



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2322A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi Francesco

**MATERIA: Fluidodinamica Computazionale - Teoria + Esercizi -
Prof. D'Ambrosio**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE

RICHIAMI

EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES

- Conservazione massa
- 2^a legge di Newton ($F = ma$)
- Conservazione energia



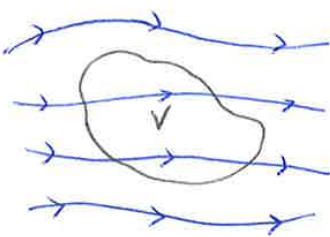
Sono soggette a differenti CB e scelte del caso studiato

Tali equazioni si basano sull'ipotesi del continuo → in un μm^3 di aria ci sono circa $6 \cdot 10^{27}$ particelle

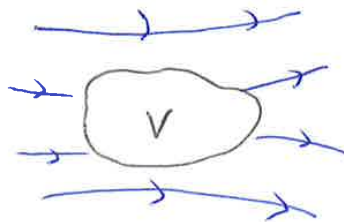
La scelta di un opportuno volume di controllo per la scrittura delle equazioni ne cambia formalmente la formulazione. Tutte però si basano sugli stessi principi fisici ed è possibile trovare opportuni passaggi partendo da una formulazione e ottenere tutte le altre.

Il volume di controllo può essere:

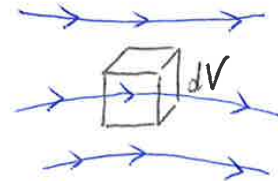
• FINITO e FISSO



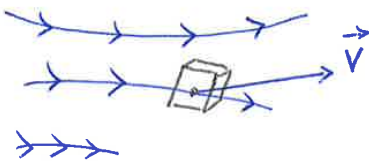
• FINITO e IN MOVIMENTO



• INFINITESIMO e FISSO



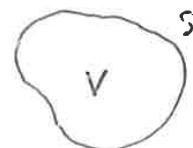
• INFINITESIMO e IN MOVIMENTO



EQUAZIONE BILANCIO MASSA

FORMULAZIONE INTEGRALE CONSERVATIVA - VOLUME FINITO e FISSO

Flusso netto di massa uscente dalla superficie S del volume di controllo = riduzione nel tempo della massa contenuta nel volume di controllo



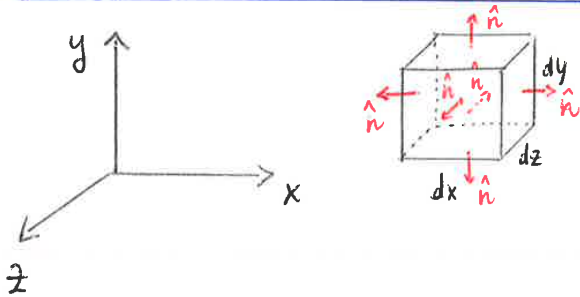
$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 \rightarrow$ poiché la relazione vale \forall volume di controllo, anche infinitesimo, allora:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) dV = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad \begin{array}{l} \text{FORMULAZIONE DIFFERENZIALE} \\ \text{CONSERVATIVA} \end{array}$$

In forma espansa:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0}$$

2) VOLUME di CONTROLLO INFINITESIMO



$$dV = dx dy dz$$

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz$$

$$\boxed{\frac{\partial (\rho)}{\partial t} dx dy dz} \rightarrow \text{variazione nel tempo della massa nel volume di controllo}$$

Considerando i flussi attraverso le sup. di sinistra e di destra (flussi per unità di superficie):

$$\underline{sx}: \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \rightarrow -\rho u$$

$$\underline{dx}: \rho \vec{v} \cdot \vec{n}_d \rightarrow \rho u_d, \text{ con } \rho u_d = \rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx$$

($dV = dx dy dz$ non varia nel tempo)

Moltiplicando i flussi per unità di superficie per le rispettive superfici e considerando il contributo delle altre facce si ottiene il flusso netto attraverso il volume di contr. dV :

$$-\rho u dy dz + \left[\rho u + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} dx \right] dy dz - \rho v dx dz + \left[\rho v dx dz + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} dy \right] dx dz +$$

$$-\rho w dx dy + \left[\rho w + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} dz \right] dx dy = \boxed{\left[\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} \right] dx dy dz} \quad \begin{array}{l} \text{flusso} \\ \text{netto} \\ \text{uscite} \end{array}$$

Allora:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

risultato analogo al precedente, ottenuto applicando i principi della fisica al volume di controllo 2

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\vec{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{v}}_{\nabla \cdot (\rho \vec{v})} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0}$$

EQUAZIONE BILANCIO QDM

Desidero scrivere la seconda legge di Newton: $\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$

FORMULAZIONE DIFFERENZIALE NON CONSERVATIVA - VOLUME INFINITESIMO IN MOTO

Tale volume di controllo mantiene costante la massa al proprio interno, per cui la seconda legge di Newton potrà scrivervi come:

$$\delta \vec{F} = \delta m \vec{a} \rightarrow \begin{cases} \delta F_x = \delta m a_x = \delta m \frac{Dv}{Dt} = \rho dx dy dz \frac{Dv}{Dt} \\ \delta F_y = \delta m a_y = \delta m \frac{Dv}{Dt} = \rho dx dy dz \frac{Dv}{Dt} \\ \delta F_z = \delta m a_z = \delta m \frac{Dv}{Dt} = \rho dx dy dz \frac{Dv}{Dt} \end{cases}$$

Desidero ora definire quali sono le forze che agiscono sul volume di controllo infinit.

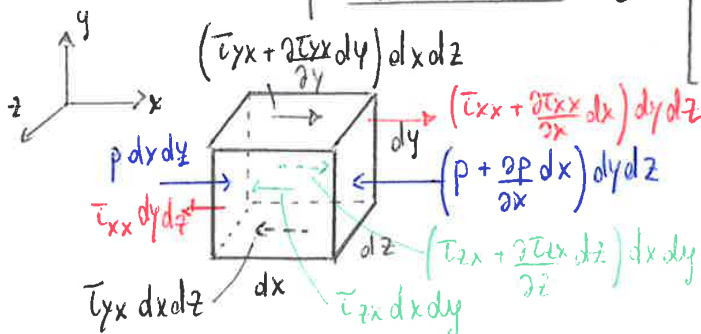
FORZE

- FORZE VOLUMETRICHE**: agiscono a distanza (legati al campo gravitazionale, elettromagnetico, ...)
 Indichiamo con \vec{f} = forza per unità di massa (volumetrica) [N/Kg]
 $\Rightarrow \rho \vec{f} dx dy dz \rightarrow$ forza che agisce sul volume di controllo (volumetrica)

FORZE DI SUPERFICIE: hanno coppia d'azione piccolo

- pressione
- sforzi viscosi

$$\vec{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \tau_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \tau_{zz} \end{bmatrix}$$



Consideriamo per semplicità la direzione x :

FORZA VOLUMETRICA: $\rho f_x dx dy dz$

PRESSIONE: $[p - (p + \frac{\partial p}{\partial x} dx)] dy dz$

SFORZI: $[-\tau_{yx} + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx)] dy dz + [-\tau_{zx} + (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz) + \tau_{zx}] dx dy$

FORMULAZIONE INTEGRALE

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot \vec{\tau}_x + \rho f_x$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV + \int_V \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \int_V \nabla \cdot \vec{\tau}_x dV + \int_V \rho f_x dV$$

Applichiamo il teorema di Gauss:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{f} dV = \int_S \vec{f} \cdot \vec{n} dS \quad \Rightarrow \quad \int_V \nabla \cdot (\rho u \vec{v}) dV = \int_S \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

definiamo un vettore $\vec{P}_x = (p, 0, 0)$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \nabla \cdot \vec{P}_x \Rightarrow \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV = \int_V \nabla \cdot \vec{P}_x dV = \int_S \vec{P}_x \cdot \vec{n} dS =$$

Allora, otteniamo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV + \int_S \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_S p n_x dS + \int_S p n_x dS + \int_V \vec{\tau}_x \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho f_x dV$$

Analogamente per le altre due direzioni, per cui:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) dV + \int_S \rho u \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_S p n_x dS + \int_S \vec{\tau}_x \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho f_x dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) dV + \int_S \rho v \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_S p n_y dS + \int_S \vec{\tau}_y \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho f_y dV$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) dV + \int_S \rho w \vec{v} \cdot \vec{n} dS = - \int_S p n_z dS + \int_S \vec{\tau}_z \cdot \vec{n} dS + \int_V \rho f_z dV$$

Possiamo scrivere l'equazione di bilancio della q.d.m. in maniera più compatta, vediamo come.

BILANCIO DI ENERGIA

Applichiamo il 1° principio della termodinamica:

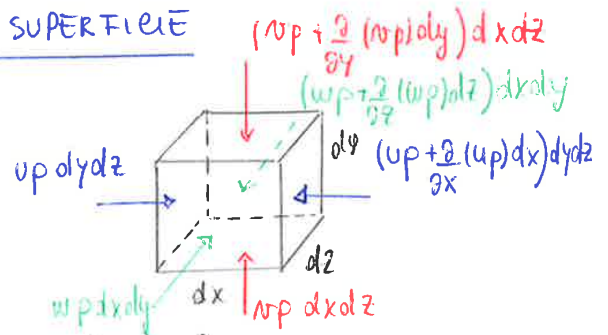
variazione nel tempo dell'energia totale nel volume di controllo = flusso netto di calore attraverso il volume di controllo + lavoro nell'unità di tempo fatto sul volume di controllo dalle forze di volume e superficie

3 tre addendi rappresentano dimensionalmente delle potenze.

LAVORO NELL'UNITÀ DI TEMPO FORZE DI VOLUME E SUPERFICIE

• forze di volume: $\rho \vec{f} \cdot \vec{v} dx dy dz$

• forze di superficie:



PRESSIONE \rightarrow su ogni faccia la pressione fa lavoro solo con la componente di velocità perpendicolare alla faccia

direzione x $\rightarrow [u p - (u p + \frac{\partial}{\partial x} (u p) dx)] dy dz = -\frac{\partial}{\partial x} (u p) dx dy dz$

Considerando anche le altre facce:

$$\Rightarrow - \left[\frac{\partial}{\partial x} (u p) + \frac{\partial}{\partial y} (v p) + \frac{\partial}{\partial z} (w p) \right] dx dy dz$$

SFORZI ATRIBITO VISCOSO

direzione x \rightarrow ci sono $\tau_{xx}, \tau_{yx}, \tau_{zx}$

$$\left[(u \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx}) dx) - u \tau_{xx} \right] dy dz + \left[(v \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} (v \tau_{yx}) dy) - v \tau_{yx} \right] dx dz + \left[(w \tau_{zx} + \frac{\partial}{\partial z} (w \tau_{zx}) dz) - w \tau_{zx} \right] dx dy$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \tau_{zx}) \right] dx dy dz$$

Considerando le altre direzioni:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (v \tau_{zy}) + \frac{\partial}{\partial x} (w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \tau_{zz}) \right] dx dy dz$$

Per cui, il flusso netto di calore attraverso il volume di controllo sarà:

$$\left(\rho \dot{e} - \nabla \cdot \vec{q} \right) dx dy dz = \left[\rho \dot{e} + \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial T}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (k \frac{\partial T}{\partial z}) \right] dx dy dz$$

VARIAZIONE NEL TEMPO ENERGIA TOTALE

Energia totale = energia interna + energia cinetica (trascurando l'eu. pot. gravitazionale)

energia interna → alla temperatura normale, è legata principalmente ai gradi di libertà traslazionali e rotazionali delle molecole. Ad elevate temperature, come nei problemi di rientro, diventano importanti anche i gradi di libertà vibrazionali e quelli legati agli elettroni, che si staccano dal nucleo generando il plasma.
L'energia interna rappresenta il moto casuale, randomico

energia cinetica → $\frac{1}{2} |\vec{v}|^2$ rappresenta il moto medio

⇒ energia Totale = $\left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) \rho dx dy dz$

variazione nel tempo = $\rho dx dy dz \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right)$

Allora, l'equazione di bilancio dell'energia diventa:

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) = \rho \dot{e} - \nabla \cdot \vec{q} - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v} =$$

$$= \rho \dot{e} + \nabla \cdot (k \nabla T) - \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{v}$$

FORMA COMPATTA
DIFFERENZIALE
NON CONSERVATIVA

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \right) = \rho \dot{e} + \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) - \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) - \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial x} (v \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (v \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (v \tau_{zy}) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x} (w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (w \tau_{zz}) + \rho u f_x + \rho v f_y + \rho w f_z$$

Nelle cinque equazioni fino ad ora scritte figurano 7 incognite:

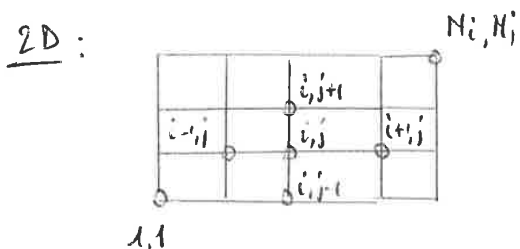
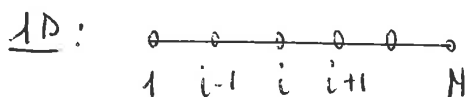
p, ρ, u, v, w, T, e

Le due equazioni ulteriori che ci servono a chiudere il sistema sono:

• EQ. STATO GAS PERFETTI : $p/\rho = R/M T = R^* T$

• LEGAME TRA e E T : $e = c_v T$

Per prima cosa, occorre discretizzare il dominio geometrico.

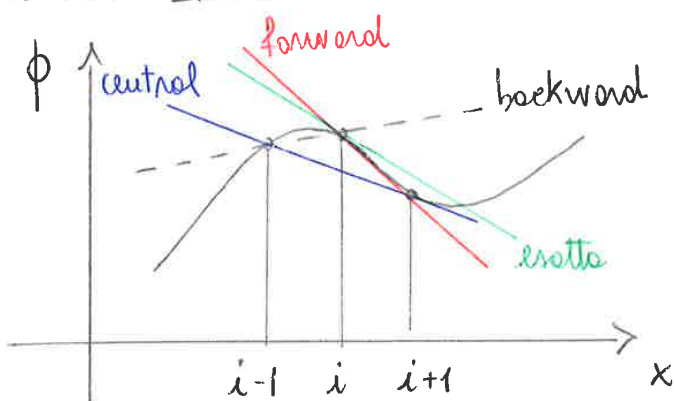


Condizioni al contorno:

- DIRICHLET: viene assegnato il valore al bordo \Rightarrow non sono necessarie eq. aggiuntive
- NEUMANN: viene assegnato il valore della derivata \Rightarrow le e b devono essere discretizzate per contribuire al set di equazioni necessarie a risolvere il problema.

L'idea delle differenze finite deriva dalle definizioni di derivate:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x_i + \Delta x) - \phi(x_i)}{\Delta x}$$



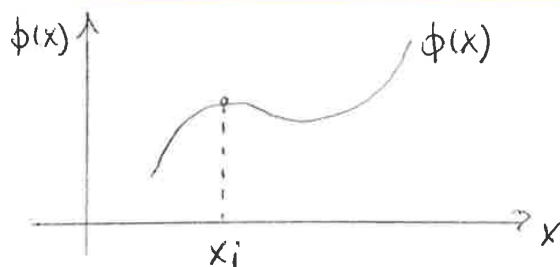
In generale la precisione ottenuta con la differenza centrata è più accurata rispetto a quella ottenuta con differenza in avanti o all'indietro.

Possiamo osservare che la qualità dell'approssimazione dipende da:

- 1) Modo in cui differenziamo
- 2) Spaziatura tra i punti della griglia

APPROSSIMAZIONE DI DERIVATE PRIME

① ESPANSIONE IN SERIE DI TAYLOR



$$\begin{aligned} \phi(x) = & \phi(x_i) + (x-x_i) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} + \frac{(x-x_i)^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} + \\ & + \frac{(x-x_i)^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} + \dots + \frac{(x-x_i)^m}{m!} \left(\frac{\partial^m \phi}{\partial x^m}\right)_{x_i} + H \end{aligned}$$

Se consideriamo una griglia equispaziata, con passo Δx :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} &= \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{\Delta x^2 - \Delta x^2}{2\Delta x} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} - \frac{\Delta x^3 + \Delta x^3}{12\Delta x} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} + H = \\ &= \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} - \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} + H \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} \approx \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}}} \quad \text{Schema alle differenze centrali}$$

Con tal caso, avendo a disposizione due punti di griglia, si ottiene un'espressione della derivata che rappresenta un'approssimazione con accuratezza del secondo ordine.

Osserviamo che ciò che viene trascurato al secondo membro è detto errore di troncamento. Questo misura l'accuratezza dell'approssimazione e determina il tasso con cui l'errore decresce man mano che la griglia viene raffinata.

Ricapitolando:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x) \quad \text{FORWARD}$$

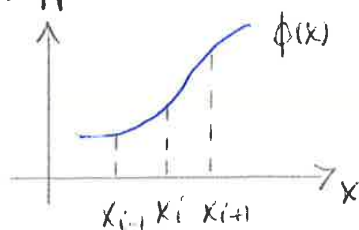
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi(x_i) - \phi(x_{i-1}))}{x_i - x_{i-1}} + O(\Delta x) \quad \text{BACKWARD}$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1}))}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(\Delta x^2) \quad \text{CENTRAL}$$

più è elevato l'ordine di accuratezza più l'errore decresce velocemente al raffinarsi della griglia

② APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE DI DERIVATE PRIME

Supponiamo di voler approssimare una funzione generica con un polinomio del 1° ordine:



$$\phi(x) \approx a + bx$$

$$\begin{cases} \phi(x_{i+1}) = a + bx_{i+1} \\ \phi(x_i) = a + bx_i \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} b = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \\ a = \text{non ci interessa} \end{cases}$$

A noi interessa valutare $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = b = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$

Se consideriamo un sistema di riferimento centrato su x_i :

$$\begin{cases} x_{i+1} - x_i = \Delta x_{i+1} \\ x_i - x_{i-1} = \Delta x_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi(x_{i+1}) = a + b \Delta x_{i+1} \\ \phi(x_i) = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{b = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{\Delta x_{i+1}}} \quad \text{appross. del 1° ordine}$$

Com un polinomio di 4° grado e una griglia equispaziata:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{-\phi_{i+2} + 8\phi_{i+1} - 8\phi_{i-1} + \phi_{i-2}}{12 \Delta x} + O(\Delta x^4)$$

central difference scheme
 Si ottiene un polinomio di quarto grado per $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$.

③ SCHEMI COMPATTI

La loro caratteristica è che a parità di punti si riesce ad avere un'accuratezza superiore, che si paga con un maggior costo computazionale.

SCHEMA ALLA PADÉ-4

$\phi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$ → si utilizza sempre la tecnica del polynomial fitting.

$\frac{\partial \phi}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3$

Im un sistema di riferimento centrato su x_i → $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = a_1$

Imponiamo adesso il passaggio per tre punti e il valore di due derivate prime:

$$\begin{cases} \phi_{i+1} = a_0 + a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2 + a_3 \Delta x^3 + a_4 \Delta x^4 \\ \phi_i = a_0 \\ \phi_{i-1} = a_0 - a_1 \Delta x + a_2 \Delta x^2 - a_3 \Delta x^3 + a_4 \Delta x^4 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} = a_1 + 2a_2 \Delta x + 3a_3 \Delta x^2 + 4a_4 \Delta x^3 \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1} = a_1 - 2a_2 \Delta x + 3a_3 \Delta x^2 - 4a_4 \Delta x^3 \end{cases} \rightarrow$$

Per semplicità consideriamo una griglia equispaziata.
 Considerando noti i valori $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1}$ e $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1}$ è possibile risolvere il sistema e determinare i coefficienti.
 Im realtà i valori delle derivate sono incognite.

Risolvendo si ottiene che:

$$a_1 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{3\phi_{i+1} - 3\phi_{i-1} - \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1}\right] \Delta x}{4 \Delta x}$$

Risordinando i termini:

$$\frac{1}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1} = \frac{3(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{4 \Delta x}$$

→ Im ogni punto i è possibile scrivere tale equazione

Allora:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & & & & \\ 1/4 & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1/4 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1/4 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i-1} \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_i \\ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3(\phi_i - \phi_{i-2})}{4 \Delta x} \\ \frac{3(\phi_{i+1} - \phi_{i-1})}{4 \Delta x} \\ \frac{3(\phi_{i+2} - \phi_i)}{4 \Delta x} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

così da risolvere un sistema lineare per ottenere tutte le derivate in un colpo solo.
VANTAGGIO: con 3 punti si ottiene un'accuratezza del 4° ordine

Mel caso di griglie equispaziate:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} - \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right) \frac{\Delta x^2}{12} + \dots$$

approssimazione della derivata seconda con accuratezza al secondo ordine

Mel caso di griglie non uniformi, per ricavare l'espressione della derivata seconda occorre utilizzare una differenza all'indietro per eliminare le derivate prima:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x_i} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_i}{2} - \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_i^2}{6} + \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_i^3}{24} + \dots$$

Sostituendo nell'espressione di $\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i}$ si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} = \frac{\phi_{i+1} \Delta x_i - \phi_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) + \phi_{i-1} \Delta x_{i+1}}{\frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} - \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1} - \Delta x_i}{3} - \left(\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1}^3 (\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)}{12 (\Delta x_i^2 + \Delta x_{i+1}^2)}$$

si dimostra che se la griglia è molto fitta tale termine avviene \Rightarrow accuratezza del secondo ordine

② APPROSSIMAZIONE POLINOMIALE

Supponiamo di voler un'accuratezza di ordine 2.

$\Rightarrow \phi(x') = a + bx' + cx'^2$ in un sistema di riferimento centrato su x_i

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x'=0} = 2c$$

Imponendo il passaggio per tre punti: (supponendo griglie equispaziate)

$$\begin{cases} \phi_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2 & (1) \\ \phi_i = a & (2) \\ \phi_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2 & (3) \end{cases}$$

$$\rightarrow (1) + (3) \rightarrow 2c = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} = \frac{\phi_{i-1} - 2\phi_i + \phi_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Mel caso di griglie non equispaziate le formule si complicano leggermente:

$$\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_i} = 2c = 2 \frac{\phi_{i+1} \Delta x_i + \phi_{i-1} \Delta x_{i+1} - \phi_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{\Delta x_i \Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} = \frac{\phi_{i+1} \Delta x_i - \phi_i (\Delta x_i + \Delta x_{i+1}) + \phi_{i-1} \Delta x_{i+1}}{\frac{1}{2} \Delta x_i \Delta x_{i+1} (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$$

Im un sistema di riferimento centrato in x_{12} :

$$4: \begin{cases} \phi_{12} = a \\ \phi_{11} = a - b\Delta x + c\Delta x^2 \\ \phi_{10} = a - 2b\Delta x + 4c\Delta x^2 \end{cases} \oplus$$

$$-4\phi_{11} + \phi_{10} = -3\phi_{12} + 2b\Delta x \rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_{12}} = b = \frac{-4\phi_{11} + \phi_{10} + 3\phi_{12}}{2\Delta x}$$

DISCRETIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE MODELLO

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j \phi) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) - q\phi = 0$$

Considerando nullo il termine volumetrico possiamo riscrivere l'equazione come:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \nabla \cdot (\rho\phi \vec{v}) - \nabla \cdot (\Gamma \nabla \phi) = 0$$

Im unidimensionale:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi u) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = 0$$

Supponendo per ora ρ, u, Γ costanti:

$$\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \text{per due CB di Dirichlet esiste una soluzione stazionaria}$$

Nel caso stazionario:

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0$$

Discretizziamo nel punto i -esimo con diff. forward, ad esempio:

$$u \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

per ora ci concentriamo di un' appross. della derivata prima con accuratezza del 1° ordine, mentre le derivate seconde avrà accuratezza del secondo ordine

$$\Rightarrow \left(\max(u,0) - \min(u,0) + \frac{2\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_1 + \left(\min(u,0) - \frac{\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_2 = \left(\max(u,0) + \frac{\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_L$$

$$i = N-1 \Rightarrow \left(\max(u,0) - \min(u,0) + \frac{2\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_{N-1} - \left(\max(u,0) + \frac{\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_{N-2} = \left(\frac{\Gamma}{\rho\Delta x} - \min(u,0) \right) \varphi_R$$

$$\Rightarrow \left(\max(u,0) + \frac{\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_{N-2} + \left(\max(u,0) - \min(u,0) + \frac{2\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_{N-1} = \left(\frac{\Gamma}{\rho\Delta x} - \min(u,0) \right) \varphi_R$$

Per tutti i nodi interni vale l'equazione scritta a pagina precedente. Allora, la matrice dei coefficienti e il vettore dei termini noti assumono la seguente forma:

$$\begin{bmatrix} b_1 & e_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & e_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & & & & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & e_{N-3} & & \vdots \\ & & a_{N-2} & & c_{N-2} & \vdots \\ & & & & & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & & & & & & & \varphi_{N-1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ \vdots \\ r_{N-1} \end{pmatrix}$$

$$a_i = -\max(u,0) - \frac{\Gamma}{\rho\Delta x}$$

$$b_i = \max(u,0) - \min(u,0) + \frac{2\Gamma}{\rho\Delta x}$$

$$e_i = \min(u,0) - \frac{\Gamma}{\rho\Delta x}$$

$$r_1 = \left(\max(u,0) + \frac{\Gamma}{\rho\Delta x} \right) \varphi_L ; \quad r_{N-1} = \left(\frac{\Gamma}{\rho\Delta x} - \min(u,0) \right) \varphi_R$$

Osserviamo che il sistema ammette la soluzione non banale proprio grazie all'imposizione delle condizioni al contorno che generano un vettore dei termini noti diverso dal vettore nullo.

Commenti sulla soluzione dell'equazione:

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

conv. diffusione

\rightarrow se $u > 0$ l'equazione modella il trasporto di φ con velocità u , da sinistra verso destra.

Se $\varphi_L = 0$ e $\varphi_R = 1 \Rightarrow$ se ρx tende a $\varphi = 0$ e poi tale valore deve ricadere a $\varphi = 1$ nel bordo di destra.

Il termine diffusivo gioca nel secondo tra le condizioni al contorno. Più $\frac{\Gamma}{\rho}$ è grande, più il flusso diffusivo riesce a contrastare il trasporto convettivo di φ . Se $\frac{\Gamma}{\rho}$ piccolo \rightarrow diffusione relegata a una porzione sempre più piccola, $\rho \Delta x$.

Attraverso il polynomial fitting:

$\phi(x) = a + bx + cx^2$ in un sistema di riferimento centrato in x_N .

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_N} = b; \quad \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_N} = 2c$$

$x^1 = 0$ $x^1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(x_N) = a \\ -2 \cdot \begin{cases} \phi(x_{N-1}) = a - b\Delta x + c\Delta x^2 \\ \phi(x_{N-2}) = a - 2b\Delta x + 4c\Delta x^2 \end{cases} \end{cases} \quad (+)$$

* si realizza appross con accuratezza del 1° ordine. (vedi dopo)

$$\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} = -a - 2c\Delta x^2 \Rightarrow 2c = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_{x_N} = \frac{\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N}{\Delta x^2}$$

Allora:

$$i = N) \rightarrow \frac{u \partial \phi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{e} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \rightarrow u_N - \frac{\Gamma}{e} \frac{\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N}{\Delta x} = 0$$

Risolviendo i termini dell'equazione:

$$-\frac{\Gamma}{e\Delta x} \phi_{N-2} + \frac{2\Gamma}{e\Delta x} \phi_{N-1} - \frac{\Gamma}{e\Delta x} \phi_N = -u_N \Delta x$$

Per i punti interni vale la relazione generale vista precedentemente.

Per cui:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} & \\ 0 & \dots & \dots & d_N & a_N & b_N & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 0 \\ \vdots \\ r_N \end{pmatrix}$$

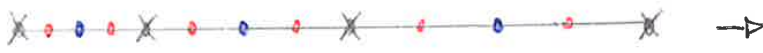
$a_i = -\max(u_i, 0) - \frac{\Gamma}{e\Delta x}$
 $b_i = \max(u_i, 0) - \min(u_i, 0) + \frac{2\Gamma}{e\Delta x}$
 $c_i = \min(u_i, 0) - \frac{\Gamma}{e\Delta x}$

$$r_1 = \left(\max(u_1, 0) + \frac{\Gamma}{e\Delta x} \right) \phi_L; \quad r_N = -u_N \Delta x; \quad d_N = -\frac{\Gamma}{e\Delta x} \rightarrow$$

rompe la tridiagon. della matrice dei coefficienti

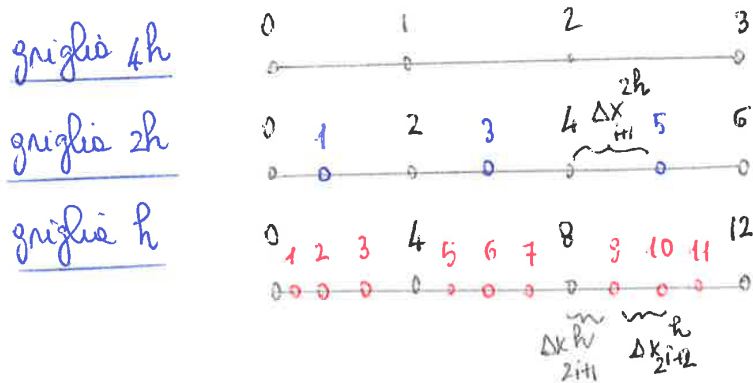
Refiniamo la griglia:

① Inseriamo un nuovo punto al centro di ogni intervallo:



portando tale processo al limite si otterrebbe una griglia quasi completamente equispaziata, tranne che in alcuni punti corrispondenti a quelli che definivano gli intervalli iniziali
 => rifittando la griglia $re \rightarrow 1$
 => accuratezza schema centrato al 2° ordine

② Rifittiamo la griglia mantenendo un tasso di espansione costante:



Memoriamo che:

$$\Delta x_{i+1} = re \Delta x_i = re^2 \Delta x_{i-1} = \dots = re^i \Delta x_1$$

$$\Delta x_{i+1}^{2h} = \Delta x_{2i+2}^h + \Delta x_{2i+1}^h$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta x_{i+1}^{2h} = (re^{2h})^i \Delta x_1^{2h} \\ \Delta x_{2i+1}^h = (re^h)^{2i} \Delta x_1^h \\ \Delta x_{2i+2}^h = (re^h)^{2i+1} \Delta x_1^h \end{cases}$$

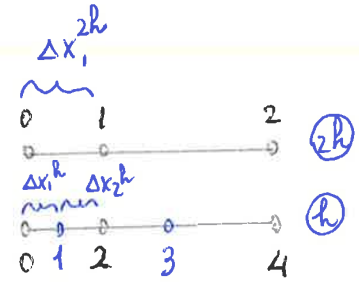
→ il pedice del 1° membro -1 = esponente di re

Sostituendo:

$$(re^{2h})^i \Delta x_1^{2h} = (re^h)^{2i} \Delta x_1^h + (re^h)^{2i+1} \Delta x_1^h = \Delta x_1^h (re^h)^{2i} (1 + re^h)$$

ma:

$$\Delta x_1^{2h} = \Delta x_1^h + \Delta x_2^h = \Delta x_1^h + re^h \Delta x_1^h = \Delta x_1^h (1 + re^h)$$



Allora:

$$(re^{2h})^i \Delta x_1^h (1 + re^h) = (re^h)^{2i} \Delta x_1^h (1 + re^h) \rightarrow re^{2h} = (re^h)^2$$

⇒ $re^h = \sqrt{re^{2h}}$ → per rifittare la griglia mantenendo un tasso di espansione costante, deve valere tale relazione. Portando il processo di rifittamento al limite, $re^h \rightarrow 1$ ⇒ il leading term scompare ⇒ si tende ad accuratezza del 2° ordine

Algoritmo:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x_i) &= \varphi_i = a \\ \varphi_{i-1} &= a - b\Delta x + c\Delta x^2 \\ \varphi_{i+1} &= a + b\Delta x + c\Delta x^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow b = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x}$$

Come possiamo valutare l'accuratezza della derivata?

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} + \varepsilon_T$$

Sviluppando in serie di Taylor nell'intorno del punto in cui voglio fare la derivata:

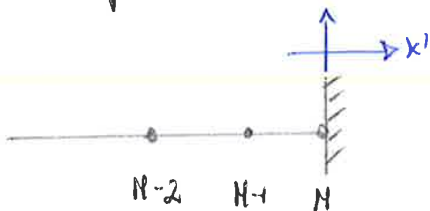
$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\varphi_i + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i \Delta x + \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_i + H - \varphi_i + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i \Delta x + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Delta x^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\Delta x^3}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_i + H' \right] = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}}{2\Delta x} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i + \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_i \Rightarrow \varepsilon_T = \frac{\Delta x^2}{6} \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_i \quad \text{Schema con accuratezza al 2° ordine}$$

Abbiamo anche visto che, nel caso di griglia equispaziata, una formula centrata per l'approssimazione della derivata seconda con accuratezza al 2° ordine è data da:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_i = \frac{\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}}{\Delta x^2} + \varepsilon_T \quad \rightarrow \text{può essere ottenuta con polynomial fitting}$$

Come succede se calcoliamo la derivata seconda in un modo di bordo, utilizzando il metodo del polynomial fitting con un polinomio di 2° grado? L'accuratezza sarà sempre al 2° ordine?



$$\left\{ \begin{aligned} \varphi(x) &= a + bx + cx^2 \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= 2c \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \left\{ \begin{aligned} \varphi_N &= a \\ \varphi_{N-1} &= a - b\Delta x + c\Delta x^2 \\ \varphi_{N-2} &= a - 2b\Delta x + 4c\Delta x^2 \end{aligned} \right. \Rightarrow 2c = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_N = \frac{\varphi_N - 2\varphi_{N-1} + \varphi_{N-2}}{\Delta x^2}$$

$$2\varphi_{N-1} - \varphi_{N-2} = \varphi_N - 2c\Delta x^2$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial (\varphi_N - \varphi_{N-1})}{\Delta x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_H - \frac{\partial}{\Delta x^2} \left[\varphi_H - \varphi_H + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_H \Delta x - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_H \frac{\Delta x^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \frac{\Delta x^3}{6} + H \right] =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_H - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \frac{\Delta x}{3} \Rightarrow \boxed{\epsilon_T = - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} \right) \frac{\Delta x}{3}}$$

precisazione del 1° ordine

ERRORI DI DISCRETIZZAZIONE

Discretizzando l'equazione modello mediante differenze finite, abbiamo ottenuto un sistema di equazioni algebriche del tipo:

$$[A] \{ \varphi \} = \{ R \} \quad , \quad \text{dove } \{ \varphi \} = \text{SOLUZIONE NUMERICA} \neq \{ \Phi \} = \text{SOLUZIONE ESATTA}$$

Indichiamo con L la sequenza di operatori differenziali e coefficienti moltiplicativi che agiscono sulla soluzione:

$$\boxed{L(\Phi) = 0} \rightarrow \text{rappresenta cioè l'equazione o il sistema di equazioni differenziali (nel nostro caso } \frac{u \partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \text{)}$$

Indichiamo con $L_{\Delta x}$ l'operatore simbolico che rappresenta il sistema di eq. algebriche ottenute mediante la discretizzazione:

$$L_{\Delta x}(\varphi_{\Delta x}) = ([A] \{ \varphi \} - \{ R \})_{\Delta x} = 0 \rightarrow L_{\Delta x} \text{ è dunque un operatore discreto}$$

Il pedice Δx sta ad indicare il fatto che i pedici di $[A]$ e $\{ R \}$ dipendono dalla spaziatura delle griglie \rightarrow la soluzione discreta dipende dalla spaziatura della griglia.

La soluzione discreta del sistema di equazioni algebriche differisce dalla soluzione esatta del problema differenziale. Tale differenza è detta ERRORE DI TRONCAMENTO e può essere definita come:

$$\boxed{L(\Phi) = L_{\Delta x}(\Phi) + \tau_{\Delta x} = 0} \rightarrow \text{questo vuol dire semplicemente che la soluzione esatta } \Phi \text{ non è soluzione del problema discretizzato e sostituendolo in esso si ottiene un certo errore, un resto.}$$

Possiamo allora affermare che tra soluzione esatta del problema differenziale e soluzione esatta del problema discreto esiste la seguente relazione:

$$\boxed{\Phi = \varphi_{\Delta x} + \epsilon_{\Delta x}^d} \quad , \quad \text{dove } \epsilon_{\Delta x}^d = \text{ERRORE DI DISCRETIZZAZIONE}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_{\Delta x} - \varphi_{2\Delta x} = \alpha \Delta x^p (2^p - 1)}$$

Considerando la griglia $4\Delta x$ e la griglia $2\Delta x$:

$$\varphi_{2\Delta x} + \alpha (2\Delta x)^p + H^I = \varphi_{4\Delta x} + \alpha (4\Delta x)^p + H^{II} \rightarrow \boxed{\varphi_{2\Delta x} - \varphi_{4\Delta x} = \alpha 2^p \Delta x^p (2^p - 1)}$$

Rappontando le due espressioni:

$$\frac{\varphi_{2\Delta x} - \varphi_{4\Delta x}}{\varphi_{\Delta x} - \varphi_{2\Delta x}} = \frac{\alpha \Delta x^p (2^p - 1) 2^p}{\alpha \Delta x^p (2^p - 1)} = 2^p \rightarrow \boxed{p = \frac{\ln \left(\frac{\varphi_{2\Delta x} - \varphi_{4\Delta x}}{\varphi_{\Delta x} - \varphi_{2\Delta x}} \right)}{\ln 2}}$$

p è un numero che tende all'infinito dello schema, se le griglie utilizzate sono abbastanza fini.

Tale ragionamento può essere applicato anche nel caso di discretizzazione di volumi finiti, e posto di considerare griglie fatte in modo diverso:



$$\boxed{p = \frac{\ln \left(\frac{\varphi_{3\Delta x} - \varphi_{3\Delta x}}{\varphi_{\Delta x} - \varphi_{3\Delta x}} \right)}{\ln 3}}$$

REGOLA DI SIMPSON :

$$\int_{S_e} f ds \approx \frac{1}{6} (f_{ne} + 4f_e + f_{se}) S_e$$

accuratezza del 4° ordine,
perché si dimostra essere esatta
per una cubica.

Il m tal caso ha senso determinare il valore di f_{ne} , f_e , f_{se} con metodi del 3° e/o del 4° ordine.

Mel caso di integrali di volume:

$$\int_V q dV = \bar{q} \Delta V \approx q_p \Delta V$$

↑
valore nel
centro della
cella

Per avere accuratezze superiori, ad esempio al 4° ordine, è possibile usare una funzione di forma biquadratica:

$$q(x,y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 xy + a_5 y^2 + a_6 x^2 y + a_7 xy^2 + a_8 x^2 y^2$$

dove i 9 coefficienti si possono ottenere conoscendo i valori di q nei vertici, nel centro della cella e al centro delle superfici della cella.

METODI DI INTERPOLAZIONE E DISCRETIZZAZIONE

Dobbiamo ora capire come determinare i valori f_n a metà della faccia.

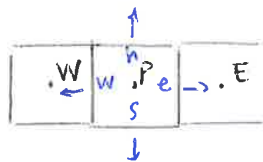
Interpolando linearmente tra due centri della cella si ottiene un metodo instabile

↳ INTERPOLAZIONE UPWIND

OSSERVAZIONE

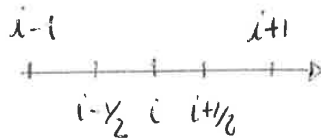
l'upwinding è basato sul concetto di velocità di regime. Il m tal caso il regime viaggia proprio a velocità u , ma non sempre è così.

$$\psi_e = \begin{cases} \psi_P & \text{se } (\vec{v} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \psi_E & \text{se } (\vec{v} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases}$$



Il m 1D:

$$\psi_{i+1/2} = \begin{cases} \psi_i & \text{se } u > 0 \\ \psi_{i+1} & \text{se } u < 0 \end{cases}$$



Generalizzato:

$$\psi(\vec{v} \cdot \vec{n}) \psi_e = \max(\vec{v} \cdot \vec{n}, 0) \psi_P + \min(\vec{v} \cdot \vec{n}, 0) \psi_E$$

Sostituendo $\varphi(x) = \varphi_E$:

$$\varphi_E = \varphi_P + \frac{x_E - x_P}{x_E - x_P} (\varphi_E - \varphi_P) = \frac{\overbrace{x_E - x_P}^{\lambda - 1}}{x_E - x_P} \varphi_P + \frac{\overbrace{x_E - x_P}^{\lambda}}{x_E - x_P} \varphi_E = \lambda \varphi_E + (1 - \lambda) \varphi_P$$

Ipotesi che il flusso vari linearmente tra P ed E si risolve con metodo di Runge-Kutta.

Tale approssimazione è esatta al secondo ordine, infatti:

$$\varphi_E = \varphi_P + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P (x_E - x_P) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)^2}{2} + H$$

$$\varphi_E = \varphi_P + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P (x_E - x_P) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)^2}{2} + H \Rightarrow \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{x_E - x_P} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{x_E - x_P}{2} + H$$

Sostituendo $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_P$ nella prima:

$$\begin{aligned} \varphi_E &= \varphi_P + \left[\frac{\varphi_E - \varphi_P}{x_E - x_P} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{x_E - x_P}{2} + H \right] (x_E - x_P) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)^2}{2} + H = \\ &= \varphi_E \frac{x_E - x_P}{x_E - x_P} + \varphi_P \left(1 - \frac{x_E - x_P}{x_E - x_P}\right) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)^2}{2} - \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)(x_E - x_P)}{2} + H = \\ &= \varphi_E \frac{x_E - x_P}{x_E - x_P} + \varphi_P \left(1 - \frac{x_E - x_P}{x_E - x_P}\right) + \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P \frac{(x_E - x_P)(x_E - x_P)}{2}}_{\text{leading form}} + H \Rightarrow \text{2° ordine di accuratezza} \end{aligned}$$

L'interpolazione lineare può anche essere utilizzata per valutare le derivate $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ presente nei termini differenziali:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_E + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E (x - x_E) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_E \frac{(x - x_E)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_E \frac{(x - x_E)^3}{3!} + H \\ &= \varphi_P + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E (x_P - x_E) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_E \frac{(x_P - x_E)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_E \frac{(x_P - x_E)^3}{3!} + H \\ \varphi_E &= \varphi_E + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E (x_E - x_E) + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_E \frac{(x_E - x_E)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_E \frac{(x_E - x_E)^3}{3!} + H \end{aligned}$$

Estraiendo le derivate prima:

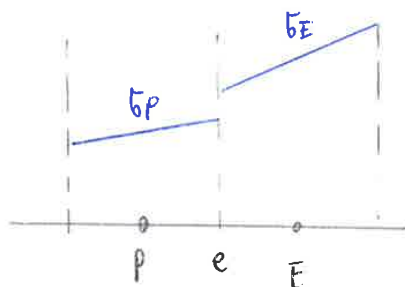
$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_E = \frac{\varphi_E - \varphi_P}{x_E - x_P} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_E \frac{(x_E - x_P)^2 - (x_E - x_E)^2}{2(x_E - x_P)} - \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3}\right)_E \frac{(x_E - x_E)^3 + (x_E - x_P)^3}{6(x_E - x_P)}$$

Deve in tal caso esistere un operatore funzionale che decida quale pendenza scegliere al centro cella:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_i^L &= \frac{\varphi_i - \varphi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \\ \bar{\sigma}_i^R &= \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{x_{i+1} - x_i} \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\bar{\sigma}_i = \text{LIMITER}(\bar{\sigma}_i^L, \bar{\sigma}_i^R)}$$

Allora:

$$\begin{cases} \varphi_e^L = \varphi_p + \bar{\sigma}_p(x_e - x_p) \\ \varphi_e^R = \varphi_e - \bar{\sigma}_e(x_e - x_e) \end{cases}$$

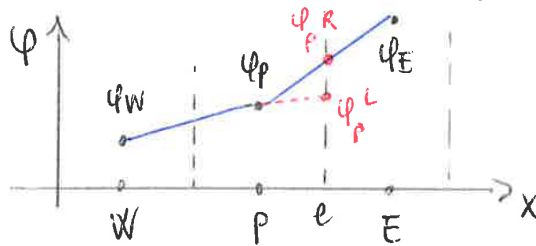


La scelta di quale valore prendere all'interfaccia tra φ_e^L, φ_e^R può essere fatta mediante uno schema up-wind:

$$\varphi_e = \begin{cases} \varphi_e^L & \text{se } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e > 0 \\ \varphi_e^R & \text{se } (\vec{V} \cdot \vec{n})_e < 0 \end{cases}$$

Ad esempio, se $(\vec{V} \cdot \vec{n})_e > 0 \rightarrow \varphi_e = \varphi_e^L$ e per calcolare $\bar{\sigma}_p$ mi utilizza l'operatore funzionale LIMITER:

$$\bar{\sigma}_p = \text{LIMITER}\left(\frac{\varphi_p - \varphi_w}{x_p - x_w}, \frac{\varphi_e - \varphi_p}{x_e - x_p}\right) = \text{LIM}(\bar{\sigma}_p^L, \bar{\sigma}_p^R)$$



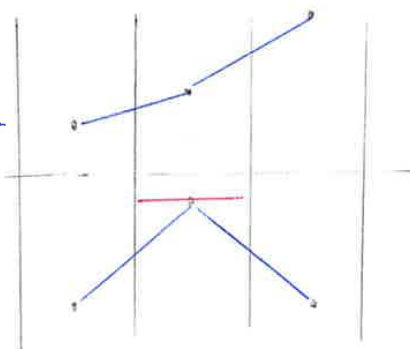
Esistono diversi criteri utilizzati dal

LIMITER per decidere quale pendenza scegliere, ad esempio: MINMOD

- se le pendenze hanno stesso segno \rightarrow prendiamo la più piccola in modulo
- se le pendenze hanno segno opposto \rightarrow pendenza nulla

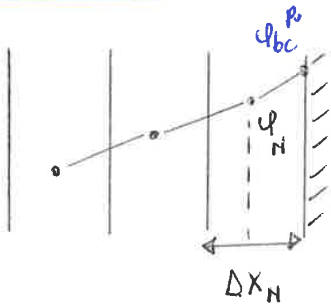
La scelta di annullare la pendenza in caso di massimi o minimi relativi serve a tornare al 1° ordine introducendo viscosità artificiale, stabilizzando il metodo ed evitando oscillazioni. Questo perché tali massimi o minimi potrebbero essere indice di oscillazioni.

Globalmente il metodo resta del 2° ordine.



CONDIZIONI AL CONTORNO PER VOLUMI FINITI

• DIRICHLET



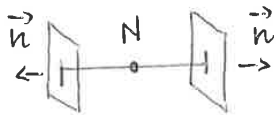
$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{\sigma}_N^L = \frac{\varphi_1 - \varphi_{bc}^L}{\Delta x_{N/2}} \\ \bar{\sigma}_N^R = \frac{\varphi_{bc}^R - \varphi_N}{\Delta x_{N/2}} \end{cases}$$

La pendenza si ricostruisce sfruttando le condizioni al contorno e poi si utilizza l'operatore di LIMITER.

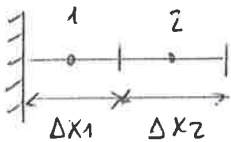
Vediamo anche come valutare la derivata prima presente nel termine diffusivo:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varphi) dV + \int_S \rho \varphi \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \int_S \Gamma \nabla \varphi \cdot \vec{n} dS = 0$$

1D:



$$\Rightarrow \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Delta x + \rho \varphi_{N+1/2} U_{N+1/2} - \rho \varphi_{N-1/2} U_{N-1/2} - \left[\Gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{N+1/2} - \Gamma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{N-1/2} \right] = 0$$



Mel caso di CB di NEUMANN la derivata è già calcolata
Mel caso di CB di Dirichlet è possibile usare il polynomial fitting.

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 \quad \rightarrow \begin{cases} \varphi_1 = a + b \frac{\Delta x_1}{2} + c \frac{\Delta x_1^2}{4} \\ \varphi_2 = a + b \left(\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2} \right) + c \left(\Delta x_1 + \frac{\Delta x_2}{2} \right)^2 \\ \varphi_{bc}^L = a \end{cases} \quad \rightarrow \text{risolvendo il sistema lineare è possibile trovare il valore di } b.$$

Se la GRIGLIA è EQUISPAZIATA:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{bc}^L = b = \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{8}{3} \varphi_{bc}^L + 3\varphi_1 - \frac{1}{3} \varphi_2 \right)$$

sviluppando in serie di Taylor nell'intorno di φ_{bc}^L si dimostra che tale schema ha accuratezza del 2° ordine

Allora, le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \rho u_t + p_x + \rho \nabla \cdot (u \vec{v}) - \mu \nabla \cdot (\nabla u) = 0 \quad (1) \\ \rho v_t + p_y + \rho \nabla \cdot (v \vec{v}) - \mu \nabla \cdot (\nabla v) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Cominciando il campo di velocità all'istante iniziale, è possibile calcolare la divergenza e il laplaciano di u, v , ma non abbiamo informazioni sul gradiente di pressione.

Però:

$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow$ vincolo per il campo di velocità: la velocità può evolvere nel tempo ma facendo sempre in modo che $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

\Rightarrow il gradiente di pressione dovrà distribuirsi in maniera tale da far sì che la condizione di divergenza nulla di \vec{v} sia sempre soddisfatta.

Ricaviamo un'equazione meccanica e valutare il campo di pressione:

$\partial_x(1) + \partial_y(2):$

$$\rho(u_t)_x + (p_x)_x + \rho[\nabla \cdot (u \vec{v})]_x - \mu[\nabla \cdot (\nabla u)]_x + \rho(v_t)_y + (p_y)_y + \rho[\nabla \cdot (v \vec{v})]_y - \mu[\nabla \cdot (\nabla v)]_y = 0$$

$$\rho(u_t)_x + \rho(v_t)_y + (p_x)_x + (p_y)_y + \rho \left\{ [\nabla \cdot (u \vec{v})]_x + [\nabla \cdot (v \vec{v})]_y \right\} - \mu \left\{ [\nabla \cdot (\nabla u)]_x + [\nabla \cdot (\nabla v)]_y \right\} = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet (\nabla \cdot \nabla u)_x + (\nabla \cdot \nabla v)_y &= (u_{xx})_x + (u_{yy})_x + (v_{xx})_y + (v_{yy})_y = (u_x)_{xx} + (v_y)_{xx} + (u_y)_{yy} + (v_x)_{yy} = \\ &= (u_x + v_y)_{xx} + (u_x + v_y)_{yy} = 0 \end{aligned}$$

Allora:

$$\rho \underbrace{(u_x + v_y)_t}_0 + \underbrace{\nabla \cdot (\nabla p)}_{\nabla^2 p} + \rho \left\{ \overbrace{[\nabla \cdot (u \vec{v})]_x}^{\uparrow u \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla u} + \overbrace{[\nabla \cdot (v \vec{v})]_y}^{\uparrow v \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla v} \right\} = 0$$

\hookrightarrow annullando tale termine non diciamo che la divergenza della velocità è nulla, ma che è costante nel tempo.

SE le condizioni iniziali sono a divergenza nulla $\rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$ in ogni istante
 SE il campo ottenuto con le CF non è irrotazionale, il valore della divergenza si mantiene uguale a se stesso nel tempo.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 p = -\rho \left[(\vec{v} \cdot \nabla u)_x + (\vec{v} \cdot \nabla v)_y \right]} \quad \underline{\text{EQUAZIONE DI POISSON PER LA PRESSIONE}}$$

Riprendendo l'equazione di Poisson per la pressione:

$$\nabla \cdot \nabla p + \rho [(\vec{v} \cdot \nabla u)]_x + \rho [(\vec{v} \cdot \nabla v)]_y = 0$$

$$\int_V \nabla \cdot \nabla p \, dV + \int_V \rho (\vec{v} \cdot \nabla u)_x \, dV + \int_V \rho (\vec{v} \cdot \nabla v)_y \, dV = 0$$

$$\int_S \nabla p \cdot \vec{n} \, dS + \rho \int_S (\vec{v} \cdot \nabla u)_x n_x \, dS + \rho \int_S (\vec{v} \cdot \nabla v)_y n_y \, dS = 0$$

Equazione di Poisson in forma integrale

$$\vec{G}_x = (\vec{v} \cdot \nabla u, 0) \rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla u)_x = \nabla \cdot \vec{G}_x$$

$$\int_V (\vec{v} \cdot \nabla u)_x \, dV = \int_V \nabla \cdot \vec{G}_x \, dV = \int_S \vec{G}_x \cdot \vec{n} \, dS = \int_S (\vec{v} \cdot \nabla u)_x n_x \, dS$$

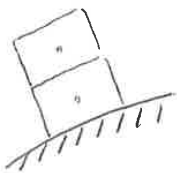
$$\vec{G}_y = (0, \vec{v} \cdot \nabla v) \rightarrow (\vec{v} \cdot \nabla v)_y = \nabla \cdot \vec{G}_y$$

$$\int_V (\vec{v} \cdot \nabla v)_y \, dV = \int_V \nabla \cdot \vec{G}_y \, dV = \int_S \vec{G}_y \cdot \vec{n} \, dS = \int_S (\vec{v} \cdot \nabla v)_y n_y \, dS$$

CONDIZIONI AL CONTORNO A PARETE

Per la CONDIZIONE DI ADERENZA: $\vec{v}_b = \vec{v}_{wall}$

PARTE CONVETTIVA



Se parete ferma:

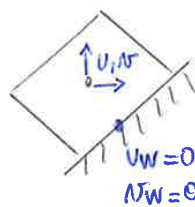
$$\begin{cases} \rho \int_S u \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \\ \rho \int_S v \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = 0 \end{cases}$$

Non c'è flusso di quantità di moto convettivo attraverso la parete

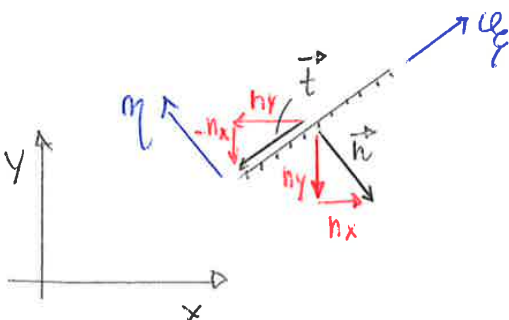
PARTE DIFFUSIVA

$$\begin{cases} F_x^d = -\mu \int_S \nabla u \cdot \vec{n} \, dS \\ F_y^d = -\mu \int_S \nabla v \cdot \vec{n} \, dS \end{cases}$$

→



Se le pareti fossero allineate agli assi, sarebbe semplice calcolare $\nabla u, \nabla v$.
 Nel caso generale, invece, la situazione è più complessa e occorre mutare il sistema di riferimento.



$$\begin{aligned} \vec{n} &= (n_x, n_y) \\ \vec{t} &= (n_y, -n_x) \\ \vec{v} &= (u, v) \text{ in } x, y \\ \vec{v} &= (\tilde{u}, \tilde{v}) \text{ in } \xi, \eta \end{aligned}$$

Particolarezziamola per la parete, supponendo $\vec{v}_w = 0$:

$$\rho \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right)_w + \rho \left(\tilde{u} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} + \tilde{v} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right)_w + \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_w - \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \right)_w = 0 \rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial \eta} \right)_w = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \right)_w$$

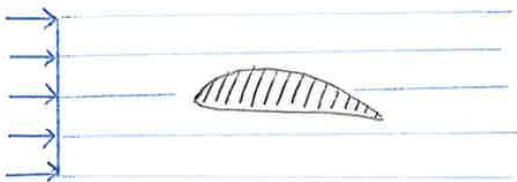
$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} \right)_w = - \left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} \right)_w = 0$

↓
 Note che la derivata della pressione è possibile det. il valore di p in molti altri due valori in due punti.

CONDIZIONI INIZIALI

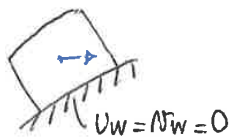
Mel ricavare l'eq. di Poisson per la pressione abbiamo semplificato il termine $(u_x + v_y)_t = 0 \rightarrow$ la divergenza si mantiene costante nel tempo.

Se le condizioni iniziali non ci pongono un campo solenoidale in ogni punto, nei punti in cui la divergenza è diversa da zero essa continuerà nel tempo e mantenere tale valore iniziale.



Supponiamo di considerare un profilo posto inizialmente in una corrente uniforme.

A parete si ha la seguente situazione:



$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} \neq 0$

cioè occorre in qualsiasi punto in cui la parete non è orizzontale

\Rightarrow la condizione iniziale genera un campo di moto non solenoidale

La soluzione è quella di esprimere un campo potenziale che soddisfa la condizione al bordo.

Vedilo così come:

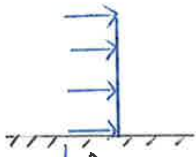
CONDIZIONI INIZIALI:
$$\begin{cases} \vec{v}_{t=0} = \vec{v}_0(\vec{x}) \\ \nabla \cdot \vec{v}_0 = 0 \\ (\vec{n} \cdot \vec{v}_0)_{t=0} = \vec{n} \cdot \vec{v}_0|_S \end{cases}$$

\vec{v}_0 = velocità iniziale
 \vec{v}_0 = velocità sul contorno
 S = superficie contorno

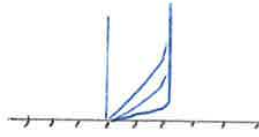
La terza condizione vuole che la componente normale di \vec{v} sul contorno sia uguale alla componente normale di \vec{v} all'istante iniziale nella superficie esterna.

Impostando come condizione iniziale un campo uniforme, non riesco a soddisfare tale

diffusione dei termini vorticosi all'interno del campo di moto.



gradiente di velocità infinito a parete all'istante iniziale
 -> vorticità infinite
 strato limite infinitamente sottile



diffusione della vorticità nel corso del tempo e generazione dello strato limite

SOLUZIONE NUMERICA NS INCOMPRESSIBILI

FORMULAZIONE AI VOLUMI FINITI

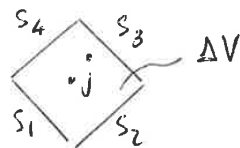
Riprendiamo le equazioni scritte in forma integrale:

$$\int_S \vec{v} \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\rho \int_V u_t dV + \int_S p n_x ds + \rho \int_S u \vec{v} \cdot \vec{n} ds - \int_S \mu \nabla u \cdot \vec{n} ds = 0$$

$$\rho \int_V v_t dV + \int_S p n_y ds + \rho \int_S v \vec{v} \cdot \vec{n} ds - \int_S \mu \nabla v \cdot \vec{n} ds = 0$$

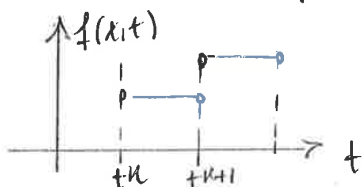
Discretizzazione:



Integrazione nel tempo - schemi espliciti ed impliciti

$$m \frac{du}{dt} = f(x,t) \rightarrow \int_{t^k}^{t^{k+1}} du = \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(x,t) dt \rightarrow \underbrace{u(x,t^{k+1})}_{u^{k+1}} - \underbrace{u(x,t^k)}_{u^k} = \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(x,t) dt$$

Non abbiamo idea di come vari $f(x,t)$ da t^k a t^{k+1} . Re cosa più semplice è ipotizzare $f(x,t)$ costante in ogni tratto t^k, t^{k+1} , ottenendo un'approssimazione del 1° ordine.



$$\Rightarrow \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(x,t) dt = f(x,t^k) \Delta t \rightarrow$$

nota la soluzione al passo k è immediato trovare la soluzione al passo $k+1$.

SCHEMA ESPLICITO

$$\Rightarrow (\phi_i^{k+1} - \phi_i^k) \Delta x = -\frac{\Delta t}{2} [\sum F^e + \sum F^v]^k - \frac{\Delta t}{2} [\sum F^e + \sum F^v]^{k+1}$$

Se ipotizziamo una discretizzazione dei flussi diffusivi al secondo ordine (derivata centrata) e dei flussi convettivi al primo ordine (upwind), per semplicità, allora:

$$(\phi_i^{k+1} - \phi_i^k) \Delta x = -\frac{\Delta t}{2} f(\phi_{i-1}^k, \phi_i^k, \phi_{i+1}^k) - \frac{\Delta t}{2} f(\phi_{i-1}^{k+1}, \phi_i^{k+1}, \phi_{i+1}^{k+1})$$

$$\Rightarrow \text{Sistema di funzioni (una per ogni punto)} \quad \bar{F}(\bar{\phi}^{k+1}) = 0$$

Una di tali funzioni è:

$$\phi_i^{k+1} \Delta x + \frac{\Delta t}{2} f(\phi_{i-1}^{k+1}, \phi_i^{k+1}, \phi_{i+1}^{k+1}) + \frac{\Delta t}{2} f(\phi_{i-1}^k, \phi_i^k, \phi_{i+1}^k) + \phi_i^k \Delta x = 0$$

Mettendo insieme tutte le funzioni si ottiene un sistema che si genera è NON LINEARE \rightarrow metodo di Newton - Raphson:

$$\bar{F}_i(\bar{\phi}^{k+1}) = 0 \rightarrow \bar{F}_i(\bar{\phi}^{k+1}) + [J] \delta \bar{\phi}^{k+1} - \bar{\phi}^{k+1} \delta = 0 \quad \text{espressione in serie di Taylor}$$

$$\Rightarrow [J] \delta \bar{\phi}^{k+1} - \bar{\phi}^{k+1} \delta = -\bar{F}_i(\bar{\phi}^{k+1})$$

\rightarrow bisogna risolvere un sistema spesso di grandi dimensioni in maniera iterativa per avanzare nel tempo

Per cui:

ITERAZIONE TEMPORALE \rightarrow esterna

ITERAZIONE PER RISOLVERE SISTEMA LINEARE \rightarrow interna

Il vantaggio è che non si hanno vincoli nel passo temporale Δt (per lo meno nell'eq. modello).

Osserviamo inoltre che lo scheme implicito, per Δt molto grande, equivale a risolvere il problema stazionario, infatti:

$$(\phi_i^{k+1} - \phi_i^k) \frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{1}{2} f(\phi_{i-1}^k, \phi_i^k, \phi_{i+1}^k) - \frac{1}{2} f(\phi_{i-1}^{k+1}, \phi_i^{k+1}, \phi_{i+1}^{k+1})$$

$$\phi_i^{k+1} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{2} f(\phi_{i-1}^{k+1}, \phi_i^{k+1}, \phi_{i+1}^{k+1}) - \frac{1}{2} f(\phi_{i-1}^k, \phi_i^k, \phi_{i+1}^k) + \phi_i^k \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0$$

termini che entrano in [J]

Semi-discretizzazione in spazio:

$$\sum_S (\vec{v} \cdot \vec{n})_S \Delta S_S = 0$$

$$\rho (u^{k+1} - u^k) \Delta V + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left[\sum_S (p n_x)_S \Delta S_S \right] dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \rho \left[\sum_S (u \vec{v} \cdot \vec{n})_S \Delta S_S \right] dt - \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left[\sum_S (\mu \nabla u \cdot \vec{n})_S \Delta S_S \right] dt = 0$$

$$\rho (v^{k+1} - v^k) \Delta V + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left[\sum_S (p n_y)_S \Delta S_S \right] dt + \int_{t^k}^{t^{k+1}} \rho \left[\sum_S (v \vec{v} \cdot \vec{n})_S \Delta S_S \right] dt - \int_{t^k}^{t^{k+1}} \left[\sum_S (\mu \nabla v \cdot \vec{n})_S \Delta S_S \right] dt = 0$$

Discretizzazione nel tempo:

$$\rho (u^{k+1} - u^k) \Delta V + \Delta t \sum_S (p^n n_x)_S \Delta S_S + \Delta t \rho \sum_S (u^k \vec{v}^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S - \Delta t \sum_S (\mu \nabla u^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S = 0$$

$$\rho (v^{k+1} - v^k) \Delta V + \Delta t \sum_S (p^n n_y)_S \Delta S_S + \Delta t \rho \sum_S (v^k \vec{v}^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S - \Delta t \sum_S (\mu \nabla v^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S = 0$$

Il problema è che dal punto di vista numerico non è chiaro che la condizione di divergenza nulla sia rispettata.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \int_S \vec{v} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow \sum_S \vec{v}_S \cdot \vec{n}_S \Delta S_S = 0 \rightarrow \text{occorre utilizzare dei metodi che mantengono la divergenza numerica nulla.}$$

$$\sum_{i=1}^{N_S} (u^{k+1} n_{x_i} + v^{k+1} n_{y_i}) \Delta S_i = 0$$

Moltiplichiamo con:

$$P_x = \sum_S (p n_x)_S \Delta S ; P_y = \sum_S (p n_y)_S \Delta S$$

$$H_x^k = \rho \sum_S (u^k \vec{v}^k \cdot \vec{n})_S \Delta S - \sum_S (\mu \nabla u^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S ; H_y^k = \rho \sum_S (v^k \vec{v}^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S - \Delta t \sum_S (\mu \nabla v^k \cdot \vec{n})_S \Delta S_S$$

Allora:

$$\begin{cases} \rho (u^{k+1} - u^k) \Delta V + \Delta t P_x + \Delta t H_x^k = 0 \\ \rho (v^{k+1} - v^k) \Delta V + \Delta t P_y + \Delta t H_y^k = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_x + H_x^k] \\ v^{k+1} = v^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_y + H_y^k] \end{cases}$$

Quale distribuzione di pressione utilizziamo?

Dovremmo utilizzare una distribuzione che al livello numerico garantisca la divergenza nulla. ipotizziamo di prendere una P_x^*, P_y^* o cosa, obbediente:

$$\Rightarrow \begin{cases} u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_x^* + H_x^k] \\ v^{k+1} = v^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_y^* + H_y^k] \end{cases} \xleftrightarrow{\text{confrontando}} \begin{cases} u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_x + H_x^k] \\ v^{k+1} = v^k - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} [P_y + H_y^k] \end{cases}$$

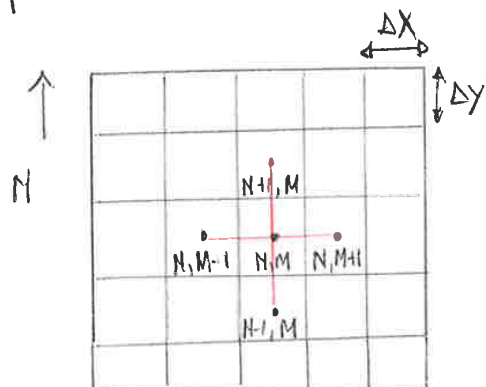
Imponendo la divergenza numerica nulla si ottiene:

$$\sum_{i=1}^{Nf} (P'_x n_{xi} + P'_y n_{yi}) \Delta S_i = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \sum_{i=1}^{Nf} (v_i^* n_{xi} + w_i^* n_{yi}) \Delta S_i$$

Allora, data una griglia, in ogni centro cella si pone una p' . Per cui:

- 1) calcolo la p' nelle facce con un'interpolazione lineare tra i centri celle
- 2) calcolo $P'_x = \sum (p'_x)_s \Delta S$, $P'_y = \sum (p'_y)_s \Delta S$, che diventano le P' dei centri celle
- 3) calcolo i valori di P' nelle facce con un'interpolazione lineare tra i centri celle
- 4) calcolo $\sum_{i=1}^{Nf} (P'_x n_{xi} + P'_y n_{yi}) \Delta S_i$

Faccendo le cose in questo modo, si ottiene uno schema numerico problematico. Vediamolo perché:



Per la cella M, N :

$$\sum_{i=1}^4 (P'_x n_{xi} + P'_y n_{yi}) \Delta S_i = P'_x \Delta y - P'_x \Delta y + P'_y \Delta x - P'_y \Delta x$$

$$\text{Som } P'_x = \sum_{i=1}^4 (p'_x)_y \Delta S_i$$

$M \rightarrow$ valore sulla faccia di dx

n_x nelle facce inferiori e superiori vale 0.

$$(P'_x)_{N,M} = \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N,M+1}) \Delta y - \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N,M-1}) \Delta y$$

$$(P'_y)_{N,M} = \frac{1}{2} (p'_{N+1,M} + p'_{N,M}) \Delta x - \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N-1,M}) \Delta x$$

$$(P'_x)_{N,M+1} = \frac{1}{2} (p'_{N,M+1} + p'_{N,M+2}) \Delta y - \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N,M+1}) \Delta y$$

$$(P'_y)_{N,M+1} = \frac{1}{2} (p'_{N+1,M+1} + p'_{N,M+1}) \Delta x - \frac{1}{2} (p'_{N,M+1} + p'_{N-1,M+1}) \Delta x$$

$$(P'_x)_{N+1,M} = \frac{1}{2} (p'_{N+1,M} + p'_{N+1,M+1}) \Delta y - \frac{1}{2} (p'_{N+1,M} + p'_{N+1,M-1}) \Delta y$$

$$(P'_y)_{N+1,M} = \frac{1}{2} (p'_{N+2,M} + p'_{N+1,M}) \Delta x - \frac{1}{2} (p'_{N+1,M} + p'_{N+1,M-1}) \Delta x$$

$$(P'_x)_{N,M-1} = \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N,M-1}) \Delta y - \frac{1}{2} (p'_{N,M-1} + p'_{N,M-2}) \Delta y$$

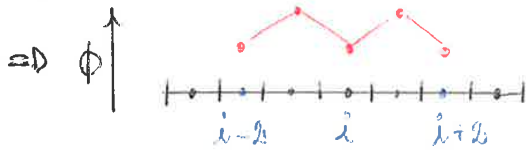
$$(P'_y)_{N,M-1} = \frac{1}{2} (p'_{N+1,M-1} + p'_{N,M-1}) \Delta x - \frac{1}{2} (p'_{N,M-1} + p'_{N-1,M-1}) \Delta x$$

$$(P'_x)_{N-1,M} = \frac{1}{2} (p'_{N-1,M+1} + p'_{N-1,M}) \Delta y - \frac{1}{2} (p'_{N-1,M} + p'_{N-1,M-1}) \Delta y$$

$$(P'_y)_{N-1,M} = \frac{1}{2} (p'_{N,M} + p'_{N-1,M}) \Delta x - \frac{1}{2} (p'_{N-1,M} + p'_{N-2,M}) \Delta x$$

Consideriamo il caso unidimensionale:

supponiamo di voler risolvere $\nabla^2 \phi = 0$ usando lo schema a tre celle.



nel punto i -esimo: $\nabla^2 \phi \rightarrow \frac{1}{\Delta^2} (\phi_{i-2} - 2\phi_i + \phi_{i+2})$

Se consideriamo una soluzione come quelle in rosso, possiamo notare che per lo schema a tre celle tale genere di distribuzione soddisfa l'equazione $\nabla^2 \phi = 0$, perché in ogni punto $\frac{1}{\Delta^2} (\phi_{i-2} - 2\phi_i + \phi_{i+2}) = 0$.

- => lo schema non si occupa delle oscillazioni con frequenza pari a una cella
- => nel momento in cui si introduce errore numerico, lo schema fornisce soluzioni molto oscillanti, poiché i punti tra una cella e l'altra non sono visti.

SOLUZIONE

P' rappresenta un' approssimazione di $\nabla p'$ nel centro cella.

Fino ad ora abbiamo proceduto nel seguente modo:

- 1) calcolo i gradienti in ciascuno centro cella
- 2) calcolo le medie dei gradienti e le assegna all'interfaccia
- 3) una volta noto il gradiente all'interfaccia, lo utilizzo per calcolare la divergenza del gradiente.

Potremmo anche ragionare in un altro modo:

$$\sum_{i=1}^{N_x} (P'_x n_{x_i} + P'_y n_{y_i}) \Delta S_i = (P'_{x_{N, N+1/2}} - P'_{x_{N, N-1/2}}) \Delta y + (P'_{y_{N+1/2, M}} - P'_{y_{N-1/2, M}}) \Delta x$$

possiamo allora calcolare P'_x, P'_y alle interfacce non come medie dei gradienti di celle contigue, ma sfruttando direttamente la omogeneità dei valori di p'_x e p'_y nei centri cella e utilizzando uno schema centrato per il calcolo delle derivate, poiché:

$$P'_x \approx \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \Delta x; \quad P'_y \approx \left(\frac{\partial p'}{\partial y} \right) \Delta y$$

Allora:

$$\sum_{i=1}^{N_x} (P'_x n_{x_i} + P'_y n_{y_i}) \Delta S_i = \left[\frac{P'_{N, M+1} - P'_{N, M}}{\Delta x} \Delta x \Delta y - \frac{P'_{N, M} - P'_{N, M-1}}{\Delta x} \Delta x \Delta y \right] \Delta y + \left[\frac{P'_{N+1, M} - P'_{N, M}}{\Delta y} \Delta x \Delta y - \frac{P'_{N, M} - P'_{N-1, M}}{\Delta y} \Delta x \Delta y \right] \Delta x =$$

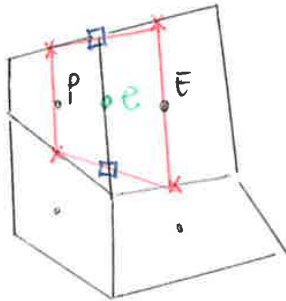
② Calcolo la distribuzione della correzione di pressione risolvendo l'eq. di Poisson:

$$\sum_s (F'_x n_x + F'_y n_y) \Delta S_s = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \sum_s (U^* n_x + V^* n_y) \Delta S_s$$

③ Calcolo il corretto campo di velocità e di pressione utilizzando la correzione ottenuta:

$$\begin{cases} U^{KH} = U^* - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} \sum_s (p'_x n_x) \Delta S_s = U^* - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} P'_x \\ V^{KH} = V^* - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} \sum_s (p'_y n_y) \Delta S_s = V^* - \frac{\Delta t}{\Delta V} \frac{1}{\rho} P'_y \end{cases}$$

CASO DI UNA GRIGLIA NON ORTOGONALE



$$-\rho \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_e \Delta V_{aux} = \sum_{i=1}^{N_{aux}} p_i n_{x_i} \Delta S_i$$

Tale metodo va tanto peggio quanto più la griglia risulta distorta.

1) Definisco una griglia ausiliaria in cui ogni cella mi fornisce avendo i valori intermedi delle celle di fianco.

=> i valori nel centro delle facce perenti per P ed E sono proprio i valori del centro della cella.

=> i valori nel centro delle altre facce, in blu, possono essere ottenuti tramite interpolazione con altri punti.

Normalizzazione delle equazioni

Definiamo le grandezze di riferimento di base: p_R, T_R, l_R

Dell'equazione di stato: $e_R = p_R / (R T_R)$

La velocità di riferimento è pari a: $u_R = \sqrt{R^* T_R}$

L'entropia viene normalizzata dividendo per $c_v \rightarrow \bar{s} = s / c_v$

Le energie per unità di massa vengono normalizzate con $R T_R \rightarrow \bar{h} = \frac{h}{R^* T_R}, \bar{e} = \frac{e}{R^* T}$

Per cui:

$$\bar{p} = p / p_R; \bar{T} = T / T_R; \bar{l} = l / l_R; \bar{e} = e / e_R; t_R = l_R / u_R \rightarrow \bar{t} = t / t_R; \bar{s} = \frac{s}{c_v}; \bar{h} = \frac{h}{R^* T};$$

$$\bar{e} = e / R^* T \dots$$

Tutto ciò porta a combinarsi molte delle relazioni da noi utilizzate:

$$\bar{h} = \frac{h}{R^* T_R} = \frac{c_p T}{R^* T_R} = \frac{c_p \bar{T}}{R^*} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{T} \quad \text{perché } c_p - c_v = R^*; \quad c_p / R^* = \frac{c_p}{c_p - c_v} = \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

$$\bar{e} = \frac{e}{R^* T_R} = \frac{c_v T}{R^* T_R} = \frac{c_v \bar{T}}{R^*} = \frac{1}{\gamma - 1} \bar{T} \quad \text{perché } c_p - c_v = R^*; \quad c_v / R^* = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

$$\left. \begin{array}{l} p = \rho R^* T \\ p_R = \rho_R R^* T_R \end{array} \right\} \rightarrow \bar{p} = \bar{\rho} \bar{T} \quad \text{eq. di stato in termini adimensionali}$$

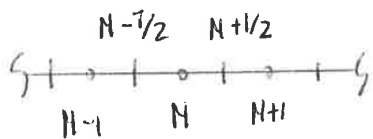
$$h^0 = h + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \rightarrow c_p T^0 = c_p T + \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 \rightarrow \text{in 1D: } c_p T^0 = c_p T + \frac{1}{2} u^2$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{T}^0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \bar{T} + \frac{1}{2} \bar{u}^2 \rightarrow \bar{T}^0 = \bar{T} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \bar{u}^2$$

$$\bar{s} = \frac{s}{c_v} \rightarrow ds = c_v \frac{dp}{p} - c_p \frac{de}{e} \quad \text{perché per } ds = 0 \text{ deve essere } \frac{p}{e} = \text{cost}$$

$$\rightarrow d\bar{s} = d\left(\frac{\bar{p}}{\bar{e}}\right) - \gamma \frac{d\bar{e}}{\bar{e}}$$

Discretizziamo il dominio in una serie di celle e collochiamo le leggi di conserv. nelle N-esime celle:



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \bar{W} dx + \bar{F}^c(x_{N+1/2}) - \bar{F}^c(x_{N-1/2}) = 0$$

È un'importante osservazione che i flussi possono essere scritti come funzioni delle variabili conservative.

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{W}) \rightarrow \bar{F}^c(x_{N+1/2}) = \bar{F}(\bar{W}(x_{N+1/2}, t))$$

A questo punto è necessario trovare un modo per scrivere i flussi alle interfacce. Attraverso un'interpolazione lineare si ottiene uno schema instabile, per cui è necessario determinare delle tecniche numeriche che ci permettano di ottenere uno schema numericamente stabile.

Scriviamo le leggi di conservazione in forma differenziale:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho dx + (\rho u)_{x_2} - (\rho u)_{x_1} &= 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} \rho u dx + (p + \rho u^2)_{x_2} - (p + \rho u^2)_{x_1} &= 0 \rightarrow \frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (p + \rho u^2)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^{x_2} E dx + [(E+p)u]_{x_2} - [(E+p)u]_{x_1} &= 0 \rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial [(E+p)u]}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}^c}{\partial x} = 0$$

divergenza in 1D.
↑
m

Osserviamo che:

$$\bar{F}^c = \begin{Bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (E+p)u \end{Bmatrix}, \quad \bar{W} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{Bmatrix}$$

$$\bullet F_1 = \rho u = w_2$$

$$\bullet \rho u^2 = \frac{(\rho u)^2}{\rho} = \frac{w_2^2}{w_1}$$

$$\bullet E = \rho (c_v T + \frac{1}{2} u^2) \rightarrow \bar{E} = \frac{E}{\rho R^* T_R} = \frac{\rho c_v T}{\rho R^* T_R} + \frac{1}{2} \frac{\rho u^2}{\rho R^* T_R} = \frac{1}{\gamma - 1} \bar{c}_T + \frac{1}{2} \bar{c}_U^2$$

Da ora in poi: $E = \frac{1}{\gamma - 1} \rho T + \frac{1}{2} \rho u^2$, senza mettere i termini barati

L'importante è che 1 VARIABILE sia legata alle CINEMATICA, le altre 2 alle TERMODINAMICA.

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + [A'] \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0, \text{ con } \bar{u} = \text{set di variabili } \underline{\text{PRIMITIVE}}.$$

Ad esempio:

$$\bar{u} = \begin{Bmatrix} a \\ s \\ u \end{Bmatrix} \begin{cases} \rightarrow \text{termodinamica} \\ \rightarrow \text{cinematica} \end{cases}$$

$$u' = \begin{Bmatrix} p \\ e \\ u \end{Bmatrix} \begin{cases} \rightarrow \text{termodinamica} \\ \rightarrow \text{cinematica} \end{cases}$$

$$\tilde{u} = \begin{Bmatrix} p \\ h \\ u \end{Bmatrix} \quad u'' = \begin{Bmatrix} e \\ s \\ u \end{Bmatrix}$$

In termini formali:

$$\bar{w} = \bar{w}(\bar{u}) \rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{F}_w \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{F}_w \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \bar{F}_w}{\partial \bar{w}} \right) \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \right)}_{[A']} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \rightarrow [A'] = \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \right)^{-1} [A] \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{u}} \right)$$

note le relazioni che legano due set di variabili, è possibile riscrivere le eq. di Eulero pseudo da uno all'altro.

Ad esempio, consideriamo il set di variabili $\bar{u} = \begin{Bmatrix} e \\ s \\ u \end{Bmatrix}$.

Riscriviamo le equazioni di Eulero sostituendo l'equazione dell'energia con quella dell'entropia:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(eu) = 0 \rightarrow \frac{\partial e}{\partial t} + e \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(eu) + \frac{\partial}{\partial x}(p + eu^2) = 0 \rightarrow e \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + e u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial}{\partial x}(eu) = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dalle definizioni di entropia e di velocità del suono:

$$\begin{aligned} ds &= \frac{dp}{\rho} - \gamma \frac{de}{c} \quad (1) \\ \frac{e da}{a} &= \frac{dp}{\rho} - \frac{de}{c} \quad (2) \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} (1) - \gamma(2): \frac{dp}{\rho}(1-\gamma) &= ds - 2\gamma \frac{de}{a} \rightarrow \frac{dp}{\rho} = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{de}{a} - \frac{ds}{\gamma-1} \\ (1) - (2): \frac{de}{c}(1-\gamma) &= -2 \frac{de}{a} + ds \rightarrow \frac{de}{c} = \frac{2}{\gamma-1} \frac{de}{a} - \frac{ds}{\gamma-1} \end{aligned} \right.$$

Un'Eulero time dependent esiste tale set di variabili, ma non è sempre detto che ciò esista.

Ad esempio, in Eulero stazionaria 2D è possibile fare ciò solamente in regime supersoni.

Se le equazioni consentano di trovare un set di variabili che permette di disaccoppiare le equazioni stesse, queste si dicono IPERBOLICHE.

Un tale caso:

$$\begin{cases} \frac{\partial R_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial R_1}{\partial x} = 0 \rightarrow \left(\frac{DR_1}{Dt}\right)_{\lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial R_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial R_2}{\partial x} = 0 \rightarrow \left(\frac{DR_2}{Dt}\right)_{\lambda_2} = 0 \\ \frac{\partial R_3}{\partial t} + \lambda_3 \frac{\partial R_3}{\partial x} = 0 \rightarrow \left(\frac{DR_3}{Dt}\right)_{\lambda_3} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{seguoli } R_1, R_2, R_3 \text{ che viaggiano con una velocità di propagazione } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

Riprendiamo le relazioni precedentemente scritte:

$$\begin{cases} a_t + u a_x + \frac{1}{2} \rho u_x = 0 \\ v_t + u v_x + \frac{2}{\gamma-1} \rho a_x - \frac{\rho^2}{\gamma(\gamma-1)} s_x = 0 \\ s_t + u s_x = 0 \end{cases}$$

Per trovare un insieme di equazioni differenziali disaccoppiate, facciamo una combinazione lineare delle tre relazioni:

$$\mu_1 \left[a_t + u a_x + \frac{1}{2} \rho u_x \right] + \mu_2 \left[v_t + u v_x + \frac{2}{\gamma-1} \rho a_x - \frac{\rho^2}{\gamma(\gamma-1)} s_x \right] + \mu_3 \left[s_t + u s_x \right] = 0$$

Riorganizzando i termini:

$$\mu_1 \left[a_t + \underbrace{\frac{2}{\gamma-1} \mu_2 \rho + \mu_1 u}_{\mu_1} a_x \right] + \mu_2 \left[v_t + \underbrace{\mu_2 u + \frac{1}{2} \mu_1 \rho}_{\mu_2} v_x \right] + \mu_3 \left[s_t + \underbrace{\frac{-\mu_2 \rho^2}{\gamma(\gamma-1)} + \mu_3 u}_{\mu_3} s_x \right] = 0$$

Ci piacerebbe trovare una variabile λ tale che:

$$\lambda = \frac{2}{\gamma-1} \mu_2 \rho + \mu_1 u = \frac{\mu_2 u + \frac{1}{2} \mu_1 \rho}{\mu_1} = \frac{-\mu_2 \rho^2}{\gamma(\gamma-1)} + \mu_3 u$$

in modo da poter scrivere la combinazione lineare come:

$$\mu_1 (a_t + \lambda a_x) + \mu_2 (v_t + \lambda v_x) + \mu_3 (s_t + \lambda s_x) = 0 \rightarrow \mu_1 a_t + \mu_2 v_t + \mu_3 s_t + \lambda (\mu_1 a_x + \mu_2 v_x + \mu_3 s_x) = 0$$

Se $\mu_1 = 1 \rightarrow \mu_2 = -\frac{\gamma-1}{2}, \mu_3 = -\frac{a}{2\gamma}$

Allora:

$$\mu_1 a_t + \mu_2 u_t + \mu_3 S_t + \lambda(\mu_1 a_x + \mu_2 u_x + \mu_3 S_x) = 0$$

$$\Rightarrow \left[a_t - \frac{\gamma-1}{2} u_t - \frac{a}{2\gamma} S_t + (u-a) \left[a_x - \frac{\gamma-1}{2} u_x - \frac{a}{2\gamma} S_x \right] \right] = 0$$

$$\Rightarrow dR_1 = da - \frac{\gamma-1}{2} du - \frac{a}{2\gamma} ds \quad \text{invariante di Riemann}$$

Normalmente tale invariante si scrive come il precedente, ma moltiplicato per $\frac{2}{\gamma-1}$.

$$\Rightarrow \text{ovvero potremmo scegliere subito } \mu_1 = \frac{2}{\gamma-1}$$

Allora:

$$\lambda_1 = u - a \quad \text{VELOCITÀ CARATTERISTICA}$$

$$a_t \cdot \frac{2}{\gamma-1} - u_t - \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} S_t + (u-a) \left[\frac{2}{\gamma-1} a_x - u_x - \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} S_x \right] = 0$$

$$dR_1 = \frac{2}{\gamma-1} da - du - \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} ds \quad \text{1° INVARIANTE DI RIEMANN}$$

$$\bullet \lambda = u$$

$$\begin{cases} \mu_2 = 0 \\ \mu_1 = 0 \end{cases}$$

$$\mu_3 \cdot 0 = 0 \rightarrow \mu_3 \text{ può assumere un valore qualsiasi} \rightarrow \text{scegliamo } \mu_3 = 1$$

$$\Rightarrow S_t + u S_x = 0$$

$$dR_2 = ds$$

Allora:

$$\lambda_2 = u \quad \text{VELOCITÀ CARATTERISTICA}$$

$$S_t + u S_x = 0$$

$$dR_2 = ds \quad \text{2° INVARIANTE DI RIEMANN}$$

nesso e che trasportano informazioni su come devono cambiare le velocità del mondo, la velocità cinematica e l'entropia combinate insieme.

Il problema risolto poteva essere affrontato in altro modo, più compatto:

il nostro sistema di portanza è: $\bar{U}_t + \bar{A} \bar{U}_x = 0$

vogliamo scrivere e: $\bar{R}_t + \bar{\Lambda} \bar{R}_x = 0$, con $\bar{\Lambda}$ matrice diagonale

Per passare dal set di variabili \bar{U} al nuovo set di variabili \bar{R} , è possibile moltiplicare le variabili di portanza per una matrice che contiene tutte le informazioni necessarie per passare da un set all'altro.

Allora:

$$\bar{U}_t + \bar{A} \bar{U}_x = 0$$

$$\bar{L} \bar{U}_t + \bar{L} \bar{A} \bar{U}_x = 0 \quad \text{con } \bar{L} \text{ scelta in modo tale che } d\bar{R} = \bar{L} d\bar{U}$$

$$\bar{L} \bar{U}_t + \underbrace{\bar{L} \bar{A} \bar{L}^{-1}}_{\bar{\Lambda}} \bar{L} \bar{U}_x = 0 \Rightarrow \underbrace{\bar{L} \bar{U}_t}_{\bar{R}_t} + \bar{\Lambda} \bar{L} \bar{U}_x = 0 \Rightarrow \bar{R}_t + \bar{\Lambda} \bar{R}_x = 0$$

Se riusciamo a trovare \bar{L} tale che $\bar{L} \bar{A} \bar{L}^{-1} = \bar{\Lambda}$ matrice diagonale, possiamo disaccoppiare le equazioni.

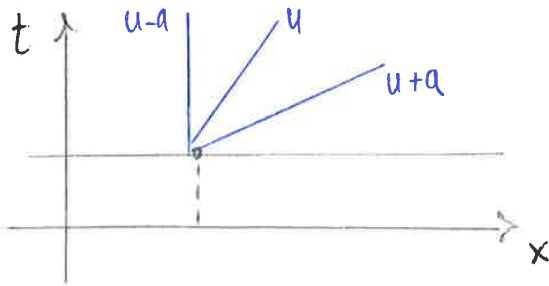
Il metodo di procedere in articolo nei seguenti passi:

- ① Trova gli autovalori della matrice $\bar{A} \rightarrow |(\bar{A} - \lambda \bar{I})| = 0$
- ② Sostituisci gli autovalori trovati nella matrice \bar{A} e trova gli autovettori corrispondenti
- ③ La matrice \bar{L} si costruisce utilizzando gli autovettori trovati come righe della matrice stessa
- ④ Si trova il nuovo set di variabili semplicemente come: $d\bar{R} = \bar{L} d\bar{U}$.

Osserviamo che non è necessariamente detto che come set di variabili occorre partire da $\bar{U} = \{e, u, s\}^T$.

Per questo nel esempio da $\bar{U}' = \left\{ \begin{matrix} p \\ h \end{matrix} \right\}$ saremmo potuti giungere ugualmente a $\bar{R} = \left\{ \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{matrix} \right\}$

Possiamo determinare le velocità di propagazione nel piano delle fasi, in cui la pendenza di ogni curva rappresenta una velocità.



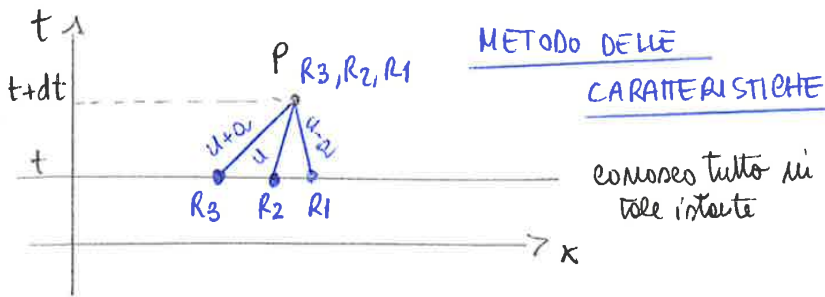
$$dR_3 = \frac{z}{\beta-1} de + du - \frac{e}{\beta(\beta-1)} ds$$

$\Rightarrow \int_{\lambda_3} dR_3 = 0 \rightarrow R_3$ si mantiene costante lungo la linea associata alle velocità u e a .

Analogamente:

$$\int_{\lambda_1} dR_2 = 0, \int_{\lambda_2} dR_1 = 0$$

Allora, considerando come accade ad un istante temporale, è possibile sapere come accade in un istante successivo semplicemente combinando insieme il contenuto dei segnali.



Supponiamo che l'intervallo di tempo considerato sia abbastanza piccolo, in modo che le velocità di propagazione dei segnali siano ancora costanti.

È possibile dunque calcolare le variabili fluidodinamiche e dunque il campo di moto in un istante successivo = moto come accade all'istante precedente.

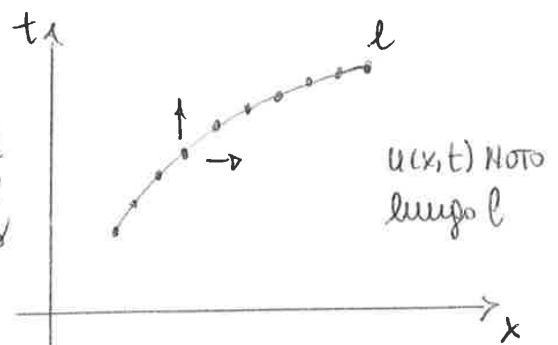
(nel corso del tempo u, s cambiano, perciò cambiano anche le vel. di propagazione).

Descriviamo un altro modo di ottenere le velocità caratteristiche e le equazioni di compatibilità.

Consideriamo un'equazione modello che contiene anche le non-linearità tipiche delle equazioni di Eulero, l'EQUAZIONE di BURGERS:

$$u_t + u u_x = 0 \rightarrow \text{in tal caso } dR = du, \lambda = u$$

Consideriamo un percorso nel piano $x-t$ assolutamente arbitrario. Conoscendo i valori di u lungo tale percorso è possibile valutare il gradiente di u , che in tale punto è pari a (u_t, u_x) ?



Utilizzando Cramer:

$$\det \begin{vmatrix} 1 & u \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - u \Rightarrow u_t = \frac{\begin{vmatrix} 0 & u \\ (D_x/dt)\lambda & \lambda \end{vmatrix}}{\lambda - u}, \quad u_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & (D_x/dt)\lambda \end{vmatrix}}{\lambda - u}$$

Quando $\lambda = u$ non si ottengono soluzioni. In tal caso la pendenza della curva sul piano delle fasi è pari alla velocità di propagazione del segnale \rightarrow linee caratteristiche

Considerando le equazioni di Eulero:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u & \frac{\delta-1}{2}e & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{z}{r-1}u & -\frac{e^2}{\delta(\delta-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & u \\ 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_t \\ u_t \\ s_t \\ e_x \\ u_x \\ s_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (D_e/dt)\lambda \\ (D_u/dt)\lambda \\ (D_s/dt)\lambda \end{Bmatrix}$$

Il sistema deriva da:

$$\left. \begin{aligned} e_t + u e_x + \frac{\delta-1}{2} e u_x &= 0 \\ u_t + u u_x + \frac{z}{r-1} e e_x - \frac{e^2}{\delta(\delta-1)} s_x &= 0 \\ s_t + u s_x &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow u_t + u u_x = 0$$

$$\left. \begin{aligned} e_t + \lambda e_x &= (D_e/dt)\lambda \\ u_t + \lambda u_x &= (D_u/dt)\lambda \\ s_t + \lambda s_x &= (D_s/dt)\lambda \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow u_t + \lambda u_x = (D_u/dt)\lambda$$

Ci rimane cioè chiedendo se sia possibile calcolare $e_t, e_x, u_t, u_x, s_t, s_x$ nota la distribuzione di $e(t,x), u(t,x), s(t,x)$ lungo una linea l .

L'annullarsi del determinante della matrice dei coefficienti stabilisce quando non è possibile trovare soluzioni. Si ottiene:

$$\lambda_1 = u - e, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + e$$

Per determinare le equazioni di compatibilità, che governano la distribuzione di e, u, s lungo λ , occorre imporre uguale a 0 il determinante della matrice che si ottiene sostituendo alla colonna corrispondente all'incognita cercata la colonna dei termini noti.

Dove i valori $e_{1-P}, e_{2-P}, e_{3-P}, u_{2-P}, u_{3-P}$ possono essere calcolati attraverso un'interpolazione lineare tra i nodi della griglia all'istante iniziale.

Una volta calcolata la posizione dei punti 1, 2, 3, è possibile interpolare le variabili fluidodinamiche tra tali punti:

$$W_i = W_C \mp \frac{W_{L,R} - W_C}{\Delta x} (x_i - x_C) \quad \text{dove si usa '-' e L se } x_i \text{ ricade tra L-C, '+' e R se ricade tra C-R.}$$

Poi, è possibile integrare le equazioni di compatibilità lungo le rispettive linee caratteristiche, ottenendo:

→ in realtà è variabile ma supponiamo di prendere un valore medio

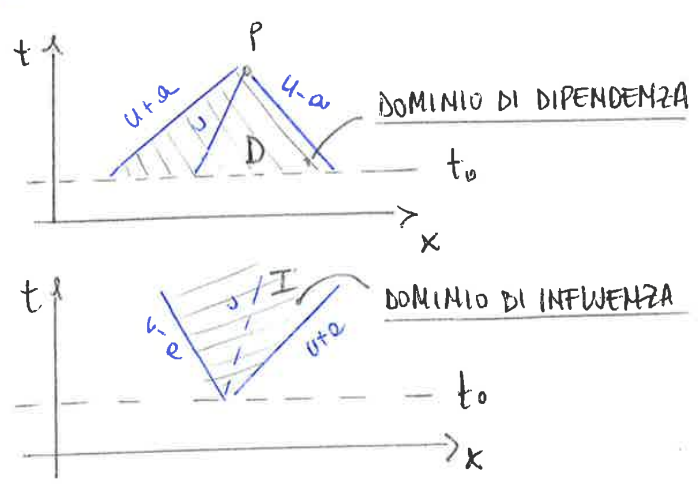
$$\int_3^P dR_3 = 0 \rightarrow \frac{2}{j-1} (e_P - e_3) + (u_P - u_3) - \frac{e_{3-P}}{\gamma(\gamma-1)} (S_P - S_3) = 0$$

$$\int_2^P dR_2 = 0 \rightarrow S_P - S_2 = 0$$

$$\int_1^P dR_1 = 0 \rightarrow \frac{2}{j-1} (e_P - e_1) - (u_P - u_1) + \frac{e_{1-P}}{\gamma(\gamma-1)} (S_P - S_1) = 0$$

Ma 1, 2, 3 è tutto noto perché abbiamo interpolato linearmente
 ⇒ tre equazioni in tre incognite, $u_P, S_P, e_P \Rightarrow$ determiniamo tutto in P

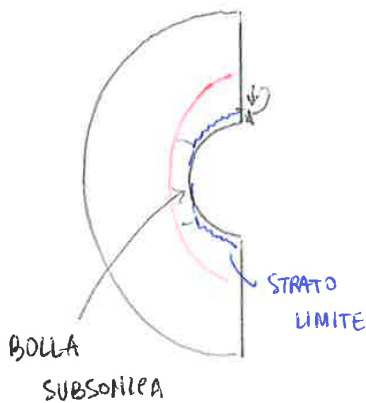
DOMINIO DI DIPENDENZA E DI INFLUENZA



La soluzione nel punto $P(x,t)$ dipende dai dati contenuti nel dominio D, necessario dalle caratteristiche $u+a, u-a$ che convergono in P.

I dati nel punto $P(x,t)$ si generano dal punto contenuto nel dominio I, necessario dalle caratteristiche $u+a$ e $u-a$ che partono dal punto P.

Osservazione:



EULERO → va bene non impone CB in uscita perché il flusso è supersonico

NS → lo stato limite è in parte supersonico, ma esiste una zona subsonica che comporta la necessità di fornire una CB in uscita.

⇒ si overpuò il valore di pressione calcolato nel campo supersonico e lo si tira giù fino a parete

FORMAZIONI DI DISCONTINUITÀ - CASO SCALARE

Consideriamo l'equazione di Burgers:

$$u_t + uu_x = 0 \rightarrow \text{eq. di compatibilità con } \lambda = u.$$

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_{\lambda=u} = 0$$

Possiamo riscrivere l'equazione sotto forma di legge di conservazione:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \rightarrow w = u, f = \frac{u^2}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{w_t + f_x = 0}$$

Questa non è l'unica legge di conservazione possibile, ad esempio:

$$\left. \begin{matrix} w_t = \frac{u^2}{2} \\ f = \frac{u^3}{3} \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} w_t = uu_t \\ f = u^2 u_x \end{matrix} \right\} \rightarrow uu_t + u^2 u_x = 0 \Rightarrow u_t + uu_x = 0$$

Ne esistono dunque infinite.

L'equazione di Burgers presenta in realtà anche un termine viscoso che per adesso trascuriamo.

Considerando una tale equazione, oneguate una condizione iniziale, cosa accade alla soluzione nel tempo?

- 1° e 3° famiglia: ONDE D'URTO
- 2° famiglia: SUPERFICI DI CONTATTO

DETERMINAZIONE DEL BREAKING TIME - CASO SCALARE

$w_t + fw_x = 0 \rightarrow$ generica equazione scalare scritta sotto forma di legge di conservazione

Sappiamo che possiamo arrivare l'equazione come:

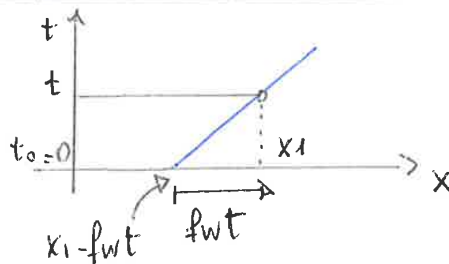
$w_t + f_w w_x = 0 \rightarrow$ in tal caso f_w è proprio la velocità di propagazione del segnale.
 Nel caso di Euler: $\det([f_w] - \lambda [I]) = 0 \rightarrow$ determiniamolo λ

La presenza di discontinuità dipende dal dato iniziale:

$w(x, 0) = \phi(x)$ dati iniziali

La soluzione generale dell'equazione può essere scritta come:

$w(x, t) = \phi(x - f_w t)$



Per sapere quando nasce la discontinuità, possiamo sfruttare il fatto che in tal caso $\partial w / \partial x \rightarrow \infty$.

Allora:

$w_x(x, t) = \phi_x \cdot (1 - (f_w)_x t) \rightarrow w_x(x, t) = \phi_x (1 - f_w w_x t)$

$\Rightarrow w_x (1 + \phi_x f_w w t) = \phi_x \rightarrow w_x = \frac{\phi_x}{1 + \phi_x f_w w t}$

Per cui, $w_x \rightarrow \infty$ quando:

$1 + \phi_x f_w w t = 0 \rightarrow t_b = - \frac{1}{\phi_x f_w w}$ ma $\phi_x = f(x), f_w w = f(x) \Rightarrow$ anche $t_b = f(x)$

A noi interessa il minimo tra tutti i possibili tempi, per cui:

$t_b = - \frac{1}{\min_x (\phi_x f_w w)}$

\rightarrow 'min' perché poiché c'è un segno '-' dobbiamo prendere il denominatore più negativo.

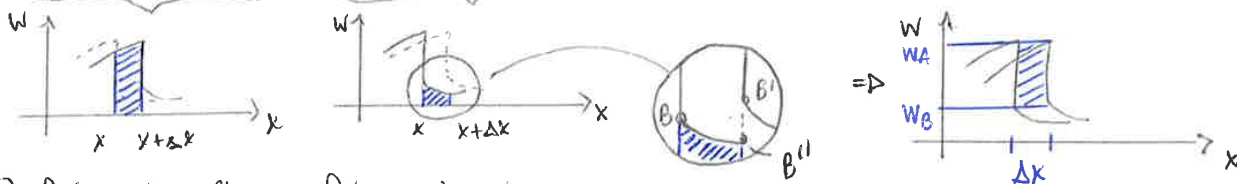
Scriviamo la legge di conservazione su un volume di controllo che racchiude due posizioni nelle quali la mia discontinuità si è spostata:

$$\int_x^{x+\Delta x} w_t dx + f(x+\Delta x) - f(x) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \int_x^{x+\Delta x} w dx + f(x+\Delta x) - f(x) = 0$$

Integrando nel tempo:

costante perché Δt piccolo

$$\int_x^{x+\Delta x} w(\xi, t+\Delta t) d\xi - \int_x^{x+\Delta x} w(\xi, t) d\xi + \int_t^{t+\Delta t} f(x+\Delta x, \tau) d\tau - \int_t^{t+\Delta t} f(x, \tau) d\tau = 0$$



Perché Δt è molto piccolo, possiamo assumere che $w_B \approx w_{B'} \approx w_{B''}$ e $w_A \approx w_{A'} \approx w_{A''}$

Allora:

$$w_A \approx w_{A''}$$

$$(w_A - w_B) \Delta x + [f(w_B) - f(w_A)] \Delta t = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(w_A) - f(w_B)}{w_A - w_B}$$

Per $\Delta t \rightarrow 0$ si ottiene la velocità di propagazione della discontinuità.

OSSERVAZIONE

Consideriamo l'eq. di Burgers:

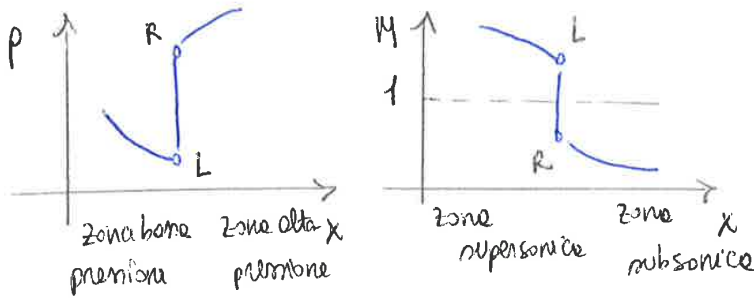
$$u_t + uu_x = 0 \rightarrow u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 ; w = u, f = \frac{u^2}{2} \rightarrow v_{DS} = \frac{\frac{u_R^2}{2} - \frac{u_L^2}{2}}{u_R - u_L} = \frac{1}{2} (u_R + u_L)$$

$$\frac{1}{2} u_t^2 + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0 ;$$

$$u_t^2 + 2\left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0 \Rightarrow w = u^2, f = \frac{2}{3} u^3 \rightarrow v_{DS} = \frac{\frac{2}{3}(u_R^3 - u_L^3)}{u_R^2 - u_L^2}$$

Partendo dalla stessa equazione quasi-lineare si ottengono, in tal caso, le finite leggi di conservazione che determinano una differente velocità di propagazione della discontinuità. Quando si è in presenza di una discontinuità, non è possibile utilizzare la legge quasi-lineare per risolvere il problema, poiché la derivata u_x non è definita e non è possibile avere informazioni sulle velocità di propagazione della discontinuità. \Rightarrow prima e dopo di essa è possibile utilizzare la legge quasi-lineare e quando di essa è necessario scrivere le equazioni sotto forma di leggi di conservazione

Dunque, se $u_L > 0$ e $v_{DS} = 0$ nasce un urto e si ha che:



URTO DELLA 1ª FAMIGLIA

Si genera a seguito del contatto tra linee caratteristiche u-r.

Se $u_L = 0$ e $v_{DS} = 0$:

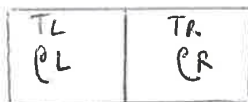
$u_L = 0 \Rightarrow \rho_L u_L - \rho_R u_R = 0 \Rightarrow u_R = 0 \Rightarrow$ i valori che circondano ρ_L, ρ_R sono arbitrari
 $\Rightarrow \rho_L$ potrebbe essere diverso da ρ_R

$\rho_L + \rho_L u_L^2 - \rho_R - \rho_R u_R^2 = 0 \Rightarrow \rho_L = \rho_R$

$(E + p)_L u_L - (E + p)_R u_R = 0 \Rightarrow$ oppure usando l'eq. di stato, se ρ_L potrebbe essere \neq da ρ_R ma $\rho_L = \rho_R$ potremmo avere discontinuità ad esempio nella temperatura, nell'entropia, ...

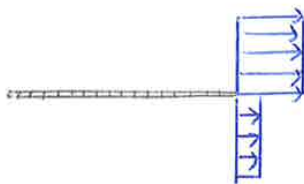
Ma nel caso la discontinuità prende il nome di SUPERFICIE DI CONTATTO

(1D)



\rightarrow gas a contatto con stessa pressione ma diverse temperature e densità. In tal caso non esiste flusso di calore.

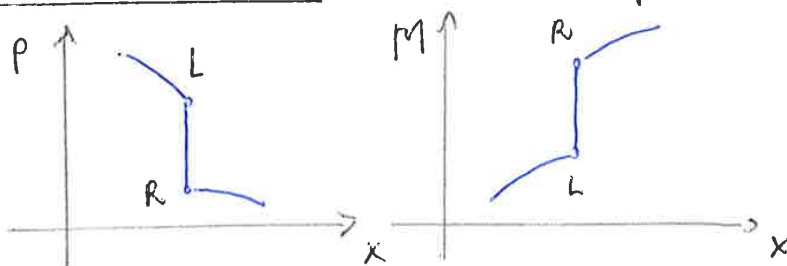
(2D)



\rightarrow flussi a velocità diverse a contatto.

Osserviamo che per $u_L = u_R = 0$ ci interessa la componente di velocità normale all'urto e in generale alla discontinuità.

Se $u_L < 0$ e $v_{DS} = 0$: il lato di bassa pressione (supersonico) è il lato di destra

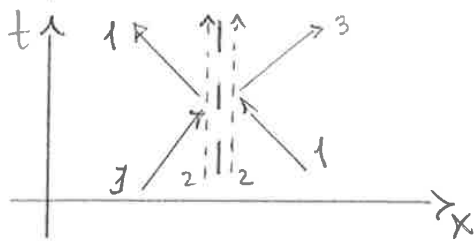
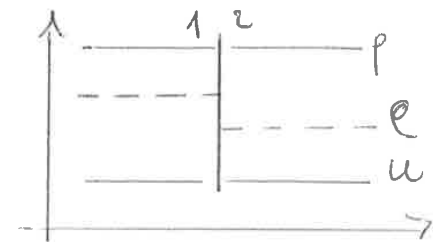


URTO DELLA 3ª FAMIGLIA

Si toccano le caratteristiche u+a.

DISCONTINUITÀ E LINEE CARATTERISTICHE - SUPERFICIE DI CONTATTO

Im Tal caso le caratteristiche della 2^a famiglia sono parallele alla discontinuità



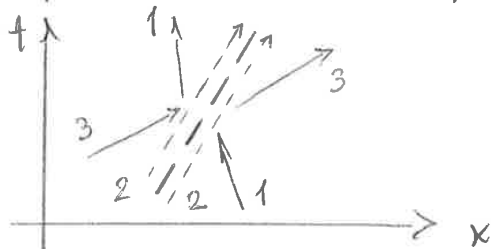
SUPERFICIE DI
CONTATTO FERMA

$$v_{cs} = 0$$

→

$v_L = v_R = 0 \rightarrow$ caratteristiche
parallele

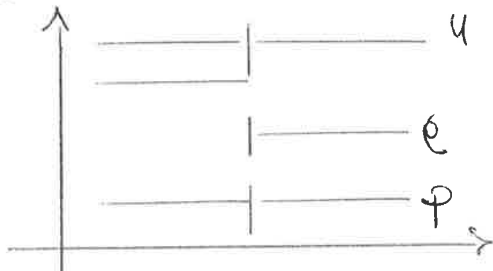
Questo dà luogo a dei
problemi dal punto di vista
numerico.



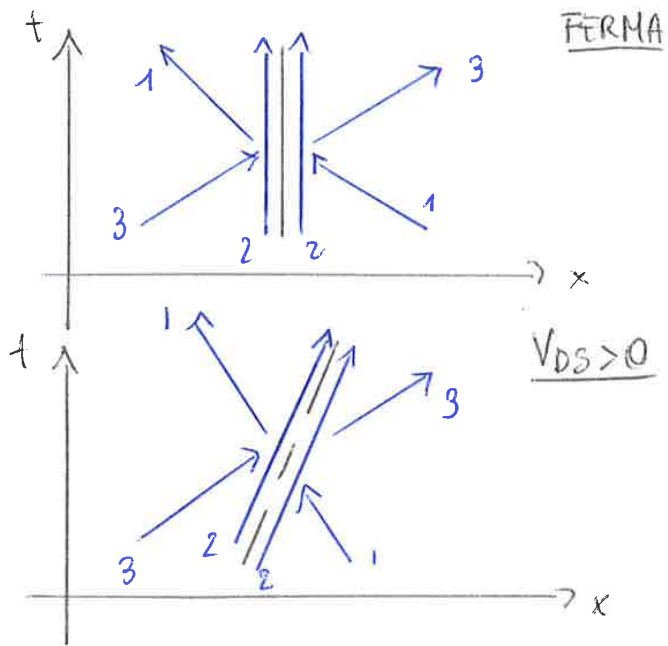
SUPERFICIE DI
CONTATTO IN
MOVIMENTO

$$v_{cs} > 0$$

SUPERFICIE DI CONTATTO



$V_L = V_R$
 $P_L = P_R$
 discontinuità in ϵ, T, S



OSSERVAZIONE: PROPRIETÀ FONDAMENTALE LEGGI DI CONSERVAZIONE

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{N+1/2}^k - f_{N-1/2}^k]$$

$$W_N^{k+1} \Delta x = W_N^k \Delta x - \Delta t [f_{N+1/2}^k - f_{N-1/2}^k]$$

$$\begin{aligned} \sum_{N=1}^{Nc} W_N^{k+1} \Delta x &= \sum_{N=1}^{Nc} W_N^k \Delta x - \Delta t \sum_{N=1}^{Nc} [f_{N+1/2}^k - f_{N-1/2}^k] = \\ &= \sum_{N=1}^{Nc} W_N^k \Delta x - \Delta t [f_{N_{max}+1/2}^k - f_{1/2}^k] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{N=1}^{Nc} W_N^{k+1} \Delta x = \sum_{N=1}^{Nc} W_N^k \Delta x - \Delta t [f_{N_{max}+1/2}^k - f_{1/2}^k]$$

Un'isola una legge di conservazione, siamo vicini che non ci sia alcun meccanismo numerico che produce massa (produzione di variabile conservativa) all'interno del dominio di calcolo \Rightarrow globalmente, la variabile conservativa dipende solo dalle condizioni al contorno

INTRODUZIONE AI METODI UPWIND

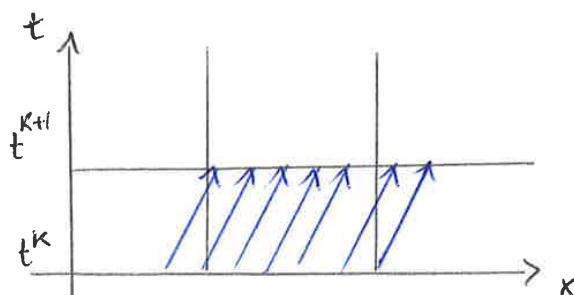
Tali metodi sfruttano il fatto che i segnali propagano lungo direzioni caratteristiche. Per introdurre il upwind, consideriamo un'equazione adone e lineare.

$W_t + \bar{a} W_x = 0$, con $\bar{a} = \text{cost} > 0$ \rightarrow nel piano $t-x$ le caratteristiche sono parallele le une alle altre

Im tal caso:

$$dR = dW, \quad \lambda = \bar{a} \text{ e } \text{supp.} > 0$$

Il flusso all'interfaccia $N-1/2$ è completamente determinato dal valore della W_{N-1}^k , mentre il flusso in $N+1/2$ è completamente determinato da W_N^k .



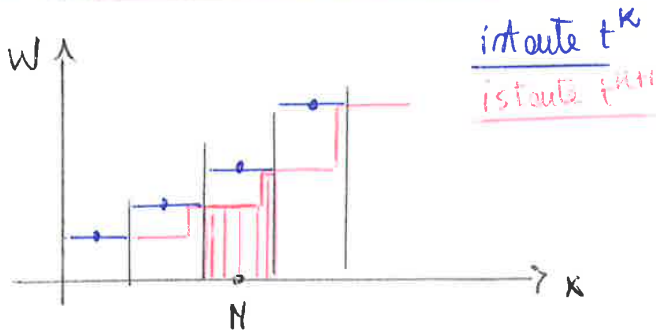
Supponiamo di riestimare la funzione W considerando un valore costante in ogni cella e pari al valore nel centro cella.

Rieleggendosi tale relazione:

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{a} W_N^k - \bar{a} W_{N-1}^k \right] \rightarrow$$

Il metodo upwind può anche essere interpretato come un metodo delle caratteristiche applicato ad un metodo alle differenze finite, con interpolazione lineare tra una cella e l'altra.

② APPROCCIO AI VOLUMI FINITI



Perché l'eq. considerata è:

$W_t + \bar{a} W_x = 0 \rightarrow$ al tempo successivo la soluzione trasla rigidamente.

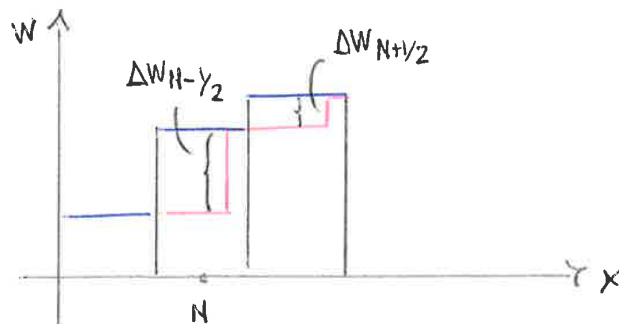
$$W_N^{k+1} \rightarrow \text{integrale della soluzione lungo al tempo } t^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W(x) dx$$

$$\Rightarrow W_N^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \left\{ W_{N-1}^k \bar{a} \Delta t + W_N^k (\Delta x - \bar{a} \Delta t) \right\} = W_N^k - \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a} W_N^k - \bar{a} W_{N-1}^k \frac{\Delta t}{\Delta x} \right]$$

$$\Rightarrow W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\bar{a} W_N^k - \bar{a} W_{N-1}^k \right] \rightarrow$$

In questo caso semplice, l'upwind consiste nel trovare la soluzione che si sposta traslate per effetto delle caratteristiche

③ PUNTO DI VISTA PROPAGAZIONE ONDOSA



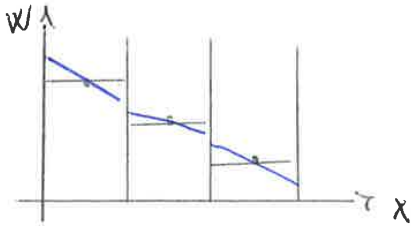
Definiamo:

$$\begin{cases} \Delta W_{N-1/2} = W_N - W_{N-1} \\ \Delta W_{N+1/2} = W_{N+1} - W_N \end{cases}$$

Il salto penetra in ogni cella alterandone la soluzione di una quantità pari a - il salto trasportato dalla cella. Allora:

$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\bar{a} \Delta t}{\Delta x} \Delta W_{N-1/2} = W_N^k - \frac{\bar{a} \Delta t}{\Delta x} (W_N^k - W_{N-1}^k)$	$\text{se } \bar{a} > 0,$	con $\frac{\bar{a} \Delta t}{\Delta x} =$ spazio occupato nel cello grand'erro della cella
$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\bar{a} \Delta t}{\Delta x} \Delta W_{N+1/2} = W_N^k - \frac{\bar{a} \Delta t}{\Delta x} (W_{N+1}^k - W_N^k)$	$\text{se } \bar{a} < 0$	$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{ \bar{a} } \rightarrow$ cond. CFL

① RICOSTRUZIONE



$$\begin{cases} \tilde{w}_N(x,t) = w_N \\ \tilde{w}_N(x,t) = w_N + b_N(x - x_N) \end{cases}$$

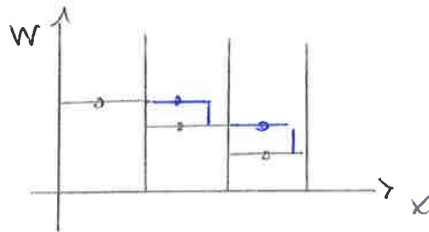
② EVOLUZIONE

Questa rappresenta una fase critica e occorre capire come la soluzione evolva nel tempo in accordo con l'equazione iperbolica, per ottenere \tilde{w} al passo successivo.

③ MEDIA

Nel momento in cui la soluzione si è spostata, questa deve essere mediata in ogni cella:

$$w_N^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \tilde{w}(x, t^{n+1}) dx$$



Studiare l'evoluzione della soluzione, significa capire come i salti si propagano all'interno di ogni cella. I salti sono originati per il fatto che ricostituendo la soluzione a tratti, si creano delle discontinuità tra una cella e l'altra. Un modo di studiare tale evoluzione è quello di risolvere il PROBLEMA DI RIEMANN

PROBLEMA DI RIEMANN

Consideriamo in tal caso l'equazione di Burgers, equazione non lineare e scalare.

$$u_t + uu_x = 0 \rightarrow w_t + fw_x = 0 \text{ Legge di conservazione con } w = u, f = \frac{u^2}{2}$$

Risolvere il problema di Riemann significa seguire nel tempo l'evoluzione di una discontinuità iniziale. Nel caso dell'equazione scalare e lineare questo sarebbe un problema banale, poiché la discontinuità iniziale si muoverebbe semplicemente avanti o indietro a seconda del segno della velocità di propagazione, tra l'altro costante.

Nel caso dell'equazione di Burgers, invece, ci sono diiferenti possibilità.

Per cui, in primo luogo si calcola la velocità di propagazione delle discontinuità:

$$V_{DS} = \frac{f'(w_r) - f'(w_e)}{w_r - w_e}$$

Poi, si risolve il problema di Riemann, la cui soluzione può essere utilizzata nel seguente modo.

Riconosciamo che nell'approccio ai volumi finiti, i flussi alle interfacce sono definiti nel modo seguente:

$$f_{N+1/2}^k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} f[\tilde{w}(x_{N+1/2}, t)] dt$$

dove $\tilde{w}(x_{N+1/2}, t)$ è il valore delle variabili conservate va all'interfaccia supponendo di aver ricostruito la soluzione.

Se utilizziamo una ricostruzione costante in ogni cella, risolvendo il problema di Riemann in $N+1/2$, assicuriamo che $\tilde{w}(x_{N+1/2}, t)$ rimane costante o meno che all'interfaccia non giunga un segnale proveniente da una cella più lontana rispetto a quella adiacente \rightarrow in tal caso però non sarebbe soddisfatta la condizione CFL. Allora, possiamo assumere tale quantità costante e pari a:

$$\tilde{w}(x_{N+1/2}, t) = W^v(w_N^k, w_{N+1}^k)$$

dove $W^v(w_N^k, w_{N+1}^k)$ è la variabile che si ottiene all'interfaccia risolvendo il problema di Riemann nell'interfaccia dove era presente un salto tra la variabile w_N e la variabile w_{N+1} .

Se $w_{N+1/2}^k = W^v(w_N^k, w_{N+1}^k) \rightarrow$ costante nel tempo $\Rightarrow f(w_{N+1/2}^k) =$ costante nel tempo

Allora:

$$f_{N+1/2}^k = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^k}^{t^{k+1}} f(W^v(w_N^k, w_{N+1}^k)) dt = f(W^v(w_N^k, w_{N+1}^k))$$

Riassumendo, lo step EVOLUZIONE dell'algoritmo REA si articola in:

- 1) Risolvo il problema di Riemann in $x_{N+1/2}$ per ottenere $W^v(w_N^k, w_{N+1}^k)$
- 2) Definisco $f_{N+1/2}^k = F(w_N^k, w_{N+1}^k) = f[W^v(w_N^k, w_{N+1}^k)]$
- 3) Utilizzo la legge di conservazione $w_N^{k+1} = w_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{N+1/2}^k - f_{N-1/2}^k]$ per ottenere w_N^{k+1} .

Possiamo vedere il metodo di Godunov anche dal punto di vista della preparazione omologa. Abbiamo precedentemente scritto che:

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta W_{N-1/2}^k + A^- \Delta W_{N+1/2}^k)$$

dove le quantità tra parentesi rappresentano il contributo dei flussi che entrano e escono dalla cella esportando salti di flusso.

Definiamo:

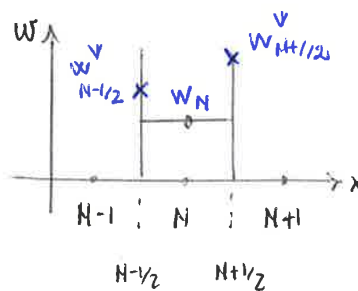
$$A^+ \Delta W_{N-1/2} = \overset{\rightarrow}{\Delta f}_{N-1/2} \quad \text{salto di flusso che entra da sinistra verso destra}$$

$$A^- \Delta W_{N+1/2} = \overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N+1/2} \quad \text{salto di flusso che entra da destra verso sinistra}$$

La risoluzione del problema di Riemann fornisce i valori di w all'interfaccia $N+1/2$ e $N-1/2$. Allora, i salti di flusso possono essere definiti in tale modo:

$$\overset{\rightarrow}{\Delta f}_{N-1/2} = f(w_N) - f(w_{N-1/2}^v)$$

$$\overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N+1/2} = f(w_{N+1/2}^v) - f(w_N)$$



Sostituiamo nell'espressione sopra:

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A^+ \Delta W_{N-1/2}^k + A^- \Delta W_{N+1/2}^k) = W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\overset{\rightarrow}{\Delta f}_{N-1/2} + \overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N+1/2} \right] =$$

$$= W_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[f[w_{N+1/2}^v(w_N, w_{N+1})] - f[w_{N-1/2}^v(w_{N-1}, w_N)] \right]$$

Possiamo ora vedere quale sia la differenza tra un metodo upwind e un metodo centrato. Abbiamo visto che:

$$\overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N+1/2} = f(w_{N+1/2}^v) - f(w_N) \quad \Rightarrow \quad f(w_{N+1/2}^v) = f(w_N) + \overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N+1/2}$$

Perché la relazione vale $\forall N$, trasliamo di -1:

$$\Rightarrow f(w_{N-1/2}^v) = f(w_{N-1}) + \overset{\leftarrow}{\Delta f}_{N-1/2}$$

Le definizioni sopra date di $f(w_{N-1/2}^v)$ era: $f(w_{N-1/2}^v) = f(w_N) - \overset{\rightarrow}{\Delta f}_{N-1/2}$

Come già visto, quello che vale per la migliore cella deve valere per tutto il dominio.
 La somma delle quantità di variabile conservativa di finito globalmente all'interno del dominio cambia nel tempo solo se c'è uno squilibrio tra flussi entranti e uscenti sulle condizioni al contorno.

Questo è importante perché continua a valere anche in presenza di discontinuità.

Consideriamo l'eq. di Burgers:

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad w=U, \quad f = \left(\frac{U^2}{2}\right) \quad \text{FORMA CONSERVATIVA}$$

Discretizzando considerando $u > 0$:

$$\frac{U_N^{k+1} - U_N^k}{\Delta t} + \left[\frac{U_N^2}{2} - \frac{U_{N-1}^2}{2} \right] \frac{1}{\Delta x} = 0 \quad (1)$$

Prendiamo ora la forma quasi-lineare:

$$u_t + uu_x = 0$$

Discretizzando:

$$\frac{U_N^{k+1} - U_N^k}{\Delta t} + U_N^k \frac{U_N^k - U_{N-1}^k}{\Delta x} = 0 \quad (2)$$

Implementando i due metodi, si osservano soluzioni simili fino a quando non compare una discontinuità, poi non è verticosa perché:

$$(2) - (1): \frac{U_N^2}{\Delta x} - \frac{U_N U_{N-1}}{\Delta x} - \frac{U_N^2}{2\Delta x} + \frac{U_{N-1}^2}{2\Delta x} = \frac{U_N^2}{2\Delta x} - \frac{U_N U_{N-1}}{\Delta x} + \frac{1}{2} \frac{U_{N-1}^2}{\Delta x} = \frac{1}{2\Delta x} (U_N - U_{N-1})^2$$

Abbiamo:

forma conservativa

termine di differenza tra i due schemi

$$\frac{U_N^{k+1} - U_N^k}{\Delta t} + U_N^k \frac{U_N^k - U_{N-1}^k}{\Delta x} = \frac{U_N^{k+1} - U_N^k}{\Delta t} + \left[\frac{U_N^2}{2} - \frac{U_{N-1}^2}{2} \right] \frac{1}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{U_N - U_{N-1}}{\Delta x} \right)^2 = 0$$

$\sim \frac{\Delta x}{2} u_x^2$

Fino a quando la soluzione è morbida, u_x^2 tende a un valore finito, per qualche suff. sufficiente $\frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta x}{2} u_x^2 \rightarrow 0 \Rightarrow$ la differenza tra i due schemi numerici è ridotta.

In presenza di discontinuità, invece, più si raffina la griglia più u_x^2 cresce, tendendo a infinito $\Rightarrow \frac{\Delta x}{2} \rightarrow 0, u_x^2 \rightarrow \infty \Rightarrow$ numericamente $\frac{\Delta x}{2} u_x^2$ assume un valore finito che

METODO ALLA GODUNOV APPLICATO ALE EQUAZIONI DI EULERO

Riconosciamo in primo luogo che i valori delle variabili del campo di posto sono definiti all'interno della cella nel seguente modo:

$$W_N^K = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W(x, t^K) dx$$

dove $W(x, t) \rightarrow$ soluzione esatta della funzione variabile conservativa all'interno della cella

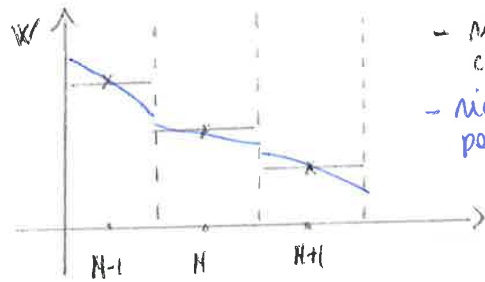
Poiché non conserbiamo la soluzione esatta all'interno della cella, la RICOSTRUIAMO nella base dei valori assunti nei centri della cella, con polinomi di grado differente a secondo dei casi.

$\Rightarrow \tilde{W}(x, t) \rightarrow$ soluzione ricostruita

La soluzione ricostruita viene lasciata evolvere nel tempo per un passo temporale e la nuova soluzione al passo $K+1$ si ottiene come:

$$W_N^{K+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \tilde{W}(x, t^{K+1}) dx$$

Per aggiornare le soluzioni nel tempo, poiché il processo di integrazione potrebbe essere troppo complesso, si preferisce utilizzare un'altra strada.



- ricostruzione cost. e tratti
- ricostruzione con parabole

Quel che avviene con la ricostruzione utilizzata, tra una cella e l'altra ci sarà sempre una qualche discontinuità.
Le discontinuità artificiali

Quello che cerchiamo e vedere non è tanto coprire come evolve la soluzione nel tempo, ma come evolvono le discontinuità \rightarrow PROBLEMA DI RIEMANN

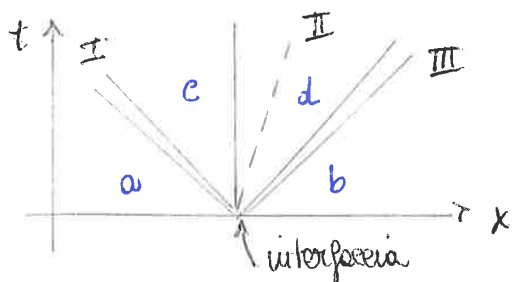
Risolvere il problema di Riemann ci permette di valutare i flussi alle interfacce e dunque di calcolare la soluzione al passo successivo utilizzando lo schema che si ottiene integrando nel tempo la legge di conservazione scritta in forma integrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W dx + f[W(x_{N+1/2})] - f[W(x_{N-1/2})] = 0$$

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W(x, t+\Delta t) dx - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W(x, t) dx + \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} f(W(x_{N+1/2}, t)) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} f(W(x_{N-1/2}, t)) dt = 0$$

Le regioni in cui viene diviso il piano sono indicate con:

- $a, b \rightarrow$ regioni che contengono i valori s_x e u dx della discontinuità
- $c, d \rightarrow$ regioni in cui non si conoscono le variabili fluidodinamiche



SOLUZIONE ESATTA DEL PROBLEMA DI RIEMANN

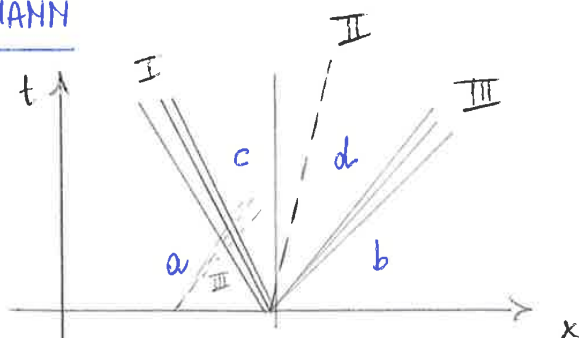
CASO I: I FAMIGLIA espansione
III FAMIGLIA espansione

Prendiamo che:

$$dR_1 = \frac{2}{\gamma-1} da - du - \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} ds$$

$$dR_2 = ds$$

$$dR_3 = \frac{2}{\gamma-1} da + du - \frac{a}{\gamma(\gamma-1)} ds$$



INCOGNITE:

- $a_c = a_d$
- $u_c = u_d$
- $s_c = s_d$

Fino a quando non mescoliamo discontinuità le onde vengono attraversate da onde di famiglia diverse in maniera trasparente, senza perdere segnale.

Attraversando le onde della I^a famiglia:

$$\int_a^c dR_2 = 0 \rightarrow s_a = s_c$$

$$\int_a^c dR_3 = 0 \rightarrow \frac{2}{\gamma-1} a_c + u_c = \frac{2}{\gamma-1} a_a + u_a \quad (ds=0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_a = s_c \\ \frac{2}{\gamma-1} a_c + u_c = \frac{2}{\gamma-1} a_a + u_a \end{cases}$$

Per quelle della III^a famiglia:

$$\int_b^d dR_2 = 0 \rightarrow s_b = s_d$$

$$\int_b^d dR_1 = 0 \rightarrow \frac{2}{\gamma-1} a_b - u_b = \frac{2}{\gamma-1} a_d - u_d$$

Abbiamo 6 incognite ma ancora 4 equazioni \Rightarrow facciamo la superficie di contatto

Un tal caso non è vero che gli invarianti si conservano attraverso la discontinuità, come prevedeva per l'espansione, ma è possibile scrivere le CONDIZIONI DI SALTO ATTRAVERSO L'URTO che si muove, per cui dovremo considerare una velocità relativa all'urto:

$$\hat{U} = U - S_L$$

Considerando l'urto della I famiglia:

$$\begin{cases} \rho_a \hat{U}_a = \rho_c \hat{U}_c \\ \rho_a \hat{U}_a^2 = \rho_c \hat{U}_c^2 \\ (E_a + p_a) \hat{U}_a = (E_c + p_c) \hat{U}_c \end{cases} \rightarrow$$

risolvendo il sistema si ottiene le seguenti relazioni:

$$U_c = U_a - (p_c - p_a) \left(\frac{A_c}{p_c + B_a} \right)^{1/2} \quad \text{con} \quad \begin{cases} A_c = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_c} \\ B_a = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_a \end{cases}$$

Si ottiene un legame tra velocità e pressione passando da a a c.

Analogamente per l'urto della III^o famiglia:

$$U_d = U_b + (p_d - p_b) \left(\frac{A_b}{p_b + B_d} \right)^{1/2}$$

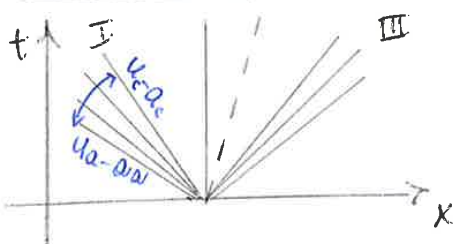
Poiché attraverso la superficie di contatto $U_c = U_d$, uguagliando le relazioni si ottiene un'equazione per l'incognita p_c, d . Anche in questo caso è possibile risolvere il problema di Riemann.

Come è possibile capire come si configurerà l'evoluzione della discontinuità? Il fatto che si verifichi un urto o un'espansione è una proprietà della soluzione \Rightarrow si procede a tentativi:

• 1° tentativo \rightarrow si ipotizza due espansioni (ad esempio)

\hookrightarrow si trovano i valori nelle regioni c e d

• controllo se l'ipotesi iniziale era corretta:



\Rightarrow Se $U_a - a_a$ e $U_c - a_c$ sono tali per cui il fascio è aperto, cioè $(U_a - a_a) < (U_c - a_c)$

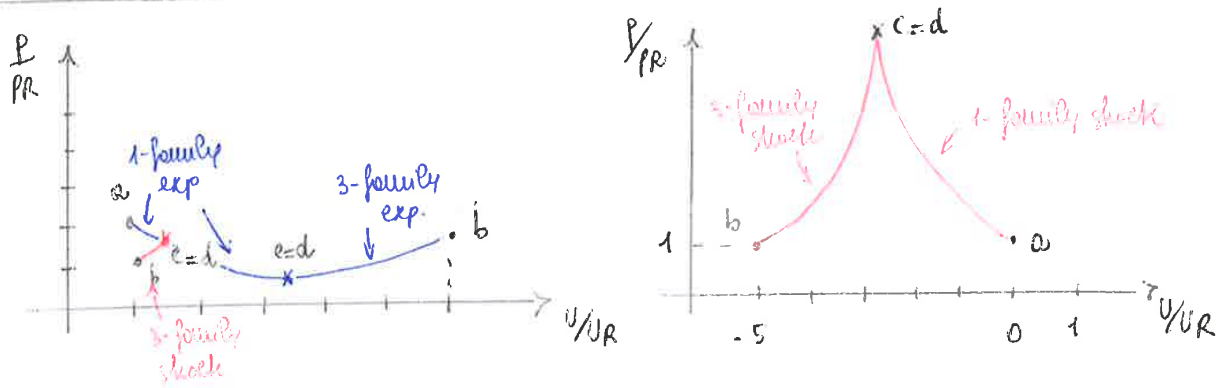
\Rightarrow ipotesi iniziale verificata

Se $U_a - a_a > U_c - a_c \Rightarrow$ caratteristiche convergenti

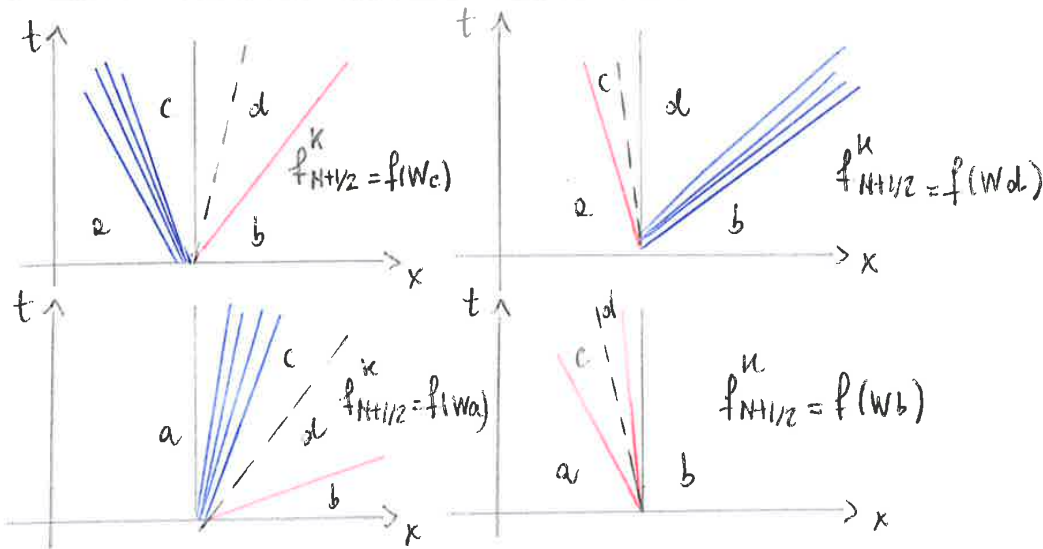
\Rightarrow ricominciare inserendo cond. di salto attraverso l'urto.

Analogamente per la III famiglia

Altro esempio:

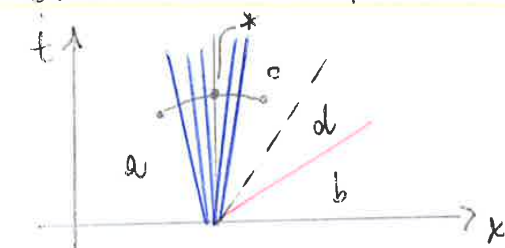


Una volta risolto il problema di Riemann, è possibile calcolare il flusso all'interfaccia:



Tale ragionamento vale in modo rigoroso se viene effettuata una ricostruzione costante o frotti. Se si effettuassero ricostruzioni di ordine superiore, all'interfaccia giungerebbero più sequdi e in prima approssimazione è possibile calcolare il flusso utilizzando i valori della variabile conservativa immediatamente a sinistra o a destra dell'interfaccia nel caso in cui si fosse nella 3^a o 4^a situazione presentata.

In certe situazioni l'interfaccia potrebbe essere l'interfaccia di un fascio di espansione. Come risolviamo il problema di Riemann?



Poiché $u^* = a^* \rightarrow$ trovare u^*
 $\Rightarrow u^* = u_a - \frac{2}{\gamma-1} a_w \left[\left(\frac{p^*}{p_a} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] \Rightarrow$ trova p^*

$u^* - a^* = 0$ poiché all'interfaccia la caratteristica è verticale o pendenza nulla

Inoltre, attraverso il fascio si conserva il 3° invariante di Riemann (e il secondo):

$$\int_a^* \omega R_3 = 0 \Rightarrow u^* = u_a + \frac{2}{\gamma-1} a_w - \frac{2}{\gamma-1} a^*$$

$$\int_a^* \omega R_2 = 0 \Rightarrow s_w = s^*$$

Nel caso di RICOSTRUZIONE COSTANTE A TRATTI, si ha che:

$$f(W_{N-1/2}) = f(W_N) - \overset{\leftarrow}{\Delta} f_{N-1/2} = f_b - (f_b - f_d) = f_d \rightarrow \text{come che vedevamo anche a occhio nel grafico}$$

oppure, sottraendo 1 alla precedente relazione:

$$f(W_{N-1/2}) = f(W_{N-1}) + \overset{\rightarrow}{\Delta} f_{N-1/2} = f_a + (f_d - f_a) = f_d$$

Un generale, è possibile scrivere che:

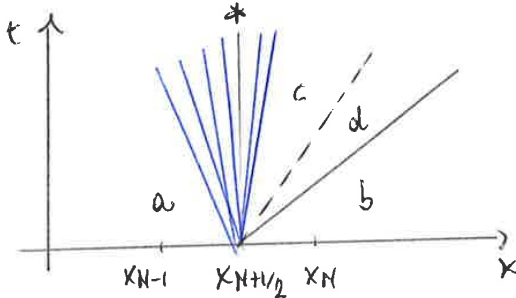
$$\overset{\leftarrow}{\Delta} f_{N+1/2} = \frac{1-\epsilon_1}{2} (f_c - f_a) + \frac{1-\epsilon_2}{2} (f_d - f_c) + \frac{1-\epsilon_3}{2} (f_d - f_b)$$

$$\overset{\rightarrow}{\Delta} f_{N+1/2} = \frac{1+\epsilon_1}{2} (f_c - f_a) + \frac{1+\epsilon_2}{2} (f_d - f_c) + \frac{1+\epsilon_3}{2} (f_d - f_b)$$

con $\epsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{se onda viaggia verso dx} \\ -1 & \text{se onda viaggia verso sx} \end{cases}$

FLUX - DIFFERENCE SPLITTING METHOD

Consideriamo il seguente caso particolare:



una volta risolto il problema di Riemann e quindi calcolato anche i valori $*$, occorre effettuare uno splitting del fascio di espansione nel calcolo dei salti di flusso:

$$\left\{ \begin{aligned} \overset{\leftarrow}{\Delta} f_{N+1/2} &= f^* - f_a \\ \overset{\rightarrow}{\Delta} f_{N+1/2} &= (f_c - f^*) + (f_d - f_c) + (f_b - f_d) \end{aligned} \right.$$

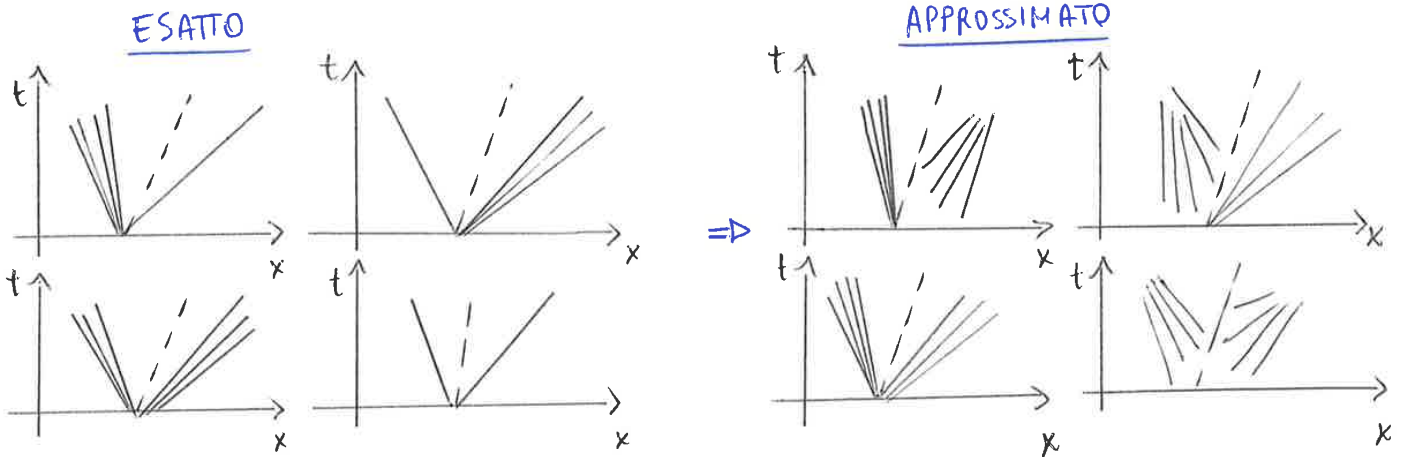
Un tal caso, allora:

$$f(W_{N+1/2}) = f(W_N) + \overset{\leftarrow}{\Delta} f_{N+1/2} = f_b + (f_c - f^*) + (f_d - f_c) + (f_b - f_d) = f^* = f(W^*)$$

Analogamente nel caso in cui l'interfaccia esista all'interno del fascio di espansione della III^a famiglia.

Un tutti i casi analizzati, dunque, si utilizza un metodo UPWIND per il calcolo dei flussi all'interfaccia, che consente di ottenere uno schema stabile, perché basato sulla propagazione dei segnali lungo particolari direzioni.

Per cui:



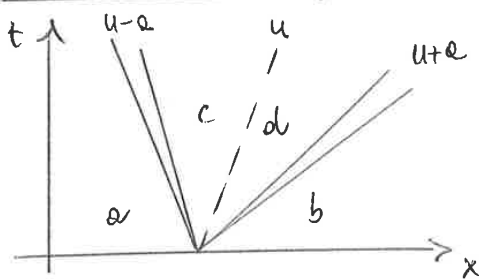
È sempre possibile dunque scrivere che:

$dk_3 = dk_2 = 0$ attraverso le onde della 1^a famiglia

$dk_1 = dk_2 = 0$ attraverso le onde della 3^a famiglia

senza preoccuparsi del fatto che ci sia un urto o un'espansione.

Considerando il seguente esempio:



attraverso la superficie di contatto:

$$\begin{cases} pc = pd \\ uc = vd \end{cases}$$

attraverso le onde della 1^a famiglia:

$$\begin{cases} dk_2 = 0 \rightarrow S_a = S_c \\ dk_3 = 0 \rightarrow u_c + \frac{2}{j-1} ac = u_e + \frac{2}{j-1} ae \end{cases}$$

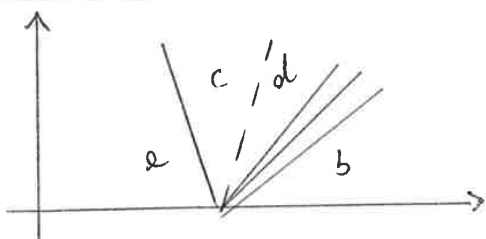
attraverso le onde della 3^a famiglia:

$$\begin{cases} dk_2 = 0 \rightarrow S_d = S_b \\ dk_1 = 0 \rightarrow \frac{2}{j-1} ad - vd = \frac{2}{j-1} ab - ub \end{cases}$$

Abbiamo a disposizione 6 equazioni in 6 incognite, ac, uc, Sc, a, d, vd, Sd

\Rightarrow è possibile risolvere il sistema e una volta note le variabili in c, d si procede con il metodo FLUX SPLITTING come fatto quando risolveremo in maniera esatta il problema di Riemann.

Prevediamo il seguente caso particolare:



Nello scatto, ci sarebbe un urto e risolvendo il problema di Riemann in maniera esatta si otterrebbero tutte le informazioni necessarie alla risoluzione del problema, in particolare conoscere in grado di capire se l'urto sta viaggiando verso dx o verso sx.

METODI AD ELEVATA RISOLUZIONE

Consideriamo l'equazione adde:

$$W_t + a W_x = 0, \text{ con } a = \text{cost} > 0$$

Osserviamo che sviluppando in serie di Taylor, nel tempo:

$$W(x_N, t^{k+1}) = W(x_N, t^k) + W_t(x_N, t^k) \Delta t + \frac{W_{tt}(x_N, t^k) \Delta t^2}{2} + \frac{W_{ttt}(x_N, t^k) \Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$

Arrotondando lo sviluppo al primo ordine e osservando che dall'equazione sopra riportata $W_t = -a W_x(x_N, t^k)$ possiamo scrivere che:

$$\begin{aligned} W(x_N, t^{k+1}) &= W(x_N, t^k) + W_t(x_N, t^k) \Delta t + O(\Delta t^2) = W(x_N, t^k) - a W_x(x_N, t^k) \Delta t + O(\Delta t^2) = \\ &= W(x_N, t^k) - a \Delta t \frac{W(x_N, t^k) - W(x_{N-1}, t^k)}{\Delta x} + a \Delta t O(\Delta x) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

dove la derivata spaziale è stata approssimata con uno schema upwind al primo ordine:

$$W_x(x_N, t^k) = \frac{W_N^k - W_{N-1}^k}{\Delta x} + O(\Delta x) \text{ con } a > 0$$

Si ottiene dunque:

$$W_N^{k+1} = W_N^k - a \Delta t \frac{W_N^k - W_{N-1}^k}{\Delta x} + O(\Delta x) \Delta t + O(\Delta t^2)$$

metodo operato al primo ordine
 → ma nello spazio che nel tempo.
 Dalla cond. CFL deriva inoltre che
 $\Delta t \propto \Delta x$

Se vogliamo aumentare l'accuratezza del metodo, è necessario valutare $W(x_N, t^{k+1})$ mantenendo anche i termini $O(\Delta t^2)$ nello sviluppo di Taylor, oltre a valutare W_x con accuratezza al secondo ordine.

Allora:

$$W(x_N, t^{k+1}) = W(x_N, t^k) + \overset{(2)}{W_t(x_N, t^k) \Delta t} + \overset{(1)}{W_{tt}(x_N, t^k) \frac{\Delta t^2}{2}} + O(\Delta t^3)$$

Osserviamo che:

$$W_t = -a W_x$$

$$W_{tx} = -a W_{xx}$$

$$W_{tt} = -a W_{xt}$$

→ perché tempo e spazio indipendenti $\Rightarrow W_{xt} = W_{tx} = 0 \Rightarrow W_{tt} = a^2 W_{xx}$ (1)

Perché $W_t = -a W_x$ e vogliamo aumentare l'accuratezza del metodo, determiniamo uno schema che ci fornisca W_x con accuratezza al 2° ordine

$$W_N^{n+1} = W_N^n - \alpha \Delta t (W_x)_N^n + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2} (W_{xx})_N^n + O(\Delta t^3)$$

$$W_N^{n+1} = W_N^n - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} (W_{N+1}^n - W_{N-1}^n) + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (W_{N+1}^n - 2W_N^n + W_{N-1}^n)$$

SCHEMA CENTRATO DI LAX-WENDROFF

Se invece utilizziamo uno schema upwind per $(W_{xx})_N^n$:

$$(W_{xx})_N^n = \frac{W_N^n - 2W_{N-1}^n + W_{N-2}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

SCHEMA UPWIND

$$(W_x)_N^n = \frac{W_N^n - W_{N-1}^n}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} (W_{xx})_N^n + O(\Delta x^2) =$$

$$= \frac{3W_N^n - 4W_{N-1}^n + W_{N-2}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

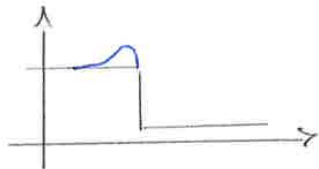
Sostituendo nell'espressione di W_N^{n+1} :

$$W_N^{n+1} = W_N^n - \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x} (3W_N^n - 4W_{N-1}^n + W_{N-2}^n) + \frac{\alpha^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (W_N^n - 2W_{N-1}^n + W_{N-2}^n)$$

SCHEMA BEAM AND WARMING

Entrambi i metodi sono accurati al secondo ordine nello spazio e nel tempo.

In presenza di forti gradienti, entrambi gli schemi tendono a oscillare, generando degli over-shoot nella soluzione.



Tali schemi possono essere interpretati dal punto di vista della propagazione omonoma.

L'equazione scalare scritta sotto forma di legge di conservazione diventa:

$$W_t + f_x = 0, \text{ con } f = \alpha W$$

in forma integrale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} W dx + f(W(x_{N+1/2})) - f(W(x_{N-1/2})) = 0 \text{ da cui si ricava:}$$

$$W_N^{n+1} = W_N^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{N+1/2}^n - f_{N-1/2}^n)$$

Riprendiamo la formula generale al secondo ordine primo derivato:

$$W_N^{n+1} = W_N^n - \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x} \left[(W_N^n - W_{N-1}^n) + (W_{xx})_N^n \frac{\Delta x^2}{2} - \frac{\alpha \Delta t}{2} \Delta x (W_{xx})_N^n \right]$$

⊛

e questo punto, possiamo interpretare la derivata seconda come la derivata della derivata prima.

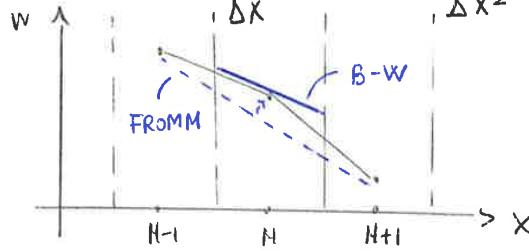
• BEAM-WARMING

$$\bar{b}_N^k = \frac{W_N^k - W_{N-1}^k}{\Delta x}$$

$$\bar{b}_{N-1}^k = \frac{W_{N-1}^k - W_{N-2}^k}{\Delta x}$$

pendenze con schema backward

$$\rightarrow (W_{xx})_N^k = \frac{\bar{b}_N^k - \bar{b}_{N-1}^k}{\Delta x} = \frac{W_N^k - 2W_{N-1}^k + W_{N-2}^k}{\Delta x^2}$$



• FROMM

$$\bar{b}_H^k = \frac{W_{H+1}^k - W_{H-1}^k}{2\Delta x} \rightarrow \text{pendenze con schema centrato}$$

Dimostreremo ora che scrivere i flussi al secondo ordine come correzione dei flussi al primo ordine equivale a trovare la soluzione ricostruita mediante funzioni lineari in ogni cella. Ciò vale precisamente per l'eq scalare lineare ma può essere generalizzato anche a sistemi di equazioni non lineari.

$$W_t + aW_x = 0, \quad f = aW$$

$$W_N^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} a \Delta t (W_A + W_B) + \frac{1}{2} (\Delta x - a \Delta t) (W_C + W_D) \right]$$

Osserviamo che:

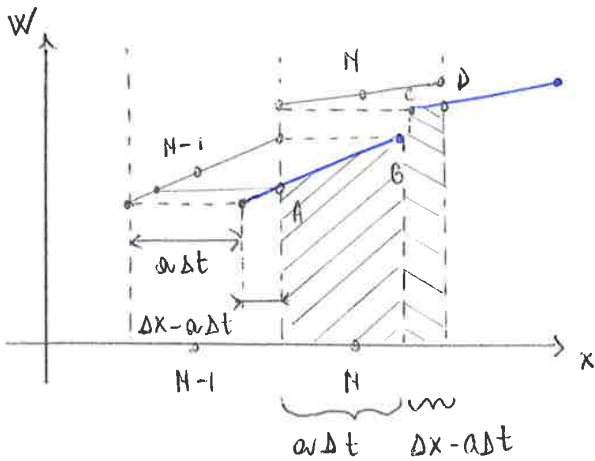
$$W_A = W_{N-1}^k - \bar{b}_{N-1}^k \left(\frac{\Delta x}{2} - (\Delta x - a \Delta t) \right) =$$

$$W_{N-1}^k + \bar{b}_{N-1}^k \left(\frac{\Delta x}{2} - a \Delta t \right)$$

$$W_B = W_{N-1}^k + \bar{b}_{N-1}^k \frac{\Delta x}{2}$$

$$W_D = W_N^k + \bar{b}_N^k \left(\frac{\Delta x}{2} - a \Delta t \right)$$

$$W_C = W_N^k - \bar{b}_N^k \frac{\Delta x}{2}$$



Allora:

$$W_N^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} a \Delta t \left[W_{N-1}^k + \bar{b}_{N-1}^k \left(\frac{\Delta x}{2} - a \Delta t \right) + W_{N-1}^k + \bar{b}_{N-1}^k \frac{\Delta x}{2} \right] + \frac{1}{2} (\Delta x - a \Delta t) \left[W_N^k - \bar{b}_N^k \frac{\Delta x}{2} + W_N^k + \bar{b}_N^k \left(\frac{\Delta x}{2} - a \Delta t \right) \right] \right]$$

$$W_N^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \left[W_N^k - W_N^k a \Delta t + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \bar{b}_N^k - \frac{a \Delta t \Delta x}{2} \bar{b}_N^k + W_{N-1}^k a \Delta t + \bar{b}_{N-1}^k \Delta x a \Delta t - \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \bar{b}_{N-1}^k \right]$$

A questo punto, dall'equazione di governo:

$$(W_t)_N^k = -a (W_x)_N^k = -a \bar{b}_N^k ; (W_t)_{N-1}^k = -a (W_x)_{N-1}^k = -a \bar{b}_{N-1}^k$$

Per cui:

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left[\underbrace{W_N^k}_{(W_t)_N^k \Delta t} + \bar{b}_N^k \frac{\Delta x}{2} - \underbrace{a \bar{b}_N^k \frac{\Delta t}{2}}_{(W_t)_N^k \frac{\Delta t}{2}} - W_{N-1}^k - \bar{b}_{N-1}^k \frac{\Delta x}{2} + \underbrace{a \bar{b}_{N-1}^k \frac{\Delta t}{2}}_{-(W_t)_{N-1}^k \frac{\Delta t}{2}} \right]$$

$$W_N^{k+1} = W_N^k - \frac{a \Delta t}{\Delta x} \left[W_N^k + \bar{b}_N^k \frac{\Delta x}{2} + (W_t)_N^k \frac{\Delta t}{2} - \left(W_{N-1}^k + \bar{b}_{N-1}^k \frac{\Delta x}{2} - (W_t)_{N-1}^k \frac{\Delta t}{2} \right) \right]$$

Come si risolvono tali problemi?

È necessario utilizzare metodi TVD (Total Variation Diminishing).

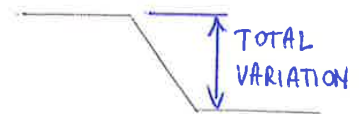
Il fatto che i metodi con accuratezza al secondo ordine di L-W e B-W presentino un comportamento oscillante in regioni dove sono presenti elevati gradienti suggerisce che le penolense σ_N^k debbano essere scelte in funzione del comportamento della soluzione nell'intorno del punto N . I metodi basati su tale idea sono detti SLOPE-LIMITER METHODS.

In tal modo, si cerca di avere il secondo ordine quando la soluzione è morbida, ma non quando presenta rapide variazioni.

La scelta delle penolense dovrebbe essere fatta in modo da mantenere il secondo ordine dove possibile, senza introdurre oscillazioni non fisiche.

Per minimizzare le oscillazioni di una soluzione, si introduce il concetto di TOTAL VARIATION:

Se w è una soluzione numerica \rightarrow
$$TV(w) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} |w_N - w_{N-1}|$$



Poiché la soluzione vera dell'equazione ad ordine lineare non è altro che una traslazione, una veta definito $TV(w)$ nelle condizioni iniziali questa rimane costante nel tempo.

cerchiamo un metodo che non faccia aumentare la TV.

La soluzione numerica potrebbe avere un $TV(w)$ variabile per i seguenti motivi precedentemente.

\Rightarrow METODI TVD \Rightarrow $TV(w^{k+1}) \leq TV(w^k)$ \rightarrow la total variation non deve aumentare

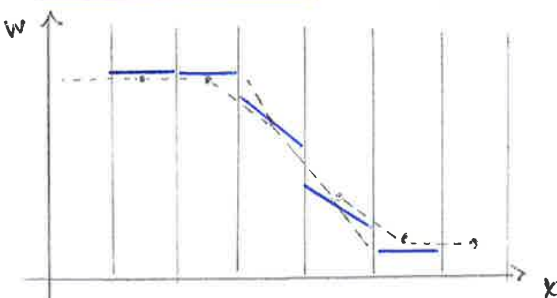
Per derivare metodi TVD basati sul metodo di Godunov per l'equazione ad ordine lineare, notiamo che i passi evolutivi e di media non possono aumentare la total variation

\Rightarrow il problema che può generare oscillazioni è la RICOSTRUZIONE

\Rightarrow deve essere realizzata in maniera opportuna, utilizzando degli SLOPE LIMITER

Ad esempio:

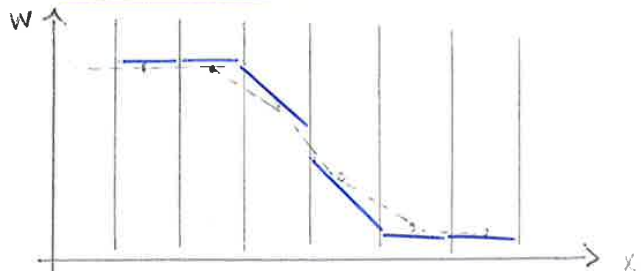
• MINMOD LIMITER



$$\sigma_N^k = \text{minmod} \left(\frac{w_N^k - w_{N-1}^k}{\Delta x}, \frac{w_{N+1}^k - w_N^k}{\Delta x} \right)$$

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sign}(a) \min(|a|, |b|) & \text{if } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab < 0 \end{cases}$$

• SUPERBEE LIMITER



$$\sigma_N^k = \max \text{mod} (\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)})$$

$$\sigma^{(1)} = \text{minmod} \left(\frac{w_N^k - w_{N-1}^k}{\Delta x}, 2 \frac{w_N^k - w_{N-1}^k}{\Delta x} \right)$$

$$\sigma^{(2)} = \text{minmod} \left(2 \frac{w_{N+1}^k - w_N^k}{\Delta x}, \frac{w_{N+1}^k - w_N^k}{\Delta x} \right)$$

con max mod analogo e min mod ma con il massimo

METODI AD ELEVATO ORDINE DI ACCURATEZZA PER LE EQUAZIONI DI EULERO

Consideriamo il vettore delle variabili primitive:

$$\bar{U} = \{w, u, s\}$$

gli andamenti delle variabili saranno differenti ed è necessario ricostruirli per poi essere in grado di risolvere il problema di Riemann, assegnando a ciascuna variabile primitiva una pendenza specifica.

=> effetto solo per ogni variabile una ricostruzione che sfrutta il concetto di slope limiter, si avrà per ognuna di esse un set di pendenze che approssimano la derivata spaziale, cioè ad ogni centro cella potrà essere assegnato una σ che approssima w_x, u_x, s_x .

=> a questo punto è possibile valutare le derivate nel tempo sfruttando le equazioni di governo:

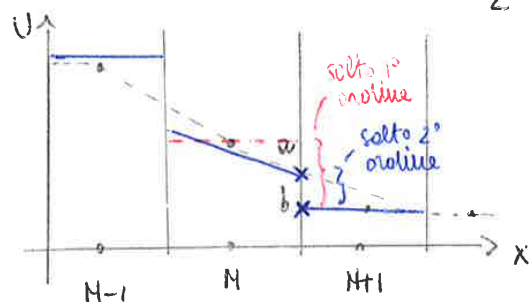
$$\begin{cases} w_t = -U w_x - \frac{1}{2} w^2 U_x \\ u_t = -\frac{2}{\gamma-1} w w_x - U u_x + \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} s_x \\ s_t = -U s_x \end{cases} \Rightarrow \text{dove } w_x, u_x, s_x \text{ sono assegnate dalla ricostruzione}$$

A questo punto, dunque:

$$U_w = U_N^k + (U_x)_N^k \frac{\Delta x}{2} + (U_t)_N^k \frac{\Delta t}{2}$$

$$U_b = U_{N+1}^k - (U_x)_{N+1}^k \frac{\Delta x}{2} + (U_t)_{N+1}^k \frac{\Delta t}{2}$$

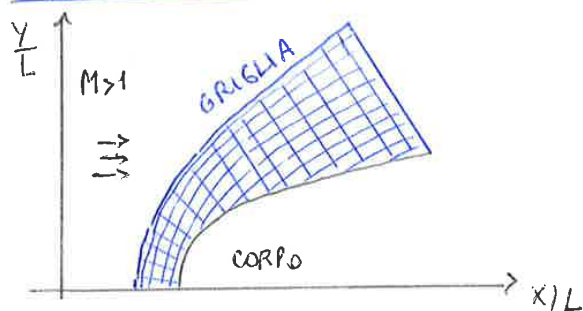
dove con U si indica la generica variabile primitiva. In tal modo si ricorre al solito secondo ordine necessario a risolvere il problema di Riemann.



il salto che nasce nella ricostruzione è più piccolo e diventa meno importante il modo di cui risolvere il problema di Riemann.

In alcuni casi, la ricostruzione può anche fatta negli invarianti e non nelle variabili primitive.

ESTENSIONE AL CASO BIDIMENSIONALE



Le equazioni di Eulero sotto forma di legge di conservazione si scrivono come:

$$\int_V \bar{W}_t dV + \int_S \bar{F} \cdot \bar{n} dS = 0, \text{ con } \bar{W} = \{e, e\bar{v}, E\}^T$$

$$\bar{F} = \{e\bar{v}, p\bar{I} + e\bar{v}\bar{v}, (\bar{v}+p)\bar{v}\}^T$$

Si definisce una direzione ξ che potrebbe essere:

- quella che unisce i due centri-cella
 - quella di direzione normale all'interfaccia
- } \rightarrow normalmente si effettua la seconda scelta

La direzione ξ sarà la direzione x del problema multidimensionale.

La direzione η sarà quella tangenziale alla faccia.

$$\Rightarrow u, v \mapsto \begin{cases} \tilde{u} = u n_x + v n_y \\ \tilde{v} = -u n_y + v n_x \end{cases} \rightarrow \text{componenti vel. normali e tangenziali alla faccia}$$

Il problema di Riemann si risolve multidimensionale nel seguente modo.

Nel sistema di riferimento ξ, η , le equazioni di Eulero scritte in forma quasi lineare considerandole come set di variabili primitive \tilde{u}, a, s saranno le stesse già viste:

$$\begin{aligned} a_t + \tilde{u} a_{\xi} + \frac{1}{\delta} a \tilde{u}_{\xi} &= 0 \\ \tilde{u}_t + \tilde{u} \tilde{u}_{\xi} + \frac{\rho}{\delta-1} a_{\xi} - \frac{\rho^2}{\delta(\delta-1)} s_{\xi} &= 0 \\ s_t + \tilde{u} s_{\xi} &= 0 \end{aligned}$$

Dal bilancio della qdm nella direzione η :

$$N_t + u N_x + v N_y + \frac{p}{e} = 0 \rightarrow \tilde{N}_t + \tilde{u} \tilde{N}_{\xi} + \tilde{v} \tilde{N}_{\eta} + \frac{p}{e} = 0 \quad \xrightarrow{\partial/\partial \eta = 0} \boxed{\tilde{N}_t + \tilde{u} \tilde{N}_{\xi} = 0}$$

Comporre allora un nuovo invariante $d\tilde{N}$ che viaggi con velocità \tilde{u} .

Allora:

$$dR_{1,3} = \frac{\rho}{\delta-1} da + d\tilde{u} - \frac{\rho}{\delta(\delta-1)} ds, \text{ con } \lambda_{1,3} = \tilde{u} + a$$

$$\left. \begin{aligned} dR_2 &= ds \\ dR_4 &= d\tilde{v} \end{aligned} \right\} \text{ con } \lambda_{2,4} = \tilde{u}$$

A questo punto è possibile risolvere il problema di Riemann nel modo visto nel caso multidimensionale.

Discretizzazione dell'equazione modello

Consideriamo la seguente equazione differenziale:

$$\begin{cases} u \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \\ \phi_L = 0, \quad \phi_R = 1 \end{cases}$$

sul dominio $[0,1]$.

Per ottenere la soluzione numerica dell'equazione differenziale, suddividiamo il dominio in un numero N di intervalli di ampiezza costante e pari a Δx , con $N = \frac{1}{\Delta x}$. Si avranno dunque $N+1$ nodi a cui è possibile associare un'incognita Φ_i , con $i=0, \dots, N$. Poiché in tal caso sono assegnate condizioni al bordo di Dirichlet, in realtà il numero di incognite sarà solamente $N-1$, poiché il valore di Φ_0 e Φ_N risulta già noto.

Per risolvere il problema, è possibile discretizzare il termine diffusivo con uno schema centrato con accuratezza del secondo ordine:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Per quanto riguarda il termine convettivo, per ora consideriamo uno schema al primo ordine, con l'accortezza di utilizzare un metodo di approssimazione della derivata che prenda informazioni da dove arriva la corrente. Per tale motivo, in generale possiamo scrivere che:

$$u \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_i} = \max(u, 0) \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} + \min(u, 0) \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x}$$

L'equazione discretizzata diventa, riordinando i termini:

$$\left[-\max(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_{i-1} + \left[\max(u, 0) - \min(u, 0) + 2\frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_i + \left[\min(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_{i+1} = 0$$

Tale espressione vale in realtà solamente per i punti interni dell'intervallo considerato, ovvero per $i=2, \dots, N-2$.

Per $i=1$ si ha che:

$$\left[\max(u, 0) - \min(u, 0) + 2\frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_1 + \left[\min(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_2 = \left[\max(u, 0) + \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_L$$

Mentre per $i=N-1$:

$$\left[-\max(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_{N-2} + \left[\max(u, 0) - \min(u, 0) + 2\frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_{N-1} = \left[\frac{\Gamma}{\rho \Delta x} - \min(u, 0) \right] \phi_R$$

L'equazione differenziale modella il trasporto di $\rho\phi$ con velocità $u = 1$ dal bordo di sinistra a quello di destra.

Per le condizioni al contorno imposte, al bordo di destra entra $\phi = 0$ e viene trasportato verso sinistra, dove però deve raccordarsi alla condizione al bordo $\phi = 1$. Il termine diffusivo gioca un ruolo chiave in questo raccordo tra le condizioni al contorno.

Notiamo come al diminuire di Γ la diffusione tende a interessare una regione ristretta molto vicina al bordo in cui $\phi = 1$. Nel terzo caso, come è possibile osservare, cominciano a mancare punti e per migliorare l'accuratezza occorrerebbe o raffinare la griglia computazionale o utilizzare un metodo più accurato di discretizzazione.

Al contrario, se Γ è molto grande, la soluzione tende a una retta, poichè se il termine convettivo è trascurabile rispetto a quello diffusivo, si ha che:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \phi(x) = a + bx$$

2 Discretizzazione del termine convettivo

Cosa accade discretizzando il termine convettivo senza tenere conto della direzione della velocità u ? Supponiamo che $u < 0$ e utilizziamo uno schema backward per la derivata prima. Allora:

$$u \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$$

Riordinando i termini:

$$\left[-u - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_{i-1} + \left[u + 2\frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_i - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \phi_{i+1} = 0$$

Anche in tal caso abbiamo un sistema di equazioni algebriche in cui però cambiano i termini nella matrice dei coefficienti. Infatti:

$$a_i = -u - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x}$$

$$b_i = u + 2\frac{\Gamma}{\rho \Delta x}$$

$$c_i = -\frac{\Gamma}{\rho \Delta x}$$

$$r_1 = \left[u + \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \phi_L$$

$$r_{N-1} = \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \phi_R$$

Abbiamo considerato due casi, risolti in Matlab:

- $u=1$, $\phi_L = 1$, $\phi_R = 0$, che effettivamente andrebbe risolto discretizzando la derivata prima con uno schema backward
- $u=-1$, $\phi_L = 0$, $\phi_R = 1$, che andrebbe invece risolto con uno schema forward

Analizziamo i risultati ottenuti:

Fluidodinamica computazionale
Esercitazione 1
**Discretizzazione mediante
differenze finite
(Parte 2)**

Francesco UFFREDUZZI s235629

22 Ottobre 2017



considerando una griglia equispaziata, se raddoppia il numero di punti della griglia computazionale l'errore tende a dimezzarsi.

Per verificare che ciò accada, attraverso un codice Matlab, abbiamo calcolato le seguenti grandezze raddoppiando ogni volta il numero di punti della griglia, partendo da 11 punti fino ad arrivare a 360448. Indichiamo con ϕ la soluzione numerica dell'equazione differenziale.

- massimo errore assoluto: $\epsilon_a = \max(|\phi_{ex}(n) - \phi(n)|), n = 1, \dots, n_{max}$

- massimo errore relativo: $\epsilon_r = \frac{\max(|\phi_{ex}(n) - \phi(n)|)}{|\phi_{ex}(n)|}, n = 1, \dots, n_{max}$

- errore assoluto medio: $\epsilon_a^{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{max}} \epsilon_a(n)^2}}{n_{max}}$

- errore relativo medio: $\epsilon_r^{RMS} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{n_{max}} \epsilon_r(n)^2}}{n_{max}}$

Fatto ciò, abbiamo calcolato i rapporti tra gli errori al passo successivo, con la griglia più raffinata e quelli al passo precedente, con una griglia con un numero di punti pari alla metà. Riportiamo nelle seguenti tabelle i risultati ottenuti:

Tabella 1: Rapporto errori assoluti e relativi

Errore assoluto	Errore relativo
0.554089584189761	0.331797995233677
0.532795200129773	0.375513889724659
0.518996806782322	0.424534671738841
0.508554078307984	0.458522862173723
0.504439670309583	0.478277576792163
0.502241930603960	0.488887999392096
0.501134622056115	0.494380801582091
0.500563054265808	0.497174546213561
0.500282574877139	0.498583303038810
0.500141182642175	0.499290657575419
0.500070624614736	0.499645074002748
0.500035330505321	0.499822499076438
0.500017751334735	0.499911216197502
0.500009348142124	0.499955263694720
0.500002033981428	0.499976280318905

Come è possibile osservare, poiché l'accuratezza generale dello schema è del primo ordine, tendendo ad una griglia molto fitta si può osservare che entrambi i rapporti tra gli errori, relativo e assoluto, tendono a 0.5. Ciò vuol dire che raddoppiando il numero di punti della griglia si ha un dimezzamento dell'errore.

Infatti, possiamo assumere che l'errore locale sia proporzionale alla spaziatura della griglia secondo la seguente relazione: $\epsilon \propto \Delta x^n$, dove n è l'ordine di accuratezza dello

Fluidodinamica computazionale
Esercitazione 2
**Discretizzazione dell'equazione modello
mediante volumi finiti
Caso stazionario**

Francesco UFFREDUZZI s235629

12 Novembre 2017



1 Subroutine STEADY_EQ

Poiché stiamo risolvendo il problema nel caso stazionario, partiamo con la descrizione di tale subroutine, che al suo interno contiene tutte le istruzioni necessarie alla risoluzione del problema.

Osserviamo innanzi tutto che il sistema di equazioni che nasce dalla discretizzazione dell'equazione modello viene risolto con il metodo di Newton-Raphson, un metodo iterativo che viene utilizzato per la risoluzione di sistemi non lineari. Questo perché il programma è sviluppato per il caso più generale in cui la matrice dei coefficienti che si ottiene dalla discretizzazione dell'equazione modello sia non lineare.

Vediamo brevemente come funziona il metodo.

Nel caso in cui si consideri una sola funzione non lineare, per determinare lo zero di essa è possibile procedere sviluppando in serie di Taylor la funzione nell'intorno di un punto di tentativo x_0 , ottenendo:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)(x - x_0) + H$$

Per cui, è possibile cercare x^1 tale che $f(x) = 0$. Allora:

$$x^1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0}}$$

Si ottiene dunque un metodo iterativo che in generale può scriversi come

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x^i}}$$

e permette di determinare lo zero della funzione non lineare.

Tale ragionamento può estendersi anche al caso di sistemi di equazioni non lineari, infatti, indicando con

$$\bar{F}(\bar{\Phi}) = 0$$

il generico sistema di equazioni non lineari, è possibile sviluppare in serie di Taylor ciascuna i -esima funzione e, supponendo che essa dipenda da più variabili, come ad esempio Φ_{i-1} , Φ_i , Φ_{i+1} , si potrà scrivere che:

$$F_i(\Phi_{i-1}, \Phi_i, \Phi_{i+1}) = F_i(\Phi_{i-1}^k, \Phi_i^k, \Phi_{i+1}^k) + \frac{\partial F}{\partial \Phi_{i-1}}(\Phi_{i-1}^{k+1} - \Phi_{i-1}^k) + \frac{\partial F}{\partial \Phi_i}(\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k) + \frac{\partial F}{\partial \Phi_{i+1}}(\Phi_{i+1}^{k+1} - \Phi_{i+1}^k) + H$$

Abbiamo supposto la dipendenza di ciascuna funzione da tre variabili, poiché discretizzando il termine convettivo dell'equazione modello al primo ordine con metodo upwind e il termine diffusivo con una formula di derivazione centrata al secondo ordine si ottiene proprio un caso del genere, ma in generale ogni i -esima funzione potrebbe dipendere da tutte le variabili.

Facendo ciò per tutte le funzioni, in forma compatta è possibile scrivere:

$$\bar{F}(\bar{\Phi}) = 0 = \bar{F}(\bar{\Phi}^k) + [J]\{\bar{\Phi}^{k+1} - \bar{\Phi}^k\} = 0$$

dove:

$$\begin{cases} \Phi_{i+1/2}^L = \Phi_i + \sigma_i(x_{i+1/2} - x_i) \\ \Phi_{i+1/2}^R = \Phi_{i+1} + \sigma_{i+1}(x_{i+1/2} - x_{i+1}) \end{cases}$$

e per il calcolo delle pendenze σ_i e σ_{i+1} si utilizza un operatore detto *LIMITER* che ha lo scopo di scegliere tra due opzioni differenti per ogni cella considerata:

$$\sigma_i = \text{LIMITER} \left(\frac{\Phi_i - \Phi_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_i}{x_{i+1} - x_i} \right)$$

e analogamente per la cella $i+1$, che coinvolgerà la cella alla sua destra e la cella i . Ovviamente, nel caso in cui si consideri la prima o l'ultima cella del dominio, le pendenze da assegnare sono calcolate sfruttando la condizione al bordo, per cui:

$$\sigma_1 = \frac{\Phi_1 - \Phi_a}{\frac{\Delta x}{2}} \text{ se griglia equispaziata}$$

$$\sigma_{NCL} = \frac{\Phi^b - \Phi_{NCL}}{\frac{\Delta x}{2}} \text{ se griglia equispaziata}$$

Nel nostro caso, si è deciso di scegliere l'operatore *MINMOD*, che sceglie la pendenza da utilizzare nel seguente modo:

- se le pendenze hanno lo stesso segno, viene presa quella minore in modulo
- se le pendenze hanno segno opposto, viene presa una pendenza nulla

La scelta di utilizzare una pendenza nulla abbassa l'accuratezza del metodo, portandola al primo ordine. In tal modo, si introduce nel sistema della viscosità artificiale che ha lo scopo di attenuare eventuali oscillazioni che potrebbero presentarsi (la presenza di pendenze di segno opposto e dunque di massimi e minimi relativo potrebbe proprio essere indice di oscillazioni). Esistono altri possibili operatori funzionali *LIMITER*, che possiamo introdurre indicando con:

$$\theta_i = \frac{\sigma_i^R}{\sigma_i^L}$$

così facendo, la pendenza da assegnare ad ogni centro cella sarà data dalla relazione:

$$\sigma_i = \Lambda(\theta_i) \sigma_i^L$$

dove $\Lambda(\theta_i)$ è il particolare operatore funzionale di *LIMITER* che si intende utilizzare. Riportiamo i seguenti operatori funzionali, che possono essere scelti oltre al *MINMOD*:

$$\Lambda(\theta_i) = \max[0, \min(1, 2\theta), \min(2, \theta)] \quad \text{SUPERBEE LIMITER}$$

$$\Lambda(\theta_i) = \max \left[0, \min \left(0, \frac{1+\theta}{2}, 2, \theta \right) \right] \quad \text{MC LIMITER}$$

$$\Lambda(\theta_i) = \frac{\theta + |\theta|}{1 + \theta} \quad \text{VAN LEER LIMITER}$$

$$\Lambda(\theta_i) = \max \left(0, \frac{\theta(1 + |\theta|)}{1 + \theta^2} \right) \quad \text{MC LIMITER}$$

Con lo stesso procedimento si ottiene, al bordo di destra:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_b = b = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{8}{3}\Phi_b - 3\Phi_N + \frac{1}{3}\Phi_{N-1}\right)$$

Abbiamo visto che non sempre una formula di derivazione forward o backward ha lo stesso ordine del polinomio utilizzato per ottenerla. Per dimostrare che l'accuratezza sia effettivamente al secondo ordine, prendiamo ad esempio la prima e sviluppiamo in serie di Taylor nell'intorno di Φ_a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x} \left(-\frac{8}{3}\Phi_a + 3\Phi_1 - \frac{1}{3}\Phi_2\right) &= \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{8}{3}\Phi_a + 3\Phi_a + \frac{3}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_a \Delta x + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x}\right)_a \Delta x^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial^3 x}\right)_a \Delta x^3 + H - \frac{1}{3}\Phi_a - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_a \Delta x - \frac{3}{4} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 x}\right)_a \Delta x^2 - \frac{3}{16} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial^3 x}\right)_a \Delta x^3 + H'\right] = \\ &= \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_a - \frac{1}{8} \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial^3 x}\right)_a \Delta x^2 + H'' \end{aligned}$$

per cui, la formula rappresenta effettivamente un'approssimazione del secondo ordine.

4 Risoluzione del sistema di equazioni

Una volta calcolati i flussi convettivi e diffusivi alle interfacce tra le celle, procediamo nel seguente modo. Ricordiamo che l'equazione discretizzata in forma unidimensionale può essere scritta per la cella i -esima nel seguente modo:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) \Delta x + F_{i+1/2}^c - F_{i-1/2}^c - (F_{i+1/2}^v - F_{i-1/2}^v) = 0$$

Assumendo di considerare il caso stazionario, l'equazione diventa:

$$\left(\sum F^c\right)_i + \left(\sum F^v\right)_i = 0$$

questa rappresenta una delle equazioni che vogliamo azzerare. Considerando tutte le N equazioni, ci riconduciamo al problema analizzato nella sezione (1), ovvero quello di determinare le soluzioni del sistema di equazioni non lineari:

$$\bar{F}(\bar{\Phi}) = \{0\}$$

Abbiamo visto che questo equivale a risolvere iterativamente il sistema lineare:

$$[J](\bar{\Phi}^{k+1} - \bar{\Phi}^k) = -\bar{F}(\bar{\Phi}^k)$$

Nel nostro caso, utilizzando un metodo upwind per la discretizzazione dei termini convettivi e un'approssimazione della derivata al secondo ordine per i termini diffusivi, ogni cella i -esima coinvolge solamente tre incognite su N , che sono Φ_{i-1} , Φ_i e Φ_{i+1} , per cui la matrice Jacobiana sarà una matrice tridiagonale.

Usando invece una discretizzazione dei termini convettivi al secondo ordine, ogni cella potrà al massimo coinvolgere 5 incognite su N , per cui la matrice Jacobiana sarà una matrice penta-diagonale.

Osserviamo inoltre che il vettore dei termini noti del nostro sistema di equazioni sarà costituito

Le differenze tra il metodo al primo e al secondo ordine sono tanto più evidenti quanto più si riduce il numero di punti griglia. Proviamo a lasciare inalterati tutti i parametri rispetto al caso precedente, ma a utilizzare 50 punti anziché 100.

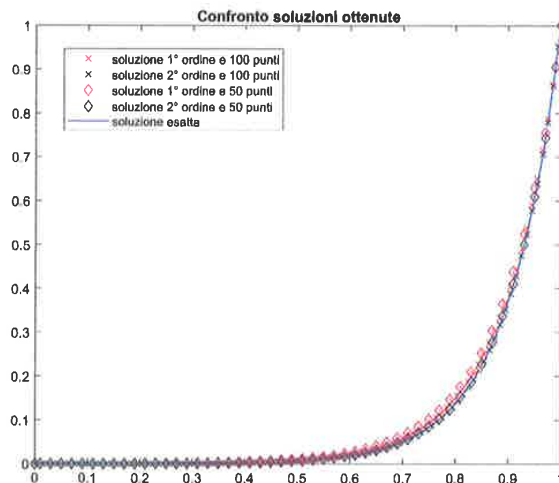


Figura 3: Confronto soluzione esatta e soluzioni numeriche con 50 pt $\Gamma = 1$

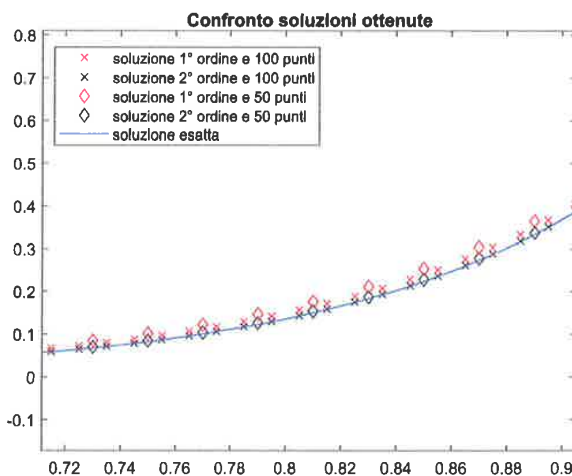


Figura 4: Ingrandimento del grafico precedente

In genere una soluzione al secondo ordine con 50 punti è più accurata di una soluzione al primo ordine con 100 punti, perché l'errore diminuisce con un fattore 4. Per trovare una soluzione simile a quella ottenuta con il metodo al primo ordine avremmo dovuto analizzare una griglia con 25 punti (anche se tale regola vale per griglie molto raffinate).

Fluidodinamica computazionale
Esercitazione 3
**Discretizzazione dell'equazione modello
mediante volumi finiti
Caso non stazionario**

Francesco UFFREDUZZI s235629

19 Novembre 2017



$$\Phi_i^{k+1} = \Phi_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ (\Phi u)_{i+1/2}^k - (\Phi u)_{i-1/2}^k - \frac{\Gamma}{\rho} [(\Phi_x)_{i+1/2}^k - (\Phi_x)_{i-1/2}^k] \right\}$$

$$\Phi_i^{k+1} = \Phi_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \sum F^{c^k} + \sum F^{v^k} \right\} = \Phi_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta x} RES$$

Osserviamo che quando $RES = 0$, $\Phi^{k+1} = \Phi^k$ e si è raggiunta la condizione di stazionarietà. Lo studio dei residui è importante quando:

- Si risolvono le equazioni già scritte nella condizione stazionaria. In tal caso la soluzione si ottiene attraverso metodi iterativi che linearizzano il sistema di equazioni. Il residuo in tal caso deve **NECESSARIAMENTE** andare a zero, altrimenti sono stati commessi degli errori.
- Si risolvono le equazioni scritte in maniera non stazionaria. Se si è alla ricerca di una soluzione stazionaria, che deve esistere, i residui associati alla discretizzazione temporale devono andare a zero, perché ciò vuol dire che si è annullata la derivata temporale. Se il problema non ammette soluzione stazionaria, i residui oscilleranno senza mai raggiungere il valore nullo.

1.1 Subroutine *TIME_STEP*

In tale subroutine si sceglie il passo temporale che garantisce la stabilità del metodo esplicito. In generale, esistono due condizioni da soddisfare:

- Condizione sulla parte convettiva: $\Delta t^c \leq \frac{\Delta x}{|u|}$ (condizione Courant-Friedrichs-Levy)
- Condizione sulla parte diffusiva: $\Delta t^v \leq \frac{\rho}{2\Gamma} \Delta x^2$

Per determinare il passo temporale da utilizzare, è possibile determinare un Δt misto nel seguente modo:

$$\Delta t_{mix} = \frac{1}{\frac{2\Gamma}{\rho \Delta x^2} + \frac{|u|}{\Delta x}}$$

Questo Δt misto, viene moltiplicato poi per un coefficiente minore di 1 che rappresenta un fattore di sicurezza da applicare alle condizioni sul Δt .

$$\Delta t = \Delta t_{mix} \cdot CFL$$

1.2 Subroutine *UNSTEADY_EQ*

Da tale subroutine si entra nella subroutine *MARCH*, che esegue l'integrazione nel tempo. In tal caso, dato che lo schema è esplicito, occorre solamente calcolare i flussi convettivi e diffusivi al passo temporale k . Per il calcolo dei flussi si veda l'**Esercitazione 3**.

Fatto ciò, si ha che:

$$RES^k = - \left[\sum F^{c^k} + \sum F^{v^k} \right]$$

è possibile, linearizzando il sistema di equazioni, giungere al metodo iterativo:

$$[J]^{it} [(\Phi^{k+1})^{it+1} - (\Phi^{k+1})^{it}] = -\mathbf{F}[(\Phi^{k+1})^{it}]$$

In tal caso si hanno dunque due differenti iterazioni, la prima è detta *esterna* e corrisponde all'avanzamento temporale, la seconda è detta *interna* ed è necessaria a risolvere il sistema non lineare che deriva dall'utilizzo di un metodo implicito. Per ogni passo temporale, il metodo iterativo converge quando la norma di $\mathbf{F}[(\Phi^{k+1})]$ è minore di una certa tolleranza fissata. All'interno della subroutine MARCH, infatti, ora $\mathbf{RES}=\mathbf{F}[(\Phi^{k+1})]$ e tale residuo indica quanto siamo vicini a trovare Φ al nuovo passo temporale.

Riprendendo il caso di una discretizzazione dei termini convettivi al primo ordine, per la *i*-esima cella si avrà dunque:

$$(\Phi_i^{k+1} - \Phi_i^k) \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left\{ \left[-\max(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \Phi_{i-1}^{k+1} + \left[\max(u, 0) - \min(u, 0) + 2 \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \Phi_i^{k+1} + \left[\min(u, 0) - \frac{\Gamma}{\rho \Delta x} \right] \Phi_{i+1}^{k+1} \right\} = 0$$

Nel calcolo della Jacobiana dunque, rispetto al caso stazionario in cui questa veniva calcolata per risolvere il sistema non lineare:

$$[J] (\overline{\Phi}^{it+1} - \overline{\Phi}^{it}) = +\overline{RES}^{it}$$

basterà aggiungere il termine $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ sulla diagonale.

Nel caso della discretizzazione sopra presentata, il sistema è lineare e dunque le iterazioni interne giungono a convergenza in un colpo solo.

In generale, però, si hanno delle iterazioni interne che necessitano di una certa tolleranza. Se si è interessati ad una elevata accuratezza temporale, la tolleranza sulle iterazioni interne è molto stringente, mentre se si è interessati al raggiungimento della condizione stazionaria, ad esempio, non è importante avere un'accuratezza troppo elevata. Osserviamo inoltre che utilizzare uno schema implicito fa sì che fin dalla prima iterazione temporale, che si ha a seguito del ciclo interno necessario a risolvere il sistema non lineare, i valori di Φ cambino ovunque nel dominio, non come avveniva per il caso esplicito in cui alla prima iterazione era solo il valore di Φ vicino al bordo di destra a cambiare.

3 Analisi dei risultati ottenuti

Riportiamo nei grafici seguenti rielaborati in Matlab, i risultati ottenuti risolvendo l'equazione modello nel caso non stazionario utilizzando un metodo esplicito e un metodo implicito, variando nel secondo caso la condizione sul passo temporale utilizzato nell'integrazione temporale.

Possiamo osservare in primo luogo che confrontando uno schema esplicito con condizione CFL = 0.8 con uno implicito con la stessa limitazione sul passo temporale, non si osservano differenze sul numero di iterazioni utilizzate per giungere alla soluzione stazionaria, mentre si osservano sostanziali differenze sul tempo di calcolo. In tal caso il metodo implicito impiega quasi il doppio del tempo.

Ricordando però che un metodo implicito è incondizionatamente stabile, vediamo cosa accade aumentando il passo temporale. Come si nota dai grafici sopra riportati, in tal caso il vantaggio rispetto al metodo esplicito è notevole. In tempi più brevi si giunge alla soluzione stazionaria e

Si devono perciò monitorare due residui differenti:

- Il residuo delle iterazioni interne fornisce indicazioni su quanto si è vicini a trovare Φ al nuovo passo temporale
- Il residuo delle iterazioni esterne è dato dalla somma dei flussi convettivi e diffusivi e fornisce indicazioni su quanto si è vicini alla soluzione stazionaria.

Se si è interessati alla soluzione stazionaria è possibile imporre che il residuo delle iterazioni interne sia inferiore a una soglia non troppo piccola, poiché non si è interessati tanto all'evoluzione nel tempo. Se viceversa l'evoluzione nel tempo è importante, esisteranno condizioni più stringenti su tale residuo.

Osserviamo inoltre che più si tende alla stazionarietà, più la soluzione cambierà meno nel tempo, per cui la condizioni iniziale da cui si parte per le iterazioni interne è sempre più vicina a quella finale e il primo valore del residuo nelle iterazioni interne tende dunque a diminuire. Per cui, una diminuzione del residuo delle iterazioni esterne, che indica l'avvicinamento alla stazionarietà, è accompagnato da una diminuzione del residuo delle iterazioni interne.

6 Analisi dei risultati ottenuti

Si riportano ora i risultati ottenuti risolvendo l'equazione modello nel caso time dependent con una discretizzazione dei flussi convettivi al secondo ordine, utilizzando sia un metodo di integrazione temporale esplicito che implicito. Come già visto nei casi precedenti, l'utilizzo di uno schema implicito permette di non avere vincoli sul passo temporale, per cui in tal caso sono stati utilizzati differenti valori di CFL, per far notare come il raggiungimento della condizione stazionaria sia molto più rapido nel secondo caso, rispetto a un metodo esplicito che presenta invece vincoli ($CFL < 1$) sul passo temporale da utilizzare.

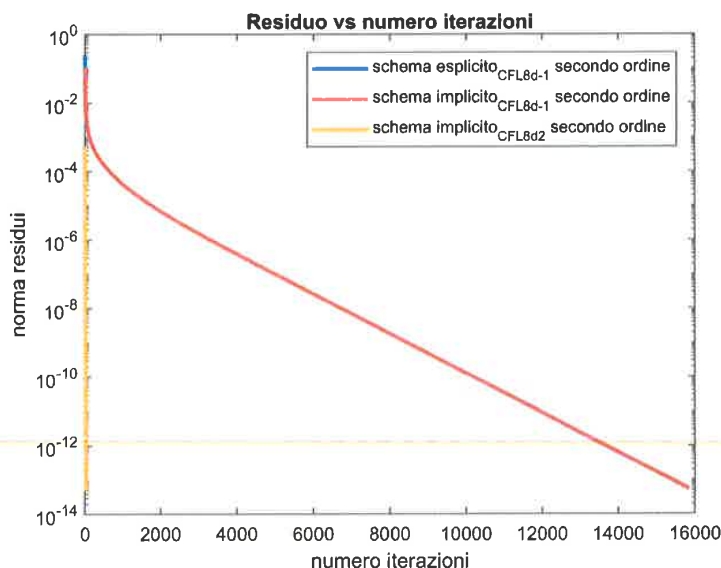


Figura 4: Iterazioni interne ed esterne

Fluidodinamica computazionale
Esercitazione 5
**Discretizzazione dell'equazione modello
2D mediante volumi finiti
Caso non stazionario**

Francesco UFFREDUZZI s235629

15 Dicembre 2017



In tal caso l'equazione scritta per ogni cella diventa:

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(\sum F_c^k + \sum F_v^k \right)$$

Quando la somma dei flussi diffusivi e convettivi si annulla o raggiunge valori in generale vicini allo zero di macchina, vuol dire che si è raggiunta la condizione di stazionarietà e dunque $\Phi^{k+1} = \Phi^k$.

Nel caso in cui si decida di utilizzare un metodo implicito al primo ordine, basterà approssimare le funzioni integrande con valori costanti, ma calcolati al tempo t_{k+1} .

Nella discretizzazione spaziale compaiono dunque valori di Φ incogniti che comportano di conseguenza la necessità di risolvere un sistema non lineare, se si decide di discretizzare i flussi convettivi al secondo ordine. Per ogni cella, l'equazione non lineare da risolvere diventa dunque:

$$\Phi^{k+1} = \Phi^k - \frac{\Delta t}{\Delta S} \left(\sum F_c^{k+1} + \sum F_v^{k+1} \right)$$

Come già visto in molti altri casi, si avrà dunque un residuo delle iterazioni esterne, che fornisce informazioni su quanto si è lontani dalla condizione di stazionarietà, e un residuo associato alle iterazioni interne, che invece dà indicazioni su quanto si è vicini a trovare Φ al nuovo passo temporale.

Indicando con $F(\Phi) = 0$ il sistema di equazioni non lineari, espandendo in serie di Taylor fino al primo ordine si ottiene:

$$\bar{F}(\bar{\Phi}^{k+1}) = \bar{F}[(\bar{\Phi}^{k+1})^{it}] + [J]\{(\bar{\Phi}^{k+1})^{it+1} - (\bar{\Phi}^{k+1})^{it}\} = 0$$

dove $[J]$ è la matrice Jacobiana che contiene nella riga i -esima tutte le derivate della funzione i -esima rispetto alle variabili da cui dipende.

In questo modo, occorre semplicemente risolvere il sistema lineare:

$$[J]\{(\bar{\Phi}^{k+1})^{it+1} - (\bar{\Phi}^{k+1})^{it}\} = -\bar{F}[(\bar{\Phi}^{k+1})^{it}]$$

Fatta questa breve premessa, commentiamo i risultati ottenuti utilizzando il programma di calcolo a disposizione.

1 Caso puramente convettivo - Metodo esplicito

Osservando che come condizione iniziale è stato scelto $\Phi = 3$ vediamo cosa accade considerando solamente l'effetto della parte convettiva. Si osserva un fronte a $\Phi = 0$ che avanza verso il basso mantenendosi parallelo a se stesso, che tra l'altro avanza sempre più lentamente, in quanto $v = -y$ e dunque man mano che ci si avvicina al bordo inferiore la velocità diminuisce. La condizione al contorno lineare sul bordo di sinistra non riesce a farsi sentire, in quanto la componente orizzontale di velocità è nulla poiché $u=x$ e $x=0$. Nel secondo istante considerato si può osservare un angolo in alto a destra in cui si ha dell'imprecisione numerica, rilegata comunque a una porzione ristretta del dominio e caratterizzata da oscillazioni molto prossime allo zero.

Φ presenti. Sulla parete in alto infatti, muovendosi verticalmente verso il basso, si nota la presenza di una regione in cui Φ passa dal valore 0 al valore 3 imposto dalla condizione iniziale. Analogamente accade sulla parete di sinistra, con la differenza che in tal caso la condizione al contorno è lineare, per cui nella zona superiore della parete, muovendosi verso destra Φ passa da un valore più vicino a 0 a un valore pari a 3, mentre nella parte inferiore della parete il raccordo avverrà tra valori prossimi a 1 il valore imposto dalla condizione iniziale. Osservando istanti di tempo successivi, si nota come progressivamente il campo tenda ad uniformarsi, evitando brusche variazioni di Φ . In particolare, si nota l'effetto della condizione al bordo sulla parete di sinistra. Nell'angolo in basso a sinistra, infatti, si osserva come Φ valga proprio 1.

Possiamo studiare cosa accada aumentando ad esempio il valore di Γ . Se questo aumenta, aumentano molto i tempi di calcolo poiché:

$$\Delta t \leq \Delta t_{mix} \cdot CFL = \frac{1}{\frac{2\Gamma}{\rho\Delta x^2} + \frac{|u|}{\Delta x}} \cdot CFL$$

e poiché Γ cresce, diminuisce il Δt da utilizzare per garantire la stabilità del metodo. Invece di tentare di utilizzare un valore di Γ crescente, per ottenere risultati in minor tempo consideriamo un valore più basso, pari a $\Gamma = 0.01$. Il costo computazionale si riduce in quanto è possibile utilizzare degli step temporali più ampi e i risultati ottenuti sono riportati nei grafici sottostanti:

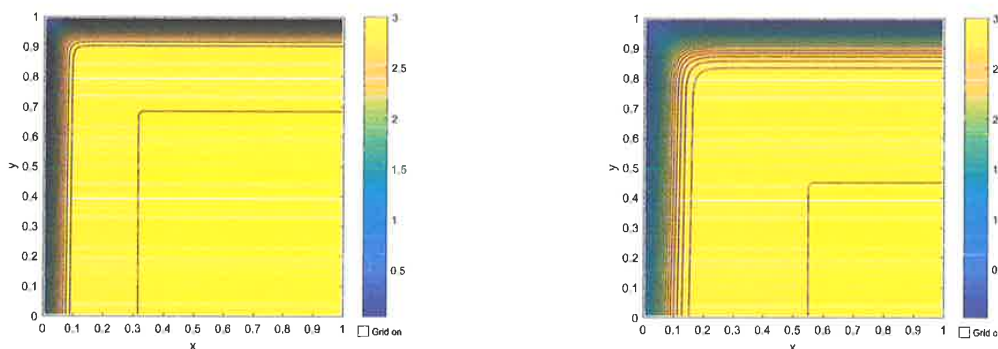


Figura 4: Campo di Φ a $t=0.1$ s e $t=0.3$ s, effetto della sola diffusione, $\Gamma = 0.01$, $CFL=0.7$

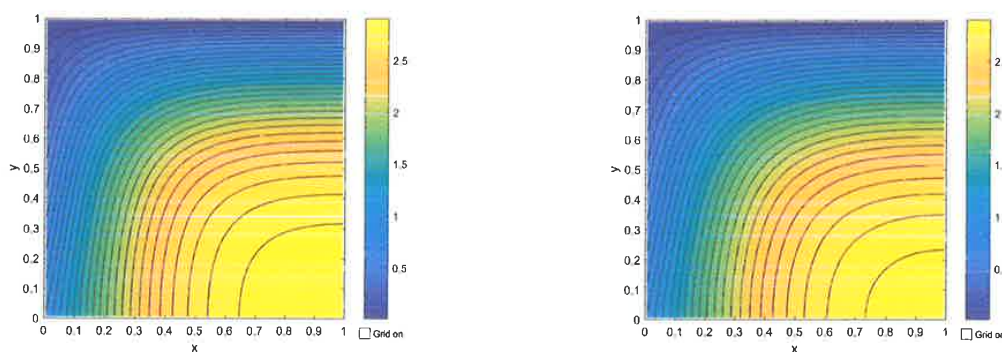


Figura 5: Campo di Φ a $t=5$ s e $t=6$ s, effetto della sola diffusione, $\Gamma = 0.01$, $CFL=0.7$

Si può osservare come rispetto al caso precedente, a parità di istanti di tempo considerato, il risultato appaia meno diffuso.

Confrontando tale soluzione con quella stazionaria, a destra, non si notano particolari differenze. Per arrivare velocemente alla stazionarietà, è possibile utilizzare un metodo implicito di integrazione temporale, con un CFL molto elevato, pari ad esempio a $7 \cdot 10^{10}$. Per ottenere una soluzione stazionaria che sia accurata, è necessario però aumentare il numero di iterazioni interne del metodo implicito, portandole da 1 a 10. In tal modo è possibile ridurre anche i residui associati alle iterazioni interne.

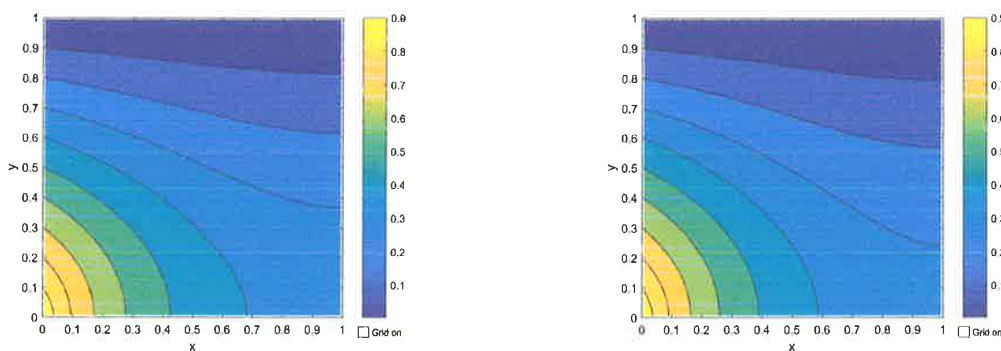


Figura 8: Confronto soluzione ottenuta al tempo $t=0.1$ s con metodo implicito, a sinistra, e soluzione stazionaria, a destra.

Confrontando le soluzioni stazionarie ottenute con differenti iterazioni interne in tal caso non si osservano differenze particolari.

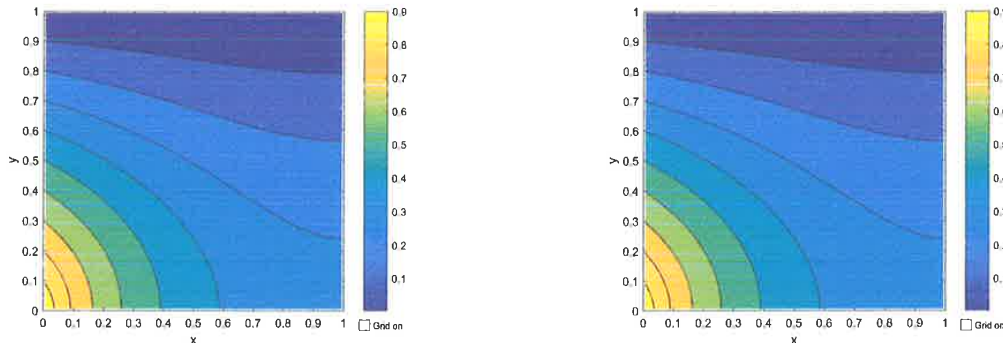


Figura 9: Confronto soluzione stazionaria con una iterazione interna, a sinistra, e soluzione stazionaria con dieci iterazioni interne, a destra.

Ciò che è importante osservare, dunque, è che attraverso il metodo implicito siamo riusciti ad arrivare alla soluzione stazionaria in molto meno tempo rispetto a quello necessario utilizzando un metodo esplicito.

L'ultima domanda a cui vogliamo rispondere è: riesce il metodo implicito a cogliere anche il transitorio, come accade utilizzando il metodo esplicito?

Per capire ciò, confrontiamo due simulazioni differenti, una con un metodo esplicito in cui settiamo $\Gamma = 10$, $CFL=0.7$ e una con un metodo implicito utilizzando lo stesso Γ ma un CFL pari a 7.

Fluidodinamica computazionale
Esercitazione 6
**Discretizzazione delle equazioni di
Burgers e di Eulero**

Francesco UFFREDUZZI s235629

19 Gennaio 2017



Si ottiene il seguente schema numerico:

$$w_N^{k+1} = w_N^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [f(w_{N+1/2}^k) - f(w_{N-1/2}^k)] \quad (6)$$

Come noto, per ottenere uno schema stabile, è necessario esprimere i flussi basandosi su un metodo upwind che tenga conto del modo particolare con cui i segnali propagano in un'equazione iperbolica.

A tale scopo, per il calcolo dei flussi è necessario determinare il valore della variabile conservativa all'interfaccia risolvendo il problema di Riemann originato dalla particolare ricostruzione utilizzata. Tale modo di procedere è basato sul *metodo di Godunov*, che si articola in tre passi:

- **Ricostruzione** : la soluzione, nota solo nei centri cella, viene ricostruita mediante funzioni definite a tratti, diverse a seconda dei metodi utilizzati.
- **Evoluzione**: studiare l'evoluzione della soluzione significa capire come evolvono le discontinuità originate a seguito della ricostruzione. In poche parole, ciò significa risolvere il problema di Riemann per calcolare il valore della variabile conservativa da assegnare all'interfaccia, necessaria al calcolo dei flussi.
- **media**: la soluzione all'istante di tempo successivo deve essere mediata nelle celle nel seguente modo:

$$w_N^{k+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \tilde{w}(x, t^{k+1}) dx$$

dove con \tilde{w} si indica la soluzione ricostruita.

Poiché stiamo considerando l'equazione di Burgers, dalla ricostruzione potrà nascere un'unica configurazione d'onda che suddividerà il piano delle fasi in due regioni a e b a sinistra e a destra dell'interfaccia considerata.

Per risolvere il problema di Riemann, che significa capire in quale regione cade l'interfaccia in modo da assegnare ad essa il giusto valore della variabile conservativa, è necessario capire quali sono i valori che ricadono a sinistra e a destra di essa.

Per determinarli, il codice utilizza la seguente procedura. Supponendo di considerare l'interfaccia $N+1/2$:

$$u_a = u_N^k + \frac{1}{2} \sigma_N^k \Delta x - \frac{1}{2} u_N^k \sigma_N^k \Delta t$$

$$u_b = u_{N+1}^k - \frac{1}{2} \sigma_{N+1}^k \Delta x - \frac{1}{2} u_{N+1}^k \sigma_{N+1}^k \Delta t$$

Come è possibile osservare, la formula implementata è quella necessaria al calcolo dei flussi al secondo ordine di accuratezza spaziale e temporale. Sono presenti infatti dei termini correttivi nello spazio e nel tempo, l'ultimo scritto in funzione della derivata spaziale attraverso la legge di governo.

A questo punto, è possibile effettuare due scelte. Se si vogliono calcolare i flussi al primo ordine di accuratezza, il codice impone un valore nullo alle pendenze σ_N , σ_{N+1} e i valori alle interfacce risultano dunque essere pari ai valori dei centri cella.

Nel caso in cui invece si vogliono calcolare i flussi al secondo ordine è necessario calcolare in primo luogo la pendenza da assegnare ad ogni centro cella. Per fare ciò, per ogni cella si calcolano le due pendenze corrispondenti come:

$$\sigma_M = \frac{u_N - u_{N-1}}{\Delta x}$$

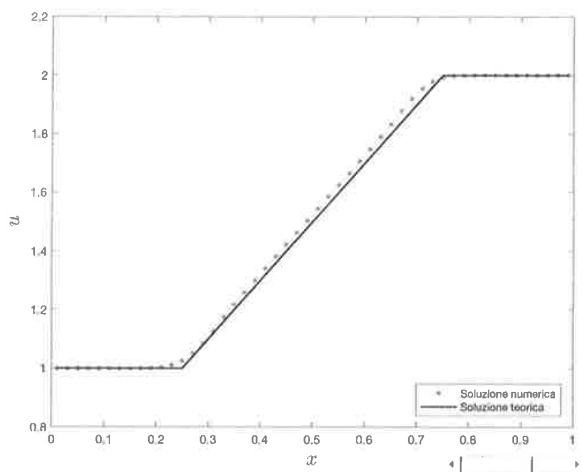


Figura 2: Confronto soluzione numerica e soluzione esatta, 50 punti, 2° ordine di accuratezza spaziale e temporale

In tal caso la soluzione in prossimità degli spigoli è colta in maniera più accurata, grazie alla maggiore accuratezza spaziale, anche se si nota un leggero overshoot nella parte superiore della rampa.

Provando ad aumentare il numero di punti, si ottengono i seguenti risultati:

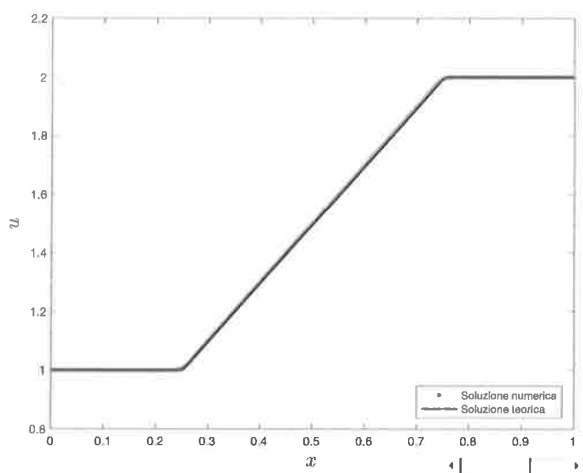


Figura 3: Confronto soluzione numerica e soluzione esatta, 300 punti, 2° ordine di accuratezza spaziale e temporale

Come si nota, la soluzione numerica non ha nessun problema a seguire la soluzione esatta.

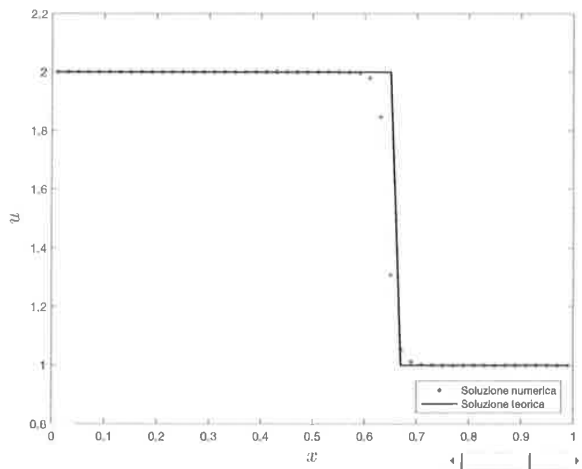


Figura 6: Confronto soluzione numerica e soluzione esatta, 50 punti, 2° ordine di accuratezza spaziale e temporale, legge di conservazione 1

Con il primo ordine di accuratezza si può osservare come la discontinuità sia catturata numericamente in un certo numero di punti. Considerando il secondo ordine di accuratezza, si osserva come la discontinuità venga catturata in maniera migliore, in un numero inferiore di punti rispetto al caso al primo ordine. In entrambi i casi, comunque, in prossimità degli spigoli non si riesce a cogliere la soluzione analitica nella maniera migliore. Osserviamo come la soluzione esatta mostri una discontinuità che presenta una leggera pendenza, a causa del fatto che per semplicità sono stati riportati solamente i valori al centro cella. Ciò comporta che la discontinuità sia in realtà ampia Δx . Possiamo anche provare ad aumentare il numero di punti, osservando come cambi la soluzione numerica.

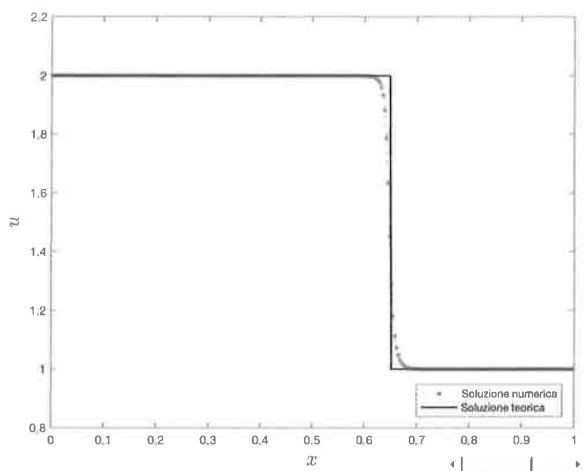


Figura 7: Confronto soluzione numerica e soluzione esatta, 300 punti, 1° ordine di accuratezza spaziale e temporale, legge di conservazione 1

Equazione di Eulero

2.1 Test case: Tubo con setto

Per lo studio della fisica descritta dalle equazioni di Eulero è stato necessario confrontarsi con un caso reale approssimabile ad un'evoluzione monodimensionale dove due fluidi, con configurazioni diverse, entrano impulsivamente in contatto. Tale dinamica è riproducibile attraverso un setto interposto tra due regioni di un tubo sufficientemente lungo.

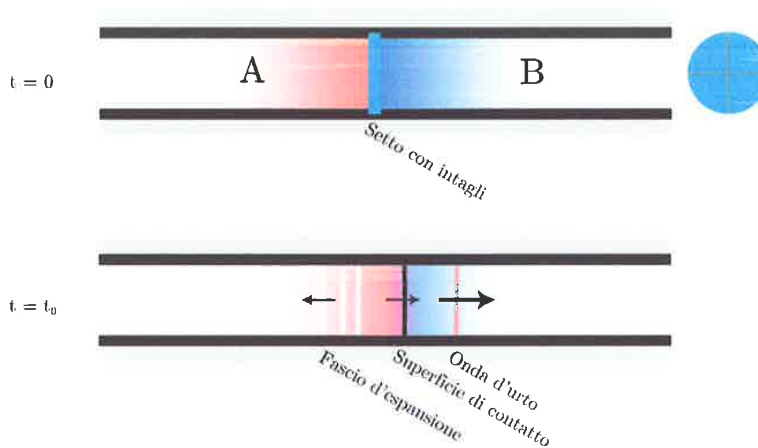


Figura 10: Rappresentazione del tubo con setto

Dalla Figura 10 emerge la suddivisione ermetica in due regioni A e B all'istante $t = 0$. Al tempo iniziale le due sezioni presentano la seguente configurazione:

$$\begin{cases} p_A > p_B \\ u_A = u_B = 0 \\ \rho_A > \rho_B \\ M_A = M_B = 0 \\ T_A > T_B \\ S_A < S_B \end{cases}$$

Viene dato il comando per la rottura del setto preintagliato e, all'istante $t = t_0$, i due fluidi entrano in contatto. Si genera così una discontinuità tra le grandezze elencate e, nel primo intorno della zona del setto, si viene a creare una condizione del tutto simile a quella matematica esaminata nel *problema di Riemann*.

Nel problema di Riemann la discontinuità è istantanea a causa della ricostruzione mediante funzioni definite a tratti. Nel tubo con setto si ricrea la stessa condizione.

Come si apprezza dalla Figura 11, la soluzione numerica, considerata al tempo t^k per le sei variabili in esame, presenta comportamenti diversi, che rispecchiano la famiglia delle discontinuità che vengono attraversate.

2.2 Punto di vista delle variabili a cavallo delle discontinuità

Pressione, p

La differenza di pressione tra i due compartimenti stagni è la macchina motrice di tutti i fenomeni che si originano all'apertura del setto. Se il Δp è maggiore o uguale al valore critico, le onde di compressione si compattano a destra del setto generando un'onda d'urto che viaggerà a velocità soniche.

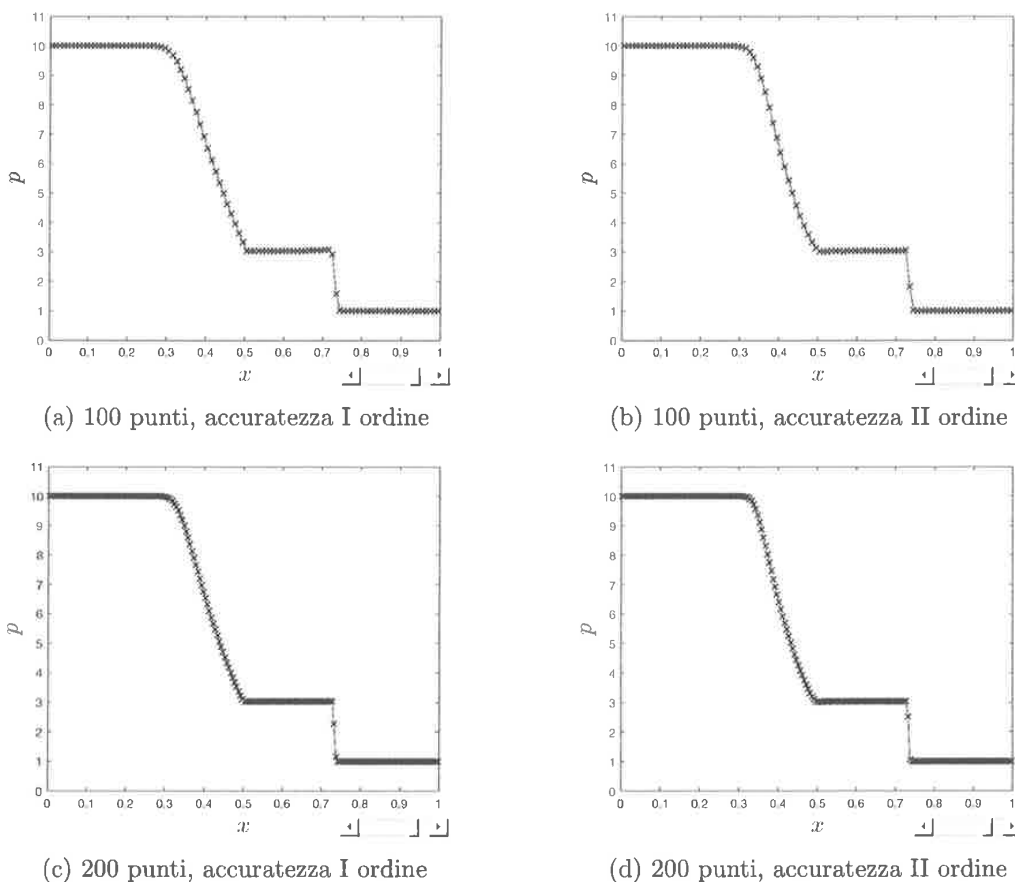
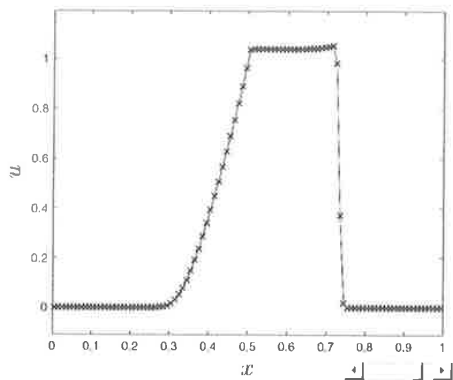


Figura 12: Andamento della pressione all'istante t^k

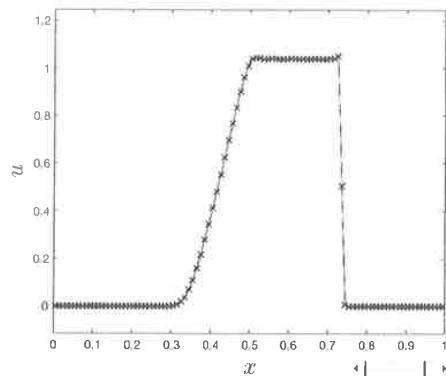
In termini di discontinuità, la pressione è sensibile solo all'attraversamento delle onde della I e della III famiglia.

Come ci si aspetta dall'evoluzione fisica, la pressione, rispetto all'interfaccia collocata tra le discontinuità della I e III famiglia, diminuisce a cavallo del fascio d'espansione che viaggia verso sinistra e aumenta attraverso l'onda d'urto che invece si muove verso destra.

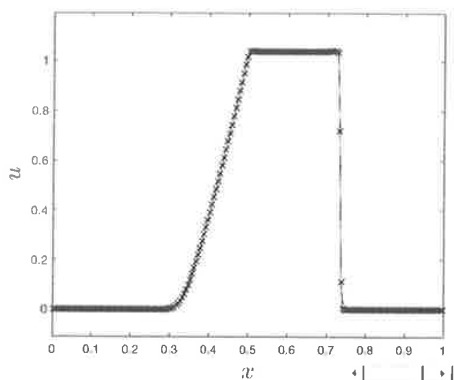
Velocità, u



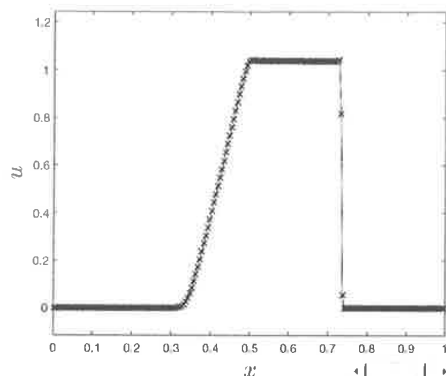
(a) 100 punti, accuratezza I ordine



(b) 100 punti, accuratezza II ordine



(c) 200 punti, accuratezza I ordine



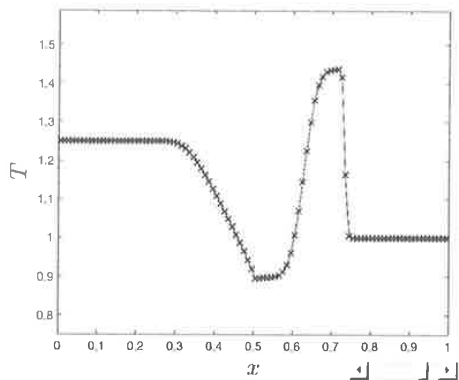
(d) 200 punti, accuratezza II ordine

Figura 14: Andamento della velocità all'istante t^k

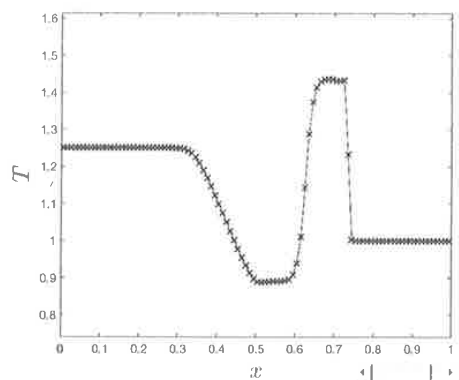
In termini di discontinuità, la velocità è sensibile solo all'attraversamento delle onde della I e della III famiglia.

Inizialmente il fluido è fermo in entrambe le sezioni del condotto. Quando il setto si rompe una zona del fluido compresa tra le onde d'espansione, che si propagano verso la zona a pressione maggiore, e l'onda d'urto, che invece perturba la zona di bassa pressione, acquista velocità per via del Δp presente tra le due regioni. Man mano che il tempo avanza, questa zona aumenterà le sue dimensioni in quanto il fascio d'espansione e l'onda d'urto si allontanano.

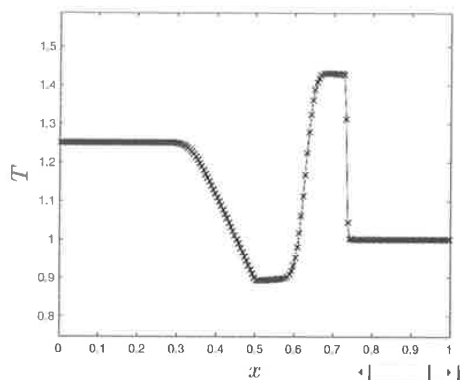
Temperatura, T



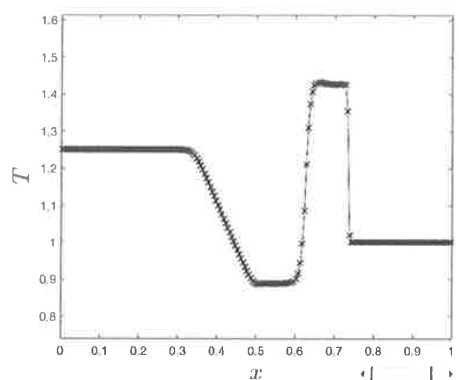
(a) 100 punti, accuratezza I ordine



(b) 100 punti, accuratezza II ordine



(c) 200 punti, accuratezza I ordine



(d) 200 punti, accuratezza II ordine

Figura 16: Andamento della temperatura all'istante t^k

In termini di discontinuità, la temperatura è sensibile alle onde di tutte le famiglie.

Ciò che si sperimenta è un raffreddamento durante il passaggio attraverso il fascio d'espansione andando da sinistra verso l'interfaccia e un altro a cavallo della superficie di contatto dirigendosi da destra verso l'interfaccia.

Come è sempre noto dalla fisica del fenomeno, l'onda d'urto riscalda il fluido.

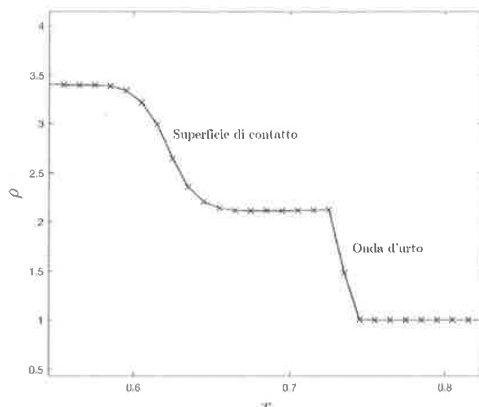
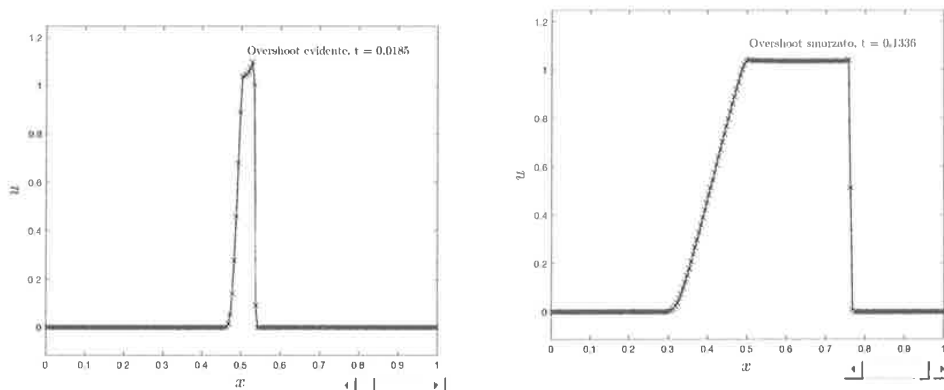


Figura 20: Dettaglio sulla diversa natura del risultato matematico della densità attraverso una superficie di contatto e un'onda d'urto

2.4 Effetto del numero di punti e dell'ordine di discretizzazione

Come visto nel caso dell'equazione di Burgers, anche in questa configurazione gli schemi upwind per lo *shock capturing* tendono a descrivere la discontinuità con lo stesso numero di punti a prescindere dalla risoluzione di griglia (sono stati esaminati i casi con 100 e 200 punti). Sarà poi l'ordine di accuratezza della discretizzazione a fornire una soluzione più o meno affine alla discontinuità teorica.

2.5 Problema dell'overshoot



(a) Istante temporale vicino a quello iniziale (b) Istante temporale lontano da quello iniziale

Figura 21: Andamento della velocità a due istanti temporali diversi

Nel caso del *problema di Riemann* la discontinuità, come già visto, nasce istantaneamente. A livello numerico, però, questo aspetto è di difficile trattazione, poiché la soluzione che approssima quella teorica tende a presentare degli overshoot in prossimità delle forti variazioni delle variabili primitive.

Tuttavia, un'accurata scelta delle pendenze nella ricostruzione della soluzione e di un metodo stabile garantisce lo smorzamento di tali oscillazioni.