:

$$\int_A^B d\Psi = \; \rho\bar{q} \cdot \bar{n}\, dl$$

Quest'ultimo rappresenta il flusso di massa attraverso l'elementino dl, ovvero il flusso di massa tra A e B che coincide con la portata $\dot{m}$ tra A e B e la portata è pari a $\psi_B - \psi_A$. quindi la ψ mi dice che prese due linee a $\psi = cost$ la portata che attraversa queste due linee è pari alla differenza tra i valori di ψ in B e A.

È un tubo di flusso, ciò significa che la velocità è tangente al tubo stesso ovvero alle pareti. La portata che attraversa il condotto è q per l'area di passaggio. Se cambio area di passaggio, considero sempre la componente normale di velocità alla sezione di passaggio. Questo significa anche che se considero una linea chiusa cioè A=B l'integrale sarà uguale a 0:

$$Q = \oint d\psi$$

Con il teorema di Gauss si passa da un integrale di linea (in questo caso) ad un integrale di superficie ottenendo:

$$\oint d\psi = \int_S \nabla\rho q \cdot \bar{n}\, dS \;= 0 \;\;\rightarrow\;\; \nabla\rho q = 0 \quad eq. di\ continuità$$

Rappresenta il flusso di massa complessivo attraverso la superficie di controllo. $\nabla\rho q$ è nulla fintanto che la divergenza è non singolare all'interno del campo. Se ci sono delle singolarità rappresentate dai termini sorgente che abbiamo introdotto nella scrittura dell'equazione di continuità in forma generale, allora la divergenza non sarà più uguale a zero e solo con il termine sorgente (singolarità) la portata sarà diversa da zero.

IV-Valutazione di ϕ e ψ per la determinazione del campo di moto

$$\nabla\phi = q \rightarrow \phi, \frac{\partial\phi}{\partial x} = u; \frac{\partial\phi}{\partial y} = v$$

Avevamo introdotto anche la funzione di corrente legata alle componenti di velocità dalla seguente relazione:

$$\nabla \times q = 0 \rightarrow \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\rho v; \frac{\partial\psi}{\partial y} = \rho u$$

Adesso procediamo alla valutazione delle due funzioni ed iniziamo dall'equazione della quantità di moto:

$$\nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) - q \times \omega = -\frac{\nabla P}{\rho}$$

È riferita ad un flusso stazionario ed irrotazionale, quindi la quantità di moto si riduce e moltiplico l'espressione scalarmente per q:

$$q * \nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) = -q\frac{\nabla P}{\rho}$$

Consideriamo la definizione della velocità del suono, dato che il problema è isoentropico la P è solo funzione della densità:

$$\frac{dP}{d\rho} = a^2 \rightarrow dP = a^2 d\rho$$

$$\nabla P = a^2 \nabla\rho$$

L'equazione di continuità per flusso stazionario ed irrotazionale diventa:

$$q\nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) = -\frac{a^2 q}{\rho}\nabla\rho$$

Poi dall'equazione di continuità e flusso stazionario:

$$\nabla(\rho q) = 0$$

$$q\nabla\rho + \rho\nabla q = 0$$

Quindi, portando il secondo termine a secondo membro:

$$q\nabla\rho = -\rho\nabla q$$

Allora l'equazione della quantità di moto dalle sostituzioni diventa:

$$q\nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) = a^2\nabla q$$

La quale può ancora essere scritta come:

$$\nabla q - \frac{q}{a^2} * \nabla\left(\frac{q^2}{2}\right) = 0$$

Anche la ψ soddisfa la stessa equazione e partiamo dal rotore di q:

$$\nabla \times q = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \ (A)$$

Nel caso di fluido incomprimibile la densità e costante:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v; \ \frac{\partial \psi}{\partial y} = u$$

Se sostituisco le definizioni in (A), ottengo:

$$\nabla x q = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \ (D)$$

Anche la ψ soddisfa un equazione del secondo ordine e lineare, inoltre questa equazione va sotto il nome di equazione di Laplace.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Nell'equazione (B), non è possibile applicare la sovrapposizione degli effetti perché (B) è quasi lineare.

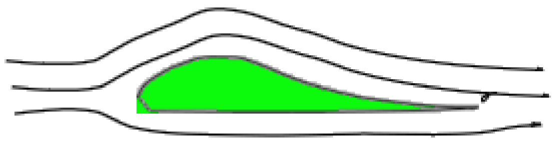
Le ultime due equazioni, (C) e (D), possono essere ottenute anche dall'equazione (B), considerando un fluido incomprimibile, quindi la velocità del suono tende all'infinito, quindi alcuni termini andranno a zero, questo modo di ragionare vale anche quando i termini velocità tendono a valori molto piccoli, ovvero quando M<0.3. Quando il M<0.3, anche se il fluido è comprimibile può essere descritto da equazioni di fluido incomprimibile, perché i termini appena citati saranno molto piccoli.

Vi è anche un altro tipo di approssimazione ed è quella che si ottiene nel campo delle piccole perturbazioni. Introducendo piccole perturbazioni, dove c'è una direzione prevalente del flusso, la velocità ha la componente in direzione x molto più grande della componente in direzione y, quindi la struttura diventa di questo tipo:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

Nel campo delle piccole perturbazione l'equazione può essere riscritta nella forma sopra esplicitata. Anche qui vi è un'equazione del secondo ordine lineare, perché il M è quello di monte ed è costante e non dipende dal campo di moto della regione considerata. La presenza di questo termine modifica completamente il comportamento dell'equazione a seconda del valore di mach, per M<1 il campo è subsonico e per M>1 il campo è supersonico.

Quindi ripetendo, se consideriamo un profilo estremamente sottile, la velocità è essenzialmente diretta secondo l'asse x, sul profilo la velocità ha un valore u e v molto piccolo rispetto al campo indisturbato, quindi trascurando i termini dove compaiono questi termini l'equazione si modifica e diventa della struttura: $(1 - M_\infty^2)\frac{\partial \phi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$



Le condizioni al contorno sono:

$$\psi = cos.; q_\infty = assegnata$$

La velocità all'infinito è legata alle derivate:

$$\infty \begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{cases}$$

Risolvere il problema del calcolo della funzione di corrente, vuol dire risolvere quelle equazioni soggette a queste condizioni al contorno, i valori delle condizioni al contorno dipendono dalla geometria del problema, quindi sul contorno la funzione deve essere assegnata ed imporre queste condizioni vuol dire imporre condizioni della funzione all'ingresso e all'uscita.

Lo stesso vale se consideriamo l'equazione del potenziale, nel caso in cui consideriamo l'altra equazione si sa che:

$$q = \nabla\phi \rightarrow q * n = 0 \rightarrow \nabla\phi * n = 0$$

La velocità è definita come il gradiente di ϕ, il gradiente di ϕ e q sono paralleli. La velocità q è sempre tangenziale alla parete, quindi q scalare n è uguale a zero, ma q è gradiente di ϕ, quindi $\nabla\phi * n$ è uguale a zero. Quest'ultima rappresenta le condizioni al contorno, cioè la derivata di ϕ in direzione normale è zero. Vale lo stesso per l'infinito dove vi è sempre questa condizione.

Quindi il problema è risolto e la soluzione è definita ed unica quando il problema differenziale è completato con le condizioni al contorno le quali vengono imposte, imponendo le due funzioni oppure le derivate delle funzioni.

Una volta assegnate le condizioni al contorno si risolvono le equazioni.

C'è un modo veloce ed elegante per risolvere questo problema ed è introducendo il potenziale complesso.

IV.2-potenziale complesso

Il potenziale complesso è una funzione di variabile complessa.

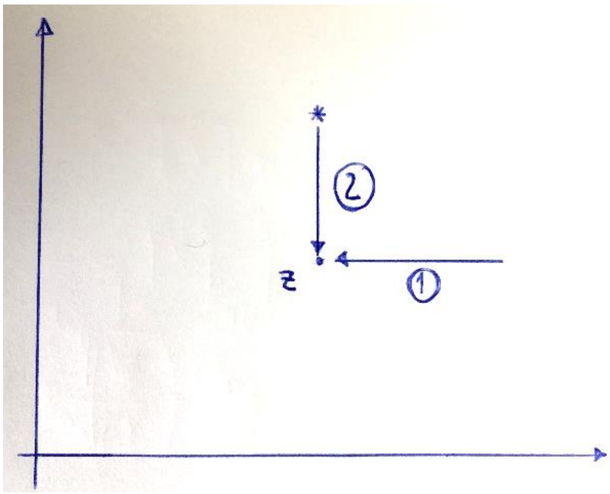
Ora senza addentrarci nella teoria delle funzioni a variabile complessa si richiamano soltanto delle funzioni di variabile complessa. Se indichiamo con z un generico numero complesso scritto come:

$$z = x + iy$$

Possiamo subito darne un'interpretazione geometrica definendo un piano complesso bidimensionale in cui viene stabilito un sistema di riferimento x-y ed il paino complesso può essere visto come quel piano dove viene stabilita una corrispondenza tra un punto del piano di coordinate x-y ed un numero complesso z. Quindi ad ogni punto del piano complesso corrisponde un numero complesso z.

Il modulo del numero complesso è:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Se prendo dz e mi avvicino secondo dy=0 e dx pari ad una distanza, mi avvicino a z secondo un dx diverso da zero, oppure può accadere il contrario. Se faccio la derivata con il limite

$$\frac{dW}{dz} = \lim \frac{W(x + \Delta x, y + \Delta y) - W(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Quanto appena scritto significa anche scrivere:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) + ig(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) - ig(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Per dz che tende a zero vuol dire che sia dx che dy tendono a zero. Se tende a zero lungo x, allora il limite diventa (linea 1 del disegno in alto):

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(x + \Delta x, y) + ig(x + \Delta x, y) - f(x, y) - ig(x, y)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = 0}} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} + \frac{ig(x + \Delta x, y) - ig(x, y)}{\Delta x}$$

Questo è il limite del rapporto incrementale della funzione f e g, quindi la dW in dz è uguale a:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial g}{\partial x} \qquad (K)$$

Quindi la derivata della W dipende dalla derivata di f lungo x e derivata di g lungo x.

Facendo lo stesso ragionamento avvicinandoci lungo y con delta x uguale a 0 (linea 2 del disegno in alto):

$$\lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\mathrm{i}\Delta y} + \frac{ig(x, y + \Delta y) - ig(x, y)}{\mathrm{i}\Delta y}$$

Questo è uguale:

$$\frac{dW}{dz} = -i\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial y} - i\frac{\partial f}{\partial y} \qquad (Y)$$

Quindi la derivata di W dipende dalla f lungo y e g lungo y.

Ora se guardo il seguente rapporto $\left(\frac{dW}{dz}\right)$, questo rappresenta il rapporto tra due numeri complessi, il quale è ancora un numero complesso che ha per modulo il rapporto dei moduli e dalla rappresentazione esponenziale si avrà:

$$\frac{dW_1}{dz_1} = \left|\frac{dW_1}{dz_1}\right| e^{i(\phi_1 - \theta_1)}$$

Dove θ_1 è l'anomalia del primo piano e $\phi_1$quella del secondo piano, quindi la rotazione è legata dalla differenza delle anomalie. Lo stesso vale per le seconde curve (f_2 e Γ_2):

$$\frac{dW_2}{dz_2} = \left|\frac{dW_2}{dz_2}\right| e^{i(\phi_2 - \theta_2)}$$

Se la W è la funzione analitica allora la W in dz esiste ed è unica, quindi il seguente rapporto per il punto considerato è uguale perché la derivata è unica e quindi anche l'anomalia è unica:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW_1}{dz_1} = \frac{dW_2}{dz_2} \rightarrow \phi_1 - \theta_1 = \phi_2 - \theta_2$$

Nel momento in cui applico una trasformazione definita dalla legge che è una funzione analitica, le figure vengono trasformate con un rapporto di compressione e di espansione che dipende dalla derivata nel punto e tutti i punti che partono da quel punto si trasformano con la stessa legge di compressione ed espansione, inoltre tutti i punti e segmenti vengono ruotati dello stesso angolo. Se i segmenti vengono ruotati dello stesso angolo, la differenza tra i due angoli è uguale, allora la trasformazione realizzata per questa funzione analitica si dice conforme perché conserva gli angoli.

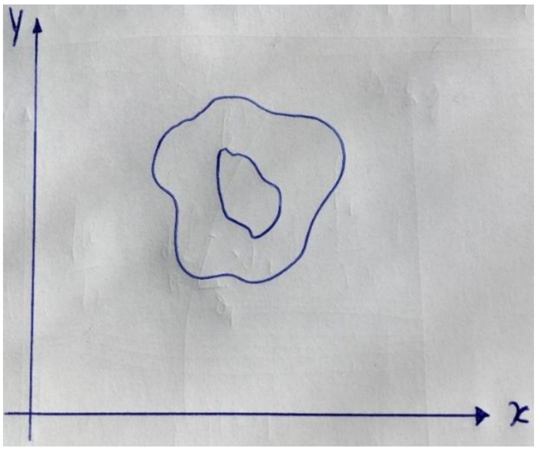
In sostanza se ho sul piano x-y un elemento come quello in figura e applico la legge di trasformazione, la seguente figura si trasformerà su un altro piano in un'altra figura e gli elementi avranno lo stesso rapporto di dilatazione.

IV.4.2-2° Proprietà

L'altra proprietà è che se l'integrale della funzione analitica è su una linea chiusa e sul dominio in cui è definita la funzione W(z), prendendo una qualsiasi linea, qualsiasi sia la forma della linea l'integrale è uguale a zero. Si precisa che è uguale a zero a patto che la W sia definita in ogni punto del dominio e sia analitica in ogni punto del dominio.

$$\oint W(z)dz = 0$$

Quindi qualunque sia la curva l'integrale è nullo.



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 368

A-breve riassunto (22/03/2018)

Abbiamo cominciato a guardare le funzioni di variabile complessa nel piano complesso Z, variabile complessa z e abbiamo detto che:

- La funzione è analitica se esiste ed è unica la derivata della funzione W:

$$W = W(z) = f + ig$$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{i\partial g}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{i\partial f}{\partial y}$$

La condizione necessaria e sufficiente affinché la derivata esista e sia unica sono le seguenti:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$$

Condizione per l'analiticità della funzione. Queste condizioni portano anche a scrivere che:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$$

L'altra condizione che soddisfa la funzione analitica è:

$$\oint W(z)dz = 0$$

L'integrale della funzione W lungo qualsiasi linea chiusa appartenente al dominio su cui è definita la funzione, l'integrale è uguale a 0 a patto che la funzione sia definita in ogni punto del dominio. Laddove la W(z) non è definita, non è analitica e l'integrale può essere diverso da 0.

V-Campi di moto elementari

Ora ritorniamo al nostro problema del campo di moto in 2D di un fluido incomprimibile relativo a condizioni stazionarie e irrotazionali. Abbiamo visto che l'equazione di governo consiste nella già introdotta funzione potenziale φ e la funzione potenziale è legata al vettore velocità, quindi:

$$\nabla\phi = \overline{q} \qquad \frac{\partial\phi}{dx} = u \quad \frac{\partial\phi}{dy} = v$$

Abbiamo anche introdotto la funzione di corrente Ψ che è legata anch'essa alla velocità, infatti:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u$$

Ed inoltre la Ψ e la φ soddisfano l'equazione di Laplace che dice che:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$$

La definizione del campo di moto si riduce alla scrittura del campo di moto in termini della funzione φ e Ψ. Allora se confrontiamo queste equazioni con le condizioni di analiticità della funzione complessa, questo ci permette di introdurre una funzione di variabile complessa che prende il nome di Potenziale Complesso. Se definiamo il piano Z come piano fisico sul quale studiare il campo di moto, possiamo introdurre una funzione W(z) in cui la parte reale possiamo prenderla uguale alla φ mentre la parte immaginaria uguale alla Ψ:

$$W(z) = \phi + i\psi \qquad POTENZIALE\ COMPLESSO$$

Il campo di moto attorno a questa geometria, sul piano fisico Z, è determinato una volta che se ne conosce il potenziale complesso W(z). Il problema della risoluzione del campo di moto si riconduce alla ricerca del potenziale complesso sul piano Z, e questa funzione di variabile complessa avrà una parte reale e una parte immaginaria e affinché rappresenti il potenziale di un campo di moto su questa geometria, è necessario che le pareti solide siano linee di corrente, il che vale a dire che la parte immaginaria della funzione, deve essere una costante lungo le pareti solide della geometria: Ψ=cost. Il problema si riconduce a cercare una funzione di variabile complessa la cui parte immaginaria sia cotante sul profilo. Inoltre l'altra condizione al contorno che abbiamo imposto è che la velocità all'infinito a monte sia pari a quella assegnata, cioè:

$$\lim_{z\to\infty} \frac{dW}{dz} = q_\infty$$

Cioè che la velocità complessa rappresenti proprio la q_∞ all'infinito a monte. Risolvere il campo di moto su una geometria qualsiasi bidimensionale significa ricercare una funzione di variabile complessa, che soddisfi le due condizioni:

- Parte immaginaria costante a parete
- Velocità pari a quella all'infinito a monte

Trovata questa funzione potenziale per ogni punto del piano conosciamo la parte reale e la parte immaginaria, ovvero conosciamo le derivate della W(z) rispetto a z e quindi come abbiamo detto, ricaviamo il campo di pressione.

- Precisazione

Il campo di moto attorno al generico corpo è definito da una distribuzione di velocità e di pressione nel dominio. Le linee di flusso sono tali da avere la velocità tangente al profilo, questo significa che il profilo stesso è linea di corrente e quindi significa che sul profilo, la funzione di corrente è una costante: Ψ=cost. Quindi per risolvere il campo di moto occorre conoscere in ogni punto la funzione Ψ, che deve soddisfare sia le equazioni differenziali, ma anche le condizioni al contorno: geometria del profilo e l'infinito. La Ψ deve soddisfare proprio queste due condizioni, imponendo delle condizioni alle derivate.

- Fine precisazione.

Questo problema si traduce anche nella ricerca della funzione W(z) analitica in cui la parte reale φ la guardo come potenziale della velocità e la parte immaginaria come funzione di corrente. Se la funzione è definita da queste due grandezze vuol dire che la funzione è analitica, perché φ e Ψ soddisfano le condizioni di analiticità, il che significa che definita la funzione potenziale W(z) posso conoscere la velocità complessa. Quindi dobbiamo ricercare la funzione W tale che la sua parte immaginaria sia costante sul profilo. Inoltre l'altra condizione al contorno è che il limite per z che tende all'infinito di dW/dz deve essere pari alla velocità assegnata all'infinito.

Il problema si semplifica perché l'attenzione viene portata sulla ricerca di un'unica funzione di variabile complessa. Abbiamo detto che il problema è definito da funzioni lineari e vale il principio di sovrapposizione degli effetti, quindi se abbiamo il potenziale complesso o la funzione di corrente per un campo di moto Ψ1 e Ψ2 la somma vale:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2$$

Funzione di corrente combinazione delle singole funzioni di corrente. Cosi anche per il φ. Quindi posso pensare di ottenere il campo di moto sovrapponendo campi di moto elementari, combinati tra di loro che mi danno il nuovo campo di moto. Posso definire quindi:

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 368

V.2-Sorgente o pozzo

Consideriamo il campo di moto così definito:

$$W = \frac{Q}{2\pi} lnz$$

Q è un numero reale che può essere <0 o > 0.

- Q>0 potenziale complesso relativo ad una sorgente
- Q<0 potenziale complesso relativo a un pozzo

Vediamo il campo di moto corrispondente.

Questa funzione è analitica, ed è definita in ogni punto del dominio nel piano Z, tranne nell'origine, dove quella funzione diventa singolare ($\log 0$ va a infinito).

La velocità complessa si calcola come:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z}$$

Anche in questo caso la derivata è unica ma non è definita in z=0.

Possiamo scrivere W anche come:

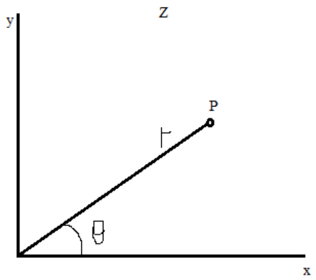
$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(re^{i\theta})$$

Ovvero scrivendo z in coordinate polari:

$$z = re^{i\theta}$$

Con:

- r raggio
- θ anomalia



Sviluppiamo il logaritmo poiché ha come argomento un prodotto:

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(re^{i\theta}\right) = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{Q}{2\pi} i\theta$$

Quindi abbiamo:

- parte reale $\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln r$
- parte immaginaria $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta$

- Precisazione

La $\frac{dW}{dz}$ è la velocità complessa, con parte reale u e parte immaginaria v. Se io moltiplico questa per $e^{i\theta}$, ottengo la velocità nel sistema polare, con le componenti radiali e tangenziali. È sempre la stessa velocità ma espressa in coordinate polari. Questo vuol dire che per ottenere le componenti della velocità in coordinate polari, basta moltiplicare la velocità complessa per $e^{i\theta}$. Nel caso di pozzo o sorgente, la Ct è nulla mentre la componente radiale è diversa da zero, e dal segno di Q, capiamo se la velocità ha verso entrante o uscente.

- Fine precisazione

Se faccio l'integrale di dW/dz lungo una qualsiasi linea chiusa, si ha:

$$\oint \frac{dW}{dz}\, dz = \oint \frac{Q}{2\pi r} e^{-i\theta}\, r\, i\, e^{i\theta}\, d\theta = \Gamma + iQ = i\frac{Q}{2\pi}\, 2\pi = iQ$$

Con:

$dz = d\left(re^{i\theta}\right) = r\, i\, e^{i\theta}\, d\theta$ ad r = cost

Il significato di Q era che rappresenta la portata lungo una linea chiusa all'interno del dominio, quindi l'integrale della velocità complessa è solo immaginaria, e rappresenta la portata in massa che attraversa la linea chiusa nel dominio.

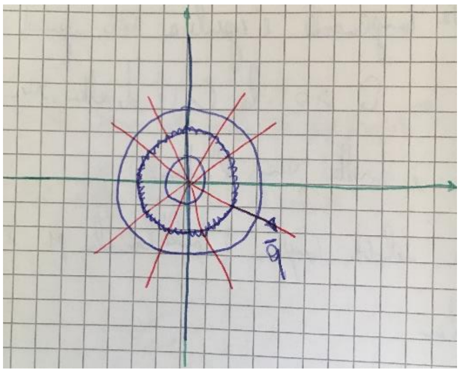
Allora siccome Q porta confusione, quando calcolo l'integrale di dW/dz dz su una linea chiusa, questo è pari a dW integrato lungo una linea chiusa, cioè:

$$\oint \frac{dW}{dz} dz = \oint dW = \oint d\phi + i \oint d\psi = \Gamma + iQ$$

Il differenziale di φ rappresenta la circuitazione Γ, il differenziale di Ψ rappresenta la portata che attraversa la linea chiusa, Q. Quindi l'integrale della velocità complessa lungo una qualsiasi linea chiusa, del dominio Z, è un numero complesso che ha parte reale e parte immaginaria: parte reale circuitazione, parte immaginaria portata.

Stiamo guardando un potenziale dovuto a questa singolarità (pozzo o sorgente). Quel potenziale complesso è stato chiamato (ad esempio):

$W(z) = \frac{P}{2\pi} lnz$, qual è il significato di P? Il significato di P è che la velocità complessa:



Q ha il significato di portata attraverso qualsiasi linea chiusa che contiene la singolarità, quindi la P che è l'intensità del pozzo ha significato di portata. D'altra parte sappiamo che considerando la linea evidenziata, quale è il flusso di massa che attraversa la linea chiusa? Il flusso di massa attraverso la linea chiusa è:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 368

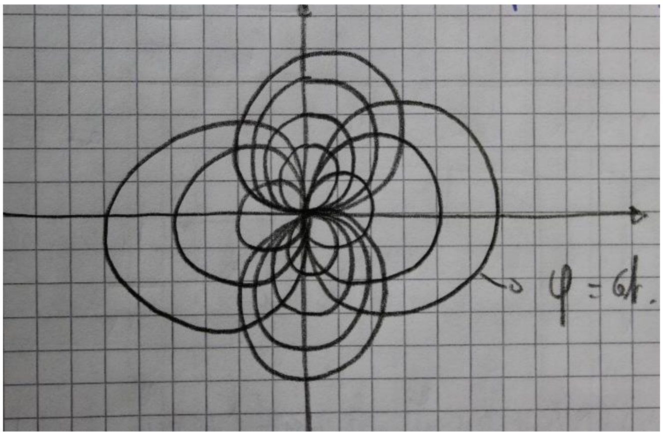
La parte immaginaria è:

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} r \frac{\sin\phi}{r^2}$$

Riguardo la $\phi\ e\ \psi$ introducendo le coordinate xy ottengo:

$$\psi = -\frac{M\,y}{2\pi(x^2+y^2)}\ (A);\ \phi = -\frac{M\,x}{2\pi(x^2+y^2)}\ (B)$$

La parte reale ed immaginaria di questa variabile complessa sono la funzione potenziale e la funzione di corrente. Allora si possono tracciare e vedere come sono fatte le linee a $\phi = cost\ e\ \psi = cost$.



Guardando le linee dalla relazione (B) ottengo le linee della funzione potenziale costante

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2\pi}\frac{x}{\phi}\ (B)$$

Al variare di ϕ ottengo varie curve ed ottengo l'equazione di un cerchio passante per l'origine e centro pari ad:

$$x_0 = \frac{M}{2\pi\phi}$$

Quindi al variare della funzione si avranno diversi cerchi passanti per l'origine e dalla figura è possibile vedere le linee a $\phi = cost$.

Allo stesso modo le curve a $\psi = cost$. sono delle curve del tipo (ottenuta dall'equazione (A)):

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2\pi\psi} y = 0$$

Questa equazione rappresenta dei cerchi passanti per l'origine e centro nell'asse y ed al variare della funzione fino ad arrivare a 0, dove il cerchio degenera nell'asse x, ovvero diventa una linea che coincide con l'asse x.

La velocità complessa è definita dalla derivata di W su dz:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{M}{2\pi z^2}$$

Per ogni punto nel piano si ha la velocità complessa definita dall'equazione riportata sopra e la velocità in ogni punto per fissato valore di ψ è diretta tangente alla linea di corrente, in particolare

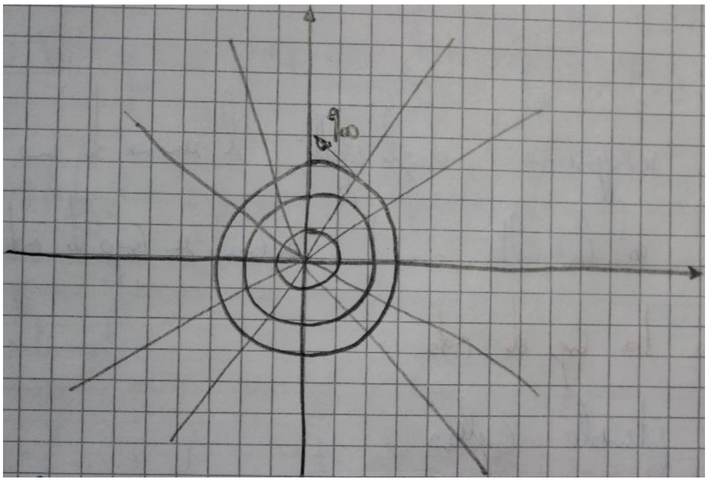
V.4-Vortice

Un altro potenziale è quello relativo al vortice posto nell'origine ed è costituito da parte reale ed immaginaria:

$$W = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(re^{i\theta}\right) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + \theta\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Le curve sul paino z a $\phi = cost.$ sono delle linee a $\theta = cost.$, quindi saranno uscenti, mentre le curve a $\psi = cost.$ sono delle curve a raggio costante

$$\phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta; \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$



La velocità complessa la moltiplichiamo per e elevato ad i θ per ottenere le componenti radiali e tangenziali della velocità

$$\frac{dW}{dz}e^{i\theta} = c_r - ic_\theta = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{z} = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{e^{i\theta}}{re^{i\theta}} = -i\frac{\Gamma}{2\pi r}$$

La componente radiale sarà nulla, mentre la componente tangenziale è:

$$c_r = 0; c_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Abbiamo un campo di moto dove la componente radiale è sempre nulla ed abbiamo una componente tangenziale positiva e diretta sempre tangente alla curva a raggio costante, inoltre ha un verso che dipende dal segno di Γ. Per Γ positivi le c_θ sono positive e nel sistema di riferimento dando segno positivo e verso antiorario le c sono positive nel sistema di riferimento.

Per Γ negativi le velocità hanno segno positivo opposto.

Adesso se valutiamo l'integrale della velocità complessa lungo la linea che racchiude l'origine:

$$\oint\frac{dW}{dz}dz = -i\oint\frac{\Gamma}{2\pi z}dr = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\oint\frac{e^{i\theta}}{r}ire^{i\theta}d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi}2\pi = \Gamma$$

Dove 1/z è pari ad 1/r, mentre dz si sostituisce da quello precedente, inoltre l'integrale va da 0 a 2π.

Ricordandoci del seguente integrale, quest'ultimo era uguale a:

$$\int\frac{dW}{dz}dz = \Gamma + iQ$$

$$W(z) = -\frac{M}{2\pi}\frac{e^{i\alpha}}{z}$$

La parte reale ed immaginaria saranno:

$$W = q_\infty z + \frac{q_\infty}{z};\ -\frac{M}{2\pi} = q_\infty; M = -q_\infty 2\pi$$

$$W = q_\infty re^{i\theta} + \frac{q_\infty}{r}e^{-i\theta} = q_\infty r\,(\cos\theta + i\sin\theta) + q_\infty\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) =$$

$$= q_\infty \cos\theta\left(r + \frac{1}{r}\right)(parte\ reale) + iq_\infty \sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)(parte\ immaginaria) = \phi + i\psi$$

$$W = q_\infty \cos\theta\left(r + \frac{1}{r}\right) + iq_\infty \sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right)$$

Le linee a $\psi = cost.$ sono:

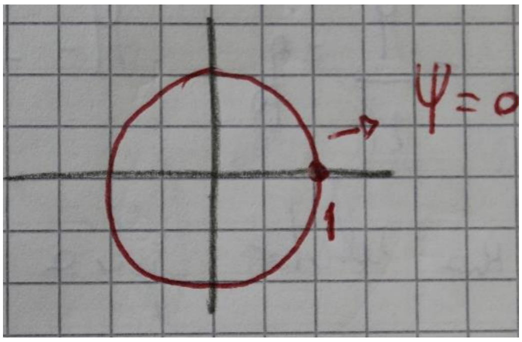
$$\psi = cost. \to \psi = q_\infty \sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) = cost.$$

In particolare le linee a $\psi = 0$, sono sempre delle linee costanti e sono:

$$\psi = 0;\ sin\theta\left(r - \frac{1}{r}\right) = 0 \qquad \begin{array}{l} \to 1.\sin\theta = 0 \to \theta = 0 \\ \to 2.\left(r - \frac{1}{r}\right) = 0 \end{array}$$

Quindi sul piano la linea a $\theta = 0$ è lasse reale ed è una linea di corrente, infetti l'asse reale è linea di corrente sia per la doppietta che per il campo uniforme.

L'altra linea dove la $\psi = 0$ è quella per r=1, quindi raggio unitario:



Lungo il cerchio di raggio unitario la funzione è costante quindi una linea di corrente, lo stesso per l'asse reale. Inoltre se guardassimo la velocità complessa:

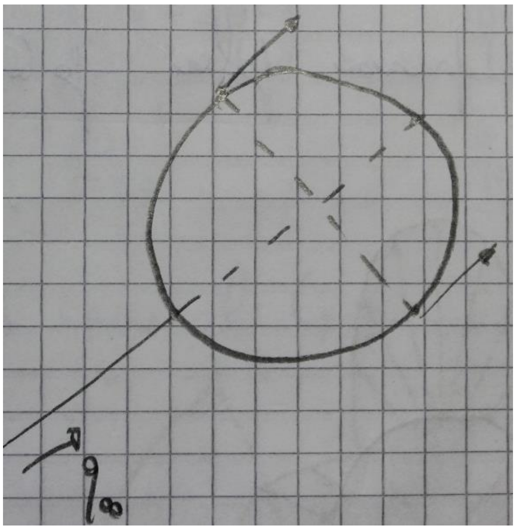
$$\frac{dW}{dz} = q_\infty - \frac{q_\infty}{z^2}$$

Per $z \to \infty$:

$$z \to \infty \to \lim_{z\to\infty}\frac{dW}{dz} = q_\infty$$

Quindi la velocità complessa all'infinito è proprio la q_∞, allora abbiamo un campo di moto in cui il cerchio di raggio unitario è una linea di corrente e all'infinito la velocità è q_∞, quindi questo è un potenziale complesso e lo possiamo interpretare come il potenziale complesso relativo ad un campo di moto intorno ad un cerchio di raggio unitario.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 368

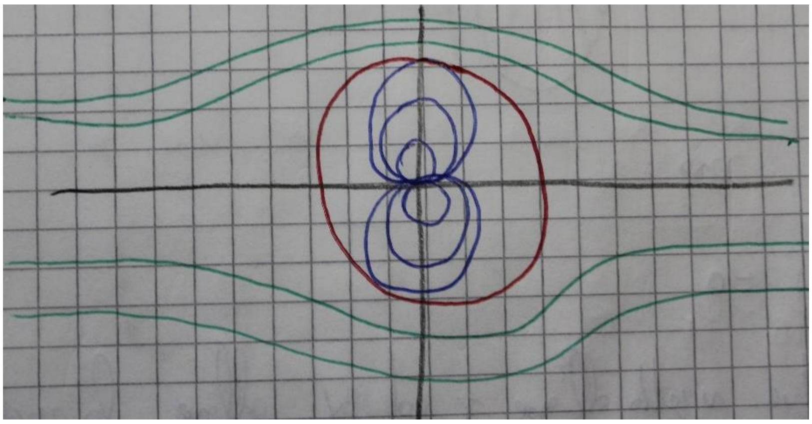


Guardando la seguente espressione:

$$W = q_\infty z + \frac{q_\infty}{z}$$

È come se introducessi: $ze^{-i\alpha}$ confrontando l'espressione appena riportata con quella precedente.

Guadando la figura riportata sotto, le linee di corrente sentono la presenza del corpo e si modificano.



Questo è un campo di moto irrotazionale ed incomprimibile e valgono le relazioni riportate sotto e le seguenti relazioni valgono in tutto il campo di moto:

$$P° = P + \frac{1}{2}\rho q^2 = cost.$$

Se guardassi l'andamento delle pressioni sul cerchio di raggio unitario la costanza delle pressioni mi dice che dove la velocità si annulla la pressione statica raggiunge il valore massimo, quindi nei punti O ed A si ha la pressione statica uguale a quella totale dato che la velocità è nulla e sono chiamati punti di arresto, nel punto B la velocità raggiunge il valore massimo e la pressione è minore di quella all'infinito a monte, quindi si ha una depressione. Nel punto K la pressione è uguale a quella all'infinito a monte.

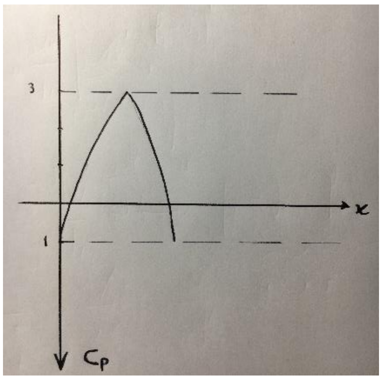
$$P - P_\infty = \frac{1}{2}\rho(q_\infty^2 - q^2)$$

$$C_p = \frac{\frac{1}{2}\rho(q_\infty^2 - q^2)}{\frac{1}{2}\rho q_\infty^2} = 1 - \frac{q^2}{q_\infty^2}$$

Noto il campo di velocità è possibile ricavare l'andamento del Cp, quindi con esso si conoscono le pressioni ed a sua volta le forze.

Proviamo a fare il diagramma del Cp lungo l'asse x. Nel punto iniziale il Cp vale 1 perché la velocità è nulla. Spostandoci lungo la curva la velocità aumenta fino a quando la velocità è pari a quella a monte e quindi la pressione sul profilo eguaglia quella all'infinito. Spostandoci ancora si ottiene un aumento del Cp fino a raggiungere il punto massimo dove la velocità è due volte quella all'infinito, quindi il Cp vale 3 e dopo si ripete lo stesso procedimento.

È possibile notare che le depressioni sono molto più grandi delle sovrappressioni.



Breve riassunto 28/03/2018

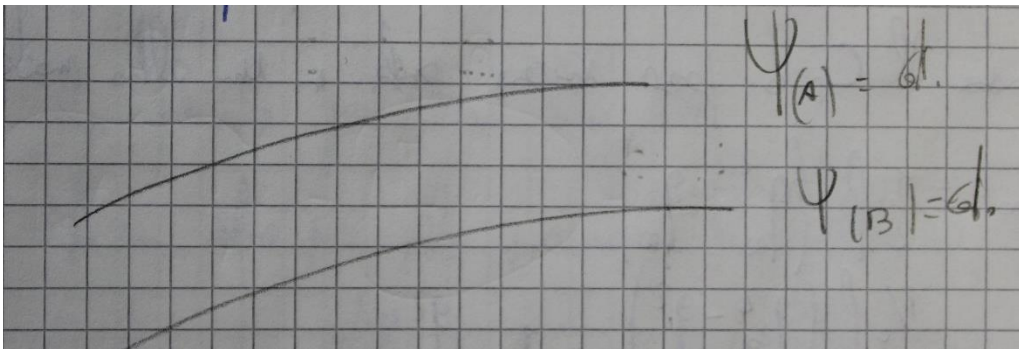
Il potenziale complesso è quel piano in cui, la parte immaginaria è costante. Il valore della costante non ha importanza, ma è importante la differenza delle ψ.

$$W(z) = \phi + i\psi$$

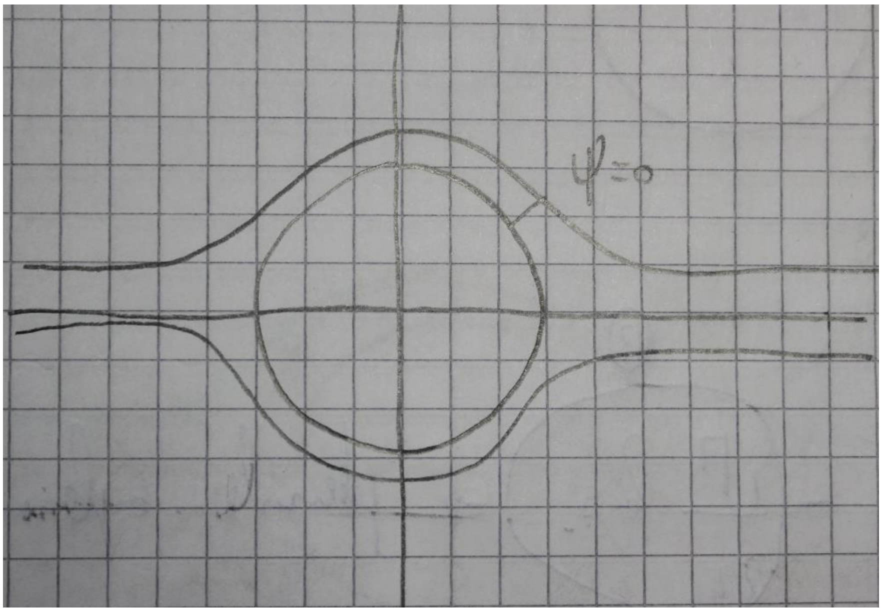
La linea di flusso sono linee lungo le quali le ψ sono costanti è ciò che conta sono le differenze.

Quando abbiamo visto il valore del differenziale di ψ avevamo individuato due linee di flusso dove la ψ è costante e l'integrale da la portata attraverso una qualsiasi linea che congiunge le due linee di flusso, quindi ha significato di portata da A a B ed indipendentemente dal valore che assume la ψ su queste linee, immaginando un condotto a sezione costante, le linee di flusso saranno linee parallele, mettendo due punti, la portata tra le linee di flusso sarà pari a:

$$\int_A^B d\psi = \dot{m}_{AB}$$



V.6-Combinazione di campi di moto: Campo uniforme, doppietta e vortice



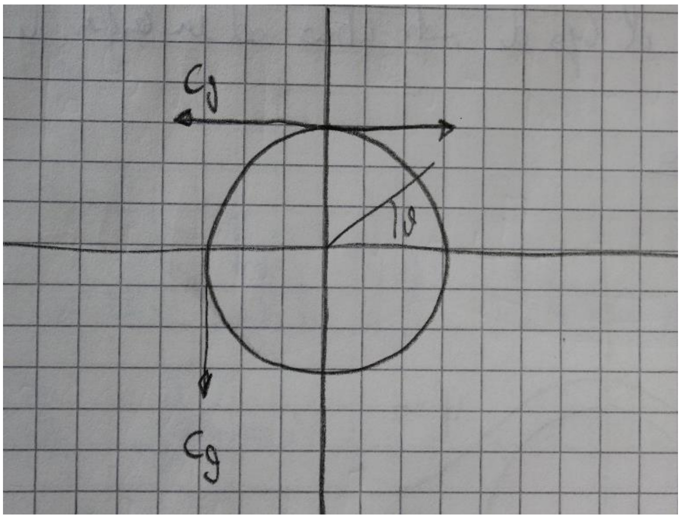
Ricordando che si aveva un punto di arresto in cui la velocità è pari a zero. Adesso al potenziale complesso aggiungiamo il potenziale complesso di un vortice nell'origine. Si ricorda che il potenziale complesso dovuto ad un vortice nell'origine dà luogo ad una velocità complessa:

$$\frac{dW}{dz} = c_r - ic_\theta$$

$$c_r = 0$$

$$c_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Quindi la c_θ varia con 1/r e dipende dall'intensità del vortice. Nel caso in cui $\Gamma > 0$ nel cerchio di raggio unitario si hanno le c_θ dirette nel modo in figura positive e θ è crescente a partire da zero dall'asse x. Per $\Gamma < 0$ allora c_θ varia direzione ed il segno delle velocità tangenziali dipende dalla vorticità.



Quindi al potenziale complesso aggiungiamo il potenziale complesso relativo ad un vortice nell'origine il quale dà luogo a delle linee di corrente che sono dei cerchi di raggio r e lungo queste

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 368

Guardando la velocità complessa è:

$$z = re^{i\theta} \rightarrow r = 1$$

$$\frac{dW}{dz}|_{r=1} = q_\infty - \frac{q_\infty}{e^{i2\theta}} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\frac{1}{e^{i\theta}}$$

Se moltiplico la velocità complessa per $e^{i\theta}$, ottengo le componenti nel sistema di riferimento polare:

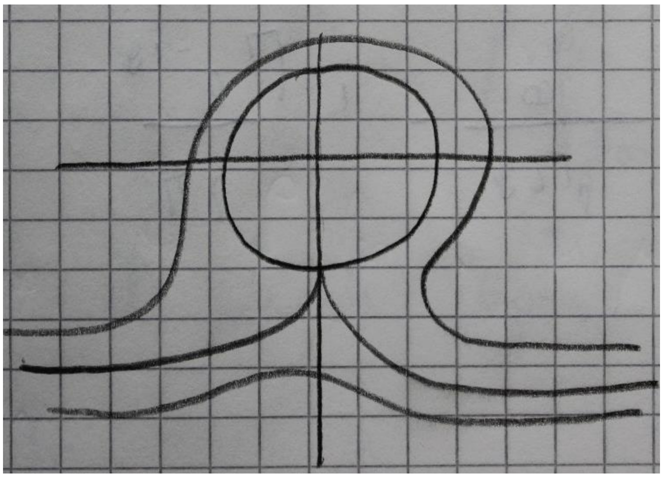
$$\frac{dW}{dz}e^{i\theta} = q_\infty e^{i\theta} - q_\infty e^{-i\theta} - i\frac{\Gamma}{2\pi} = q_\infty cos\theta + q_\infty i\sin\theta - q_\infty(cos\theta - i\sin\theta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}$$
$$= iq_\infty \sin\theta + iq_\infty - \frac{\Gamma i}{2\pi} = i2q_\infty \sin\theta - \frac{i\Gamma}{2\pi} = c_r - ic_\theta$$

E le velocità radiali e tangenziali sono:

$$c_r = 0; c_\theta = -2q_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}$$

La c_θ si annulla quando: $\sin\theta = \frac{\Gamma}{2\pi q_\infty}$, quindi l'angolo θ su cui si annulla la velocità dipende dalla q_∞ e dall'intensità del vortice Γ. Quando il termine $\left|\frac{\Gamma}{4\pi q_\infty}\right| < 1$, questa relazione la possiamo scrivere anche come: $\left|\frac{\Gamma}{q_\infty}\right| < 4\pi$, quando si verifica questa condizione il θ ha un valore compreso tra questi angoli. Se avessimo preso Γ positivo, il valore di θ per cui si annullava si trova dalla parte opposta e le c_θ hanno segno positivo in un'altra direzione.

Quando $\frac{\Gamma}{q_\infty} = 4\pi$ e questo rapporto va ad 1, quindi il $\sin\theta$ va ad uno o per $-\frac{\pi}{2}$ o a $\frac{3}{2}\pi$, quindi quando quel rapporto va ad uno $\frac{\Gamma}{q_\infty 4\pi} = 1$ i punti di arresto coincidono ed il campo di moto è come rappresentato in figura.

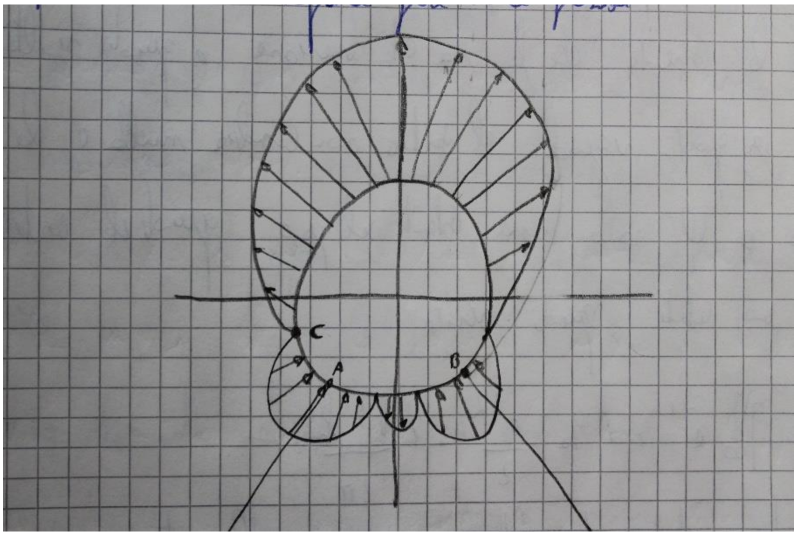


Quando $\left|\frac{\Gamma}{q_\infty}\right| > 4\pi$, il termine è maggiore di uno, vuol dire che sul cerchio non ha soluzione l'equazione, quindi il punto di arresto non è più sul cerchio, quindi il campo di moto ha un andamento come riportato:

Vediamo cosa succede alle pressioni, vale sempre la relazione:

$$P^{\circ} = P + \frac{1}{2}\rho q^2$$

Quindi dove la velocità diminuisce la pressione diminuisce. Provando a riportare lo stesso diagramma delle pressioni, riportando per ogni punto la differenza tra la pressione locale e quella all'infinito:



Spostandoci lungo l'arco la velocità aumenta fino a raggiungere il punto dove si ha la massima velocità. Nel punto C la pressione locale è uguale a quella all'infinito a monte. Ciò che vale per il lato sinistro del diagramma vale anche a destra, perché la distribuzione è simmetrica. Inoltre tutto dipende da Γ.

Nel punto C: $q = q_\infty \; P = P_\infty$.

Rispetto al caso con assenza di circuitazione il diagramma risulta solo simmetrico rispetto all'asse y, ma no rispetto all'asse x. Infatti la distribuzione delle forze non è nulla, l'integrale delle pressioni lungo il cerchio di raggio unitario ha una componente diretta lungo y.

$$F = \int PndS$$

Anche qui si può tracciare l'andamento del Cp, il quale ha un andamento come segue. Intanto si riporta il cerchio, poi traccio il Cp andando a considerare i punti significativi.

VI-Trasformazioni conformi

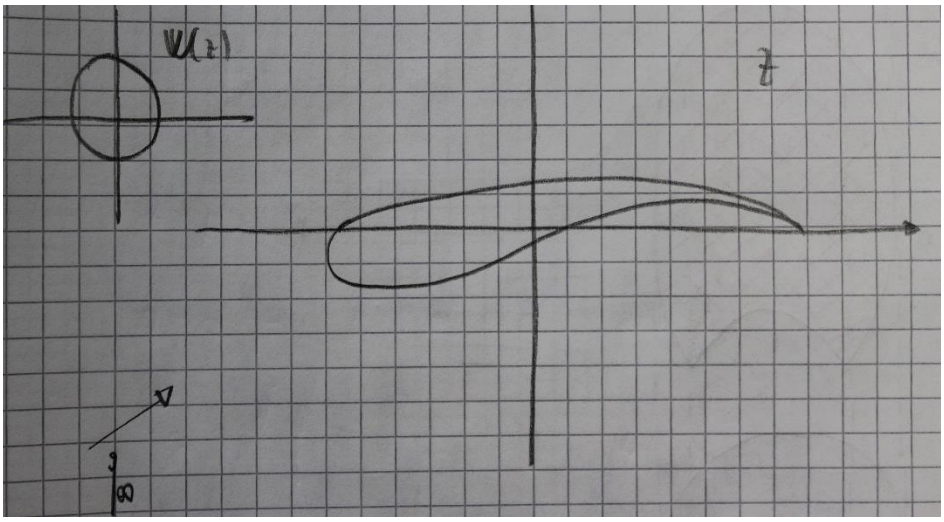
Vediamo il caso in cui vogliamo ottenere un campo di moto su un profilo. Il problema è trovare il potenziale che descrive il campo di moto.

Si ha una geometria che non è più quella semplice del cerchio, ma ho un piano z sul quale è rappresentato un profilo investito da una corrente q_{∞}. Una volta stabilite le condizioni al contorno si ricorre alla tecnica delle trasformazioni conformi, la quale permette di attribuire la soluzione ottenuta su un piano (in cui è definita la soluzione semplice), al piano in cui è definita la geometria complicata. Quindi parto da un piano in cui è definito un cerchio di raggio unitario, ed in questo piano posso definire il potenziale complesso che rappresenta il campo di moto, e la parte immaginaria su questo piano è costante. Questa soluzione (del piano ζ), la posso portare nel piano z a patto che ne conosca la trasformazione conforme:

$$\zeta = \zeta(z)$$

O la sua inversa:

$$z = z(\zeta)$$



Con questa legge posso trasformare la geometria semplice in un'altra geometria. Se questa legge è definita con delle funzioni analitiche, allora è possibile effettuare la trasformazione conforme. Una volta nota la trasformazione conforme posso trasportare la soluzione nell'altro piano, infatti:

$$W(\zeta) = W\big(\zeta(z)\big) = W(z)$$

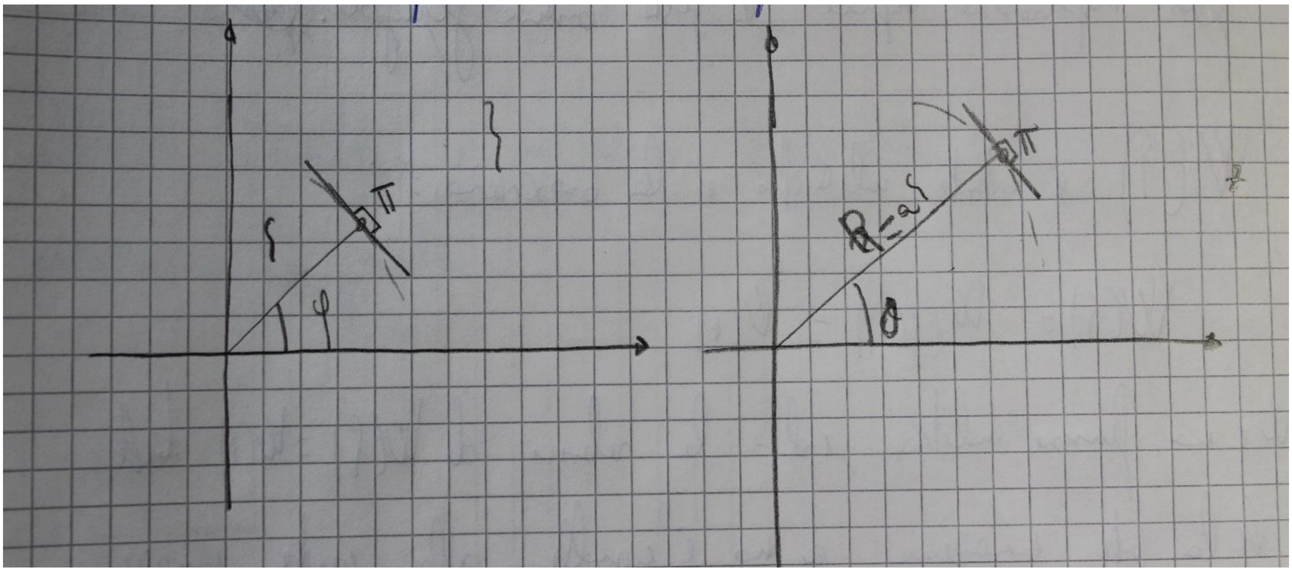
Il potenziale complesso ha la parte immaginaria e reale che soddisfano le condizioni di analiticità, $W\big(\zeta(z)\big)$ è una funzione composta ed analitica, quindi la funzione è ancora analitica:

$$W(\zeta) = W(z)$$

Se la funzione è analitica può rappresentare il potenziale nel piano ed in particolare la parte immaginaria di questa grandezza è uguale alla parte immaginaria dell'altra grandezza. Se il numero complesso ha una parte immaginaria costante di un punto appartenente al cerchio, il punto appartenente al cerchio corrisponde ad un punto sul profilo dell'altro piano, quindi i punti su entrambi i piani hanno parte immaginaria costante, La W(z) ha parte immaginaria costante in tutti e due i piani ed è possibile rappresentare il campo di moto sul piano z.

La velocità complessa nel piano z la possiamo scrivere come:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 368



Se considero i due elementi individuati dal raggio, entrambi individuano un elemento pari a π, ciò è dovuto al fatto che la funzione è conforme e quindi analitica, per tale motivo gli angoli si conservano.

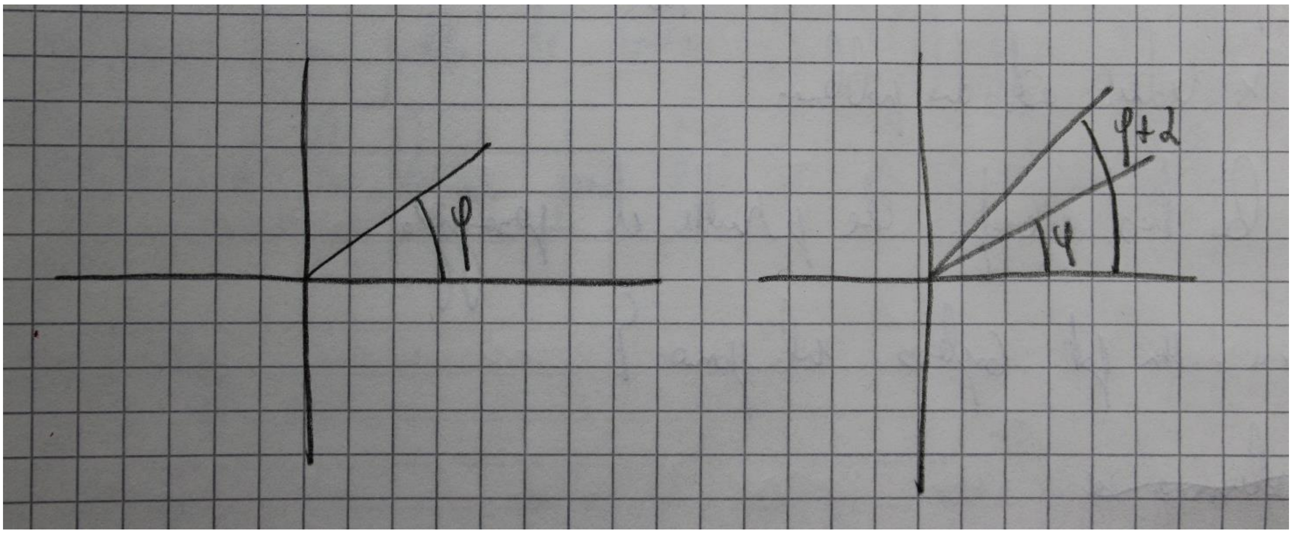
Altra trasformazione conforme:

$$z = \zeta e^{i\alpha}$$

Quest'ultima relazione è una rotazione, in particolare esplicitando i termini si ottiene:

$$z = re^{i\alpha}e^{i\phi} = re^{i(\phi+\alpha)}$$

Questo mi dice che se prendo questo numero complesso individuato nel piano e lo moltiplico per α, ottengo il numero complesso nel piano z che è pari a $\phi + \alpha = \theta$. Prima avevamo l'angolo ϕ, adesso il numero complesso ha l'angolo $\phi + \alpha$, quindi è come se avessi un numero complesso e l'ho ruotato di un angolo α. L'intero piano può essere trasformato in un altro piano ruotato. In particolare applicando questa trasformazione ad un cerchio di raggio unitario, il cerchio diventa sempre di raggio unitario però ruotato.

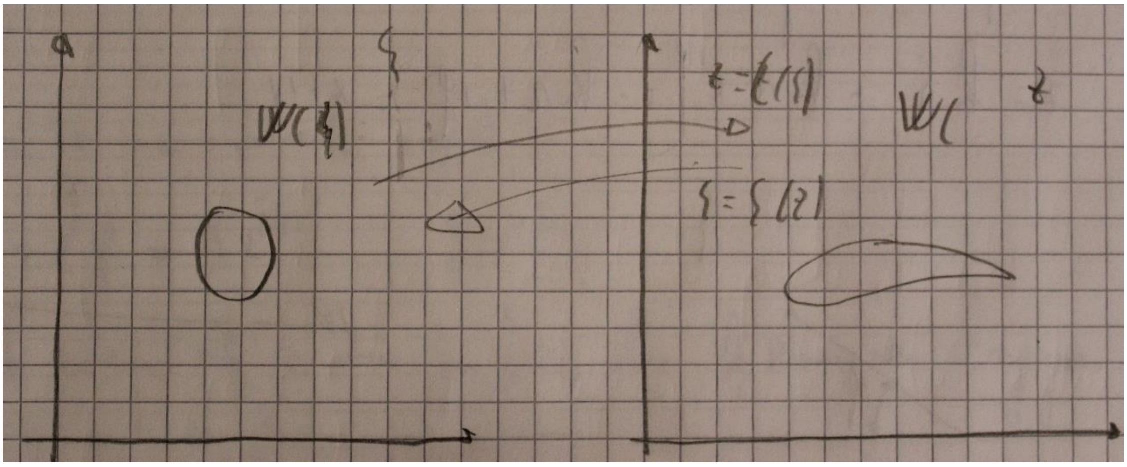


Si possono usare anche delle combinazioni di queste trasformazioni, ad esempio:

$$z = c\zeta + b \rightarrow c = |c|e^{i\beta} \rightarrow z = |c|e^{i\beta}\zeta + b \;\; b = traslazione$$

Breve riassunto 05/04/2018

Parlavamo di trasformazioni conformi ed abbiamo visto che la tecnica delle trasformazioni conformi consiste nell'ottenere una soluzione sul piano dove è definita una geometria semplice e portarla sul piano dove è definita una geometria complicata.



La soluzione può essere portata da un piano all'altro a patto che si conosca la trasformazione conforme.

Il problema si riconduce:

1. Ricerca della trasformazione conforme che permette di trasformare la geometria semplice in una geometria complicata nel piano z.
2. Definizione del potenziale sul piano ζ e trasferirlo nel piano fisico.

Vediamo adesso altri tipi di trasformazioni conformi

VI.2-Trasformazione di Jukowski

Questa trasformazione è definita come:

$$z = \zeta + \frac{1}{\zeta}$$

Dove z è il piano fisico, questa trasformazione permette di trasformare quello che succede al cerchio di raggio unitario sul piano ζ al piano z assegnato l'asse immaginario.

Il numero complesso ζ lo indichiamo come:

$$\zeta = re^{i\phi}$$

Dove, r è il modulo e z sarà uguale:

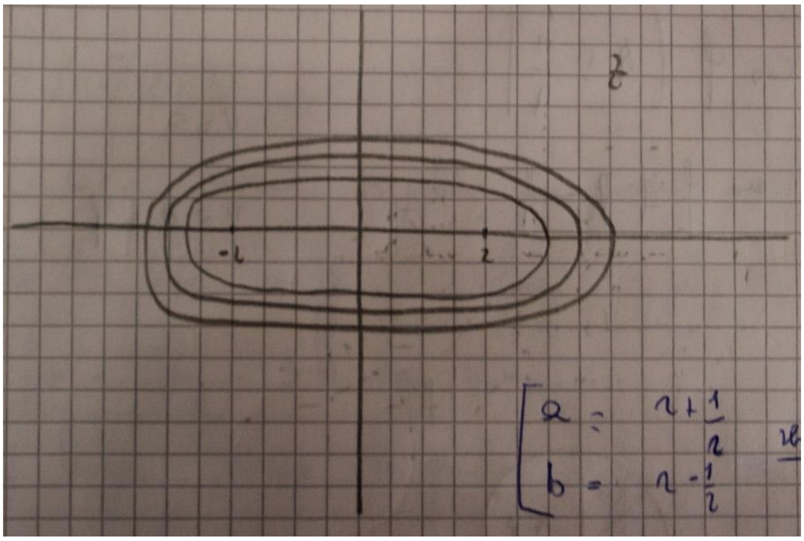
$$z = x + iy = re^{i\phi} + \frac{e^{-i\phi}}{r} = r(\cos\phi + i\sin\phi) + \frac{1}{r}(\cos\phi - i\sin\phi)$$

- Parte reale:

$$x = \cos\phi\left(r + \frac{1}{r}\right)$$

- Parte immaginaria:

$$y = \sin\phi\left(r - \frac{1}{r}\right)$$



Il fuoco dell'ellissi si trova in 2 e -2 ed i semiassi sono legati al valore di r.

$$a = r + \frac{1}{r}; b = r - \frac{1}{r}$$

Allo stesso modo considerando le linee a $\phi = cost.$ possiamo riscrivere l'equazione in quest'altra forma:

$$\frac{x}{\cos\phi} = r + \frac{1}{r}; \frac{y}{\sin\phi} = r - \frac{1}{r}$$

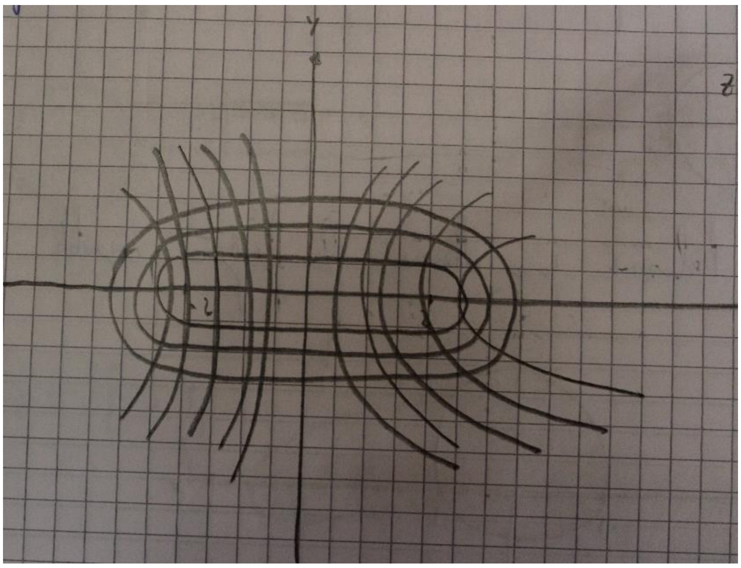
Facendo il quadrato e la differenza tra i due membri ottengo:

$$\frac{x^2}{\cos^2\phi} - \frac{y^2}{\sin^2\phi} = 4$$

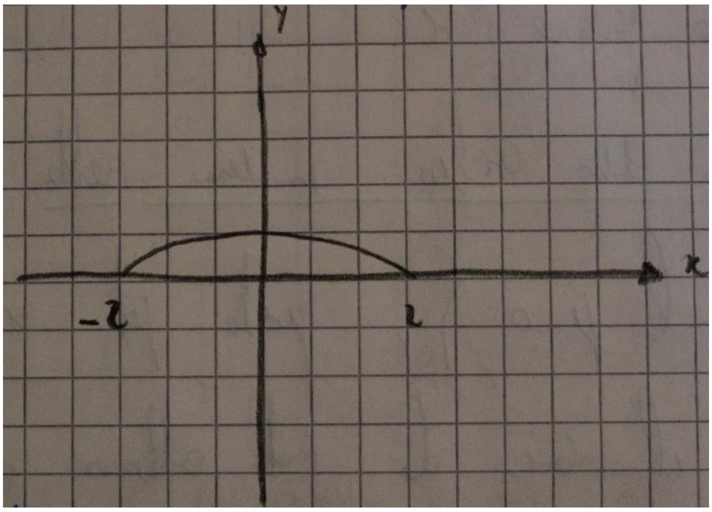
Questa equazione può ancora essere riscritta come:

$$\frac{x^2}{(2\cos\phi)^2} - \frac{y^2}{(2\sin\phi)^2} = 1$$

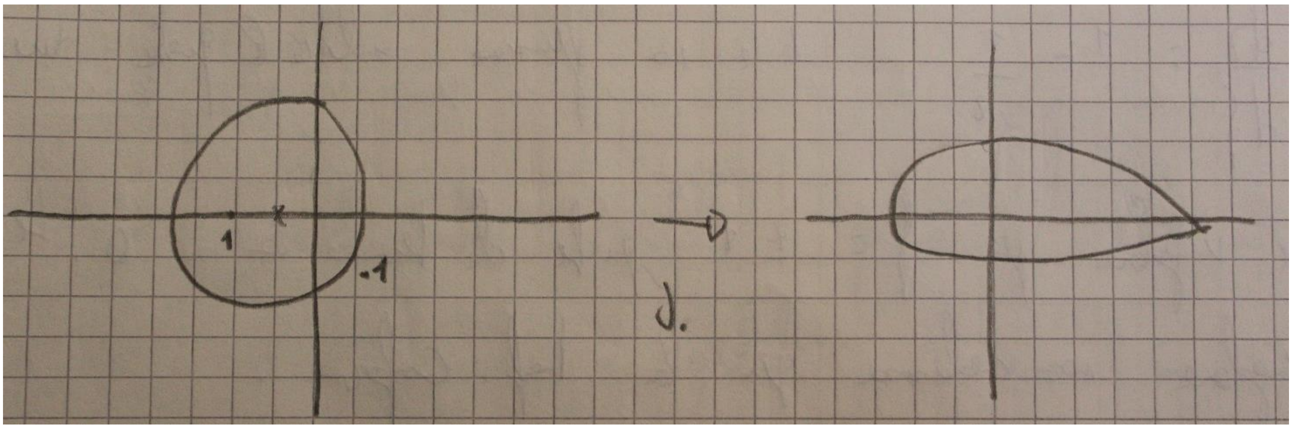
Al variare di ϕ l'equazione rappresenta delle iperboli nel piano z e per $\phi = 0$ l'equazione degrada in una retta.



Nei punti -1 ed 1 si ha sempre la singolarità.



Traslando adesso il cerchio, facendolo passare per 1 e con raggio r<1, si trasforma nel piano z in un profilo simmetrico rispetto all'asse x e lo spessore del profilo simmetrico dipende dalle coordinate del cerchio. Anche questa trasformazione è stata ottenuta mediante l'applicazione di due trasformazioni, traslazione e diminuzione del volume e successivamente Jukowski.



Consideriamo adesso un cerchio di raggio unitario, poi nel piano ζ' (il quale è un piano intermedio) e considero un cerchio che passa per 1 ed il centro è in ζ_0' ed applico la trasformazione di Jukowski:

$$z = \zeta' + \frac{1}{\zeta'}$$