NUMERO: 2330A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: De Santis

MATERIA: Fisica II - Prof. Iotti

ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE:

- CAMPI SCALARI E VETTORIALI:

- CAMPO: Funzione della posizione nello spazio ($\mathbb{R}^3$)
- REGIONE: Spazio interno, delimitato, del campo (Ω)
  $P \in \Omega,\ P = (x, y, z)$
- CAMPO SCALARE: Nella regione Ω c'è una funzione U se ad ogni punto P appartenente alla regione Ω associo uno ed un solo numero reale
  $$U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$
- CAMPO VETTORIALE:
  $\Omega \in \mathbb{R}^3$
  $P \in \Omega,\ P = (x, y, z)$
  In Ω è definito un campo vettoriale quando esiste una funzione vettoriale A che associa ad ogni elemento di Ω uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}^3$.
  $$A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$
  $$\vec{A}(P) = (A_x(P), A_y(P), A_z(P))$$

- Se un campo NON DIPENDE DAL TEMPO → CAMPO STATICO o STAZIONARIO
- Se un campo DIPENDE DAL TEMPO → CAMPO VARIABILE
- Se un campo NON DIPENDE DALLA POSIZIONE → CAMPO OMOGENEO

→ CAMPI SCALARI → LINEE DI LIVELLO
→ CAMPI VETTORIALI → LINEE DI CAMPO (o DI FORZA)
→ LINEE E TUBI DI FLUSSO

- FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI: DERIVATE PARZIALI

$$f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{campo scalare})$$
$$w = f(x, y, z)$$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \qquad w = f(x)$$
$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \qquad w = f(x, y, z)$$

$g(x) = \frac{df}{dx} \rightarrow \frac{d}{dx}$ derivata della funzione rispetto alla variabile x.

$$f(x, y) \rightarrow f'(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

ELETTROSTATICA:

- ELETTRIZZAZIONE PER STROFINIO;
- POLARIZZAZIONE PER INDUZIONE DI UN DIELETTRICO: avvicinare un corpo elettricamente carico (INDUCENTE) ad un corpo neutro (INDOTTO);
- ELETTRIZZAZIONE PER CONTATTO: → se abbiamo ad esempio 3 corpi, di cui 1 carico positivamente e 2 neutri, una volta messi a contatto, tutti e 3 risulteranno carichi positivamente poiché gli e⁻ di B e C si muovono verso A, generando uno scompenso di cariche negative in B e C, che quindi diventano carichi positivamente.

LA CARICA ELETTRICA:

- È l'origine delle FORZE ELETTRICHE;
- Può essere POSITIVA o NEGATIVA;
- Nel S.I. la carica elettrica è una grandezza derivata (dall'intensità di corrente) e si misura in Coulomb;
- È un multiplo del quanto elementare $e = 1{,}610 \cdot 10^{-19}\,C$.

PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA:

In un sistema isolato la carica totale si conserva in qualunque processo, microscopico o macroscopico, fisico o chimico.

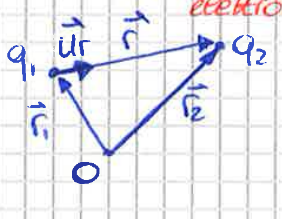
LEGGE DI COULOMB:

Descrive la forza con cui interagiscono 2 cariche puntiformi FERME NEL VUOTO:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r \qquad \varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$$

k_e: costante elettrostatica

ε_0 ↓ costante dielettrica nel vuoto.



F_{12} è:
- → proporzionale al prodotto delle cariche
- → inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.

- FERME IN UN MEZZO OMOGENEO:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2}\, \vec{u}_r \qquad \varepsilon_r > 1 \rightarrow \text{costante dielettrica del mezzo}$$

CAMPO ELETTROSTATICO NEL VUOTO:

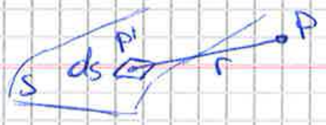
$$\vec{F}_{12}(r) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r_1^2}\, \vec{u}_r\right) \cdot q_2 = q_2\, \underline{\vec{E}_1(r)}$$

↳ campo coulombiano: dipende dalla carica sorgente e dalla distanza tra le cariche.

$$\Rightarrow \vec{E}(P) = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq(P')}{r^2_{P'P}} \vec{u_r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(P')}{r^2_{P'P}} \vec{u_r}\, d\mathcal{V}$$

$$\Rightarrow E(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(x',y',z')}{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \vec{u_r}\, dx dy dz$$

DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA:

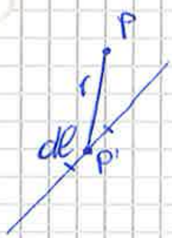


$$\sigma(P') = \frac{dq(P')}{dS} \quad [C/m^2]$$

$$dq(P') = \sigma(P')\, dS \qquad Q = \int_S \sigma(P')\, dS$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\sigma(P')}{r^2} \vec{u_r}\, dS$$

DENSITÀ LINEARE DI CARICA:

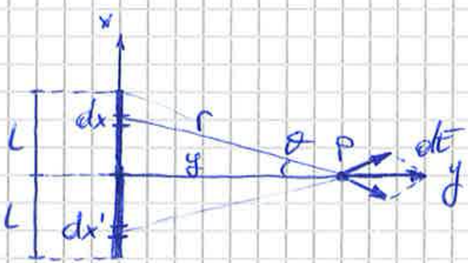


$$Q = ? \quad \lambda = \frac{dq(P')}{dl} \quad [C/m]$$

$$dq(P') = \lambda(P')\, dl$$

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_l \frac{\lambda(P')}{r^2} \vec{u_r}\, dl$$

CAMPO PRODOTTO DA UN FILO CARICO



$Q > 0$

$$\lambda = \frac{Q}{2L} \Rightarrow Q = \lambda \cdot 2L$$

$\overline{O dx} = x$

$\overline{OP} = y$

$r = y/\cos\theta$

$$x = y \operatorname{tg}\theta \rightarrow dx = \frac{y}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

$dq = \lambda dx$

$$dE(P) = dE_y(0,y)\vec{u_y} = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda dx}{r^2} \cos\theta\, \vec{u_y}$$

$$E_y(P) = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^L \frac{\cos\theta}{r^2}\, dx =$$

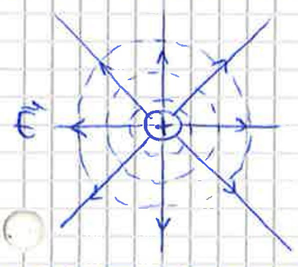
$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\theta_m} \cos\theta \cdot \frac{1}{y^2/\cos^2\theta} \cdot y \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{y} \int_0^{\theta_m} \cos\theta\, d\theta =$$

$$W_{AB} = q_0 \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q_0 \left(V(A) - V(B) \right)$$

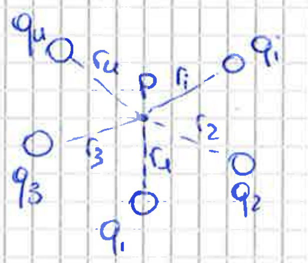
$$\frac{W_{AB}}{q_0} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \Delta V(A) - V(B)$$ → possiamo interpretare ΔV come il lavoro per l'unità di carica.

$$\frac{W_{A\infty}}{q_0} = \int_A^\infty \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V(A) - \underbrace{V(\infty)}_{0}$$ → Il potenziale in A è dato dal lavoro svolto per spostare la carica dall'infinito ad A.

POTENZIALE ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNTIFORME:



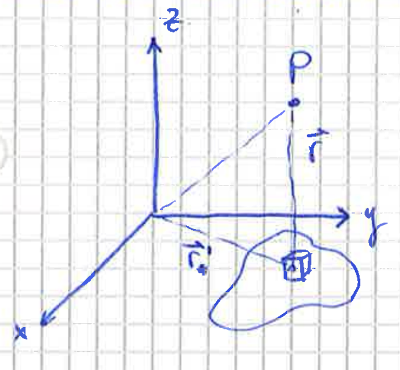
• CAMPO E POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATI DA N CARICHE PUNTIFORMI:



$$E(P) = \sum_{i=1}^{N} E_i(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_r$$

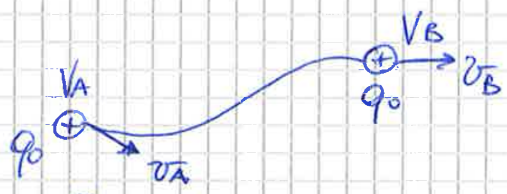
$$V(P) = \sum_{i=1}^{N} V_i(P) = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r_i} + C$$

POTENZIALE ELETTROSTATICO GENERATO DA UNA DISTRIBUZIONE CONTINUA:



$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|r - r'|} dV + C$$

BILANCIO ENERGETICO IN UN CAMPO ELETTROSTATICO:



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$
$$F_e = q \cdot \vec{E}$$

Per un sistema isolato dal punto di vista meccanico (agiscono solo forze conservative) vale il TEOREMA DELLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA.

$$E = \underbrace{E_k}_{\text{en. cinetica}} + \underbrace{U_e}_{\text{en. potenziale}} = \frac{1}{2} m v^2 + q_0 V$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 214

$$\Rightarrow \vec{M}_0 = \vec{p} \wedge \vec{E} = -p \cdot \vec{E} \sin\theta \, \vec{u}_z$$

$$W = \int_{\theta_0}^{\theta} M \cdot d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} (-pE) \sin\theta' d\theta' = pE\cos\theta - pE\cos\theta_0 = U_e(\theta_0) - U_e(\theta)$$

$$\Rightarrow U_e = -pE\cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Il dipolo elettrico si comporta come un pendolo cercandosi di allineare al campo $\vec{E}$.

- IMMERSO IN UN CAMPO ELETTRICO NON UNIFORME:

$\vec{F}_{ris} \neq 0$!

Un campo elettrico debole, ma variabile, può produrre forze risultanti molto intense.

RIASSUMENDO:

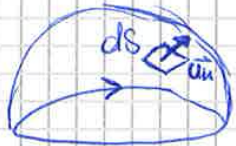
Il campo elettrostatico è conservativo

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(A) - V(B)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

TEOREMA DI STOKES:



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, d\Sigma = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}$$

Se il campo è conservativo $\Rightarrow$ è IRROTAZIONALE (rotore = 0)!

LEGGE DI GAUSS:

- DISTRIBUZIONE DISCRETA:

$$\Phi_S = \oint \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS = \frac{[\Sigma_i q_i]_{int}}{\varepsilon_0}$$ $\rightarrow$ Il flusso del campo dipende solo dalla sommatoria delle cariche all'interno della superficie.

- DISTRIBUZIONE CONTINUA:

$$\Phi_S(E) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow$ campo conservativo $\Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} V$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (-\vec{\nabla} V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow -(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) V = \rho / \varepsilon_0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$ LAPLACIANO

$\Rightarrow -\nabla^2 V = \rho / \varepsilon_0 \Rightarrow$

$\nabla^2 V = -\rho / \varepsilon_0$ EQ. DI POISSON

$\nabla^2 V = 0$ EQ DI LAPLACE → nello spazio vuoto in assenza di cariche

PROPRIETÀ ELETTRICHE DELLA MATERIA:

I materiali si dividono in
- ISOLANTI;
- CONDUTTORI;

a seconda della loro capacità di lasciarsi attraversare dalla corrente elettrica.

→ Corpo metallico immerso in un campo elettrostatico.

Le cariche mobili presenti nel corpo subiscono una forza $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$.

In un corpo metallico gli e⁻ seguono la forza lasciando liberi i protoni. In questa maniera si ottiene l'elettrizzazione del corpo.

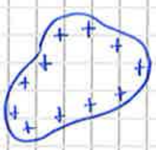
Si possono avere corpi neutri, ma elettrizzati localmente.

Per effetto del campo esterno $\vec{E}_{ext}$ si genera un campo transitorio indotto $\vec{E}_{ind}$.

Il campo totale all'interno del conduttore:

$$\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{ind} = 0$$

- Consideriamo un corpo elettrizzato per strofinio:



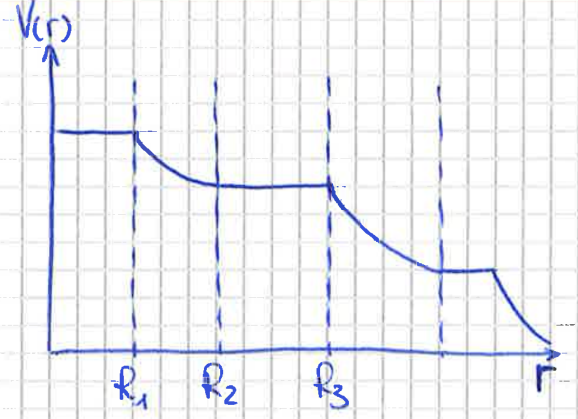
Se le cariche al suo interno non si muovono $\Rightarrow \vec{E} = 0 \Rightarrow$ è in equilibrio elettrostatico.

Conseguenze di un corpo avente $E = 0$:

- $\rho = 0$: densità di carica nulla, a causa della legge di Gauss.

Per quanto riguarda il potenziale:

$$V(r)=\begin{cases} \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\dfrac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = V_1 & \text{se } r<R_1 \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\dfrac{(-q)}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & \text{se } R_1<r<R_2 \\ \cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}-\cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} \equiv V_2 & \text{se } R_2<r<R_3 \\ \cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}-\cancel{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & \text{se } r>R_3 \end{cases}$$



$V_1 > V_2$

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\cancel{\frac{1}{R_3}}-\cancel{\frac{1}{R_3}}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{R_2-R_1}{R_1 R_2}$$

Si definisce CAPACITÀ DEL CONDENSATORE SFERICO:

$$C=\frac{q}{V_1-V_2}=4\pi\varepsilon_0\frac{R_1\cdot R_2}{R_2-R_1}$$

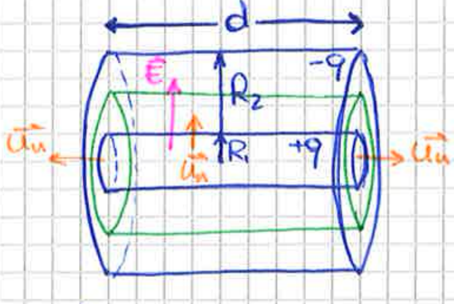
Dipende dalla geometria dei conduttori ma non dalla loro carica.

Supponendo di portare un'armatura all'infinito ($R_2\to\infty$)

$$C(R_2\to\infty) \simeq 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1\cdot R_2}{R_2\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)} \simeq 4\pi\varepsilon_0 R_1 \to$$ Capacità del conduttore C_1 isolato.

Se: $\begin{cases} R_1, R_2 \simeq R \\ R_2 - R_1 = h \end{cases} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0\dfrac{R^2}{h} = \varepsilon_0\dfrac{S}{h}$

b



Come superficie gaussiana si sceglie un cilindro di raggio intermedio tra R_1 ed R_2. ed altezza $h<d$ (per evitare gli effetti di bordo).

$$\begin{cases} \Phi(E) = \int_\Sigma \vec{E}\cdot\vec{u}_n \, d\Sigma = E\Sigma = E\cdot 2\pi r h \\ \Phi(\vec{E}) = \dfrac{q}{\varepsilon_0} \end{cases} \qquad dq = \lambda dh$$

$$\Rightarrow E\cdot 2\pi r \cancel{h} = \frac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\vec{u}_r \qquad \underline{R_1<r<R_2}$$

per $r<R_1$ $E=0$ (Campo interno ad un conduttore è nullo)

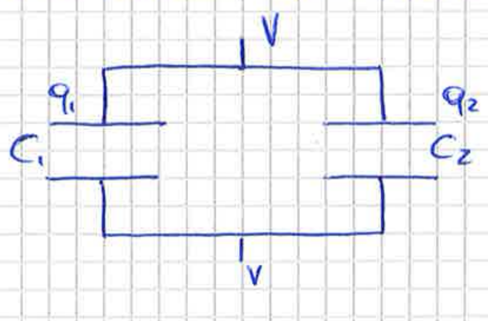
per $r>R_2$ $E=0$ i campi generati dalle 2 distribuzioni si elidono all'esterno.

$$V(r)-V(R_1) = \int_r^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_r^{R_1}\frac{1}{r}dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{R_1}$$

$$V(R_1)-V(R_2) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\cancel{\lambda}\cdot d}{\frac{\cancel{\lambda}}{2\pi\varepsilon_0}\ln R_2/R_1} = \frac{2\pi\varepsilon_0 d}{\ln R_2/R_1}$$ CAPACITÀ DEL CONDENSATORE CILINDRICO

CONDENSATORI IN PARALLELO:



$q_1 = C_1 V$

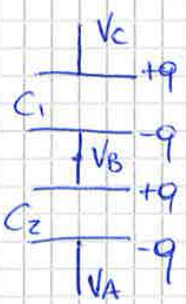
$q_2 = C_2 V$

$q = q_1 + q_2$

$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)V$

$\Rightarrow C_{eq} = C_1 + C_2 \Rightarrow C_{eq} = \dfrac{q}{V} = \dfrac{q_1+q_2}{V}$

CONDENSATORI IN SERIE



$V_C - V_B = q/C_1$

$V_B - V_A = q/C_2$

$\Rightarrow V_C - V_A = q\left(\dfrac{1}{C_1}+\dfrac{1}{C_2}\right) = \dfrac{q}{C_{eq}}$

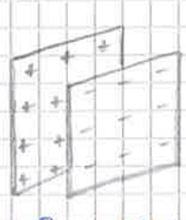
$\Rightarrow \dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

$$Q = \int_V \rho \, dV = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} dr \left(r^2 \sin\theta \, \rho(r) \right) =$$

$$= \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta}_{4\pi} \int_0^{R} r^2 \rho(r) \, dr = 4\pi \int_0^{R} 5\varepsilon_0 \alpha r^4 \, dr = 4\pi \varepsilon_0 \alpha R^5 = 25{,}13 \cdot 10^{-5} \, C$$

effetti di bordo si suppone che l'altezza dei cilindri sia molto più grande dei loro raggi.
Tra l'altro il condensatore cilindrico ci permette di realizzare un sistema a capacità variabile: basta infatti far scorrere una delle 2 armature rispetto all'asse mantenendo l'altro fisso; l'altezza caratteristica del sistema non sarà più "d", ma l'altezza per la quale il cilindro esterno avvolge l'altro. Inoltre la capacità aumenta quanto più $R_2 \to R_1$, ovvero tanto più le 2 armature sono vicine.

• **CONDENSATORE PIANO**



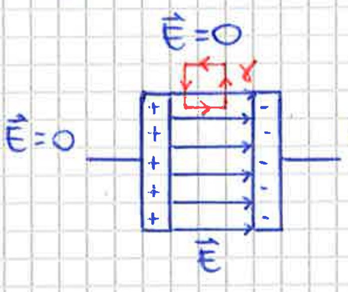
Hp: induzione completa: nella regione compresa tra i 2 piani il campo è uniforme soltanto se i piani sono indefiniti; tutte le linee di campo partono da un piano e terminano sull'altro.

⇒ Si può fare l'ipotesi di induzione completa quando le dimensioni delle armature sono molto maggiori rispetto alla distanza tra le stesse.

$$\Rightarrow C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$$ (con l'ipotesi di induzione completa)

⇒ a parità di area, diminuendo la distanza tra le armature, aumenta la capacità.

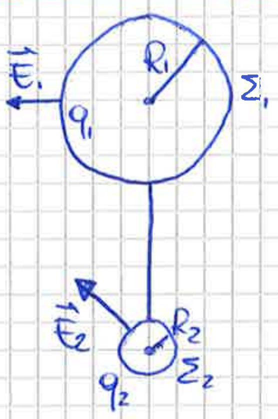
EFFETTI DI BORDO: esistono in quanto le armature hanno un'area finita.



Caricando il condensatore, viene generato un campo elettrostatico nella regione tra le armature, ma nullo all'esterno (in quanto i campi generati dalle 2 armature si sommano tra le stesse e si elidono al di fuori). Idealmente dunque il campo dovrebbe esistere solamente nella regione tra le armature e terminare istantaneamente sui bordi del sistema.
In realtà in prossimità del bordo si ha un andamento del campo non più uniforme. Gli effetti di bordo non sono un fenomeno casuale, la loro esistenza ha una spiegazione assolutamente fisica: prendiamo una linea chiusa γ che si trovi in parte tra le armature ed in parte fuori. Calcolando l'integrale di linea del campo elettrostatico lungo questo percorso otteniamo:

$$\oint_\gamma \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot \ell \neq 0$$ in disaccordo con la proprietà del campo elettrostatico di essere conservativo (dunque di avere circuitazione nulla).

DISTRIBUZIONE DELLA CARICA SULLA SUPERFICIE:



Consideriamo un conduttore composto da 3 elementi:

- una sfera di raggio R_1;
- " " " " R_2;
- un filo conduttore.

$R_1 > R_2$

Ipotizziamo che $l \gg R_1, R_2$ ovvero che le due distribuzioni sferiche di carica non si influenzano.
La carica sul filo è trascurabile.

Abbiamo detto che la distribuzione superficiale di carica uniforme si può ottenere solo se le sfere sono isolate!
Nota la carica totale che noi diamo al sistema, dopo un breve lasso di tempo il sistema raggiunge l'equilibrio, perciò le due distribuzioni saranno equipotenziali. $V_1 = V_2$

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = V_2 \\ q = q_1 + q_2 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema:

$$q_1 = q\frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad q_2 = q\frac{R_2}{R_1+R_2} \qquad (q_1 > q_2)$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \frac{q_1}{\Sigma_1} = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{\Sigma_2} = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

Sostituendo i valori di q_1 e q_2 trovati:

$$\sigma_1 = \frac{q}{4\pi R_1(R_1+R_2)} \qquad \sigma_2 = \frac{q}{4\pi R_2(R_1+R_2)}$$

$\Rightarrow$ È vero che la sfera più grande ha più carica $(q_1 > q_2)$, ma sulla sfera più piccola la densità di carica è maggiore.

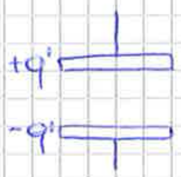
$\Rightarrow \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$ e siccome σ è direttamente proporzionale ad E in prossimità della superficie:

$\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{R_2}{R_1} \Rightarrow$ IL CAMPO SARÀ PIÙ INTENSO IN CORRISPONDENZA DELLA SFERA DI RAGGIO PIÙ PICCOLO.

Infatti il campo elettrostatico è più intenso in prossimità di spigoli e punte.

Essendo p_e indipendente dal segno di α tenderà in ogni caso a diluire la distribuzione di carica.

CARICA DI UN CONDENSATORE:



Supponiamo di avere un condensatore ad armature piane e parallele, inizialmente scarico.
Supponiamo ora di cominciare a prelevare e da un'armatura e di portarli all'infinito, lasciando la stessa in difetto di e (armatura positiva). Dall'infinito vengono presi e e portati sull'altra armatura, che acquistando e sarà l'armatura negativa. Questo spostamento di cariche è generalmente effettuato da un generatore di tensione, che prosegue con la separazione delle cariche fino a quando la tensione tra le armature non raggiunge un valore finale proprio del generatore. La capacità del condensatore non cambia, il generatore effettua il processo lentamente:

$$C = \frac{q'}{V'} = \frac{q}{V}$$

Che lavoro facciamo quando spostiamo una carica dq' da un'armatura all'altra?

$$dW = V'dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

dove ricordiamo che C è un qualcosa che dipende solo dalla geometria del condensatore.
Integrando otteniamo il lavoro compiuto dal generatore, partendo da una situazione in cui si ha $q_{iniz.} = 0$ e si arriva ad una carica q: cioè quella che compete al condensatore avente una certa capacità, quando la tensione è quella tipica del condensatore:

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{C}$$

Il lavoro fatto per ottenere la separazione di carica diventa energia potenziale elettrostatica del sistema. Energia che il sistema può restituire, per esempio collegando un'armatura all'altra si genera un moto di cariche per riportare l'equilibrio di carica sulle armature.

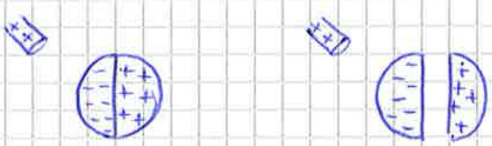
$$U_e = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}CV^2$$

ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI

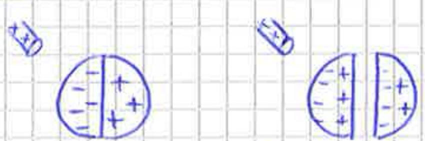
Cosa succede quando un materiale dielettrico (o isolante) viene elettrizzato oppure viene portato in presenza di un campo elettrico esterno.
Quando si elettrizza per strofinio un conduttore l'eccesso di cariche negative prodotte localmente si disperde subito sul conduttore, gli e⁻ sono mobili.
Se si elettrizza un corpo isolante l'eccesso, o il difetto di e⁻ locale resta lì dove è stato prodotto (non c'è movimento di cariche).
Questo è dovuto al fatto che nei materiali isolanti gli e⁻ sentono molto l'appartenenza ad un atomo o alla molecola che li ha condivisi.
Se però si avvicina un corpo carico ad un corpo isolante neutro succede qualcosa che assomiglia all'induzione

POLARIZZAZIONE VS. INDUZIONE

Prendiamo un conduttore fatto di 2 parti e avviciniamogli una bacchetta carica positivamente, per induzione gli e⁻ vengono attirati verso il corpo inducente e lasciano delle cariche positive dall'altra parte



Supponiamo poi di dividere le 2 parti del conduttore mantenendo però vicino il corpo inducente. Questo processo è detto di ELETTRIZZAZIONE PERMANENTE. Se in entrambe le situazioni allontaniamo il corpo inducente, nel 1° caso avremmo che il tutto torna neutro come prima di avvicinare la bacchetta, nel secondo caso si avrà che rimangono un eccesso di cariche positive da una parte e negative dall'altra.



Supponiamo ora di avere lo stesso sistema ma con un dielettrico al posto del conduttore. Avvicinando un corpo carico positivamente anche in questo caso si genera una divisione di carica come accadeva nel caso del conduttore, se ora però tagliamo la pallina di dielettrico otterremo una situazione in cui le 2 metà sono entrambe neutre, non sono elettrizzate, perché nelle superfici che vengono create tagliando, quelle affacciate l'una all'altra, si vanno ad evidenziare delle cariche, positive o negative, tali per cui ciascuna delle metà è globalmente neutra.
Per i dielettrici il fenomeno è detto di POLARIZZAZIONE.

LEZIONE 02-11-17

ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI:

Andando a considerare un condensatore carico, che è stato cioè collegato ad un generatore e poi staccato dallo stesso lasciando sulle armature degli eccessi di carica di segno opposto ($\sigma_0, -\sigma_0$). Se all'interno della regione tra le armature c'è il vuoto, si può misurare una certa tensione V_0, se invece tra le armature viene inserito un materiale dielettrico si trova una tensione tra le armature (cariche con la stessa carica di prima) $V (\neq V_0)$. se la regione tra le armature è completamente riempita

Il rapporto

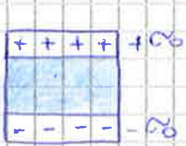
$$\frac{V_0}{V} = \varepsilon_r$$ COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA

è una grandezza caratteristica soltanto del materiale e dalle condizioni di temperatura e pressione dell'esperimento.

$\varepsilon_r > 1$ poiché l'effetto del riempimento con dielettrico è quello di diminuire la tensione a parità di carica.

Cosa succede in un dielettrico quando viene inserito tra le armature di un condensatore carico? O in generale cosa succede ad un dielettrico quando è immerso in un campo esterno?

ε_r è il parametro macroscopico che traduce la risposta del dielettrico a questo campo esterno. I meccanismi che governano il valore di ε_r e quindi la risposta del dielettrico quali sono?



$V = \frac{V_0}{\varepsilon_r} \Rightarrow$ se indichiamo con E il campo all'interno del dielettrico, ovvero all'interno del condensatore quando questo è riempito di materiale isolante (solido, liquido o fluido), noto il campo E_0 che si ha tra le armature del condensatore vuoto:

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

poiché ad una riduzione della tensione tra le armature corrisponde la stessa riduzione del campo elettrico.

Supponendo di avere un condensatore ad armature piane e parallele, sappiamo che:

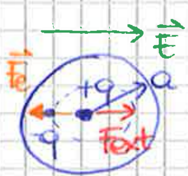
$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ dove σ_0: DENSITÀ DI CARICHE LIBERE

$$\Rightarrow E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \boxed{\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)}$$

σ_p

σ_p: DENSITÀ DI CARICHE DI POLARIZZAZIONE

centri delle cariche positive e negative coincidono.
Supponiamo ora di immergere il nostro atomo in una regione in cui c'è un campo elettrico $\vec{E} \neq 0$. Il campo elettrico sposterà il nucleo positivo verso destra, e il baricentro delle cariche negative verso sinistra.

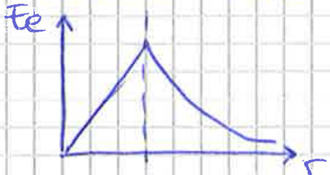


Hp: nuvola omogenea e atomo rigido (non si deforma per effetto del campo esterno).
Applicato il campo $\vec{E}$ il nucleo ed il baricentro delle cariche negative non coincidono più, ma si trovano ad una distanza d.
L'effetto del campo di spostare il nucleo verso destra e la nuvola elettronica verso sinistra continuerà fin quando $\vec{F}_{ext} > \vec{F}_e$.

$$\begin{cases} \vec{F}_{ext} = q\vec{E} \\ \vec{F}_e = q\vec{E}_e = q\,\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{qd}{a^3} \end{cases}$$

→ campo dovuto al dipolo formato dai baricentri positivo e negativo post. a distanza d l'uno dall'altro

Campo dovuto agli e⁻ nella posizione in cui si trova il nucleo → avuto dentro una sfera carica uniformemente ad una distanza d dal centro della sfera



La condizione di equilibrio è: $\vec{F}_e = -\vec{F}_{ext} \Rightarrow |\vec{E}_e| = |\vec{E}_{ext}|$

$$\Rightarrow \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = E \Rightarrow \underbrace{qd}_{[C\cdot m]} = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E = \varepsilon_0(4\pi a^3)E$$

$[C \cdot m]$ <u>momento di dipolo</u> $\vec{p}$

È un momento di dipolo indotto in quanto prima di applicare il campo esterno l'atomo era neutro ed i centri di carica coincidevano.

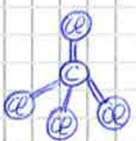
$$p = \varepsilon_0 \alpha_a E$$

→ p proporzionale ad E ⇒ RISPOSTA LINEARE

<u>α_a: POLARIZZABILITÀ ATOMICA</u> costante di proporzionalità tra il momento di dipolo ed il campo elettrico.
Nel nostro modello di atomo $\alpha_a = 4\pi a^3$
ma siccome il volume di una sfera è $\frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow \alpha_a = 3V$ 00:37:29
Questo risultato, valido per il nostro modellino atomico è in realtà valido per molte altre specie atomiche.
Si può verificare sperimentalmente che la polarizzabilità atomica è proporzionale al volume dell'atomo.

qualsiasi che non è né parallelo né perpendicolare p non sarà più parallelo ad E. p sarà // ad E solo quando E è lungo l'asse oppure ortogonale all'asse.

Se si considerano geometrie non lineari:



Tetrafloruro di carbonio

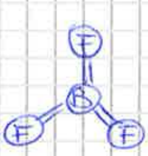
↓

C'è polarità tra i legami, ma la molecola ha un centro di simmetria.

↓

Il centro delle cariche positive e negative coincidono.

→ Complessivamente la molecola non è polare anche se i legami hanno carattere polare.



Trifloruro di boro

Il centro delle cariche positive e delle cariche negative coincidono.

La risposta lineare di queste molecole ad un campo esterno non è più uno scalare ma è un TENSORE:

$$\vec{p} = \bar{\bar{\alpha}} \varepsilon_0 \vec{E}$$

↳ TENSORE DI POLARIZZABILITÀ

Dire che $\bar{\bar{\alpha}}$ è un tensore significa che la componente p_i del momento di dipolo $(i = x, y, z)$ [p_i ha 3 componenti] si può scrivere

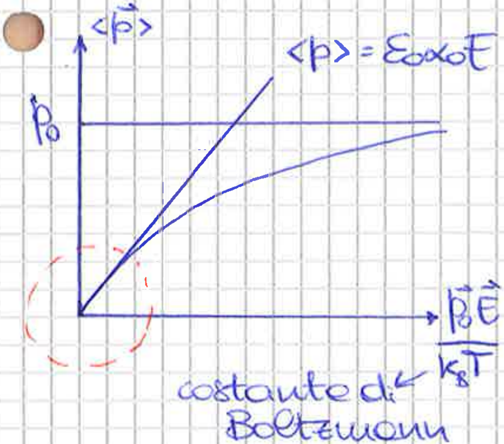
$$p_i = \varepsilon_0 \sum_j \alpha_{ij} E_j$$

Cioè la componente lungo una certa direzione del momento di dipolo indotto dipende non solo dalla componente lungo quella direzione del campo, ma dipende dalle 3 componenti (x, y, z).
La relazione che lega le componenti di x alle componenti di E è la relazione che si traduce sostituendo ad α una matrice 3x3, in cui le varie componenti sono α_{ij} che ci dicono come si crea una componente x, y, z del momento di dipolo per effetto del campo elettrico E che ha componenti lungo x, y, z.

Il caso più generico possibile di dielettrico è quello il cui costituente elementare sia una molecola un po' complessa per la quale la costante di proporzionalità α non è un semplice scalare, ma qualcosa di più complicato.

e parallelamente ad E.
Nella realtà l'andamento non è così semplice perché per campi piccoli tutti i mezzi rispondono elasticamente (l'estensione della risposta elastica dipende dal materiale e dalla sostanza).
Se il campo elettrico è molto forte si possono avere deformazioni che vanno come il quadrato o come il cubo (o potenze successive), ma se è davvero molto forte, il campo elettrico può ionizzare la molecola, superato un valore critico, ed il materiale da isolante può diventare un conduttore.
Utilizzando il modello elementare ci limitiamo a considerare la regione di proporzionalità tra p ed E, ovvero la regione in cui la risposta del mezzo è elastica.

DIELETTRICO POLARE

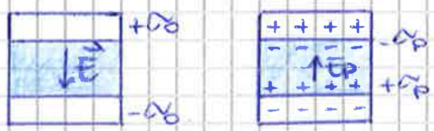


L'obiettivo è di avere un momento di dipolo massimo possibile, cioè di allineare tutti i dipoli spontanei, naturali, intrinseci (che il materiale possiede poiché sono quelli delle sue molecole) con il campo.
Quando il campo E = 0 non si ha un momento di dipolo medio poiché abbiamo tante molecole, ed ognuna di esse ha il suo momento di dipolo ~~medio~~, però sono tutti orientati a caso ⇒ ogni molecola orienta il suo momento di dipolo come le pare, e facendo la somma vettoriale di questo numero di avogadro di momenti di dipolo (vettori) si ha risultato nullo.
⇒ Quando il campo esterno è nullo, anche in un ~~molecola~~ dielettrico polare non si ha un momento di dipolo medio.
All'aumentare del campo il momento di dipolo medio aumenta e tende al valore p_0.
È opportuno indicare sull'asse delle ascisse non tanto il valore del campo, ma piuttosto il rapporto tra 2 energie.
Quando accendo un campo esterno questo tende a far oscillare il dipolo intrinseco attorno alla direzione del campo, ma siccome il mezzo è composto da un numero di avogadro di dipoli, vi saranno degli urti che tendono a deviare la posizione del dipolo. La frequenza degli urti dipende dalla temperatura ⇒ la risposta del mezzo è legata alla temperatura. Perciò la risposta dipende da una energia che è le-

menti e un tensore.
La polarizzazione P è un CAMPO UNIFORME solo se il materiale è OMOGENEO.
La polarizzazione è proporzionale ad $\vec{E}$ se il materiale è LINEARE; se si va oltre il campo della linearità la suscettività è funzione del campo ⇒ per materiali non lineari χ è funzione del campo $\vec{E}$, se il materiale è anche non isotropo χ è anche legata alla direzione del campo attraverso una matrice (χ è un tensore).

CARICHE DI POLARIZZAZIONE

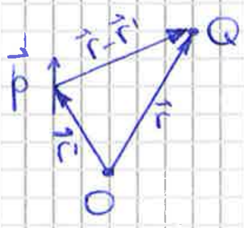
Le cariche di polarizzazione hanno una realtà fisica.



All'interno del materiale, che è costituito da tanti dipoli elettrici orientati tutti con l'estremità positiva verso il basso a causa del campo elettrico generato dalle armature, supponendo il dielettrico uniforme, tutte le terminazioni positive o negative dei dipoli sono circondate da altri dipoli in modo da compensarsi. La compensazione non avviene sulle superfici di compensazione dei dielettrici, ovvero sulle facce superiore ed inferiore. Si forma uno strato di carica negativa sulla superficie superiore ed uno di carica positiva su quella inferiore.

RELAZIONI TRA VETTORE POLARIZZAZIONE E DENSITÀ DI CARICHE DI POLARIZZAZIONE

Scriviamo il potenziale V prodotto da un singolo dipolo $\vec{p}$ in un punto Q dello spazio:



$\vec{r}'$: posizione del dipolo elementare
$\vec{r}$: vettore posizione del punto Q nel quale vogliamo calcolare il potenziale prodotto dal dipolo
$\vec{r}-\vec{r}'$: posizione di Q rispetto al centro di dipolo.

$$V(Q) = V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'}}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}$$

Per definizione

$$\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r}'} = \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$$\Rightarrow V(Q) = V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V \vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV - \int_V \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot \vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')\, dV\right]$$

Applicando ora il TEOREMA DELLA DIVERGENZA AL 1° INTEGRALE DI VOLUME: l'integrale di volume della divergenza si può ricondurre ad un integrale di superficie del flusso

$$V(Q) = V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\oint_{S_c} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot \vec{u}_n\, dS - \int_V \vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,') \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV\right]$$

La polarizzazione ha le dimensioni di un momento di dipolo per unità di volume $\left[\frac{C \cdot m}{m^3} = \frac{C}{m^2}\right] \Rightarrow$ DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA.

$\Rightarrow \vec{P} \cdot \vec{u}_n$ è la componente di $\vec{P}$ perpendicolare alla superficie che delimita il volume V del dielettrico.

$\Rightarrow \sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{u}_n$ DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICHE DI POLARIZZAZIONE

$\Rightarrow$ l'integrale di superficie non è più un flusso, ma è l'integrale di superficie di una grandezza scalare

$$\oint_{S_c} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \cdot \vec{u}_n\, dS = \oint_S \frac{\sigma_P}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dS$$

$\rightarrow$ integrale che ricorda il campo prodotto da una distribuzione di carica $\sigma\, dS$ in un punto distante r dalla distribuzione stessa

$\Rightarrow$ Nel potenziale prodotto dal materiale dielettrico polarizzato in un punto Q, si ha un contributo che si può scrivere come il potenziale prodotto da una distribuzione superficiale di carica che in ogni punto della superficie ha un valore σ_P dato dal modulo della componente normale del vettore polarizzazione in quel punto della superficie.

Per quanto riguarda il secondo integrale di volume a numeratore abbiamo una quantità scalare $[\vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')] \rightarrow$ se P ha le dimensioni di una carica su una superficie la divergenza di P avrà le dimensioni di una carica su un volume (densità volumica di carica):

$$\Rightarrow \int_V \frac{\vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \cdot \vec{P}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV = \int_V \frac{\rho_P}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\, dV$$

dove ρ_P: DENSITÀ VOLUMICA DI CARICA DI POLARIZZAZIONE $\Rightarrow \rho_P = -\vec{\nabla}_{(\vec{r}\,')} \vec{P}(\vec{r}\,')$

RICAPITOLANDO: Preso il dielettrico, si è tradotta l'azione di un campo esterno, ovvero la reazione del dielettrico all'azione di un campo esterno tramite la grandezza VETTORE POLARIZZAZIONE, una volta noto il quale possiamo associare al dielettrico polarizzato 2 distribuzio-

LEGGE DI GAUSS IN PRESENZA DI DIELETTRICI POLARIZZATI:

Quando si è in presenza di un dielettrico la legge di Gauss viene generalizzata, rispetto al caso nel vuoto:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, dS = \frac{(q_0+q_p)_{int}}{\varepsilon_0}$$

Nel vuoto: $\Phi(\vec{E}) = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

In presenza di un dielettrico polarizzato il flusso $d\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa sarà uguale alla sommatoria delle cariche libere e delle cariche di polarizzazione racchiuse nella superficie scelta.

Applicando il TEOREMA DELLA DIVERGENZA:

$$\oint_S \vec{E}\cdot\vec{u}_n\, dS = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V(\rho_0+\rho_p)\, dV$$

Le cariche q_0 e q_p possono anche essere scritte come un integrale di volume della densità di carica volumica.

Gli ultimi 2 integrali devono essere uguali qualsiasi sia il volume o la superficie ⇒ devono essere uguali gli integrandi:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\Big|_P = \frac{1}{\varepsilon_0}\left[\rho_0(P)+\rho_p(P)\right]$$

Ricordando che $\rho_p = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}$

$$\Rightarrow \varepsilon_0(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \rho_0 - \vec{\nabla}\cdot\vec{P}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\underbrace{(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})}_{\vec{D}} = \rho_0 \quad \text{dove } \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$$

VETTORE INDUZIONE DIELETTRICA O VETTORE SPOSTAMENTO

$$\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho_0$$

In termini di integrale: $\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{D}\, dV = \int_V \rho_0\, dV$

Applicando il teorema della divergenza: $\oint_S \vec{D}\cdot\vec{u}_n\, dS = \oint_S(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot\vec{u}_n\, dS = q_{0,int}$

LEGGE DI GAUSS IN PRESENZA DI MATERIALI DIELETTRICI

NB. Se si ha un materiale dielettrico che riempie uno spazio in cui si ha una distribuzione di cariche libera (unica cosa a noi nota, infatti in genere non si conosce la distribuzione di cariche di polarizzazione) si può calcolare $\vec{D}$, attraverso cui si può ricavare $\vec{E}$: $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} = \varepsilon_0\vec{E}+\varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}$

Note ε_r o χ_e ⇒ $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

41

LEZIONE 08/11/17

CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE

CORRENTE ELETTRICA DI CONDUZIONE: moto macroscopico di cariche libere per effetto dell'applicazione di un campo $\vec{E}$.

EQUILIBRIO ELETTROSTATICO DI UN CONDUTTORE: condizione in cui le cariche non si muovono più all'interno dello stesso

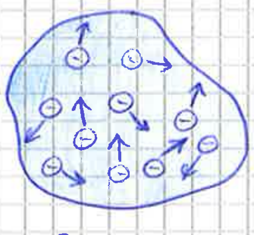
(1) INTRODUZIONE ALLA CONDUZIONE ELETTRICA
- Corrente elettrica di conduzione;
- Legge di conservazione della carica;
- Corrente elettrica stazionaria.

(2) RESISTENZA ELETTRICA
- Leggi di Ohm.

(3) FORZA ELETTROMOTRICE

(4) ENERGIA E POTENZA DI UNA CORRENTE ELETTRICA
- Effetto Joule.

(1) INTRODUZIONE ALLA CORRENTE ELETTRICA



$v_m = 0$

Se in equilibrio elettrostatico il conduttore ha campo nullo ($\vec{E}=0$) al suo interno e le cariche sono ferme (CONCETTO STATISTICO: le cariche non sono ferme all'interno del materiale; il concetto di cariche ferme è inteso come EQUILIBRIO STATISTICO: gli e o gli ioni si muovono più o meno macroscopicamente, ma in media, considerando un numero statisticamente ~~positivo~~ significativo di e^- o ioni il moto complessivo è nullo.

$\Rightarrow$ EQUILIBRIO STATISTICO $\rightarrow$ se $\vec{E}=0 \Rightarrow \langle \vec{v}_m \rangle = 0$

vettore velocità mediato su un numero statisticamente positivo

Con che velocità si muovono le particelle?

Il solido metallico può essere considerato come un contenitore in cui si può immaginare si muova un gas di e^- (quelli liberi condivisi da ciascun atomo/molecola). Ad ogni particella del "gas" per l'equipartizione dell'energia corrisponde una energia cinetica media

$$\bar{E}_k = \underbrace{\frac{3}{2} k_B T}_{\text{equipartizione dell'energia}} = \frac{1}{2} m \bar{v}_T^2$$

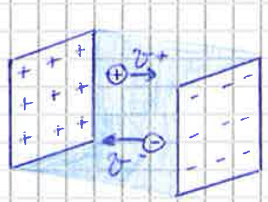
$\rightarrow$ È tutta energia cinetica poiché i gas subiscono energie potenziali trascurabili

COSTANTE DI BOLTZMANN

Ad una certa T nota la massa delle particelle e k_B si ricava la VELOCITÀ TERMICA.

I portatori di carica non sono sempre gli stessi, dipende dal tipo di processo che stiamo studiando:
- conduttori metallici → elettroni;
- materiali semiconduttori: il loro comportamento dipende dalla temperatura, a T=0K i semiconduttori sono perfetti ISOLANTI (banda di valenza piena e banda di conduzione vuota, separate da un certo intervallo di energia); aumentando la T si ha la promozione di elettroni e^- alla banda di conduzione. Nei semiconduttori i portatori di carica sono di 2 tipi: e^- in banda di conduzione, lacune in banda di valenza. Con il drogaggio si può generare un eccesso di portatori di un segno o di un altro.
- gas ionizzati:
- soluzioni elettrolitiche

} si hanno portatori di entrambi i segni; gas o sali disciolti in un solvente spontaneamente si dissociano in ioni positivi e negativi, entrambi caratterizzati da una loro mobilità.



In tutti i casi comunque, il moto delle cariche sotto l'azione del campo esterno è ostacolato dal mezzo → RESISTENZA: responsabile del frenamento delle cariche, è una sorta di attrito viscoso.

Corrente elettrica di conduzione

Quando si applica un campo $\vec{E}$ in una regione dello spazio dove transita una carica q, questa è soggetta ad una forza $\vec{F} = q\vec{E}$. Supponendo $\vec{E}$ costante ed uniforme la carica subirebbe una forza costante ⇒ MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO → se ci fosse solo questa forza e la particella non sperimentasse la resistenza del mezzo la velocità aumenterebbe nel tempo. Nella realtà si arriva ad una condizione di velocità limite o di regime che per i portatori di carica la ~~pegh~~ chiamiamo VELOCITÀ DI DERIVA.

Infatti se andiamo a calcolare la velocità media sul nostro volumetto piccolo quanto basta (mediando statisticamente) troviamo un campo di velocità che indichiamo con $\vec{v}_d$.

Sommando i contributi di tutti i tubi di flusso:

$$i = \int di = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u_n}\, dS \qquad \text{dove } \vec{J} = nq\vec{v_d} = \rho_c \vec{v_d}$$

flusso del vettore densità di corrente

i: scalare, dà informazioni globali

$\vec{J}$: vettoriale, è una grandezza locale.

$$\vec{J}(P) = \rho_c(P)\, \vec{v_d}(P)$$

La densità di corrente è misurata in A/m^2 (corrente su superficie).

SE $u_n // \vec{J}$: superficie disposta perpendicolarmente al flusso delle cariche e SE $\vec{J}$ UNIFORME:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{u_n}\, dS = \int_S J S = J S$$

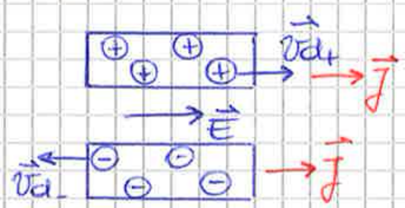
Se si hanno cariche dei 2 segni (semiconduttore, gas ionizzato o soluzione elettrolitica) si avrà una densità di corrente $\vec{J}$ che tiene conto delle cariche di ciascun segno:

$$\vec{J} = \vec{J}_+ + \vec{J}_- = n_+ q_+ \vec{v_d}_+ + n_- q_- \vec{v_d}_-$$

le cariche positive si muovono nel verso di $\vec{E} \Rightarrow \vec{J}_+ // \vec{E}$;

" " negative si muovono nel verso opposto ad $\vec{E} \Rightarrow \vec{J}_- // \vec{E}$ (prodotto tra un vettore ed uno scalare negativo.)

$\Rightarrow$ A prescindere dal segno dei portatori di carica, si ha comunque un flusso un trasporto, descritto dal vettore $\vec{J}$ che va sempre nella direzione del campo elettrico.



In generale si ragiona come se anche in conduttori metallici i portatori di carica siano positivi.

$\Rightarrow$ "Non è possibile correlare, su scala macroscopica, il verso della corrente al segno dei portatori di carica".

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 214

$\Rightarrow i = -\frac{dq_{int}}{dt}$ la carica che non troviamo più nel volume deve chiaramente essere uscita da qualche parte attraverso la superficie che racchiude il volume ⇒ abbinata a questo flusso netto di carica abbiamo una intensità di corrente i che possiamo scrivere come variazione della carica rispetto al tempo, perché in realtà la carica all'interno diminuisce, ma questo corrisponde ad una corrente positiva uscente dalla superficie.

Infatti: $$i = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS$$

Per convenzione quando si ha una superficie chiusa il versore normale a questa si orienta verso l'esterno ⇒ una perdita di cariche dall'esterno corrisponde ad un flusso di cariche positivo.

teorema della divergenza

$$\Rightarrow -\frac{dq_{int}}{dt} = i = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV$$ dove V è il volume delimitato dalla superficie S.

ma $$\frac{dq_{int}}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,y,z,t) \, dV$$

$$\Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dV = -\int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(x,y,z,t) \, dV$$

I due integrali devono essere uguali qualunque sia il volume, poiché la superficie chiusa è arbitraria.

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \Big|_P = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(P)$$

EQUAZIONE DI CONTINUITA' DELLA CORRENTE

la divergenza del vettore densità di corrente calcolata in un qualsiasi punto della regione che ci interessa deve essere uguale all'opposto della derivata parziale fatta rispetto al tempo della densità di carica calcolata nello stesso punto. Questa è la legge formale che traduce il principio di conservazione della carica per un sistema isolato, o meglio traduce cosa succede in un sistema definito in una regione limitata, cambia la quantità di carica poiché c'è stato un flusso di carica.

L'equazione di continuità della corrente stabilisce un legame puntuale tra $\vec{J}$ e ρ.

Corrente elettrica stazionaria

In regime STAZIONARIO: le grandezze fisiche non dipendono dal tempo:

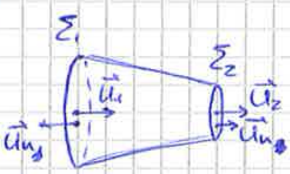
$\frac{\partial}{\partial t} * = 0$ la derivata parziale fatta rispetto al tempo di qualunque grandezza fisica è nulla.

$\oint_{\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_e} \vec{J}\cdot\vec{u_n}\, dS = 0$ → per definizione di flusso di J in regime stazionario.

Il flusso attraverso la superficie laterale sarà nullo per definizione di tubo di flusso ($\vec{J} \perp \vec{u_n}$).

Il flusso attraverso le 2 basi sarà uguale ed opposto poiché altrimenti la loro somma non darebbe zero.

$$\int_{\Sigma_1} \vec{J_1}\cdot\vec{u_n}\, dS + \int_{\Sigma_2} \vec{J_2}\cdot\vec{u_2}\, dS = 0$$



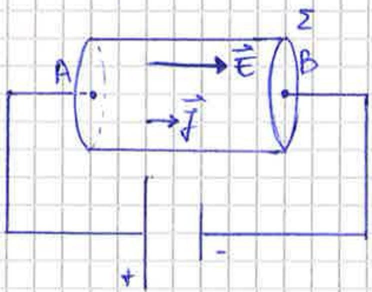
$\vec{u_1} = -\vec{u_n}$ ⇒ $\underbrace{-\int_{\Sigma_1} \vec{J_1}\cdot\vec{u_n}\, dS}_{i_1} + \underbrace{\int_{\Sigma_2} \vec{J_2}\cdot\vec{u_n}\, dS}_{i_2} = 0$

⇒ $\boxed{i_1 = i_2}$ ⇒ se $\vec{J}$ è SOLENOIDALE e siamo in REGIME STAZIONARIO.

⇒ Attraverso una qualsiasi sezione del conduttore percorso da corrente, il valore di carica che passa nell'unità di tempo è lo stesso. La corrente è costante in tutti i punti del conduttore. ⇒ Dove si ha un restringimento del condotto $\vec{J}$ sarà maggiore! (Dove si ha una strozzatura le particelle vanno più veloci).

③ RESISTENZA ELETTRICA

Quando si ha un flusso di carica nella materia c'è sempre un qualcosa che tende a frenare il movimento.



Consideriamo un conduttore metallico a cui è applicata una ddp, alle estremità A e B, tramite un generatore di fem.

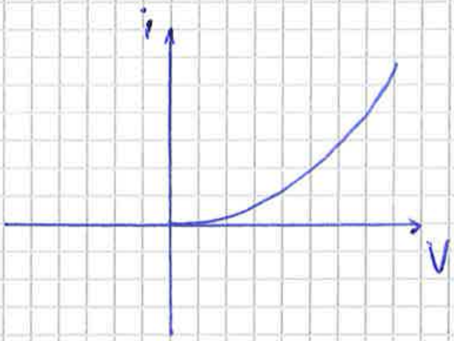
$V_A > V_B$

Stabilita la ddp si genera un campo elettrico $\vec{E}$ all'interno del conduttore, si ha dunque un moto di cariche che se sono negative andranno da B verso A, se sono positive andranno da A verso B.

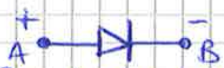
Le cariche positive vanno da zone a potenziale maggiore a quelle a potenziale minore, le negative viceversa, ma entrambe si spostano in modo da diminuire l'energia potenziale.

La ddp $V_A - V_B$ è nota poiché data dal generatore (o comunque è misurabile tramite un voltmetro). Alla tensione è associato un campo $\vec{E}$ ed a questo un moto di cariche descritto dal vettore densità di corrente $\vec{J}$. ~~dal~~ il

CURVA CARATTERISTICA DI UN CONDUTTORE NON OHMICO



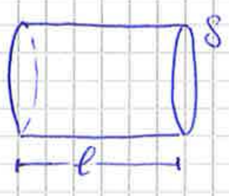
Dispositivo importante in elettronica chiamato DIODO e rappresentato in un circuito con il simbolo



sul quale viene rappresentato sui morsetti il simbolo relativo al polo della pila al quale va collegato.

In un conduttore ohmico andare a tensioni o correnti negative vuol dire solamente invertire la polarità del collegamento; quando si ha a che fare con componenti circuitali non ohmici non è indifferente la polarità.
Nel caso raffigurato se si applica una tensione per cui il potenziale a sinistra è maggiore del potenziale a destra ($V_A - V_B > 0$) ⇒ si ha corrente (non è lineare). Collegando A con il polo negativo del generatore ed il polo B con il polo negativo ⇒ si sta lavorando con $V_A - V_B < 0$ e non passa corrente. In meccanica dei fluidi il dispositivo è equiparabile ad una valvola di non ritorno.

Esiste una SECONDA LEGGE DI OHM: Preso un conduttore di forma cilindrica omogeneo di lunghezza data e sezione costante.



Per i conduttori ohmici si può stabilire una relazione semplice che permette di scorporare dal parametro R (come costante di proporzionalità nella prima legge) dei contributi di diversa natura:

- un contributo legato al materiale (ρ)
- " " " alla geometria (ℓ/S)

$$R = \rho \frac{\ell}{S} = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$$ → Seconda legge di Ohm

ρ : RESISTIVITÀ ELETTRICA $[\Omega m]$

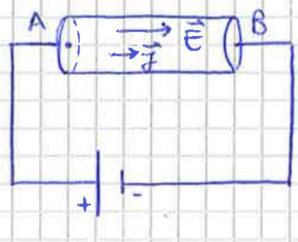
$\sigma = \frac{1}{\rho}$: CONDUCIBILITÀ ELETTRICA

RESISTIVITÀ:
Un conduttore ideale dovrebbe avere resistività nulla.
La resistività cambia al cambiare della temperatura, poi possono cambiare anche ℓ, S (fattori geometrici), ⇒ la resistenza cambia con la temperatura.
Se l'intervallo di temperatura non è molto grande la dipendenza di ρ dalla temperatura può essere approssimata con uno sviluppo al 1° ordine:

$$\rho = \rho_{20}(1 + \alpha \Delta t)$$

Legge di Ohm della conduzione elettrica

Prendiamo un conduttore cilindrico con sezione e lunghezza note e applichiamogli una tensione $V_A - V_B$ alle estremità. Il conduttore è OMOGENEO.



All'interno del conduttore si stabilisce un campo elettrico dovuto alla ddp.
$V_A - V_B > 0 \Rightarrow$ il potenziale è maggiore in A $\Rightarrow$ le linee del campo elettrico vanno da A verso B.

- $E = \frac{V_A - V_B}{\ell}$

Alla differenza di potenziale che genera E corrisponde un moto di carica, poiché ogni particella risente dell'azione di una forza $\vec{F} = q\vec{E}$. Il moto delle cariche è descrivibile con il vettore densità di corrente, indipendentemente dal segno delle cariche poiché $\vec{J}$ in ogni caso è parallelo e concorde ad $\vec{E}$.
La corrente di conduzione i è calcolabile come flusso di $\vec{J}$ attraverso la

$i = \oint_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n \, dS = JS$

sezione S, ma siamo, vista la geometria del conduttore, nella situazione in cui $\vec{J} \parallel \vec{u}_n$. Inoltre siccome il ~~vettore~~ campo è UNIFORME, anche il moto delle cariche è uniforme.

$$\Rightarrow J = \frac{i}{S}$$

- $\ell \cdot E = V_A - V_B$

Supponiamo che il nostro materiale obbedisca alla legge di Ohm

$V_A - V_B = R \cdot i$ 1ª legge di Ohm

la seconda legge di Ohm ci dice come è fatta la resistenza:

$R = \rho \frac{\ell}{S}$ 2ª legge di Ohm

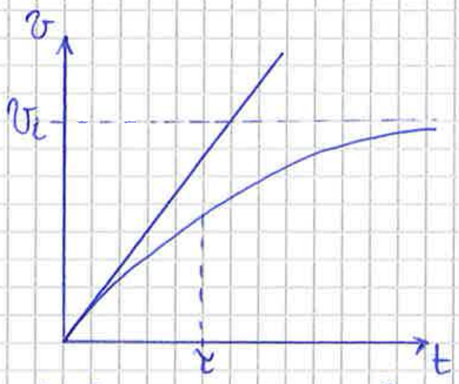
$$\Rightarrow \ell E = V_A - V_B = Ri = \rho \frac{\ell}{S} i \quad \text{ma} \quad i = JS \Rightarrow \frac{i}{S} = J$$

$$\Rightarrow \ell E = \rho \ell J$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{E}(P) = \rho \vec{J}(P) \\ \vec{J}(P) = \sigma \vec{E}(P) \end{cases}$$

FORMULAZIONE LOCALE O PUNTUALE DELLA LEGGE DI OHM
All'interno del conduttore percorso da corrente, in ogni punto, c'è un campo elettrico $\vec{E}$, legato al vettore densità di corrente in quel punto in modo proporzionale.

proporzionale alla velocità.



Se non ci fosse la forza di attrito la velocità aumenterebbe linearmente (moto uniformemente accelerato). Per effetto dell'attrito viscoso l'inizio è abbastanza lineare, poi si ha una deviazione dall'idealità. Quando aumenta la velocità aumenta anche la forza di attrito fino a che l'attrito viscoso non è tale da compensare la forza peso e la particella cade con moto uniforme con velocità limite (o velocità di regime) → quella velocità che la particella assume quando è passato abbastanza tempo dall'inizio della caduta. C'è un parametro caratteristico del moto che descrive l'intervallo di tempo necessario:

$$m\frac{dv}{dt} = qE - kv$$ equazione differenziale lineare del 1° ordine a coefficienti costanti non omogenea

la soluzione dice che la velocità aumenta nel tempo con una legge non lineare:

$$v(t) = v_d\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

v_d ↓ velocità limite che nel nostro caso è la velocità di deriva

τ è il parametro caratteristico.

τ e v_d dipendono dai parametri del nostro modello:

$v_d = q\frac{E}{k}$ k: coefficiente di viscosità

↳ tanto maggiore è la viscosità quanto più piccola è la velocità limite

$\tau = \frac{m}{k}$ m: massa della particella
τ: tempo di rilassamento

[Nella teoria di Drude-Lorentz τ è il tempo medio tra un urto e l'altro].

Dopo che è passato un intervallo di tempo τ rispetto all'istante iniziale la velocità è 2/3 della velocità limite ⇒ dopo 4 o 5 costanti di tempo si è molto vicini al valore della velocità limite (valore asintotico).

$$v_d = q\frac{E}{k} \quad \text{ma} \quad k = \frac{m}{\tau} \Rightarrow v_d = q\frac{E\tau}{m}$$

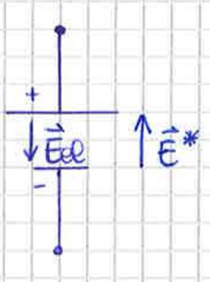
Andando a sostituire nell'espressione del vettore densità di corrente il valore trovato (nel modellino) della velocità di deriva:

trovano sul fondo del piano inclinato, e riportarle in cima. Per effettuare questo processo, che da solo la forza peso non può compiere, bisogna applicare una forza (maggiore della forza peso).
Calcoliamo l'integrale di linea della forza risultante applicata alle palline in tutto il percorso chiuso:

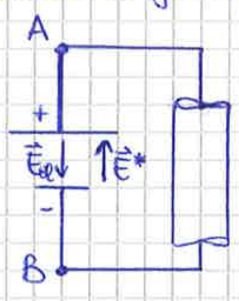
$$\oint (\vec{F_P} + \vec{f}) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{f} \cdot d\vec{l} \neq 0$$

L'integrale di linea su un percorso chiuso della forza peso è nullo.
" " " " " " " " " applicato per riportare le palline sulla sommità del piano inclinato è diverso da zero e positivo poiché fa lavoro sul sistema.

CAMPO ELETTROMOTORE:



Consideriamo un generatore. Supponiamo sia una pila di Volta all'interno della quale vi sono processi chimici che generano un accumulo di cariche di segno opposto. Queste cariche vengono spostate da un CAMPO ELETTROMOTORE che agisce in modo da portare le cariche positive dal basso verso l'alto, facendo fare a queste cariche un moto non naturale poiché vanno da punti a potenziale più alto a punti a potenziale più basso.
Il CAMPO ELETTROMOTORE è un campo di natura NON ELETTROSTATICA, NON CONSERVATIVO che non è un campo vero e proprio ma che utilizziamo per descrivere quei fenomeni che portano all'accumulo di carica ~~xxxx~~ di segno opposto.
Le due ~~xxxxxxxxx~~ distribuzioni di carica generano un campo ELETTROSTATICO diretto dalle cariche positive a quelle negative che contrasta l'azione del campo elettromotore.
Ad un certo punto si arriva ad una condizione di equilibrio per cui il processo si ferma e i due campi risultano uguali e opposti.
Andiamo ora a valutare la circuitazione del campo elettrico pensando di chiudere il generatore su una resistenza esterna.



$\vec{E} = \vec{E}^* + \vec{E}_{el}$

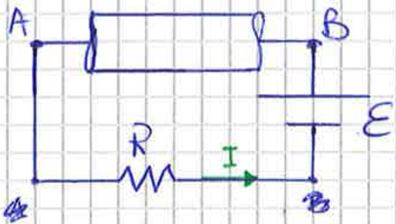
All'interno del generatore agiscono il campo elettromotore ed il campo elettrostatico, fuori dal generatore agisce soltanto il campo elettrostatico.

$$\oint (\underbrace{\vec{E}_{el}}_{\text{conservativo}} + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

ESERCITAZIONE 3 15/11/17

(1) Un conduttore non ohmico ha una caratteristica corrente-tensione rappresentata dalla relazione $i(V)=kV^2$; dove $k=10^{-6}\,AV^{-2}$ (per V si considerano solo valori positivi). Il conduttore viene posto in serie con una resistenza $R=20k\Omega$ e chiuso su un generatore di fem $\mathcal{E}=300V$, di resistenza interna trascurabile. Calcolare in condizioni stazionarie:

- la corrente che circola nel circuito;
- la caduta di tensione sui 2 conduttori;
- la potenza dissipata nel conduttore non ohmico.



Solo il cilindro è NON OHMICO il resto del conduttore è OHMICO:

$$\begin{cases} i=kV^2 & \text{non ohmico} \\ \mathcal{E}-V=R\cdot i & \text{ohmico} \end{cases}$$

↳ tensione che misuro ai capi A-B.

Risolvendo il sistema:

$$V=\mathcal{E}-Ri \Rightarrow i=k(\mathcal{E}-Ri)^2=k\mathcal{E}^2+kR^2i^2-2k\mathcal{E}Ri$$

$$\Rightarrow kR^2i^2-(2k\mathcal{E}R+1)i+k\mathcal{E}^2=0$$

$$\Rightarrow i_{1,2}=\frac{2k\mathcal{E}R+1\pm\sqrt{\cancel{4k^2\mathcal{E}^2R^2}+1+4k\mathcal{E}R-\cancel{4k^2\mathcal{E}^2R^2}}}{2kR^2}=\frac{13\pm5}{800}\,A \begin{cases} i_1=2{,}25\cdot10^{-2}A \\ i_2=0{,}01A \end{cases}$$

Valutiamo per quale i otteniamo valori di tensione probabili:

$V_1=R\cdot i_1=20\cdot10^3\cdot2{,}25\cdot10^{-2}=450V \rightarrow$ IMPOSSIBILE visto che il nostro generatore di tensione alimenta a 300V.

$\Rightarrow$ la corrente che circola nel circuito è $\underline{I=0{,}01A}$.

la tensione misurata ai capi del conduttore ohmico è:

$$V=R\cdot I=20\cdot10^3\cdot0{,}01=200V$$

Perciò la caduta di tensione ai capi del conduttore non ohmico è

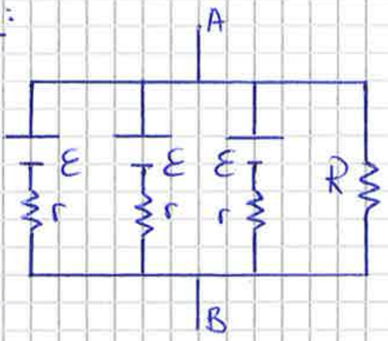
$$\mathcal{E}-V=R\cdot i \Rightarrow V=\mathcal{E}-Ri=300-200=100V$$

la potenza dissipata nel conduttore NON ohmico è:

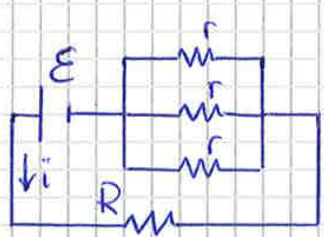
$$P=V\cdot i=100\cdot0{,}01=1W$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 214

• PARALLELO:



$\Rightarrow$



$$\frac{1}{r_{eq}} = \frac{1}{3r} = \frac{1}{3}\,\Omega$$

$$\Rightarrow r_{eq} = 3\,\Omega$$

$$\Rightarrow i = \frac{\mathcal{E}}{r_{eq}+R} = \frac{6}{3+6} = \frac{2}{3}\,\Omega$$

(9) a) Quale deve essere la velocità di un fascio di elettroni affinché l'influenza simultanea di un campo elettrico di intensità $E = 3{,}4 \cdot 10^5\, NC^{-1}$ e di un campo magnetico di intensità $B = 2 \cdot 10^{-2}\, T$, essendo entrambi i campi normali al fascio, non produca alcuna deflessione degli elettroni?

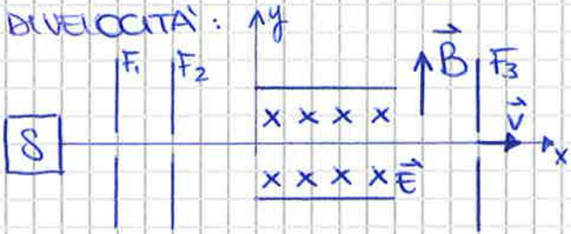
b) Illustrare in un diagramma l'orientazione relativa dei vettori $\vec{v}, \vec{B}$ ed $\vec{E}$.

c) Qual è il raggio dell'orbita dell'elettrone quando il campo elettrico viene rimosso?

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B} \qquad \begin{cases} \vec{v} \perp \vec{B} \\ \vec{F} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\vec{v}\times\vec{B} \qquad v = \frac{E}{B} = \frac{3{,}4\cdot 10^5}{2\cdot 10^{-2}} = 10^7\, m/s$$

Un dispositivo in grado di selezionare gli e⁻ aventi una certa velocità è detto SELETTORE DI VELOCITÀ:



In questo modo solo le particelle aventi velocità $v = E/B$ non verranno deflesse, e sono le uniche in grado di passare la fenditura F_3.

$$\begin{cases} \vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \\ \vec{F} = m\vec{a} \end{cases} \Rightarrow q\vec{v}\times\vec{B} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow qvB = ma_c = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$ → raggio dell'orbita circolare che percorre una particella in moto in un campo magnetico (il campo elettrico è stato spento).

Il campo elettrico cambia il modulo della velocità della particella, il campo magnetico ne modifica la sola direzione (non il modulo)

LEZIONE 16/11/17

...FORZA ELETTROMOTRICE E GENERATORI ELETTRICI

• CAMPO ELETTROMOTORE

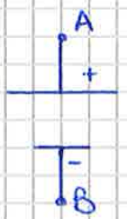
Non diamo una forma analitica precisa al campo elettromotore, poiché spesso neanche possiamo farlo, piuttosto lo vediamo come una schematizzazione di un meccanismo primario di natura non elettrostatica che sposta le cariche all'interno del generatore in modo da creare una differenza di tensione ai suoi capi.

Anche il campo elettromotore agisce sulle cariche con una forza

$$\vec{F} = q\vec{E}_{em}$$

anche se noi non sappiamo come scrivere il campo elettromotore.

- Generatore ideale



Quando il generatore è carico tra i poli si stabilisce una tensione:

$$\mathcal{E} = \int_B^A \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l}$$

FORZA ELETTROMOTRICE: non è una forza!

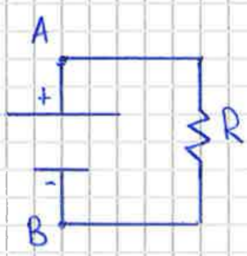
Questo integrale di linea ha le dimensioni di un lavoro diviso per una carica ⇒ la tensione misurata ai capi del generatore è il lavoro che i meccanismi interni, che spostano le cariche, fanno per unità di carica. La tensione è il lavoro che viene fatto per spostare una carica dal morsetto negativo a quello positivo.

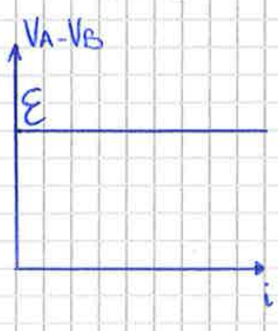
L'accumulo di cariche di segno opposto genera un campo elettrostatico che si oppone all'accumulo prodotto dal generatore. Si arriva ad una situazione di equilibrio in cui il campo elettrostatico è uguale ed opposto al campo elettromotore, e le cariche non si spostano più:

$$\int_B^A \vec{E}_{em} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_{el} \cdot d\vec{l} = V_A - V_B$$

La forza elettromotrice di un generatore non è altro che la differenza di potenziale elettrostatico che si misura ai suoi morsetti a circuito aperto (quando il generatore non è chiuso su niente). → quando non è attraversato da corrente

Chiudendo il circuito su un resistore:





CARATTERISTICA DEL GENERATORE IDEALE

La tensione rimane costante ed uguale alla fem del generatore.

Se il circuito è attraversato da una carica elementare dq, il lavoro compiuto dal generatore per portarla da un morsetto all'altro sarà:

$$W = \mathcal{E}dq$$ → energia che il generatore fornisce alla carica

⇒ moltiplicando ambo i membri dell'equazione $\mathcal{E} = ri + Ri$ per dq avremo:

$$\mathcal{E}dq = ridq + Ridq$$

e a secondo membro avremo l'energia che le cariche perdono quando attraversano il resistore interno r, e la resistenza di carico R.

Ricordando che $dq = idt$

$$\Rightarrow \mathcal{E}idt = ri^2dt + Ri^2dt$$ potenza

e dividendo tutto per dt (stiamo dividendo un lavoro per dt)

$$\mathcal{E}i = ri^2 + Ri^2$$

dove:

$\mathcal{E}i$: potenza fornita dal generatore per far muovere le cariche

ri^2: potenza dissipata nel generatore a causa della sua resistenza interna che il generatore deve vincere per far muovere le cariche anche all'interno di se stesso

Ri^2: potenza dissipata per vincere la resistenza di carico R.

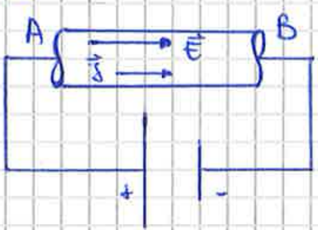
In generale un resistore qualsiasi attraversato da corrente assorbe potenza, definita come la tensione del generatore moltiplicata per la corrente, e se il resistore è un componente ohmico, come Ri^2.

Effetto Joule:

la potenza assorbita dalle resistenze si trasforma in energia interna.

Energia elettrostatica → energia interna.

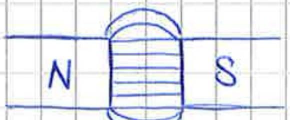
⇒ Aumenta la temperatura del resistore: se non vi è possibilità di scambio con l'esterno, con il passare del tempo il resistore continua ad accumulare energia interna fino a che non fonde.



$$P = \frac{dW}{dt} = (V_A - V_B)i$$

In regime ohmico: $P = Ri^2 = \frac{(V_A - V_B)^2}{R}$

Poli della stessa specie tendono a respingersi tra loro, mentre poli di specie diversa tendono ad attrarsi.



Tra le 2 espansioni polari dei magneti vi è un campo magnetico evidente che ha le linee vettoriali dirette perpendicolarmente ai poli affacciati. Lontano dai bordi è praticamente uniforme. Un altro modo per generare un campo uniforme è quello di usare un'unica calamita piegata a C. Quanto maggiore è la superficie affacciata, quanto più sarà uniforme il campo magnetico lontano dai bordi.

Non esiste il monopolo magnetico, spezzando infatti una calamita si ottengono 2 calamite più piccole (differenza fondamentale con il campo elettrico).

• Campo magnetico terrestre:

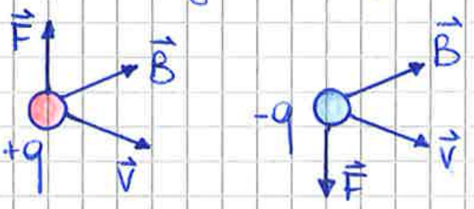
È dovuto a meccanismi che avvengono all'interno della terra in condizioni di temperatura e pressioni elevate.
Le linee di campo del campo magnetico terrestre sono disposte in modo da collegare un polo all'altro, come se all'interno della terra vi fosse un dipolo magnetico, non proprio allineato con l'asse di rotazione della terra questo infatti interseca 2 punti che chiamiamo polo nord e polo sud geografico. L'asse del dipolo in grado di schematizzare questi processi non è allineato con l'asse di rotazione terrestre, ma è inclinato di un certo angolo non ben definito chiamato DECLINAZIONE e che ha, al momento, un valore compreso tra 11° e 15°. L'inclinazione dell'angolo, come anche l'intensità del campo magnetico cambiano nel tempo, ma anche a seconda del posto in cui vengono misurati.
Inoltre cambia la polarità del campo magnetico che al momento è orientato in modo che il polo sud magnetico è rivolto verso il polo nord geografico.
Il campo magnetico terrestre non è uniforme, ma è più intenso dove le linee di campo sono più vicine (in prossimità dei poli). In media il valore del campo magnetico vale:

$$|\vec{B}_{terra}| \cong 0{,}5 \cdot 10^{-4}\, T = 0{,}5\, G$$

Gauss $(1G = 10^{-4} T)$

FORZA MAGNETICA SU UNA CARICA IN MOTO

La carica elettrica può essere una sonda di campo magnetico, infatti quando questa è in moto in una zona in cui vi è un campo magnetico subisce una forza.
Questa forza agisce sempre ortogonalmente alla velocità, ed è chiamata parte magnetica della forza di Lorentz.



$$\vec{F}_B = q\vec{v}\times\vec{B}$$

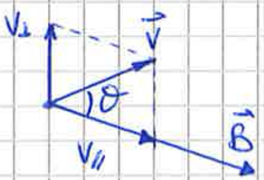
È una forza ortogonale al piano individuato dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{B}$ ed è proporzionale alla carica con il suo segno!
La particella carica però interagisce anche con il campo elettrostatico

$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ FORZA DI LORENTZ

NB. Parlando di campo elettrostatico, la forza è sempre parallela ad $\vec{E}$

• CASO GENERALE

Caso in cui v non è né ⊥ né // a B.



Possiamo scomporre la velocità nelle 2 componenti

$$\vec{v} = \vec{v}_{//} + \vec{v}_\perp$$

$$\Rightarrow \vec{F} = q(\vec{v}_{//} + \vec{v}_\perp) \times \vec{B}$$

Ma $\vec{v}_{//} \times \vec{B} = 0$ poiché sono vettori paralleli.

⇒ la parte magnetica della forza di Lorentz è attiva solo sulla componente della velocità perpendicolare a B.

⇒ Possiamo studiare il moto della particella decomponendolo in 2 moti che avvengono in direzioni diverse: il moto dato dalla velocità parallela, non influenzato dalla presenza del campo → moto che avviene nella direzione di B e che se ci fosse solamente $v_{//}$ la particella si muoverebbe di moto rettilineo uniforme; il moto circolare dato da $v_\perp$ e di raggio

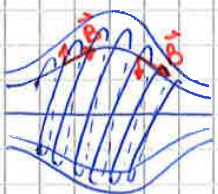
$$r = \frac{m v_\perp}{qB}$$

La composizione di questi 2 moti forma una traiettoria ad elica di passo:

$$p = v_{//} T = \frac{2\pi m}{qB} v\cos\vartheta \quad \text{PASSO DELL'ELICA}$$

CONSEGUENZE DELLA FORZA DI LORENTZ:

- Fasce di Van Allen:



Campo magnetico non uniforme, più intenso lontano dal centro.
Questa struttura è chiamata BOTTIGLIA MAGNETICA poiché il campo cambia sia in intensità che in direzione.
Quando una particella carica entra in questa bottiglia e comincia a seguire la traiettoria ad elica attorno alle linee di campo quando arriva al fondo sente l'interazione con una forza che la rimanda indietro e così quando raggiunge l'altra estremità. ⇒ Resta intrappolata nella regione centrale.

Il campo magnetico terrestre è un esempio di bottiglia magnetica che confina particelle cariche prodotte dal sole oppure altre particelle prodotte da fenomeni di ionizzazione dell'atmosfera dovuti ai raggi cosmici. Ci sono allora 2 zone di confinamento di particelle a distanza molto grande e prendono appunto il nome di fasce di Van Allen. Non è un confinamento perfetto, infatti qualche particella sfugge dalle zone terminali della bottiglia magnetica, ovvero parlando del campo magnetico terrestre nelle zone in prossimità dei poli e questo produce le aurore polari.
Le aurore polari sono dovute al fatto che quando le particelle escono dalle fasce di Van Allen possono urtare le particelle dell'atmosfera cedendo gli energia e quindi le molecole o atomi vengono eccitati e poi tornano allo stato fondamentale emettendo radiazione elettromagnetica che può essere nel visibile oppure no.

APPLICAZIONI DELLA FORZA DI LORENTZ:

- spettrometro di massa;
- selettore di velocità;
- ciclotrone;
- effetto Hall.

le 2 iniziali, questa verrà attraversata da quelle particelle che hanno velocità tale da bilanciare l'effetto delle forze elettrica e magnetica, che non vengono dunque deviate, per le quali:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0 \implies v = \frac{E}{B}$$

le particelle aventi v maggiori rispetto a $v = E/B$ saranno deflesse dal campo magnetico, mentre quelle che hanno velocità inferiore vengono deflesse dal campo elettrico.

CICLOTRONE

Nasce come acceleratore di particelle.
In una regione dello spazio in cui vi è un campo magnetico sono inseriti 2 conduttori cavi a semidisco, al centro dei quali vi è la sorgente di particelle cariche. Applicata una ddp tra i 2 conduttori, le particelle cariche vengono accelerate ed entrano all'interno di uno dei 2 conduttori, all'interno dei quali, essendo cavi non vi è campo elettrico. Le cariche risentono però dell'azione del campo magnetico che fa compiere alle stesse una semicirconferenza fino all'uscita dalla prima D; se la tensione rimanesse la stessa tra i 2 conduttori la particella si trova in un punto a potenziale minore e si trova davanti un punto a potenziale maggiore $\implies$ è frenata! Per questo mentre la particella percorre la semicirconferenza si inverte la polarità dei collegamenti:

$$V = V_0 \sin \omega t$$

Questo si ottiene collegando i 2 conduttori ad un generatore di tensione alternata che ci dà una tensione che oscilla nel tempo con una pulsazione opportuna, o con una frequenza opportuna che in genere ricade nello spettro delle radiofrequenze:

$$\nu_{RF} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{qB}{2\pi m} \qquad \text{FREQUENZA DI CICLOTRONE}$$

Dunque la particella compie una prima semicirconferenza di raggio r, la sua velocità non cambia per effetto del campo magnetico (che non fa lavoro sulle particelle) esce dal conduttore con la stessa velocità con cui vi è entrata, viene accelerata dalla tensione tra i conduttori a cui viene cambiata la polarità, compie una seconda circonferenza di raggio maggiore poiché la sua velocità è aumentata (r è direttamente proporzionale a v). Adesso bisogna aggiustare la radiofrequenza con la frequenza di ciclotrone poiché se non cambio la polarità in fase con l'uscita della particella a volte l'accelero e a volte la decelero, quindi bisogna accordare ω o ν a ω e ν di ciclotrone. Osserviamo come la frequenza di ciclotrone non dipende dalla velocità v o dal punto in cui siamo della spirale $\implies$ la frequenza è la stessa indipendentemente da quanto siano ampie le semicirconferenze.
Il limite massimo del raggio dell'orbita è il raggio del conduttore R che pone il limite della velocità massima raggiungibile dalla particella:

$$v_{MAX} = \frac{qBR}{m}$$

Quando le velocità delle particelle in uscita diventano confrontabili con la velocità della luce bisogna apportare delle correzioni relativistiche.

LEZIONE 22/11/17

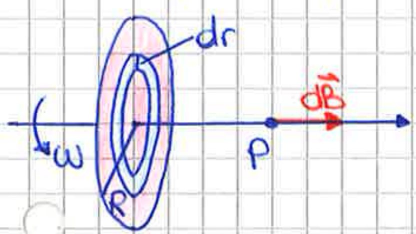
CAMPI MAGNETICI GENERATI DA CARICHE IN MOTO

• ESPERIENZA DI OERSTED:

Un filo percorso da corrente. Immaginiamo di avvicinarci al filo con un ago magnetico e si nota come l'ago, che in assenza di corrente è allineato con il campo magnetico terrestre, si orienta in modo da disporsi tangente ad una circonferenza avente come asse il filo stesso. ⇒ Le linee vettoriali del campo magnetico così generato sono delle circonferenze concentriche al filo. Invertendo il verso della corrente l'ago ruoterà di 180°.

• DISCO DI ROWLAND:

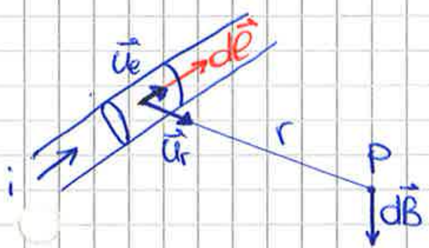
Le cariche sono in moto, ma non nel senso di corrente in una matrice cristallina, nel senso di corpo carico in moto.
Il disco di Rowland è appunto un esempio in quanto le cariche non si muovono nel disco, ma è quest'ultimo che ruota attorno al suo asse.
Anche questo tipo di movimento di cariche può generare un campo magnetico.



CAMPO MAGNETICO GENERATO DA CORRENTI STAZIONARIE

Dopo svariati esperimenti si è arrivati alla conclusione che un qualsiasi circuito attraversato da corrente, in quiete in un sistema di riferimento inerziale, genera un campo magnetico che se la corrente è stazionaria è un campo magnetostatico (non dipende dal tempo).
Questo campo può essere calcolato come somma di contributi infinitesimi. Supponiamo di avere un conduttore filiforme percorso da corrente stazionaria i:

$d\vec{l} = dl\,\vec{u}_l$ dove $\vec{u}_l$ è il versore tangente al filo ed orientato nel verso della corrente.



Quanto vale il campo magnetico prodotto dal tratto infinitesimo di filo dl in un punto P?
La posizione di P rispetto a dl la individuiamo con un versore $\vec{u}_r$:

$$\vec{r} = r\,\vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$ è un versore radiale uscente dall'elemento di corrente $i\,d\vec{l}$ ed è diretto verso il punto P.
A valle di una serie di osservazioni sperimentali si è concluso che il campo magnetico prodotto da un qualunque circuito percorso da corrente si può scrivere come somma di contributi elementari dB.
Dividiamo il conduttore in elementi infinitesimi di corrente $i\,d\vec{l}$ ed il campo magnetico elementare dovuto a ciascuno di questi pezzetti infinitesimi nel punto P è dato da:

$$d\vec{B} = k_m\, i\, \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$ PRIMA LEGGE ELEMENTARE DI LAPLACE

Non è una legge direttamente verificabile ma piuttosto una ipotesi matematica che applicata opportunamente ci permette di derivare delle leggi. Non è direttamente verificabile poiché non possiamo estrapolare un pezzo di circuito e supporre che sia attraversato da una corrente stazionaria. Per verificarne l'esattezza dobbiamo vedere quanto vale applicata ad un circuito chiuso ⇒ bisogna sommare tutti i contributi infinitesimi.

$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl \cos\theta}{r^2}$$

Scrivendo dl ed r in funzione di θ: $\begin{cases} r = \dfrac{s}{\cos\theta} \\ l = s\,tg\theta \Rightarrow dl = \dfrac{s}{\cos^2\theta} d\theta \end{cases}$

$$\Rightarrow |d\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{s}{\cancel{\cos^2\theta}} \cdot \frac{\cos\theta}{s^2} \cdot \cancel{\cos^2\theta}\, d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{s} d\theta$$

Volendo calcolare il campo magnetico complessivo svolgiamo l'integrale:

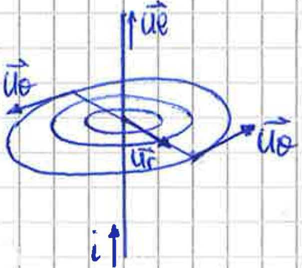
$$|\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi s} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 i}{4\pi s} (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

Possiamo portare fuori dall'integrale i perché è stazionaria e 1/s poiché dunque sul segmento andiamo a prendere il pezzettino dl la distanza di P dalla retta su cui è posto il segmento non cambia.

Se il FILO è INDEFINITO:

$$\begin{cases} A \to -\infty \\ B \to \infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 \to -\pi/2 \\ \theta_2 \to \pi/2 \end{cases} \Rightarrow |\vec{B}| = \frac{\mu_0 i}{4\pi s} \cdot 2 = \frac{\mu_0 i}{2\pi s}$$

Se il punto P fosse stato al di sotto della retta su cui giace il segmento AB il campo sarebbe stato entrante nel foglio.



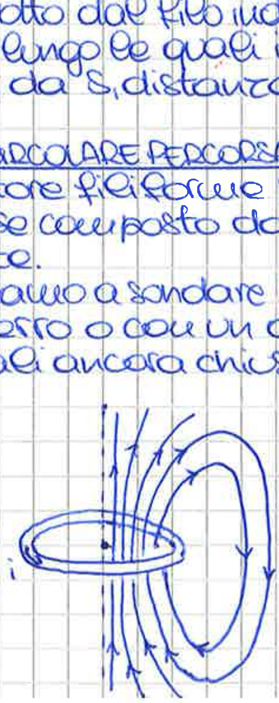
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi s} \vec{u_\theta} \qquad \text{LEGGE DI BIOT-SAVART}$$

Compiendo dunque delle circonferenze attorno al filo indefinito percorso da corrente possiamo osservare come il campo sia sempre tangente alla circonferenza. ⇒ le linee di campo del campo magnetico prodotto dal filo indefinito percorso da corrente sono circonferenze concentriche, lungo le quali il modulo del campo è costante poiché dipende solamente da s, distanza dal filo.

• SPIRA CIRCOLARE PERCORSA DA CORRENTE

Conduttore filiforme percorso da corrente ~~oppure~~ chiuso su un generatore oppure se composto da materiale superconduttore basta innescare una corrente.

Se andiamo a sondare il campo magnetico prodotto dalla spira con limatura di ferro o con un ago magnetico vediamo come il campo, che ha linee vettoriali ancora chiuse sulle correnti, NON è UNIFORME.



Essendo il campo non uniforme è difficile calcolarne il valore in un punto qualsiasi perciò sfruttiamo la simmetria del sistema e poniamoci sull'asse della spira.

Riprendiamo l'espressione trovata del campo nel punto P e moltiplichiamola e dividiamola per 2π:

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{r^3} \vec{u_n} \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} 2 \frac{\pi R^2}{r^3} \vec{u_n}$$

Introduciamo il MOMENTO MAGNETICO DELLA SPIRA $\vec{m}$:

$$\vec{m} = i\pi R^2 \vec{u_n}$$

Il momento magnetico della spira è definito come il prodotto della corrente per l'area della superficie piana delimitata dalla spira (πR^2) e direzione e verso sono dati dal versore u_n individuato con la regola della mano destra.

$$\Rightarrow \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

Notiamo una analogia con il campo elettrico prodotto da un dipolo elettrico lungo il suo asse:

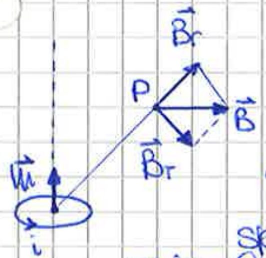
$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\vec{p}}{r^3}$$

Supponiamo di disporci molto lontano dalla spira in modo che calcolare la distanza dal centro della spira o sulla spira è indifferente ($r \gg R$). Il campo prodotto dalla spira sarà appunto

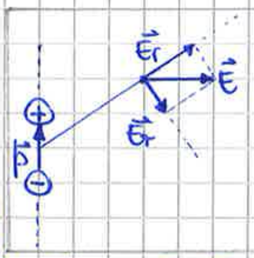
$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\vec{m}}{r^3}$$

dove $\vec{m} = i\Sigma \vec{u_n}$ e quindi non ci interessa quale sia la forma della spira, ma solo la sua area perché essendo molto lontani non ne distinguiamo la forma.

In generale, se non si è sull'asse, il campo magnetico ha la stessa forma del campo elettrostatico prodotto dal dipolo elettrostatico:



$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} \left(2\cos\theta \vec{u_r} + \sin\theta \vec{u_\theta}\right)$$



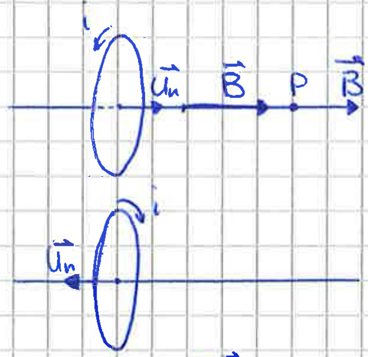
In qualsiasi punto che non è sull'asse della spira il campo magnetico generato dalla spira lontano da questa è un campo di dipolo con una componente radiale ed una componente trasversa.

• SPIRA PERCORSA DA CORRENTE E CAMPO DI DIPOLO:

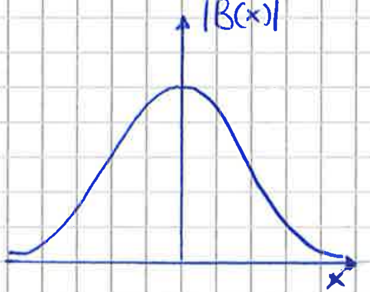
Le linee di campo del campo elettrico sono linee aperte (hanno origine nelle cariche positive e terminano in quelle negative).
Nel caso del dipolo elettrico le linee di campo sembrano chiuse perché visto a distanza molto grande le cariche sembrano coincidere.
Le linee di campo del campo magnetico sono invece linee chiuse e allontanandoci dalla spira continuiamo a vederle chiuse.
Fino ad adesso quello che potevamo pensare di associare al dipolo elettrico era non tanto una spira, ma piuttosto una calamita con i suoi poli analoghi alla carica positiva e negativa del dipolo elettrico.
La calamita vista da molto lontano produce delle linee di campo che assu=

LEZIONE 23/11/17

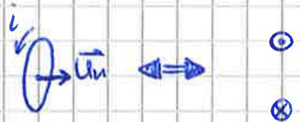
CAMPO MAGNETICO GENERATO DA CORRENTI STAZIONARIE:



Solo sull'asse della spira il campo è orientato perpendicolarmente all'asse, ed ha la stessa direzione e verso del versore normale alla spira $\vec{u}_n$ che viene scelto in modo da rispettare la regola della mano destra.

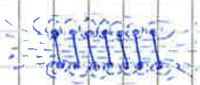


Se andiamo a fare un grafico dell'intensità del campo magnetico in funzione della distanza dall'asse si ha un massimo nel centro della spira che diminuisce abbastanza velocemente man mano che ci si allontana dal centro della spira.
La direzione del campo rimane la stessa lungo tutto l'asse della spira.
Schematicamente la spira può essere rappresentata tramite il vettore J indicando con un puntino dove è uscente e con una x dove è entrante.



• SOLENOIDE RETTILINEO

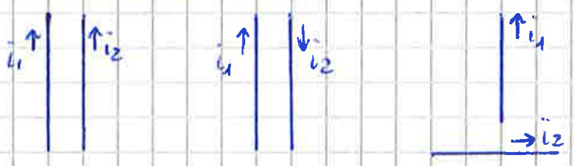
Prendiamo un filo conduttore e anziché chiuderlo a cerchio lo avvolgiamo su un supporto rigido cilindrico, in modo da formare una geometria ad elica (con passo costante).
In genere il nucleo attorno al quale si avvolge il filo conduttore (che può avere forma qualunque e non per forza cilindrica) può avere solamente scopi meccanici oppure può essere un materiale non indifferente al campo magnetico, per esempio contenente ferro, allora questo materiale ha un effetto importante sul campo magnetico.
Supponiamo per il momento che il nucleo serva da mero supporto meccanico. La struttura ad elica sarà disposta in modo da avere un avvolgimento molto compatto ed in modo che il diametro dell'avvolgimento sia molto piccolo rispetto alla lunghezza del circuito così composto.



Ponendo della limatura di ferro in un piano che taglia a metà il solenoide per tutta la lunghezza possiamo osservare le linee di campo del campo magnetico.
All'interno del solenoide la limatura di ferro si orienta prevalentemente lungo l'asse dello stesso. In prossimità degli estremi del solenoide non vi è un grande orientamento.
Si può pensare di poter sostituire ad ogni anello del solenoide una spira circolare, se l'avvolgimento è molto compatto. In questo modo basta guardare il campo magnetico generato dalla singola spira posta vicino ad un'altra, fare una somma vettoriale e continuare aggiungendo spire. ⇒ Il campo magnetico risultante all'interno, sull'asse, sarà la somma vettoriale di vettori tutti allineati.
Per semplificare ulteriormente il calcolo e poter trascurare quelle zone in cui il campo è influenzato da un raccordo delle linee di campo che provengono dalla singola spira poiché concatenano la singola corrente, si fa l'ipotesi per cui il passo dell'elica sia veramente piccolo tanto che le spire sono effettivamente appoggiate l'una sull'altra.
Per evitare il contatto tra i conduttori, questi vengono rivestiti da una guai-

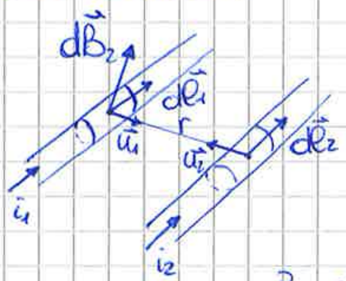
FILI PERCORSI DA CORRENTI: AZIONI ELETTRODINAMICHE

• ESPERIMENTO DI AMPÈRE



Ampère osserva che presi 2 fili conduttori percorsi da correnti:
- se questi sono paralleli e le correnti concordi vi è una interazione meccanica attrattiva;
- se questi sono paralleli e le correnti discordi, vi è una interazione meccanica repulsiva;
- se sono disposti uno perpendicolarmente all'altro non vi è interazione.

- CASO GENERALE



Supponiamo di avere 2 fili percorsi da corrente, la forza che la corrente che scorre nel filo 2 impone sul filo 1 la otteniamo unendo le 2 leggi elementari di Laplace.

$$d\vec{F}_{2su1} = i_1 d\vec{l}_1 \times \vec{B}_2$$

38:00

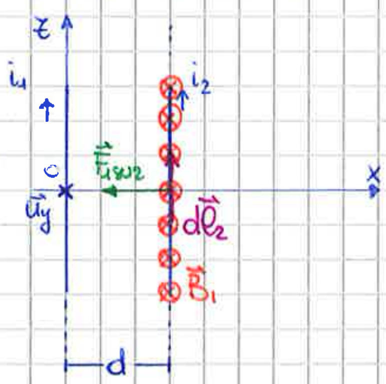
B_2 calcolato nel punto dove si trova l'elemento di corrente $i_1 d\vec{l}_1$, calcolato tramite la legge di Ampère-Laplace:

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{u}_2}{r^2}$$

⇒ la forza che il circuito 2 percorso da corrente esercita sul circuito 1 percorso da corrente:

$$\vec{F}_{2su1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \oint_{\gamma_1} d\vec{l}_1 \times \left(\oint_{\gamma_2} \frac{d\vec{l}_2 \times \vec{u}_2}{r^2} \right)$$

• FILI RETTILINEI INDEFINITI:



Immaginiamo di avere 2 fili rettilinei indefiniti percorsi da corrente nello stesso verso.
Il campo magnetico prodotto nel filo 1, nei punti a cui appartiene il filo 2, per la regola della mano destra, è entrante nel foglio.
Il campo prodotto dal filo 1 lo ricaviamo dalla legge di Biot-Savart:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d} \vec{u}_y$$

la forza esercitata dal filo 1 sull'elemento infinitesimo $d\vec{l}_2$ sarà:

$$d\vec{F}_{1su2} = i_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} dl_2 (-\vec{u}_x)$$

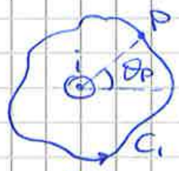
e la forza totale sarà data dalla somma di tanti contributi paralleli ed equiversi:

$$\vec{F}_{1su2} = \int d\vec{F}_{1su2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d} \int dl_2 \, (-\vec{u}_x)$$

Se le correnti fossero state opposte, quindi i_2 fosse stata diretta verso il basso ⇒ $d\vec{l}_2$ sarebbe stata diretta verso il basso e quindi il prodotto vettoriale $d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$ avrebbe dato come risultato un vettore diretto concordemente all'asse x, e dunque una forza repulsiva tra i fili. Se le correnti fossero state ortogonali una all'altra il prodotto vettoriale sarebbe stato nullo poiché $d\vec{l}_2 \parallel \vec{B}_1$.

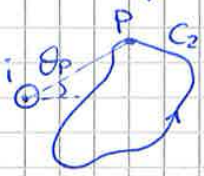
LEGGE DI AMPÈRE

Siccome abbiamo appena visto come il percorso sia ininfluente prendiamo un percorso qualunque che concatena la corrente i:



calcoliamo quindi la circuitazione di $\vec{B}$ lungo il percorso C_1:

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_P}^{\theta_P + 2\pi} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{r\, d\theta}{r} = \mu_0 i \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \mu_0 i$$



Calcoliamo ora l'integrale lungo un percorso che non concateni la corrente:

$$\Gamma(\vec{B}) = \oint_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta_P}^{\theta_P} \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{r\, d\theta}{r} = 0$$

Poiché partiamo da θ_P ma non facciamo un giro completo ritornando in θ_P.

La circuitazione di B può essere:

- positiva se la corrente fluisce in un senso coerente con il modo in cui ci si muove lungo la curva su cui si calcola la circuitazione; senso coerente valutato con la regola della mano destra.
- negativa se la corrente fluisce in senso opposto a quello che si dovrebbe avere applicando la regola della mano destra.

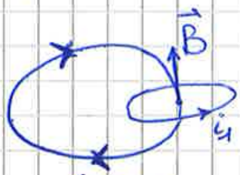
La legge di Ampère è valida a prescindere dalla rettilineità o meno del filo conduttore.

Se il percorso concatena più correnti:

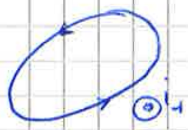
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_k n_k$$

dove n_k è il GRADO DI CONCATENAZIONE: quanti giri faccio attorno alla corrente.

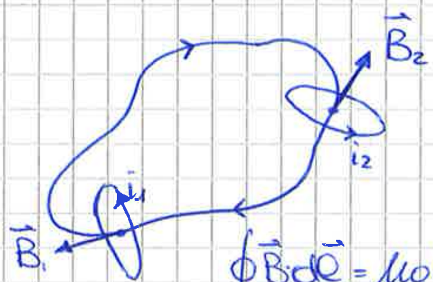
Esempi:



$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 i_1$

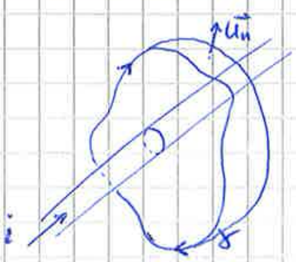


$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$



$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (i_1 - i_2)$

FORMA LOCALE DELLA LEGGE DI AMPÈRE



Prendiamo un filo percorso da corrente ed una linea γ che lo concatena. Tramite il teorema di Stokes possiamo dire che:

$$\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{S_\gamma} (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{u}_n\, dS$$

La circuitazione può essere scritta come il flusso del rotore attraverso una qualunque superficie che poggi su γ.

$\vec{u}_n$ è orientata con la regola della mano destra.

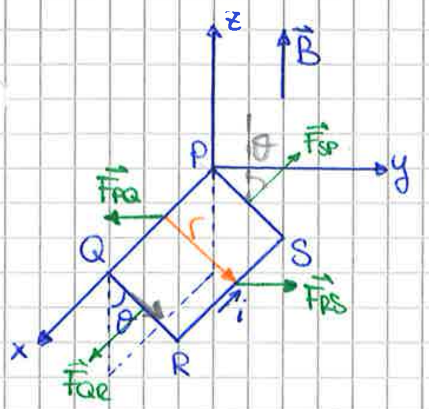
Ma dalla legge di Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

dove ricordiamo che $i = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{u}_n\, dS$ dove S è la sezione del conduttore.

ESERCITAZIONE 4: 23/11/17

② Una spira rettangolare rigida, di lati $PQ = RS = a = 20\,cm$ e $QR = SP = b = 10\,cm$ ha una massa per unità di lunghezza pari a $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}\,g/cm$ ed è percorsa da una corrente i. Essa è vincolata a ruotare senza attrito intorno al lato PQ, parallelo all'asse x orizzontale, e si trova inizialmente nella posizione di equilibrio stabile nel campo della forza peso. Quando sulla spira agisce un campo magnetico uniforme e verticale $\vec{B} = B \cdot \vec{u_z}$, con $B = 2 \cdot 10^{-2}\,T$, essa ruota di un angolo $\theta = \pi/6$. Calcolare la corrente i e il lavoro W fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione



Se B è uniforme, la forza generata su ogni segmento è:

$$\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \text{(se il filo è rettilineo)}$$

$\vec{F}_{RS} = iaB\vec{u_y}$ poiché $\vec{\ell} = -a\vec{u_x}$

$\vec{F}_{PQ} = -iaB\vec{u_y}$ poiché $\vec{\ell} = a\vec{u_x}$

$\Rightarrow \vec{F}_{PQ} = -\vec{F}_{RS} \Rightarrow$ i contributi si cancellano

$\vec{\ell}_{SP} = b\cos\theta\,\vec{u_z} - b\sin\theta\,\vec{u_y}$

$\vec{F}_{SP} = -ibB\sin\theta\,\vec{u_x}$

$\vec{\ell}_{QR} = b\sin\theta\,\vec{u_y} - b\cos\theta\,\vec{u_z}$

$\Rightarrow \vec{F}_{QR} = ibB\sin\theta\,\vec{u_x}$

Anche in questo caso la risultante delle forze è nulla.
$\Rightarrow$ la forza totale che agisce sul circuito è uguale a zero. Cosa che non ci sorprende poiché abbiamo visto che la forza totale che agisce su un circuito immerso in un campo magnetico e percorso da corrente è zero. (SE IL CAMPO È UNIFORME).

Vogliamo calcolare i momenti.

Se il circuito è incernierato su PQ l'unica forza che crea momento è $\vec{F}_{RS}$. $\vec{F}_{SP}$ e $\vec{F}_{QR}$ sono una coppia di braccio nullo.

$\vec{M}_{F_{PQ}} = 0$ (è applicata direttamente sull'asse di rotazione)

$\vec{M}_{F_{SP}} = \vec{M}_{F_{QR}} = 0$

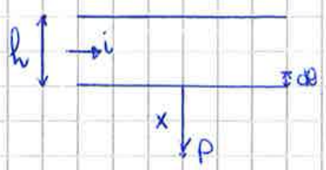
$$\vec{M}_{RS} = \vec{r} \times \vec{F}_{RS} \begin{cases} \vec{r} \perp \vec{F} & \text{se } \theta = 0 \\ \vec{r} \parallel \vec{F} & \text{se } \theta = \frac{\pi}{2} \end{cases} \qquad \vec{r} = b\sin\theta\,\vec{u_y} - b\cos\theta\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \vec{M}_{RS} = iabB\cos\theta\,\vec{u_x}$$

Questa relazione poteva essere calcolata in modo molto più semplice sapendo che il momento meccanico di un sistema di forze su un circuito piano è dato dal prodotto vettoriale del momento magnetico del circuito con il campo magnetico esterno:

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

(5) Una sottile striscia metallica, indefinita, di larghezza $h = 2cm$ è percorsa, nella direzione della ~~corrente~~ lunghezza, dalla corrente $i = 10A$ costante ed uniformemente distribuita. Calcolare il valore del campo magnetico B in un punto P che giace sullo stesso piano della striscia, a distanza $x = 1cm$ dal suo bordo più vicino.



$h = 2cm$
$i = 10A$
$\vec{B}(P) = ?$
$x = 1cm$

Possiamo immaginare la striscia metallica come una successione di fili di spessore infinitesimo → Biot-Savart.
⇒ immaginiamo la sbarretta come una successione di fili dotati di spessore infinitesimo e percorsi da una corrente di:

$$di = \frac{i}{h} dl \qquad \text{dove } J = \frac{i}{h} \text{ siccome il sistema è bidimensionale}$$

Ciascuno dei fili dista pertanto da P $x + l$.

$$\Rightarrow dB(x+l) = \frac{\mu_0 di}{2\pi(x+l)} \quad \text{campo infinitesimo prodotto da ogni filo (Biot-Savart).}$$

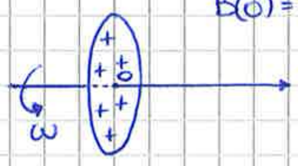
Allora se vogliamo il campo totale generato nel punto P dalla lamina metallica, dobbiamo calcolare tutti i contributi e quindi integrare:

$$B(x) = \int_0^h dB = \int_0^h \frac{\mu_0 i\, dl}{2\pi h(x+l)} = \frac{\mu_0 i}{2\pi h} \ln \frac{x+h}{x}$$

Siccome sappiamo che P si trova a $x = 1cm$:

$$B(P) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}02} \ln \frac{0{,}01 + 0{,}02}{0{,}01} = 1{,}1 \cdot 10^{-4} T$$

(8) Su un disco di raggio R è disposta una carica Q con densità superficiale uniforme. Il disco viene posto in rotazione con una velocità angolare ω. Si calcoli il campo magnetico prodotto nel suo centro.



$\vec{B}(O) = ?$

DISCO DI ROWLAND: disco carico messo in rotazione.

$\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$ densità di carica uniforme sul disco.

Scomponiamo il disco in corone circolari di raggio r e spessore dr.
Una corona circolare in rotazione è pari ad una spira circolare percorsa da una corrente di:

$$di = \frac{dq}{T} \quad \begin{matrix} \to \text{carica sulla spira} \\ \to \text{periodo di rotazione} \end{matrix}$$

$$dq = \sigma \cdot \underbrace{2\pi r dr}_{\text{area corona circolare}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

area di un cerchio di raggio r+dr meno l'area di un cerchio di raggio r:

$$\pi(r+dr)^2 - \pi r^2 = \pi r^2 + \underbrace{\pi dr^2}_{\to 0} + 2\pi r dr - \pi r^2 = 2\pi r dr$$

LEZIONE 29/11/17

EQUAZIONI DI MAXWELL

• QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL - IN REGIME STAZIONARIO

$$Hp: \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{cases}$$ densità di carica

la legge della circuitazione di Ampère è legata ad un integrale di linea del campo magnetico, e ci dice che se abbiamo un campo magnetico B definito in una certa regione dello spazio in cui sono presenti delle correnti, in REGIME STAZIONARIO, la circuitazione lungo una linea l che concateni delle correnti vale:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k i_{k\,(conc.)}$$

dove la sommatoria è una vera e propria somma algebrica poiché le correnti vanno prese con segno positivo o negativo a seconda che siano concordi o discordi con il verso suggerito dall'orientazione del percorso l tramite la regola della mano destra. Se il percorso concatena più di una volta una corrente questa è moltiplicata per il numero di giri.

Applicando il teorema del rotore possiamo passare dalla formulazione integrale a quella locale che ci dice come si comporta il rotore di B in ogni punto:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

• TERZA EQUAZIONE DI MAXWELL - IN REGIME STAZIONARIO

L'integrale di linea del campo elettrostatico generato da una distribuzione di cariche fisse è nullo poiché il campo ELETTROSTATICO è CONSERVATIVO:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Applicando il teorema di Stokes (o teorema del rotore) abbiamo ricavato che il fatto di essere CONSERVATIVO aveva come conseguenza il fatto di essere IRROTAZIONALE:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

• PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL

Il flusso, attraverso una superficie chiusa, del campo elettrostatico, dovuto ad una certa distribuzione di cariche, secondo la legge di Gauss, è pari alla somma delle cariche contenute all'interno della superficie fratto ε_0:

$$\oint_{S_c} \vec{E} \cdot \vec{u}_n \, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

⇒ Nel generare il campo contribuiscono tutte le cariche, ma per calcolare il flusso necessito delle sole cariche presenti all'interno della superficie.

Tramite il teorema della divergenza è possibile passare dalla forma integrale a quella locale: in ogni punto la divergenza del campo elettrostatico è pari alla sua distribuzione di carica in quel punto fratto ε_0:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

• SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL

In generale, data una corrente in un circuito, la legge di Ampère-Laplace ci dice che:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_\gamma i \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

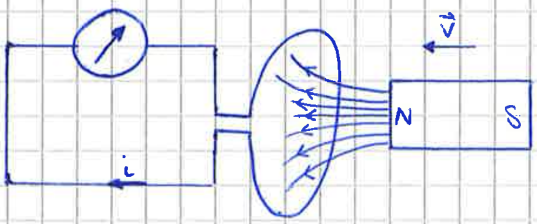
dove γ rappresenta il CIRCUITO FISICO.

③ LEGGI DI MAXWELL
- ELETTRODINAMICA PRIMA DI MAXWELL;
- LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL; → generalizzazione 4 legge di Maxwell
- LEGGI FONDAMENTALI DELL'ELETTROMAGNETISMO.

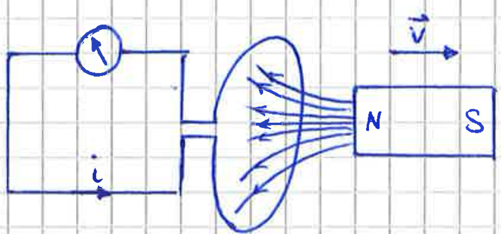
④ PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA.

ESPERIENZA DI FARADAY

• MOTO RELATIVO DI UN CIRCUITO CONDUTTORE RISPETTO AD UN MAGNETE PERMANENTE

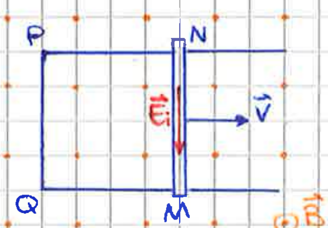


Supponiamo di avere un circuito composto da un filo conduttore sagomato in modo da avere un percorso chiuso. Non inseriamo alcun generatore, ma predisponiamo un Amperometro, ovvero un dispositivo in grado di verificare se passa corrente nel circuito. Se il circuito è lasciato isolato, l'amperometro non rileva passaggio di corrente.
Prendiamo poi un magnete e avviciniamolo al circuito l'amperometro misura una corrente.



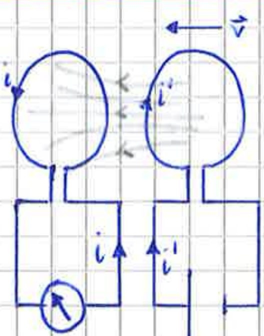
Allontanando il magnete l'amperometro rileva una corrente opposta alla prima.
Se il magnete viene capovolto (vengono invertiti i poli nord e sud) quando il magnete viene avvicinato al circuito l'amperometro misura una corrente diretta nel verso opposto rispetto al caso in cui il polo rivolto verso la spira è il polo nord, e lo stesso nel caso in cui il magnete viene allontanato.
Se tenessimo fisso il magnete e spostassimo il circuito il ~~verso~~ risultato sarebbe sempre lo stesso.

• MOTO RELATIVO DI (PARTE DI) UN CIRCUITO CONDUTTORE RISPETTO AD UN CAMPO MAGNETICO ESTERNO



Il sistema rappresentato è una spira rettangolare formata da un filo conduttore piegato ad U su cui è appoggiato un ponte conduttore mobile.
Se il ponte mobile viene spostato verso destra o verso sinistra in modo da modificare, deformare, il circuito si avrà una corrente indotta.

• MOTO RELATIVO DI UN CIRCUITO CONDUTTORE RISPETTO AD UN ALTRO CIRCUITO PERCORSO DA CORRENTE



Sostituiamo al magnete una spira percorsa da corrente che come sappiamo è in grado di generare un campo magnetico.
Il circuito in cui non è presente il generatore è chiamato circuito INDOTTO; il campo magnetico è invece generato da un altro circuito che invece è dotato di un generatore e questo è chiamato CIRCUITO INDUTTORE O PRIMARIO.
⇒ Nel primario fluisce corrente, si genera un campo magnetico. Se c'è un moto relativo (spostiamo il primario rispetto al secondario o viceversa) nel secondario l'amperometro ~~rileva~~ rileva passaggio di corrente, se sono fermi l'uno rispetto all'altro no.

rio dire che vi sono delle linee di campo che la intersecano vuol dire che vi è un flusso. ⇒ Ciò che capisce Faraday è che quello che accomuna tutti questi casi è che vi è sempre una variazione di flusso del campo magnetico attraverso una qualsiasi superficie che poggia sul circuito.

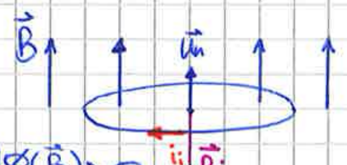
Neumann riuscì a descrivere il fenomeno matematicamente:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$$ LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ

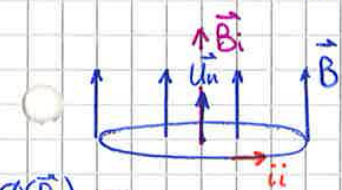
Lenz elaborò un corollario che spiega il motivo per cui nella legge di Faraday vi è il segno negativo: questo non è assoluto, non è che la fem è sempre negativa ma dipende, se la derivata temporale del flusso è positiva ⇒ la fem sarà negativa, se la derivata temporale del flusso è negativa la fem sarà positiva.
Il segno meno ha un senso se si tengono presenti le convenzioni, in particolare la convenzione della mano destra.
La corrente indotta è un effetto secondario e se le variazioni del flusso non sono troppo rapide ~~la corrente~~ può essere calcolata come:

$$i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{-\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}}{R}$$

⇒ anche la corrente indotta può essere positiva o negativa, ma ripetiamo che questo segno negativo è legato ad una convenzione.
Lenz afferma che il segno meno è legato al fatto che l'effetto della corrente indotta si oppone alla causa che l'ha generata.



$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} > 0$
$\Rightarrow \mathcal{E}_i < 0 \Rightarrow i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} < 0$



$\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt} < 0$
$\Rightarrow \mathcal{E}_i > 0 \Rightarrow i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} > 0$

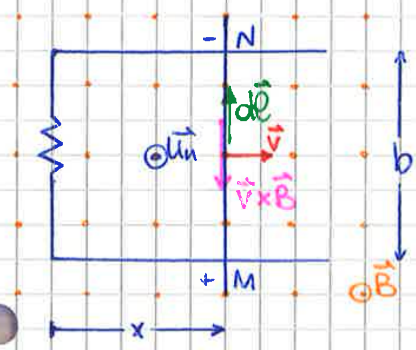
Supponiamo di avere una spira circolare immersa in una regione in cui è presente un campo magnetico B, che per semplicità supponiamo uniforme, ma TEMPO DIPENDENTE, ci interessa guardare la variazione nel tempo di B.
Se B fosse costante nel tempo nella spira non vedremmo corrente indotta.
Supponiamo che dopo un certo intervallo di tempo il campo magnetico sia aumentato ⇒ il flusso di B attraverso la spira orientata con il versore $\vec{u}_n$ sarà aumentato. ⇒ La legge di Faraday ci dice che la fem è pari all'opposto della variazione del flusso di B nel tempo ed è quindi negativa ⇒ la corrente indotta sarà negativa nel senso che è opposta rispetto ad un senso che assumiamo positivo (regola della mano destra). La corrente indotta genera un campo magnetico NON UNIFORME, poiché il campo magnetico prodotto da una spira circolare è tutt'altro che uniforme perciò può essere rappresentato come un vettore rivolto verso il basso solamente sul suo asse.
⇒ Il campo magnetico, risultato della corrente indotta, è opposto alla variazione di campo magnetico che l'ha prodotto, che era un aumento di B quindi rivolto verso l'alto.
Nel caso in cui non ci fosse stato il segno meno avremmo trovato una corrente positiva ovvero che circola nel senso concorde a quello dato dalla regola della mano destra ⇒ produrrebbe un campo magnetico sull'asse orientato verso l'alto, ovvero un campo magnetico indotto che si va a sommare costruttivamente con la variazione di campo che l'ha prodotto. 1:03:53
⇒ renderebbe più rapida la variazione di campo magnetico ⇒ aumenterebbe la fem indotta, quindi la corrente indotta, che a sua volta genererebbe un campo magnetico che ancora si somma costruttivamente. Si avrebbe dunque una crescita illimitata della corrente a spesa di nessuno ⇒ i conti non tornerebbero da un punto di vista energetico poiché l'energia non si conserva.
A volte infatti si dice che la legge di Lenz esprime la conservazione dell'ener-

$$\Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(Bbx) = -Bb\frac{dx}{dt} = -Bbv$$

Dove l'unica cosa che cambia nel tempo è x.
Il fatto che la fem risulti negativa ($\mathcal{E}_i < 0$) implica che la corrente indotta

$$i_i = \frac{\mathcal{E}_i}{R} < 0$$

sia anch'essa negativa: ovvero che abbia verso discorde rispetto all'orientazione data ad $\vec{u}_n$ ragionando con la regola della mano destra.
Allo stesso risultato si poteva giungere ragionando con la forza di Lorentz:



Essendo il ponte mobile un filo conduttore, è composto da cariche che mettiamo in moto con velocità $\vec{v}$. Queste cariche sono quindi soggette all'azione della forza di Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$$

Il vettore risultante $\vec{v}\times\vec{B}$ sarà rivolto verso il basso, e questo non è altro che il campo elettromotore:

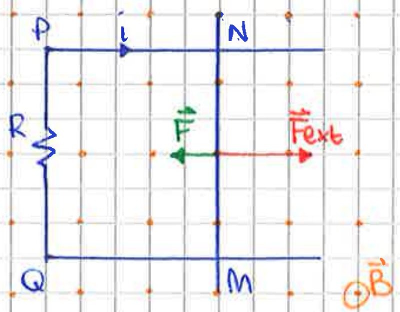
$$\vec{E}_m = \frac{\vec{F}}{q} = \vec{v}\times\vec{B}$$

il cui ruolo è quello di prendere le cariche positive ed accumularle verso M e le cariche negative verso N.
Andiamo a calcolare la circuitazione di questo campo elettromotore:

$$\mathcal{E} = \oint_{PQMN} \vec{E}_m\cdot d\vec{l} = \int_M^N (\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = -vBb$$

Verso di percorrenza suggerito dalla regola della mano destra.
⇒ la forza di Lorentz separa le cariche nel ponte mobile, creando una ddp.
Questo tipo di induzione, detta appunto "di movimento" spesso è anche chiamata "di FLUSSO TAGLIATO" poiché il ponte mobile, muovendosi, taglia le linee di flusso del campo magnetico

- ATTRITO ELETTROMAGNETICO



Siccome nel ponte mobile in movimento passa corrente, subisce una forza:

$$\vec{F} = i\vec{NM}\times\vec{B} = ibB(-\vec{u}_v)$$

(Dove $\vec{u}_v$: versore velocità)
che si oppone al movimento del ponte mobile stesso.

$$i = \frac{|\mathcal{E}_i|}{(R+r)} \quad \text{ma } |\mathcal{E}_i| = vBb$$

r: eventuale resistenza attribuibile al ponte mobile.

$$\Rightarrow \vec{F} = \underbrace{\frac{B^2b^2}{(R+r)}}_{k} v\,(-\vec{u}_v)$$

⇒ la forza che sente il ponte mobile è proporzionale all'opposto della velocità

$$\vec{F} = -k\vec{v}$$