



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2321A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Uffreduzzi Francesco

MATERIA: Aeroelasticità - Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

AERODINAMICA NON STAZIONARIA

RIEPIAMI EQUAZIONI DI BILANCIO

- BILANCIO DI MASSA

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Omniviamo che:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v}$$

Se il campo di velocità è SOLENOIDALE, $\nabla \cdot \vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \rho = \text{cost} \rightarrow$ FLUIDO INCOMPRESSIBILE

- BILANCIO QDM

Indichiamo con:

$\bar{\tau}$ \rightarrow tensione degli sforzi

$\nabla \vec{v}$ \rightarrow tensione gradiente di velocità, con $\vec{v} = f(x, y, z, t) \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = u(x, y, z, t) \\ v = v(x, y, z, t) \\ w = w(x, y, z, t) \end{cases}$$

Riconduciamo che:

$\bar{\tau} = \bar{\tau}_{eq} + \bar{\tau}_{dis}$ dove 1) $\bar{\tau}_{eq} \rightarrow$ FLUIDO FERMO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO LOCALE

$$\bar{\tau}_{eq} = -p \bar{I} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

2) $\bar{\tau}_{dis} \rightarrow$ FLUIDO IN MOVIMENTO
NASCITA DI GRADIENTI DI VELOCITÀ

Il tensione è legato ai gradienti di velocità dall'eq. costitutiva dei FLUIDI NEWTONIANI

$$\bar{\tau}_{dis} = 2\mu \bar{D} + \lambda (\nabla \cdot \vec{v}) \bar{I} \quad \text{con } \mu = \text{viscosità dinamica} \quad [\text{kg/ms} = \text{Pa}\cdot\text{s}]$$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu \rightarrow \text{IPOTESI DI STOKES}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau}_{dis} = 2\mu \left[\bar{D} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \vec{v}) \bar{I} \right]$$

- BILANCIO DELL'ENERGIA

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + (\vec{T}_{dis} \cdot \nabla) \cdot \vec{v} - \nabla \cdot \vec{q}$$

$E = e + v^2/2 =$ en. totale per unità di massa

dove $e =$ en. interna per unità di massa

$\vec{q} =$ flusso termico conduttivo $= -k \nabla T$

$k =$ conducibilità termica $[W/mK]$

Indichiamo con D la
FUNZIONE di DISSIPAZIONE:

$$D = \frac{1}{\rho} (\vec{T}_{dis} \cdot \nabla) \cdot \vec{v}$$

\Rightarrow

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \rho D + k \nabla^2 T$$

- ALTRE RELAZIONI

$$p/\rho = R^* T$$

eq. di stato dei gas perfetti, con $R^* = R/m$; $R^* = c_p - c_v$; $\gamma = c_p/c_v$

$$\Rightarrow c_v = c_p - R^* \rightarrow \gamma = c_p/c_v = \frac{c_p}{c_p - R^*} \rightarrow \frac{1}{\gamma} = 1 - \frac{R^*}{c_p} \Rightarrow c_p = \frac{\gamma R^*}{\gamma - 1}$$

$$c_v = \frac{R^*}{\gamma - 1}$$

- EQUAZIONE TRASPORTO ENTROPIA

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -p \nabla \cdot \vec{v} + \rho D - \nabla \cdot \vec{q}$$

Dall'eq. di bilancio della massa: $\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{D\rho}{Dt} \right)$

$$\Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho^2 \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = -\rho \nabla \cdot \vec{v} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

Allora:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -p \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \rho D - \nabla \cdot \vec{q} \rightarrow \rho \left[\frac{Ds}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] = \rho D - \nabla \cdot \vec{q}$$

Dal 1° principio della termodinamica:

$$de = dq - dw \rightarrow dq = de + p d\sigma, \text{ con } \sigma = \text{volume specifico}$$

$$\left. \begin{aligned} dq &= de + p d(1/\rho) \\ dq &= T ds \end{aligned} \right\} \rightarrow T ds = de + p d(1/\rho)$$

Associando le variazioni differenziali all'evoluzione di una particella fluida:

$$\Rightarrow T \frac{Ds}{Dt} = \frac{De}{Dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \Rightarrow \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho D - \nabla \cdot \vec{q}$$

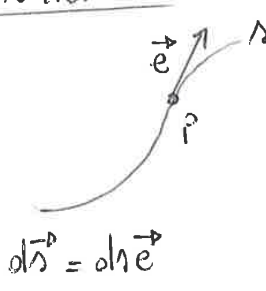
Quali sono le condizioni per cui $\nabla s = 0$?

$$\left. \begin{aligned} dq &= de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ dq &= T ds \end{aligned} \right\} \rightarrow T ds = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

$$h = e + p/\rho \rightarrow dh = de + p d\left(\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho} dp$$

$$\rightarrow dh = T ds + \frac{1}{\rho} dp$$

Possiamo dai differenziali ai gradienti attraverso la definizione di derivata direzionale:



$$\left. \begin{aligned} \frac{dh}{ds} &= \nabla h \cdot \vec{e} \\ \frac{dp}{ds} &= \nabla p \cdot \vec{e} \\ \frac{ds}{ds} &= \nabla s \cdot \vec{e} \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} dh = (\nabla h \cdot \vec{e}) ds \\ dp = (\nabla p \cdot \vec{e}) ds \\ ds = (\nabla s \cdot \vec{e}) ds \end{cases}$$

Sostituendo e semplificando:

$$\left. \begin{aligned} \nabla h &= T \nabla s + \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} + \nabla \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \right\} \rightarrow T \nabla s = \nabla h + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \vec{\omega} + \nabla \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right)$$

Allora:

$$\boxed{T \nabla s = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla \left(h + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) - \vec{v} \times \vec{\omega}}$$

EQUAZIONE DI CROCCO

Per cui, $\nabla s = 0$ quando:

- 1) STAZIONARIETÀ $\rightarrow \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
- 2) $\nabla \left(h + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) = 0 \rightarrow h + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} = H = \text{cost}$, con $H = \text{entalpia totale o di corrente}$
- 3) $\vec{v} \times \vec{\omega} = 0 \rightarrow \text{condizione soddisfatta se } \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \text{IRROTAZIONALE}$

$$= - \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p \frac{1}{r} \frac{p^\infty}{\rho^\infty} \right] p = - \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} p \frac{1}{r} \frac{p^\infty}{\rho^\infty} \right] \bar{x} = - \left[\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} \right] \bar{x} = - \left[\frac{c^2}{\gamma-1} \right] \bar{x} = - \frac{c^2}{\gamma-1} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1}$$

$\frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty}$

Allora:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1}$$

EQ. DI BERNOULLI NEL CASO
INSTAZ., IRROTAZIONALE E COMPRIMIBILE

* più semplicemente:

$$- \int_{p_\infty}^c \frac{\gamma-2}{\rho} d\rho \frac{p_\infty}{\rho^\infty} = - \frac{\gamma-2}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho^\infty} \left[\rho^{\gamma-1} \right]_{p_\infty}^c = - \frac{1}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho^\infty} \left[\frac{\rho^\gamma}{\rho} \right]_{p_\infty}^c = - \frac{1}{\gamma-1} \left[\frac{\rho^\gamma}{\rho} \right]_{p_\infty}^c = - \frac{1}{\gamma-1} [c^2]_\infty^c$$

$\rho^\gamma = \frac{p^\gamma}{\rho^\infty} \rightarrow \rho = \frac{p}{\rho^\infty} \frac{1}{\rho^\infty}$

Ritornando la (4), vediamo come esprimere il termine $\frac{1}{\Gamma-1} \frac{\partial e^2}{\partial t}$:

$$\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\gamma}} = \frac{c^2}{c_\infty^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{c^2}{c_\infty^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left[\left(\frac{p}{p_\infty}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\gamma}} \right] \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial e^2}{\partial t} \Rightarrow \left(\frac{1}{p_\infty}\right)^{\frac{\Gamma-1}{\gamma}} \cdot \frac{\Gamma-1}{\gamma} p^{\frac{\Gamma-1}{\gamma}-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial e^2}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Gamma-1}{\gamma} p_\infty^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} p^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c_\infty^2} \frac{\partial e^2}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{\Gamma-1}{\gamma} c_\infty^2 p_\infty^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} p^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Ricordando che:

$$c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty \Rightarrow \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{\Gamma-1}{\gamma} \cdot \gamma p_\infty / \rho_\infty p_\infty^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} p^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = (\Gamma-1) \underbrace{\frac{p_\infty}{\rho_\infty}}_{\frac{p^{1/\gamma}}{e}} p^{-1/\gamma} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{(\Gamma-1)}{e} \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\Gamma-1} \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial t}}$$

Ritornando l'eq. (2):

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla p \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{Dp}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla p \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\Gamma-1} \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{1}{e} \left[\frac{Dp}{Dt} - \vec{v} \cdot \nabla p \right]} \quad (6)$$

Dall'eq. (3):

$$-\vec{v} \cdot \nabla p = \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla (\|\vec{v}\|^2)$$

Sostituendo nella (6), ricordando che dalla (1) $\frac{Dp}{Dt} = -\rho e^2 \nabla \cdot \vec{v}$:

$$\boxed{\frac{1}{\Gamma-1} \frac{\partial e^2}{\partial t} = \frac{1}{e} \left[-\rho e^2 \nabla \cdot \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \vec{v} \cdot \nabla (\|\vec{v}\|^2) \right]} = \boxed{-c^2 \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \nabla (\|\vec{v}\|^2)}$$

Allora, sostituendo tale termine nell'eq. (5):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|\vec{v}\|^2) - c^2 \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \nabla (\|\vec{v}\|^2) = 0, \text{ ma } \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \nabla (\|\vec{v}\|^2) - c^2 \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

LINEARIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE DEL POTENZIALE

L'equazione del potenziale nel caso non stazionario, compressibile e irrotazionale:

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\|\nabla \Phi\|^2) + \frac{\partial}{\partial t} (\|\nabla \Phi\|^2) \right] = 0$$

presente dei termini non lineari, che sono:

- $\nabla \Phi \cdot \nabla (\|\nabla \Phi\|^2)$
- $\frac{\partial}{\partial t} (\|\nabla \Phi\|^2)$
- $c^2 = \frac{v^2}{H^2} = \frac{\|\nabla \Phi\|^2}{H^2}$

Per cui, andremo a linearizzare l'equazione, ottenendone una molto simile a quella delle onde, del tipo:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Supponiamo di considerare piccole perturbazioni:

$$\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{V}_p \quad ; \quad \text{con } \vec{V}_\infty = \text{velocità della corrente asintotica, che supponiamo allineata lungo l'asse } x$$

$$\Rightarrow \vec{V}_\infty = V_\infty \hat{i}$$

$$\vec{V}_p = \text{velocità di perturbazione}$$

$$\vec{V} = \text{velocità in ogni punto del dominio}$$

Allora:

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} V_\infty \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} V_\infty u \\ V_\infty v \\ V_\infty w \end{Bmatrix} = V_\infty \begin{Bmatrix} 1+u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad ; \quad \text{con } \begin{matrix} V_\infty u, V_\infty v, V_\infty w \ll V_\infty \\ \Rightarrow u, v, w \ll 1 \\ \text{perché piccola perturbazione} \end{matrix}$$

Introduciamo:

$$\Phi_\infty \rightarrow \text{potenziale legato alla corrente asintotica, } [\Phi_\infty] = m^2 s^{-1}$$

$$V_\infty \varphi \rightarrow \text{potenziale di perturbazione, } [\varphi] = m \Rightarrow u, v, w \text{ sono adimensionali}$$

$$\Rightarrow \Phi = \Phi_\infty + V_\infty \varphi$$

Dalla relazione isentropica:

$$P/\rho^\gamma = P_\infty/\rho_\infty^\gamma \rightarrow \rho/\rho_\infty = (P/P_\infty)^{1/\gamma}$$

$$e^2 = \gamma P/\rho \rightarrow P = \frac{\rho c^2}{\gamma}$$

$$\rightarrow \frac{P}{P_\infty} = \frac{\rho}{\rho_\infty} \frac{c^2}{c_\infty^2} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \frac{c^2}{c_\infty^2}$$

Dall'equazione di Bernoulli è possibile ricavare il rapporto c^2/c_∞^2 :

$$\Rightarrow \boxed{\frac{P}{P_\infty} = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} ; \boxed{\rho/\rho_\infty = \left(\frac{c^2}{c_\infty^2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{\|\vec{V}_\infty\|^2}{2} + \frac{c_\infty^2}{\gamma-1} \rightarrow c^2 = c_\infty^2 - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_\infty\|^2}{2}\right)(\gamma-1)$$

$$\Rightarrow \frac{c^2}{c_\infty^2} = 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_\infty\|^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{\rho/\rho_\infty = \left[1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\|\vec{V}\|^2 - \|\vec{V}_\infty\|^2}{2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} \quad (4)$$

Osserviamo che:

• $\vec{V}_\infty = V_\infty \hat{i} \Rightarrow \|\vec{V}_\infty\|^2 = V_\infty^2$

• $\|\vec{V}\|^2 = \|\vec{V}_\infty \hat{i} + V_\infty \nabla \varphi\|^2 = V_\infty^2 \|\hat{i} + \nabla \varphi\|^2 = V_\infty^2 \|\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k}\|^2 =$

$$\stackrel{(2)}{=} V_\infty^2 \left\| \left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right\|^2 =$$

$$= V_\infty^2 \left[\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] =$$

$$= V_\infty^2 \left[1 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right]$$

$u^2 + v^2 + w^2 \rightarrow$ trascurabili per ipotesi di piccole perturbazioni

$$\Rightarrow \boxed{\|\vec{V}\|^2 \approx V_\infty^2 \left(1 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)} \quad (5)$$

Allora:

$$\rho/\rho_\infty = \left\{ 1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{V_\infty^2}{2} \left(1 + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right) - \frac{V_\infty^2}{2} \right] \right\}^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\rho/\rho_\infty = \left[1 - \frac{\gamma-1}{c_\infty^2} \left(V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 - \frac{\gamma-1}{V_\infty^2} M_\infty^2 \left(V_\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1 - (\gamma-1) M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Per piccole perturbazioni:

$$f(x) = (1+x)^\beta \approx 1 + \alpha \beta \Rightarrow \rho/\rho_\infty \approx 1 - (\gamma-1) M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{1}{\gamma-1} = 1 - M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$$

$$-\rho_{\infty} \frac{M_{\infty}^2}{V_{\infty}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\rho_{\infty} M_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \rho_{\infty} V_{\infty} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) - \rho_{\infty} V_{\infty} M_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

Dividendo per $\rho_{\infty} V_{\infty}$:

$$-\frac{M_{\infty}^2}{V_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2 \frac{M_{\infty}^2}{V_{\infty}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - M_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

$$(1 - M_{\infty}^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_{\infty}^2 \left(\frac{1}{V_{\infty}^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_{\infty}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)$$

EQUAZIONE DEL POTENZIALE LINEARIZZATA

Cerchiamo ora di scrivere e una formulazione più compatta, facendo uso delle derivate portanti:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (V_{\infty} \hat{i} + V_{\infty} \nabla \varphi) \cdot \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \left(\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \left[\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \left[\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2}_{\substack{u^2 + v^2 + w^2 \rightarrow \text{trascurabili} \\ \text{perché } u, v, w \ll 1}} \right]$$

$u^2 + v^2 + w^2 \rightarrow$ trascurabili perché $u, v, w \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{D\varphi}{Dt} \approx \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{D^2 \varphi}{Dt^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{D\varphi}{Dt} \right) + \vec{v} \cdot \nabla \left(\frac{D\varphi}{Dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + (V_{\infty} \hat{i} + V_{\infty} \nabla \varphi) \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_{\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) =$$

$$= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \left[\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \hat{k} \right] \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) \hat{k} \right] =$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \left[\left(1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) \right] =$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) \right] +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} + V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \right) \approx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{D^2 \varphi}{Dt^2} \approx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2V_{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_{\infty}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

AMBITO VALIDITA' EQUAZIONE DEL POTENZIALE LINEARIZZATA

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D^2 \varphi}{Dt^2} = 0$$

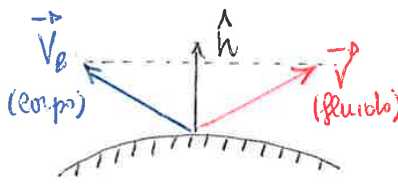
- piccole perturbazioni $\rightarrow u, v, w \ll 1$
- l'introduzione dell'ipotesi di fluido ideale restringe il campo di applicazione ai corpi di moto con Re elevati.
 \rightarrow gli effetti legati alla viscosità sono confinati nello strato limite e nella scia, entrambi molto sottili.
 In tutto il resto del campo di moto è possibile trascurare gli effetti della viscosità.
- $0 < M_\infty < 0.8 \rightarrow$ regime subsonico V
 $0.8 < M_\infty < 1.2 \rightarrow$ l'espressione del potenziale ricavata non va bene e occorrerebbe approssimare dei termini (dunque non) non lineare
 $M_\infty > 1.2 \rightarrow$ se viti deboli, la rotazionalità o velle dell'urto è contenuta e la teoria fornisce risultati accettabili
 se viti forti, flusso rotazionale e non è possibile utilizzare l'equazione

CONDIZIONI AL CONTORNO

Nel caso stazionario overano:

- CONDIZIONE IN CAMPO LONTANO $\rightarrow \vec{V}_\infty = \nabla \varphi_\infty$
- CONDIZIONE AL BORDO \rightarrow condizione di tangenza sulla superficie del corpo
 $\rightarrow \vec{V} \cdot \vec{n} = 0$

In tal caso può accadere e che fare con un corpo che si muove e si deforma, per cui la condizione al bordo può essere risolta come:



$$\rightarrow \begin{cases} V_{Bn} = \vec{V}_B \cdot \hat{n} \\ V_m = \vec{V} \cdot \hat{n} \end{cases} \rightarrow \boxed{V_m = V_{Bn}} \quad \theta \quad \boxed{\vec{V} \cdot \hat{n} = \vec{V}_B \cdot \hat{n}}$$

Riconducendo che:

$$\vec{V} = V_\infty \hat{i} + V_\infty \nabla \varphi = V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi) \Rightarrow \boxed{V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi) \cdot \hat{n} = \vec{V}_B \cdot \hat{n}} \quad \text{condizione di tangenza nel caso non stazionario}$$

La condizione in campo lontano sarà:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi = \varphi_\infty = 0}, \text{ infatti } \lim_{x \rightarrow \infty} \vec{V} = \lim_{x \rightarrow \infty} \nabla \Phi = \lim_{x \rightarrow \infty} \nabla (\varphi_\infty + V_\infty \varphi) = \vec{V}_\infty$$

Riconoscendo che $\vec{x}(\varphi, \eta, t) = \vec{x}_a(\varphi, \eta) + \vec{u}(\varphi, \eta, t)$, sostituiamo in \vec{m} :

$$\vec{m} = \frac{\partial \vec{x} / \partial \varphi \wedge \partial \vec{x} / \partial \eta}{\| \partial \vec{x} / \partial \varphi \wedge \partial \vec{x} / \partial \eta \|} = \frac{(\partial \vec{x}_a / \partial \varphi + \partial \vec{u} / \partial \varphi) \wedge (\partial \vec{x}_a / \partial \eta + \partial \vec{u} / \partial \eta)}{\| (\partial \vec{x}_a / \partial \varphi + \partial \vec{u} / \partial \varphi) \wedge (\partial \vec{x}_a / \partial \eta + \partial \vec{u} / \partial \eta) \|} = \vec{m}(\varphi, \eta, t)$$

Riorganizzando opportunamente la formula possiamo scrivere che:

$$\vec{m}^p = \vec{m}_0 (1 + \vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}$$

dove:

$$\vec{m}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \eta}}{\| \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \eta} \|} = \vec{m}_0(\varphi, \eta) \quad \text{è legato alle superficie di riferimento stazionarie}$$

$$\Delta \vec{m} = \frac{\frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{u}}{\partial \eta} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \eta}}{\| \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{x}_a}{\partial \eta} \|} = \Delta \vec{m}(\varphi, \eta, t) \quad \text{è legato alle deformazione della superficie nel tempo}$$

Riprendiamo la condizione di tangenza:

$$V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi) \cdot \vec{m}^p = \vec{u} \cdot \vec{m}^p \quad \text{con} \quad \vec{m}^p = \vec{m}_0 (1 + \vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}$$

$$\vec{m}^p = \vec{m}(\varphi, \eta, t); \quad \vec{m}_0 = \vec{m}_0(\varphi, \eta); \quad \Delta \vec{m} = \Delta \vec{m}(\varphi, \eta, t)$$

Perché $\|\vec{u}\| \ll L$ per l'ipotesi delle piccole perturbazioni, anche per il potenziale di perturbazione possiamo evidenziare un contributo stazionario e uno non stazionario.

$\varphi = \varphi_s + \varphi_i$, dove $\varphi = \varphi(\vec{x}, t)$; $\varphi_s = \varphi_s(\vec{x})$; $\varphi_i = \varphi_i(\vec{x}, t)$
e con \vec{x} questa volta si individua la generica posizione all'interno del campo fluido.

$$\Rightarrow V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s + \nabla \varphi_i) \cdot \vec{m} = \vec{u} \cdot \vec{m}$$

$$V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \cdot \vec{m}_0 + V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \cdot [\vec{m}_0 (\vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}] + V_\infty \nabla \varphi_i \cdot \vec{m}_0 +$$

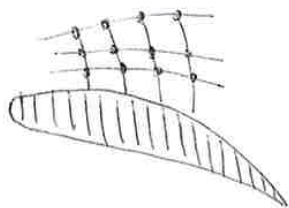
$$+ V_\infty \nabla \varphi_i \cdot [\vec{m}_0 (\vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}] = \vec{u} \cdot \vec{m}_0 + \vec{u} \cdot [\vec{m}_0 (\vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}]$$

I termini trascurati sono di ordine superiore rispetto al tempo, perché contemporaneamente prodotti tra $\nabla \varphi_i$ e $\Delta \vec{m}$ o tra \vec{u} e $\Delta \vec{m}$.

$$\Rightarrow V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \cdot \vec{m}_0 + V_\infty (\hat{i} + \nabla \varphi_s) \cdot [\vec{m}_0 (\vec{m}_0 \cdot \Delta \vec{m}) - \Delta \vec{m}] + V_\infty \nabla \varphi_i \cdot \vec{m}_0 = \vec{u} \cdot \vec{m}_0$$

METODO DELLE DIFFERENZE FINITE

Tale metodo, sebbene fornisca risultati sufficientemente precisi, è caratterizzato da un elevato costo computazionale.



Con tale metodo si colloca l'equazione differenziale $\nabla^2 \phi - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D^2 \phi}{Dt^2} = 0$ in ogni nodo della griglia.

⇒ si ottiene un sistema lineare con un numero di incognite pari al numero dei nodi di griglia.

Le derivate del potenziale possono essere approssimate con formule centrate, del tipo:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(i, j) = \frac{\phi(x_{i+1}, y_j) - \phi(x_{i-1}, y_j)}{2 \Delta x} \quad \rightarrow \text{analogamente per le altre derivate}$$

Il metodo porta a caratterizzare l'intero campo di moto del nostro corpo portante, cosa che non interviene nell'ala elastica, che ha lo scopo di determinare i carichi aerodinamici agenti sulla struttura.

Tale approccio risulta dunque poco interessante, per cui si analizzeremo più nel dettaglio altri metodi.

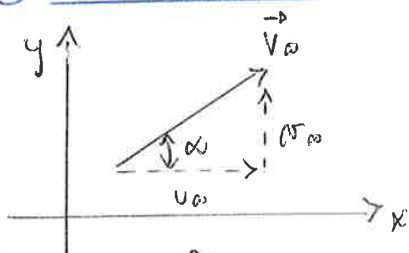
METODO DELLE SINGOLARITÀ VIRTUALI

Può essere utilizzato per risolvere l'equazione di Laplace $\nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow$ caso incomprimibile, irrotazionale, fluido ideale ma non necessariamente stazionario.

Poiché l'equazione di Laplace è lineare, è possibile utilizzare la sovrapposizione degli effetti per studiare il campo di moto attorno alla nostra superficie portante, sommando i campi elementari di cui si conosce già la soluzione di Laplace.

L'incognita del problema è rappresentata dall'intensità di tali singolarità, che viene determinata attraverso le condizioni al contorno.

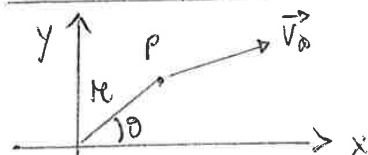
① CORRENTE UNIFORME



$$\vec{V}_\infty = U_\infty \hat{i} + V_\infty \hat{j} = V_\infty \cos \alpha \hat{i} + V_\infty \sin \alpha \hat{j}$$

$$\Phi_\infty = U_\infty x + V_\infty y \quad \text{infatti} \quad \vec{V}_\infty = \nabla \Phi_\infty = V_\infty \hat{i} + V_\infty \hat{j}$$

Coordinate polari:



$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

METODO SINGOLARITÀ

Abbiamo visto che l'equazione:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

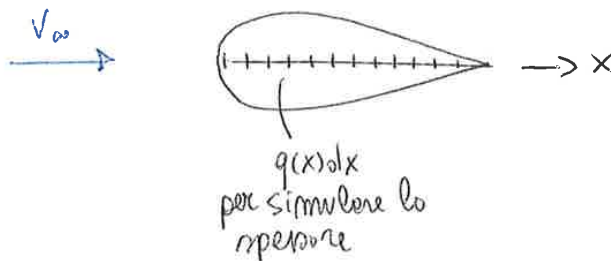
può essere risolta sfruttando il principio di sovrapposizione degli effetti, determinando un campo di moto più complesso attraverso la sovrapposizione di campi semplici. Il limite di tale metodo è che non riesce facilmente a studiare il campo di moto attorno a corpi complessi.

⇒ distribuzione di singolarità lungo la corda per lo studio del campo di moto attorno a un profilo alare.

PROFILLO SIMMETRICO

$$\alpha = 0^\circ$$

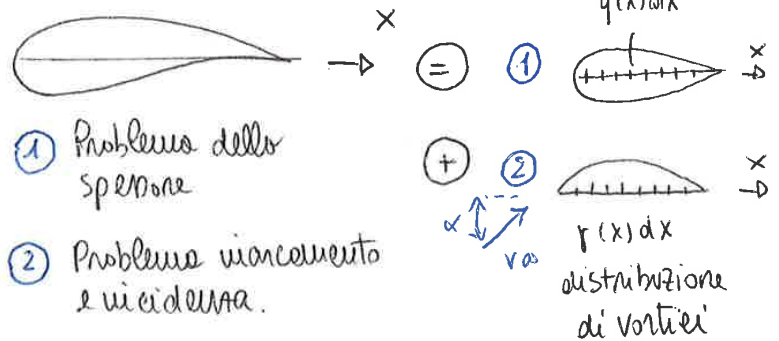
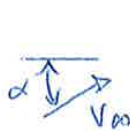
(bordo incidente e piccoli spessori)



PROFILLO INARCATO

$$\alpha \neq 0^\circ$$

(bordo incidente, piccoli spessori e incamments)



Riconosciamo che:

SORGENTE/POZZO: $\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$

VORTICE: $\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$

Per distribuzioni si ha allora che:

$$\Phi_s = \frac{1}{2\pi} \int_a^b q(x) \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) dx$$

$$\Phi_v = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \gamma(x) \theta dx$$

Per il problema ② è necessario soddisfare la CONDIZIONE DI KUTTA, per garantire la regolarità del flusso al bordo di fuga. Questa permette anche di determinare il valore di Γ giusto tra le infinite possibilità.

Ne punto di accostamento, inizialmente posizionato nel dorso del profilo, si sposta verso il bordo di fuga, generando un VORTICE ADERENTE. Lo scoppio dei due vortici termina quando il bordo di fuga si muove a una costante velocità, poi lo STARTING VORTEX si allontana verso valle.

Torniamo al nostro problema:

posizionando le singolarità lungo la corda del profilo, non teniamo in conto gli effetti della spessore nel calcolo del C_L e del C_M .

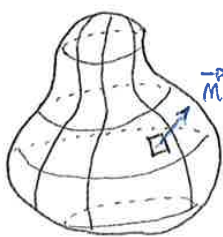
⇒ distribuiamo le singolarità lungo la superficie del profilo, in modo da tenere in conto dello spessore.



discretizzazione superficie attraverso panelli, su cui vengono posizionate le singolarità. In alcune opportune condizioni al contorno è possibile determinare il campo di moto attorno al profilo.

Per fare ciò, dobbiamo estendere il metodo delle singolarità visto in precedenza

METODO DELLA FUNZIONE DI GREEN



Ω dominio che racchiude il corpo

Γ superficie

Vogliamo risolvere l'equazione di Laplace nel caso incomprimibile:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \nabla \Phi \cdot \vec{n} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{PROBLEMA ESTERNO} \\ \text{DI NEUMANN} \end{array}$$

Abbiamo visto che la condizione al contorno è differente a seconda del fatto che la superficie del corpo sia ferma o in movimento. Un generale scriviamo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = f(\vec{r}) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dove } \vec{r} \in \Gamma \\ \vec{r}_0 \in \Omega \end{array}$$

È possibile riformulare la scrittura del problema in questo modo:

$$\nabla^2 \Phi = g(\vec{r}) \quad \text{EQUAZIONE DI POISSON}$$

La soluzione al problema esterno di Neumann rivela essere:

$$\Phi(\vec{r}_0) = \int_{\Omega} G(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) d\Omega + \Phi(\vec{r}_0)|_{c.c.}$$

condizione sulla sola superficie Γ .

Sostituiremo nell'integrale:

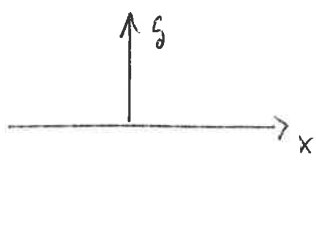
$$\int_{\Omega} [\nabla \cdot (g \nabla \Phi) - \nabla g \cdot \nabla \Phi - \nabla \cdot (\Phi \nabla g) + \nabla \Phi \cdot \nabla g] d\Omega = \int_{\Omega} [g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (g \nabla \Phi - \Phi \nabla g) d\Omega = \int_{\sigma} (g \nabla \Phi - \Phi \nabla g) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} [g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] d\Omega$$

$$\int_{\sigma} (g \nabla \Phi \cdot \vec{n} - \Phi \nabla g \cdot \vec{n}) d\sigma = \int_{\sigma} (g \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial g}{\partial n}) d\sigma = \int_{\Omega} [g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] d\Omega$$

Amplizzando il secondo membro:

$$\int_{\Omega} [g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] d\Omega = \int_{\Omega} g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) d\Omega - \int_{\Omega} \Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d\Omega$$



$$\int \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 1 & \text{se } x_0 \in I \\ 0 & \text{se } x_0 \notin I \end{cases} \Rightarrow \int_{\Omega} \Phi(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d\Omega = \Phi(\vec{r}_0)$$

Allora:

$$\int_{\Omega} [g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) - \Phi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)] d\Omega = \int_{\Omega} g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) d\Omega - \Phi(\vec{r}_0)$$

Per cui:

$$\int_{\sigma} (g \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \Phi \frac{\partial g}{\partial n}) d\sigma = \int_{\Omega} g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) d\Omega - \Phi(\vec{r}_0)$$

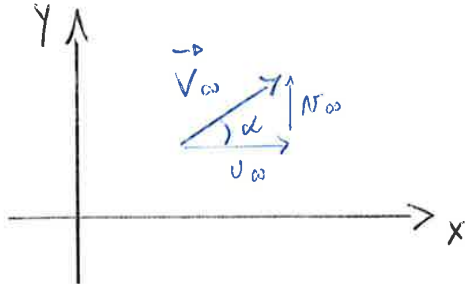
$$\Phi(\vec{r}_0) = \underbrace{\int_{\Omega} g(\vec{r}, \vec{r}_0) g(\vec{r}) d\Omega}_{\textcircled{I}} + \underbrace{\int_{\sigma} (-g \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \Phi \frac{\partial g}{\partial n}) d\sigma}_{\textcircled{II} \equiv \Phi(\vec{r}_0)|_{cc}}$$

Risulta allora possibile valutare il potenziale Φ in un qualunque punto del dominio Ω , data una distribuzione qualunque di singolarità.
Nell'implementazione del metodo dei momenti, peseremo Φ nel generico punto \vec{r}_0 in questo modo:

Sfruttando la linearità dell'equazione del potenziale:

$$\Phi(\vec{r}_0) = \Phi_\infty(\vec{r}_0) + \Phi_s(\vec{r}_0) + \Phi_v(\vec{r}_0)$$

CORRENTE UNIFORME



$$\vec{V}_\infty = U_\infty \hat{i} + N_\infty \hat{j} \quad \text{con} \quad U_\infty = V_\infty \cos \alpha$$

$$N_\infty = V_\infty \sin \alpha$$

$$\vec{V}_\infty = V_\infty (\cos \alpha \hat{i} + \sin \alpha \hat{j})$$

$$\Phi_\infty = U_\infty x + N_\infty y = V_\infty (\cos \alpha x + \sin \alpha y)$$

SORGENTE

$$\Phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \vec{r} \rightarrow \text{per una distribuzione:}$$

$$\Phi_s(\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_G q(z) \ln(\vec{r} - \vec{r}_0) d\sigma$$

VORTICE

$$\Phi = \frac{\Gamma \theta}{2\pi} \rightarrow \text{per una distribuzione:}$$

$$\Phi_v(\vec{r}_0) = - \int_G \frac{1}{2\pi} \gamma(z) \theta d\sigma = - \frac{1}{2\pi} \int \gamma(z) \theta d\sigma$$

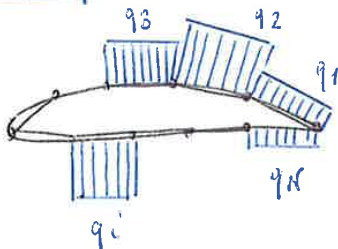
con $\Gamma > 0$ in senso antiorario

il segno '-' deriva dal fatto che per una distribuzione di vortici $\gamma(z) > 0$ in senso orario.

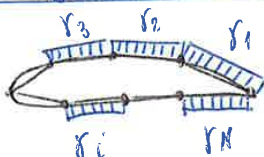
Per il momento non siamo in grado di valutare i vari contributi al potenziale, perché l'intensità delle singolarità è incognita.

Si procede allora nel seguente modo:

- su ogni pannello i -esimo $q_i = \text{cost}$ e in generale $q_i \neq q_j$ se $i \neq j$



- per le singolarità di tipo vortice $\gamma_i = \gamma_j = \gamma \forall i, j$



Ripetiamo che:

$q_j u_{ij}^{(S)}$ \rightarrow componente di velocità nella direzione x indotta nel punto di controllo c_i del pannello i -esimo dalla distribuzione di singolarità di tipo sorgente disposte nel pannello j -esimo, di intensità q_j .

Analogamente per gli altri termini.

I coefficienti $u_{ij}^{(S)}, \sigma_{ij}^{(S)}, u_{ij}^{(V)}, \sigma_{ij}^{(V)}$ sono detti COEFFICIENTI DI INFLUENZA. Ad esempio:

$u_{ij}^{(S)}$ \rightarrow componente di velocità indotta (in direzione x) nel punto di controllo c_i del pannello i -esimo dalla distribuzione di singolarità di tipo sorgente disposte nel pannello j -esimo, di intensità unitarie.

Analogamente per gli altri coefficienti di influenza.

I coefficienti di influenza dipendono esclusivamente da parametri geometrici e possono essere scritti esplicitamente in funzione della distanza tra i punti di controllo di un pannello e dell'altro.

Definite la forma del profilo e la discretizzazione in pannelli, si calcolano esplicitamente.

Teniamo in fine conto che:

$$\vec{m}_i = m_{xi} \hat{i} + m_{yi} \hat{j}$$

$$\vec{V}_i = u_i \hat{i} + \sigma_i \hat{j}$$

Per cui, si ha che:

$$\vec{V}_i \cdot \vec{m}_i = u_i m_{xi} + \sigma_i m_{yi} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, NH$$

$$\Rightarrow V_{\infty} \cos \alpha m_{xi} + \sum_{j=1}^{NH} q_j u_{ij}^{(S)} m_{xi} + \gamma \sum_{j=1}^{NH} u_{ij}^{(V)} m_{xi} + V_{\infty} \sin \alpha m_{yi} + \sum_{j=1}^{NH} q_j \sigma_{ij}^{(S)} m_{yi} + \gamma \sum_{j=1}^{NH} \sigma_{ij}^{(V)} m_{yi} = 0$$

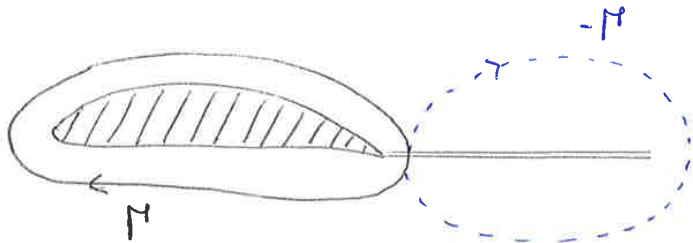
$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{NH} q_j (u_{ij}^{(S)} m_{xi} + \sigma_{ij}^{(S)} m_{yi}) + \gamma \sum_{j=1}^{NH} (u_{ij}^{(V)} m_{xi} + \sigma_{ij}^{(V)} m_{yi}) = -V_{\infty} \cos \alpha m_{xi} - V_{\infty} \sin \alpha m_{yi}$$

METODO DI MORINO - CASO STAZIONARIO

Il metodo di Morino è un metodo DIRETTO, in cui l'incognita primaria è Φ .
 In tal caso, nella discretizzazione mediante pannelli della superficie portante in esame, si utilizzano distribuzioni di singolarità di tipo sorgente - pozzo e di tipo doppietta.

Il metodo può essere applicato sia al caso 2D che 3D.

Consideriamo il caso 2D, ricordando che affinché la circolazione globale risulti nulla nel campo di moto, alla circolazione attorno al profilo se ne deve opporre una uguale e opposta nella piega.



→ la superficie vortice è anche una superficie di corrente

Osservazioni:

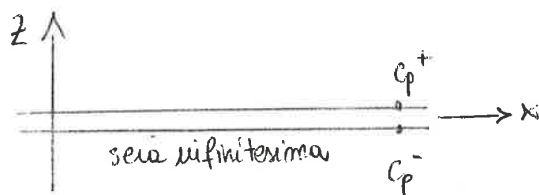
- 1) VELOCITÀ NORMALE ALLA SCIA NULLA → $V_{n|SCIA} = 0$ ⇒ Superficie vortice e di corrente
- 2) SUPERFICIE VORTICOSA LIBERA → $\Delta p = 0$ ⇒ $\Delta c_p|_{SCIA} = 0$
- 3) STAZIONARIETÀ

nell'ambito della teoria linearizzata:

$$c_p = -\frac{2}{V_\infty} \frac{D\phi}{Dt}, \quad \text{con} \quad \frac{D\phi}{Dt} \approx \frac{\partial\phi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial\phi}{\partial x} \Rightarrow c_p = -\frac{2}{V_\infty} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)$$

$$\Rightarrow c_p = -2 \frac{\partial\phi}{\partial x}$$

Allora:



$$\Rightarrow \Delta c_p|_{SCIA} = c_p^+ - c_p^- = \Delta \left(-2 \frac{\partial\phi_s}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial}{\partial x} (\Delta\phi_s) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\phi_s = \text{cost lungo } x$$

Se considerassimo un caso tridimensionale, prendendo una sezione dove ad una determinata y , sappiamo che $\Delta\phi_s$ non varia lungo x ma non neppure lungo y .

Per quanto riguarda il caso stazionario, possiamo distinguere il caso incomprimibile da quello comprimibile.

Riconducendo l'eq. del potenziale linearizzata:

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = M_\infty^2 \left(\frac{1}{V_\infty^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{2}{V_\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} \right)$$

◦ COMPRESSIBILE STAZIONARIO

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

◦ CASO INCOMPRESSIBILE STAZIONARIO

$$C_\infty \rightarrow 1 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2 \varphi = 0}$$

Osserviamo che, poiché $M_\infty^2 \rightarrow 0$, non c'è formalmente differenza nell'equazione da risolvere per il caso incomprimibile stazionario e non stazionario.

Ciò che cambia nei due casi sono le CONDIZIONI AL CONFINAMENTO.

Per il caso comprimibile stazionario si può operare un cambio di variabili suggerito da Prandtl-Glauert:

$$X = \frac{x}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}, \quad Y = y, \quad Z = z \Rightarrow \boxed{\tilde{\nabla}^2 \varphi = 0}$$

$$\text{dove ora } \tilde{\nabla}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial X} \hat{i} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial Y} \hat{j} + \frac{\partial(\cdot)}{\partial Z} \hat{k}$$

Il metodo di Morino fa uso della funzione di Green introdotta qualche lezione fa. Richiedendo il problema di Neumann esterno, osserviamo che $g(\vec{r}_0) = 0$ poiché non è presente alcuna funzione sorgente.

Possiamo allora determinare la soluzione del problema di Neumann esterno nel seguente modo:

$$\begin{cases} \nabla^2 \varphi = 0 & \text{in } G & (1) \\ \nabla^2 g = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) & \text{in } G & (2) \end{cases} \rightarrow (2) - (1): \boxed{\varphi \nabla^2 g - g \nabla^2 \varphi = \varphi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)}$$

Ymoltre:

$$\Rightarrow \int_{S_W} (\varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds = \int_{S_{WU}} (\varphi \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds + \int_{S_{WL}} (\varphi \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds$$

Allora:

$$\int_{S_W} (\varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds = \int_{S_{WU}} (\varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds + \int_{S_{WL}} (\varphi_l \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds = \int_{S_{WU}} \varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} ds - \int_{S_{WU}} g \frac{\partial \varphi}{\partial m} ds - \int_{S_{WL}} \varphi_l \frac{\partial g}{\partial m} ds + \int_{S_{WL}} g \frac{\partial \varphi}{\partial m} ds$$

$$\Rightarrow \int_{S_W} (\varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds = \int_{S_W} \varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} ds - \int_{S_W} \varphi_l \frac{\partial g}{\partial m} ds = \int_{S_W} (\varphi_u - \varphi_l) \frac{\partial g}{\partial m} ds = \int_{S_W} \Delta \varphi_{BF} \frac{\partial g}{\partial m} ds$$

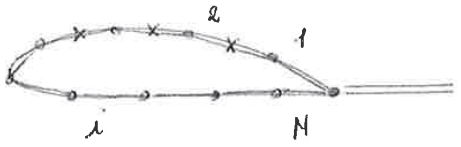
$\Delta \varphi_s = \Delta \varphi_{BF} = \varphi_l - \varphi_u$

Per cui:

$$\frac{1}{2} \varphi(\vec{r}_0) = \int_{S_B} (\varphi_u \frac{\partial g}{\partial m} - g \frac{\partial \varphi}{\partial m}) ds + \Delta \varphi_{BF} \int_{S_W} \frac{\partial g}{\partial m} ds$$

equazione integro-differenziale

Discretizzando attraverso pannelli il corpo e la scia:



Collocando l'equazione nel punto di controllo di ciascun pannello si ottiene:

$$\frac{1}{2} \varphi_i = \sum_{k=1}^N \int_{S_{Bk}} (\varphi_k \frac{\partial g}{\partial m_k} - g \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_k}) ds + \sum_{k=1}^{N_W} \int_{S_{Wk}} \Delta \varphi_{BF} \frac{\partial g}{\partial m_k} ds$$

Se il numero di pannelli con cui si discretizza il corpo è elevato e dunque la dimensione dei pannelli è ridotta, è possibile considerare:

$\varphi_k \approx \text{cost}$, $\frac{\partial \varphi_k}{\partial m_k} \approx \text{cost}$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \varphi_i = \sum_{k=1}^N \varphi_k \int_{S_{Bk}} \frac{\partial g}{\partial m_k} ds - \sum_{k=1}^N \frac{\partial \varphi_k}{\partial m_k} \int_{S_{Bk}} g ds + \sum_{k=1}^{N_W} \Delta \varphi_{BF} \int_{S_{Wk}} \frac{\partial g}{\partial m_k} ds$$

Omowazioni:

•) $[D] = \underbrace{[D_B]}_{\text{corpo}} + \underbrace{[D_W]}_{\text{scia}}$ con $D_{Bik} = \int_{S_{Bk}} \frac{\partial G}{\partial m_k} ds$ con $G = G(\vec{r}_i, \vec{r}_k)$

Considerando il caso 3D:

$$D_{Wik} = \int_{S_{Wk}} \frac{\partial G}{\partial m_k} ds$$

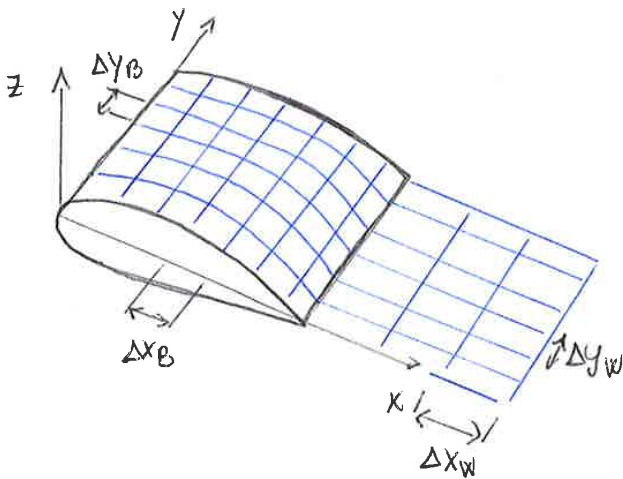
$$G = -\frac{1}{4\pi R}, \text{ con } R = |\vec{r}_i - \vec{r}_k|$$

Allora:

$$D_{Bin} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{Bk}} \frac{\partial}{\partial m_k} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} \right) ds$$

$$D_{Wik} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_{Wk}} \frac{\partial}{\partial m_k} \left(\frac{1}{\sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2}} \right) ds$$

•) Discretizzazione corpo e scia



Generalmente si ha che:

CORPO

- ~ 100 pannelli in direzione x
 - lungo y occorre valutare la tridimensionalità del corpo di modo che si viene a generare.
- In prima approssimazione:

$$\Delta x_B \sim \Delta y_B$$

SCIA

est. lungo x
↓

Riconoscendo che $\Delta s_B = \text{cost}$ → potremmo pensare di discretizzare la scia con un solo pannello.

In genere si utilizza un numero di pannelli ridotto rispetto a quelli utilizzati sul corpo → nello scia ~ 10 pannelli, mentre $\Delta y_B \sim \Delta y_W$.

METODO DI MORINO - CASO NON STAZIONARIO

2 principali motivi per cui un campo di moto può considerarsi non stazionario sono:

- ① tempo di ritardo o di propagazione T fra l'istante di emissione t_1 e l'istante di ricezione t o cause della velocità finita del suono.

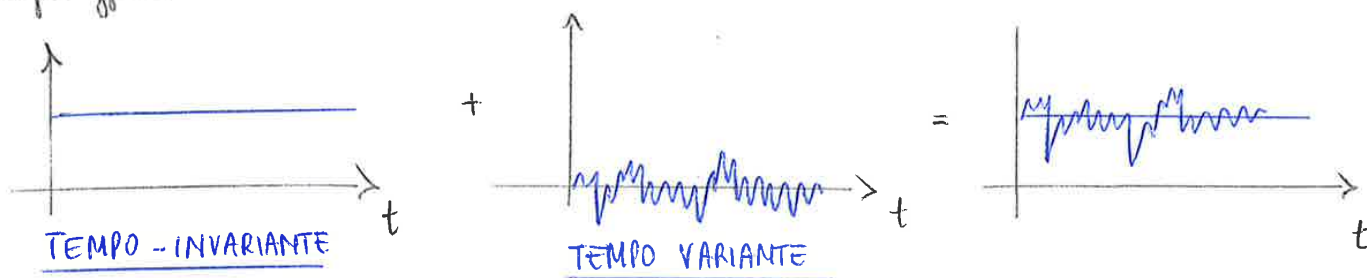
P_1
• (x_1, y_1, z_1)
DISTURBO

P
• (x, y, z)
GENERICO
PUNTO DEL CAMPO

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = \text{TEMPO DI EMISSIONE} \\ t = \text{TEMPO DI RICEZIONE} \\ T = t - t_1 = \text{TEMPO DI PROPAGAZIONE O RITARDO} \end{cases}$$

- ② condizioni al contorno variabili nel tempo, per effetto del fatto che il corpo si sposta e si deforma.

Per tal caso è possibile affrontare il problema utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti:

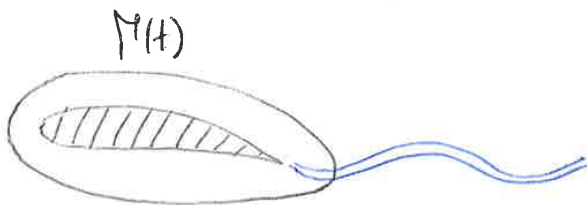


Per tal caso non è più vero che:

$$\Delta \varphi_s = \text{costante lungo } x \Leftrightarrow c_p = \cancel{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}$$

$$\Rightarrow \Delta \varphi_s \neq \Delta \varphi_{sf}$$

ciò accade perché nel caso non stazionario la scia tiene conto delle variazioni di Γ nel tempo:



Per affrontare il problema, l'espressione del potenziale linearizzata assume la forma:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dove nell'ambito delle piccole perturbazioni: } \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \approx \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + V_\infty \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} + V_\infty^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \frac{1}{c_\infty^2} \frac{D^2 G}{Dt^2} = \delta(\vec{x} - \vec{x}_0, t - t_0) \quad \text{nel piano non trasformato}$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{c_\infty} \frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = \delta(\vec{\xi} - \vec{\xi}_0, \tau - \tau_0) \quad \text{nel piano trasformato}$$

La soluzione dell'equazione è proprio la funzione di Green:

$$G(\vec{\xi}_0, \vec{\xi}_1, \tau, \tau_1) = \iiint \frac{\delta}{c} d\xi_1 d\eta_1 d\zeta_1 = -\frac{1}{4\pi c} \delta(\tau_1 - \tau + c/c_\infty) \quad \text{soluzione nel caso trasformato con non stazionario}$$

Confrontiamo la soluzione con quella ottenuta nel caso stazionario.

Per una sorgente 3D:

$$G(\vec{r}, \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi R} \rightarrow \text{La differenza risiede nel fatto che nel caso non stazionario è presente la funzione Delta di Dirac. La funzione Delta di Dirac si attiva quando il suo argomento si annulla} \Rightarrow \text{quando } \tau = \tau_1 + c/c_\infty$$

Allora:

- CASO STAZIONARIO \rightarrow la funzione di Green è sempre attiva
- CASO NON STAZIONARIO \rightarrow la funzione di Green si attiva quando $\tau = \tau_1 + \frac{c}{c_\infty}$

Nota la soluzione nel piano trasformato occorre tornare indietro per trovare la soluzione di partenza. Allora, la trasformazione galileiana diretta può anche essere scritta come:

come:

$$\begin{cases} x - x_1 = \xi - \xi_1 + V_\infty (\tau - \tau_1) \\ y - y_1 = \eta - \eta_1 \\ z - z_1 = \zeta - \zeta_1 \\ t - t_1 = \tau - \tau_1 = T = c/c_\infty \end{cases} \quad \text{con il pedice 1 si indicano le grandezze associate alla sorgente.}$$

Per cui:

$$\begin{cases} x - x_1 = \xi - \xi_1 + \frac{V_\infty}{c_\infty} c = \xi - \xi_1 + M_\infty c \\ y - y_1 = \eta - \eta_1 \\ z - z_1 = \zeta - \zeta_1 \\ t - t_1 = \tau - \tau_1 = c/c_\infty \end{cases}$$

TRASFORMAZIONE GALILEIANA INVERSA

Invertendo le relazioni precedenti e ricorrendo la definizione di e si ottiene:

$$\begin{cases} \xi - \xi_1 = \frac{1}{1-M_\infty^2} (x-x_1 \pm M_\infty \hat{r}) \\ \eta - \eta_1 = y-y_1 \\ \zeta - \zeta_1 = z-z_1 \\ \tau - \tau_1 = \frac{e}{c_\infty} = \frac{1}{c_\infty} \left| \frac{1}{1-M_\infty^2} \left[\hat{r} \pm M_\infty (x-x_1) \right] \right| \end{cases}$$

dove:

$$\hat{r} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (1-M_\infty^2)[(y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]}$$

distanza modificata tra P e P₁ nel piano non trasformato.

$$e = \left| \frac{1}{1-M_\infty^2} \left[\hat{r} \pm M_\infty (x-x_1) \right] \right|$$

perché qualunque sia il Mach e il segno considerato e deve sempre essere > 0 .

La scelta tra il segno $+$ e $-$ dipende dal fatto che ci troviamo nel caso subsonico o ipersonico.

CASO SUBSONICO ($M_\infty < 1$)

Poniamo $\hat{r} = r_B$, ovvero la distanza dal punto sulla superficie del corpo.

Poiché $M_\infty < 1 \Rightarrow r_B = \sqrt{(x-x_1)^2 + (1-M_\infty^2)[(y-y_1)^2 + (z-z_1)^2]} > (x-x_1) \Rightarrow r_B > M_\infty(x-x_1)$

Se ciò è vero, si ha che:

$$e = \left| \frac{1}{1-M_\infty^2} [r_B \pm M_\infty(x-x_1)] \right| = \frac{1}{1-M_\infty^2} [r_B \pm M_\infty(x-x_1)]$$

nel caso subsonico il modulo non serve perché la quantità è sempre positiva

$$e = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$$

Prendendo le relazioni sopra scritte e sostituendole nell'espressione di e , si osserva che le due espressioni sono uguali solamente se si sceglie il segno meno.

\Rightarrow CASO SUBSONICO:

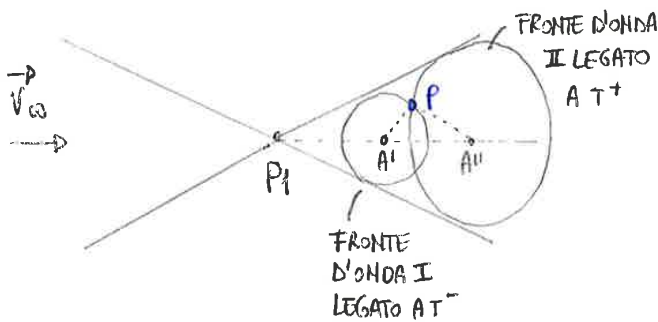
$$e = \frac{1}{1-M_\infty^2} [r_B - M_\infty(x-x_1)] \Rightarrow T = \frac{e}{c_\infty}$$

ESISTE UN UNICO TEMPO DI RITARDO

La trasformazione galileiana inversa diventa:

$$\begin{cases} \varphi - \varphi_1 = \frac{1}{1 - M_\infty^2} (x - x_1 \pm M_\infty R_B) \\ \eta - \eta_1 = \gamma - \gamma_1 \\ \zeta - \zeta_1 = z - z_1 \\ \tau - \tau_1 = T^\pm = \frac{c}{c_\infty} = \frac{1}{c_\infty} \cdot \frac{1}{M_\infty^2 - 1} [M_\infty (x - x_1) \pm R_B] \Rightarrow \underline{\exists 2 \text{ tempi di ritardo}} \end{cases}$$

Confrontando il caso supersonico e quello subsonico:



A' → spostamento di P_1 trasportato dal vento al tempo T^-

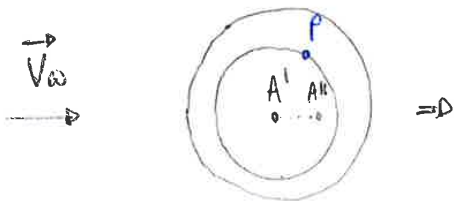
A'' → spostamento di P_1 al tempo T^+

$$\overline{P_1 A'} = V_\infty T^- \quad \overline{P A'} = c_\infty T^-$$

$$\overline{P_1 A''} = V_\infty T^+ \quad \overline{P A''} = c_\infty T^+$$

Se consideriamo un generico punto P del campo in cui vogliamo conoscere o valutare il potenziale di perturbazione, questo vede il fronte d'onda I al tempo T^- e poi il fronte d'onda II al tempo T^+ . Ecco spiegata l'esistenza di due tempi di ritardo.

Nel caso subsonico:



il punto P vede l'arrivo di un unico fronte d'onda

La soluzione nel piano x, y, z, t considerando il caso supersonico sarà:

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint \frac{Q(x_1, y_1, z_1, t - T^+) + Q(x_1, y_1, z_1, t - T^-)}{r_B} dx_1 dy_1 dz_1$$

$$G(\vec{x}_1, \vec{x}_2, t_1, t_2) = - \frac{1}{4\pi r_B} [\delta(t_1 - t + T^+) + \delta(t_1 - t + T^-)]$$

la sorgente si attiva per $t = t_2 + T^+$
 $t = t_2 + T^-$

Dobbiamo ora determinare φ sulla sola frontiera del nostro corpo, utilizzando il metodo della funzione di Green.

Per il caso stazionario ovvero ottenuto:

$$E(\vec{P}(\vec{r}_0)) = \int_S \left(\varphi \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) ds, \text{ dove } E = \begin{cases} 1 & \text{se punti esterni al corpo} \\ 1/2 & \text{se punti su sup. del corpo} \\ 0 & \text{se punti interni al corpo} \end{cases}$$

$$\frac{D}{Dt}(\Delta\tilde{\varphi}) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\tilde{\varphi}) + v_{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\tilde{\varphi}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\tilde{\varphi}) + v_{\infty} \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\tilde{\varphi}) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\Delta\tilde{\varphi}) + \frac{1}{v_{\infty}} \frac{\partial}{\partial t}(\Delta\tilde{\varphi}) = 0, \text{ sostituendo la soluzione esponenziale: } \Delta\tilde{\varphi} = \underbrace{\hat{\Delta\varphi}}_{\text{ampiezza}} e^{i\omega t}$$

Si ottiene:

$$e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial x}(\hat{\Delta\varphi}) + \frac{i\omega}{v_{\infty}} \hat{\Delta\varphi} e^{i\omega t} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\Delta\varphi}) = -\frac{i\omega}{v_{\infty}} \hat{\Delta\varphi}}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è:

$$\boxed{\hat{\Delta\varphi} = C e^{-\frac{i\omega}{v_{\infty}} x}} \Rightarrow \text{per } x = x_{BF} \Rightarrow \hat{\Delta\varphi} = \hat{\Delta\varphi}_{BF} \Rightarrow \hat{\Delta\varphi}_{BF} = C e^{-\frac{i\omega}{v_{\infty}} x_{BF}}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \hat{\Delta\varphi}_{BF} e^{\frac{i\omega}{v_{\infty}} x_{BF}}}$$

Allora:

$$\Delta\tilde{\varphi} = \hat{\Delta\varphi} e^{i\omega t} = \hat{\Delta\varphi}_{BF} e^{-\frac{i\omega}{v_{\infty}}(x-x_{BF})} e^{i\omega t}$$

Sostituendo la relazione ottenuta si ottiene:

$$E_{\text{att}} \tilde{\varphi} = \int_{S_B} \tilde{\varphi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{R_B} \right) dS - \int_{S_B} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{R_B} \right) dS + \int_{S_W} \hat{\Delta\varphi}_{BF} e^{-\frac{i\omega}{v_{\infty}}(x-x_{BF})} e^{i\omega t} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{R_B} \right) dS$$

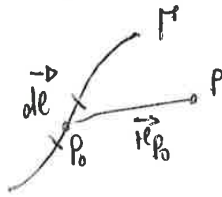
SOLUZIONE
 NON STAZIONARIA,
 CASO SUBSONICO,
 OSCILL. ARMONICHE
 LIBERE

Osserviamo che:

$$\Delta\tilde{\varphi} = \underbrace{\hat{\Delta\varphi}_{BF}}_{\text{termine analogo a caso stazionario}} e^{-\frac{i\omega}{v_{\infty}}(x-x_{BF})} e^{i\omega t}$$

termine legato al tempo di ritardo

Per fare ciò, ricorriamo alla LEGGE DI BIOT-SAVART:

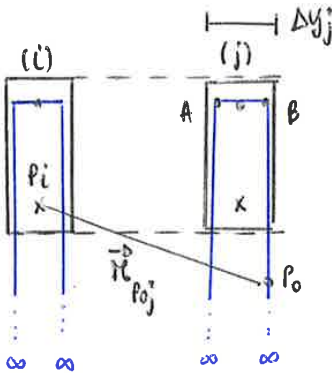


filamento
virtuale

$$d\vec{v}(P) = \frac{1}{4\pi} \frac{dl \times \vec{r}_{P_0}}{\|\vec{r}_{P_0}\|^3}$$

velocità indotta nel punto P da un tratto dl di filamento virtuale di intensità I.

Applicando la legge allo schema vitandotto:



$\vec{v}^j(P_i)$ = vel. indotta nel cp del pannello i-esimo dal vertice o staffa del pannello j-esimo

$$\vec{v}^j(P_i) = I_j \vec{v}_{ij}^j$$

$$\vec{v}_{ij}^j = \frac{1}{4\pi} \int \frac{dl \times \vec{r}_{P_0}}{\|\vec{r}_{P_0}\|^3} = \frac{1}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^A \frac{dl \times \vec{r}_{P_0}}{\|\vec{r}_{P_0}\|^3} + \int_A^B \frac{dl \times \vec{r}_{P_0}}{\|\vec{r}_{P_0}\|^3} + \int_B^{\infty} \frac{dl \times \vec{r}_{P_0}}{\|\vec{r}_{P_0}\|^3} \right]$$

con \vec{v}_{ij}^j = vel. indotta nel cp del pannello i da un vertice o staffa di intensità unitaria posizionato nel pannello j

La velocità indotta da tutti i vertici e staffe posizionati sui pannelli j nel punto di controllo del pannello i si ottiene dalla sovraposizione degli effetti:

$$\vec{v}^D(P_i) = \sum_{j=1}^N I_j \vec{v}_{ij}^D$$

Per determinare l'intensità I_j su ogni pannello, che è incognita, si sfrutta la condizione di tangenza:

$$\vec{v}_i \cdot \vec{m}_i = 0 \Rightarrow [\vec{v}_{\infty}^D + \vec{v}^D(P_i)] \cdot \vec{m}_i = 0 \Rightarrow \left[\vec{v}_{\infty}^D + \sum_{j=1}^N I_j \vec{v}_{ij}^D \right] \cdot \vec{m}_i = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, N$$

=> è possibile calcolare le I_j .

Per cui:

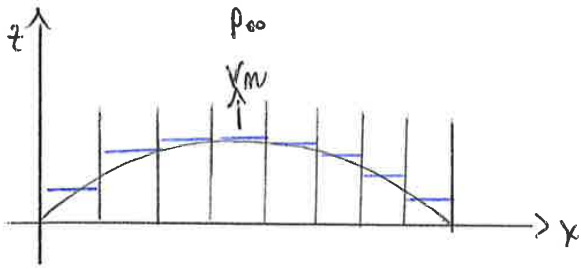
$$L_j = \rho_{\infty} v_{\infty} I_j \Delta y_j \quad \text{dal teorema di Kutta-Joukowski} \Rightarrow L_{TOT} = \sum_{j=1}^N L_j$$

$$\alpha_j = -\frac{v^D(P_j)}{v_{\infty}} \quad \text{il '-' deriva dal fatto che l'axe z è verso l'alto e la vel. indotta verso il basso}$$

$$D_j = L_j \alpha_j \Rightarrow D_{TOT} = \sum_{j=1}^N D_j$$

PISTON THEORY

Metodo molto utilizzato per lo studio del flutter dei pannelli in regime supersonico, $2 < M_\infty < 4$.
 Considerando una sezione dell'ala:



La superficie viene schematizzata con pannelli che possono muoversi in alto e in basso con velocità V_m .
 Affinché il comportamento dei vari pistoncini sia indipendente, l'angolo di semiapertura del cono di Mach deve essere molto piccolo.

$\Rightarrow \mu = \arcsin\left(\frac{1}{M_\infty}\right) \Rightarrow$ limitazioni su M_∞ , che deve essere compreso tra 2 e 4.

A questo punto occorre valutare il Δp per ogni pistoncino:



utilizzando gli invarianti di Riemann:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_m}{c_\infty}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \rightarrow \text{nel caso specifico}$$

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} \frac{V_m}{c_\infty}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

Se supponiamo che $V_m \ll c_\infty$:

$$\frac{p}{p_0} \approx 1 + \gamma \frac{V_m}{c_\infty}, \quad c_\infty^2 = \gamma p_\infty / \rho_\infty \rightarrow c_\infty = \sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = 1 + \gamma \frac{V_m}{\sqrt{\gamma p_\infty / \rho_\infty}}$$

$$\Rightarrow p = p_\infty + \rho_\infty c_\infty V_m$$

Dalla definizione di C_p :

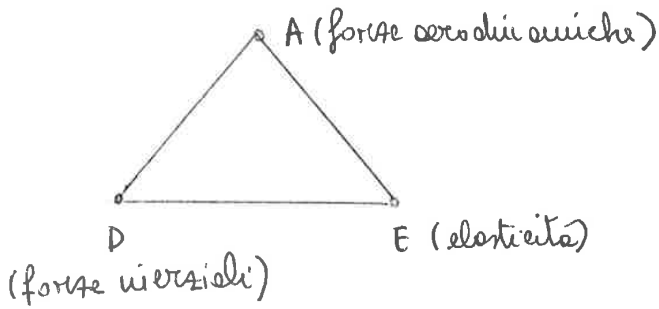
$$(C_p)_i = \frac{(p - p_\infty)_i}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\rho_\infty c_\infty (V_m)_i}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \rightarrow \frac{c_\infty}{V_\infty^2} = \frac{1}{M_\infty V_\infty} \Rightarrow (C_p)_i = \frac{2}{M_\infty} \frac{(V_m)_i}{V_\infty}$$

$$\alpha_i = - \frac{(V_m)_i}{V_\infty}$$

Poiché $C_p^- = -C_p^+ = -C_p$:

$$(\Delta C_p)_i = C_{p_i}^- - C_{p_i}^+ = -2C_{p_i} = -\frac{4}{M_\infty} \frac{(V_m)_i}{V_\infty} \rightarrow (\Delta C_p)_i = -\frac{4}{M_\infty} \frac{(V_m)_i}{V_\infty}$$

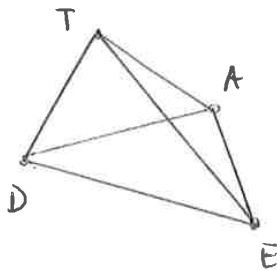
TRIANGOLO DI COLLAR



- ADE → aerelasticità dinamica
- AD → meccanica del volo
- AE → aerelasticità statica
- DE → dinamica strutturale

In un velivolo di rientro dallo spazio, ad esempio, non è possibile trascurare i carichi termici

TRIANGOLO → PIRAMIDE A BASE TRIANGOLARE



⇒ ADET → aerotermostaticità

Una delle questioni centrali dell'aerelasticità è quella di controllare i carichi tramite opportuni dispositivi:

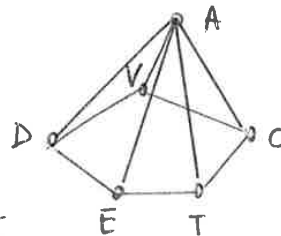
- COMANDI DI VOLO
 - SISTEMA DI CONTROLLO PIUSO
- } → AEROSERVOELASTICITÀ

Nell'ottica della LOAD ALLEVIATION è stata studiata la SMARTWING.

Questo sfrutta materiali PIEZOELETTRICI ($E \rightleftharpoons V$)



PATCH → utilizzati come sensori o attuatori per ridurre deformazioni nell'ala con l'ottica di alleviare i carichi



La disciplina che nechiude l'aerelasticità

è quella che si occupa di INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA e si applica in vari campi:

- CIVILE (ponti, edifici, ...)
- NAUTICO (vele, ...)
- BIOLOGICO
- RIENTRO (materiali ablativi)

TIPICHE EQUAZIONI AEROELASTICHE

$$1 \text{ dof} \rightarrow m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = F(t)$$

$$N \text{ dof} \rightarrow [M]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{molla dinamica classica} \\ m, c, K \text{ non costanti} \end{array} \right\}$

Caso statico

$F(t) \simeq F = F_{mv} + F_a$, con F_a = forze aerodinamiche; F_{mv} = altre forze agenti

$$Kx = F = F_{mv} + F_a$$

$$[K]\{x\} = \{F_{mv}\} + \{F_a\}$$

Però ora introduciamo un'espressione per le forze aerodinamiche:

$$F_a = K_a x$$

$\left. \begin{array}{l} \{F_a\} = [K_a]\{x\} \\ \rightarrow K_a = \text{rigidezza aerodinamica, che può essere } \geq 0 \text{ o } < 0 \text{ a seconda} \\ \text{del caso considerato} \end{array} \right\}$

Allora:

$$Kx = F_{mv} + K_a x \rightarrow (K - K_a)x = F_{mv} \quad \Rightarrow \text{il concetto dell'elasticità statica è come se si modifica la rigidità per effetto aerelastico}$$

$$[K]\{x\} = \{F_{mv}\} + [K_a]\{x\}$$

$$\hookrightarrow ([K] - [K_a])\{x\} = \{F_{mv}\}$$

Dunque:

$$x = \frac{F_{mv}}{K - K_a}$$

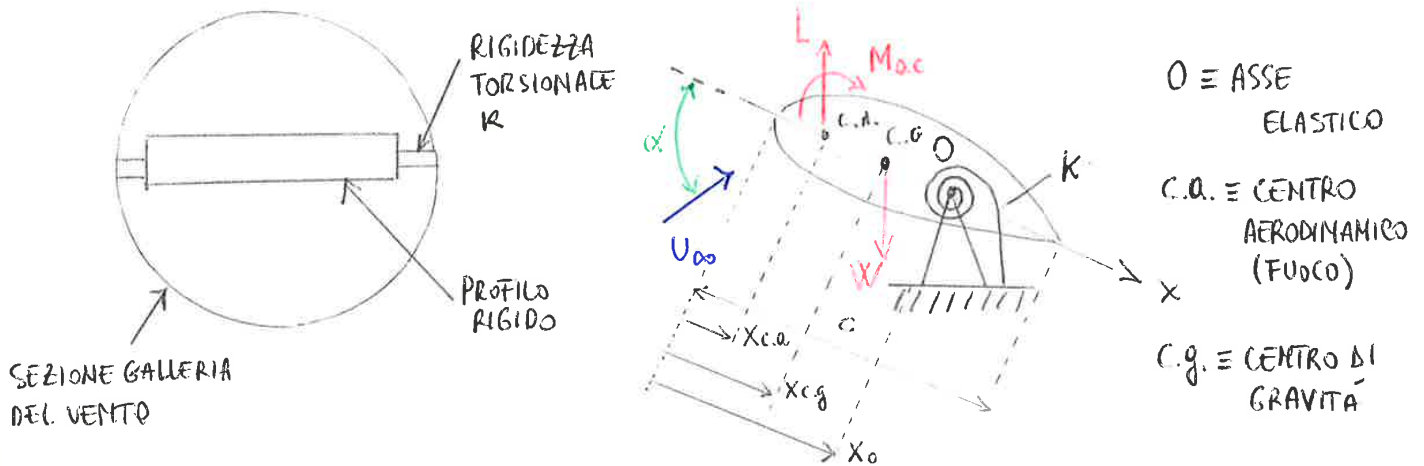
$$\{x\} = ([K] - [K_a])^{-1} \{F_{mv}\}$$

\rightarrow problema di risposta aerelastica

- 1 dof \rightarrow se $K - K_a = 0 \Rightarrow x \rightarrow \infty \Rightarrow$ divergenza
- N dof \rightarrow la divergenza si ha quando $\|[K] - [K_a]\| = 0$, ovvero non esiste l'inversa

Osserviamo che K non varia mai volta fissato (ad esempio costante molla di torsione per problema 10), mentre $K_a \propto q = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2$

AEROELASTICITÀ STATICA - MODELLO A UN GRADO DI LIBERTÀ (θ)



CASO RIGIDO

$$0 \downarrow M_{ac} + L(x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_{cg}) = 0, \text{ con } L = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S C_{L\alpha} \alpha; C_{L\alpha} \approx 2\pi$$

$$M_{ac} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S c C_{Mac}$$

$$\alpha \equiv \alpha_R$$

CASO DEFORMABILE

$$\alpha \equiv \alpha_R \rightarrow \alpha_R + \theta$$

Allora:

\rightarrow le forze elastiche si oppongono al moto

$$M_{ac} + L(x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_{cg}) - K\theta = 0 \quad \text{equazione aeroelastica}$$

Sostituendo le espressioni:

$$L = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S C_{L\alpha} (\alpha_R + \theta); M_{ac} = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 S c C_{Mac}; q = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2$$

si ottiene:

$$q S c C_{Mac} + q S C_{L\alpha} (\alpha_R + \theta) (x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_{cg}) = K\theta$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{q S c C_{Mac} + q S C_{L\alpha} \alpha_R (x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_{cg})}{K - q S C_{L\alpha} (x_0 - x_{ac})}$$

RISPOSTA

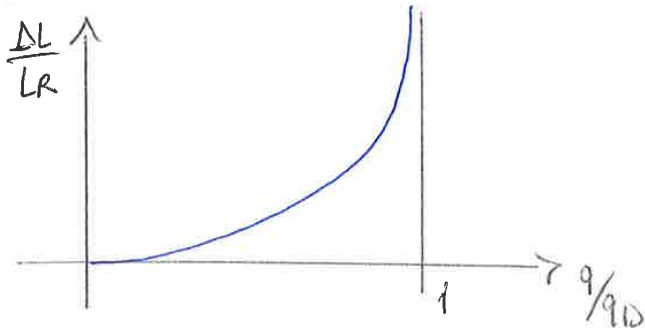
AEROELASTICA

Mel caso generale si aveva: $Kx - k_a x = F_m \Rightarrow x = \frac{F_m}{K - k_a}$

Im' tal caso:

$k_a = \text{RIGIDEZZA AERODINAMICA} = q S C_{L\alpha} (x_0 - x_{ac}) > 0$ nel nostro caso, perché $x_0 - x_{ac} > 0$
 \rightarrow accoppiamento aerodinamico

Allora:



Osserviamo che più ci si avvicina alla divergenza più le variazioni di portanza sono importanti.

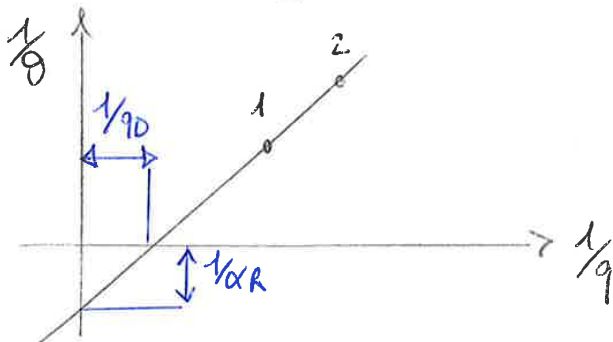
↳ INFLUENZA SULLA QUALITÀ DI VOLO

È possibile determinare sperimentalmente la velocità di divergenza invertendo la formula precedente:

$$\vartheta = \frac{\alpha R}{\frac{q_D}{q} - 1} \rightarrow \boxed{\frac{1}{\vartheta} = \frac{q_D}{\alpha R} \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_D} \right)}$$

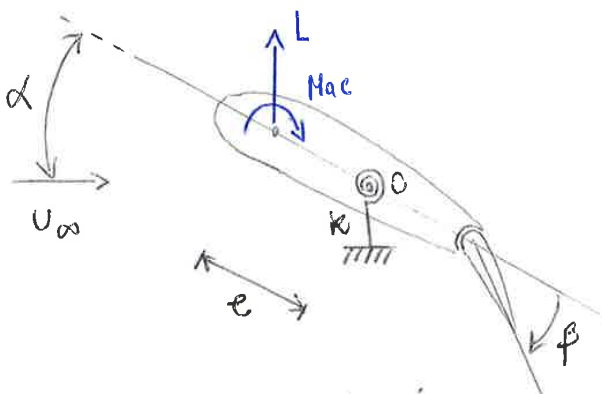
In gallerie del vento, assegnato un profilo e un valore di q è possibile misurare il corrispondente valore di ϑ .

Avevamo due coppie di valori $(\frac{1}{\vartheta_1}, \frac{1}{q_1})$; $(\frac{1}{\vartheta_2}, \frac{1}{q_2})$:



MISURA SPERIMENTALE DELLA VELOCITÀ DI DIVERGENZA
(senza arrivare alla condizione di divergenza)

INVERSIONE DEI COMANDI IN PRESENZA DI ALETTONE



In tal caso:

- β è dato \Rightarrow 1 d.o.f. α
- il peso non influenza il fenomeno, per cui viene trascurato

Dell'equazione di equilibrio attorno ad O:

$$0 \rightarrow Mac + L \cdot e = k\theta$$

$$L = \frac{q S C_{L\alpha} \alpha R K - (q S C_{L\alpha})^2 e^{\alpha R} + (q S C_{L\alpha})^2 e^{\alpha R} + q S C_{L\alpha} \beta (q S C_{M\beta} + q S e C_{L\beta}) + q S C_{L\beta} \beta K - (q S)^2 e C_{L\alpha} C_{L\beta} \beta}{K - q S e C_{L\alpha}}$$

$$L = \frac{q S C_{L\alpha} \alpha R K + q S C_{L\alpha} \beta q S C_{M\beta} + q S C_{L\beta} \beta K}{K - q S e C_{L\alpha}} = \frac{q S [C_{L\alpha} \alpha R + C_{L\beta} (1 + \frac{q S C_{L\alpha} C_{M\beta}}{K C_{L\beta}}) \beta]}{1 - \frac{q S e C_{L\alpha}}{K}}$$

Osserviamo che, per $\beta > 0$, il termine $C_{L\beta} \beta$ tende a generare un incremento di portanza mentre il termine $\frac{q S C_{L\alpha} C_{M\beta} \beta}{K}$, poiché $C_{M\beta} < 0$, tende a far diminuire la portanza.

Si ottiene a una condizione per cui:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \rightarrow q S C_{L\beta} \left(1 + \frac{q S C_{L\alpha} C_{M\beta}}{K C_{L\beta}} \right) = 0 \Rightarrow q_R = - \frac{K C_{L\beta}}{S C_{L\alpha} C_{M\beta}} \quad \begin{array}{l} \text{PRESSIONE} \\ \text{DINAMICA DI} \\ \text{INVERSIONE} \end{array}$$

Allora:

$$L = \frac{q S [C_{L\alpha} \alpha R + C_{L\beta} (1 - \frac{q}{q_R}) \beta]}{1 - \frac{q}{q_D}} \Rightarrow \begin{cases} \cdot q < q_R \rightarrow \Delta L > 0 \\ \cdot q = q_R \rightarrow \Delta L = 0 \text{ se } \beta > 0 \\ \cdot q > q_R \rightarrow \Delta L < 0 \end{cases}$$

Introduciamo un parametro che quantifica l'EFFICACIA degli alatori:

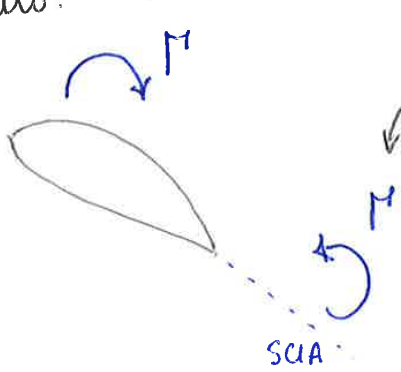
$$\eta = \frac{\Delta L_{el}}{\Delta L_a} = \frac{q S [C_{L\beta} (1 - \frac{q}{q_R}) \beta]}{q S C_{L\beta} \beta} / (1 - \frac{q}{q_D}) = \frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}} \rightarrow \eta = \frac{1 - \frac{q}{q_R}}{1 - \frac{q}{q_D}}$$

È inteso che $q < q_D$ e $q < q_R \Rightarrow \eta > 0$ e non ci sono né problemi di divergenza che di inversione.

A seconda dei casi, poi, $q_D > q_R$ o $q_D \leq q_R$.

In genere $q_R < q_D \Rightarrow$ il fenomeno dell'inversione dei comandi avviene prima del fenomeno di divergenza.

Il flutter, ad esempio, è un fenomeno che si verifica o ha possibilità di verificarsi quando la vorticità nel profilo e nella scia interagiscono, creando effetti che in un determinato istante di tempo non sono uguali, hanno uno sfasamento.



gli effetti di tale vorticità non possono essere descritti dai g.d.l. del sistema

⇒ STATI ADDIZIONALI

Un altro modo che consente di tenere in considerazione gli effetti che la scia provoca nel profilo è, considerando un profilo oscillante in maniera armonica, esprimere le forze aerodinamiche in modo armonico - \rightarrow non si aggiungono gli stati addizionali

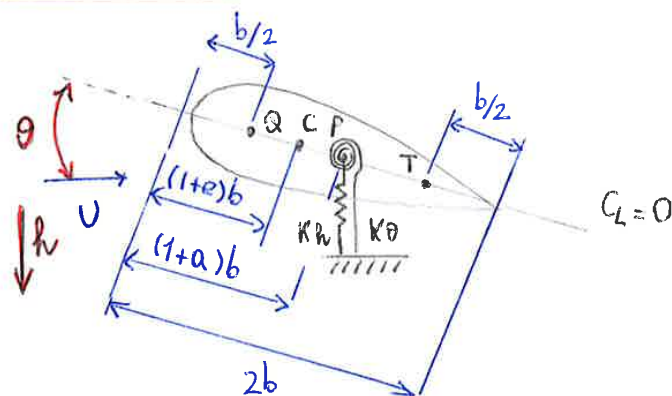
\rightarrow in tal caso, nelle forze aerodinamiche nasce uno sfasamento che si considera introducendo l'unità immaginaria

Ricapitolando:

- Divergenza \rightarrow centro aerodinamico anteriore all'axe elastico
- Inversione \rightarrow $CM_{\beta} < 0$
- Flutter \rightarrow moti propri del fluido sfasati con quelli introdotti dal profilo

Analizziamo il flutter più nel dettaglio

FLUTTER 2 d.o.f.



- θ : incidenza. dof torsionale
Mom teniamo in conto la parte rigida. Per studiare la stabilità del sistema portiamo delle configurazioni di equilibrio
- h : dof flessionale
- Q : centro aerodinamico
- C : centro di massa
- T : punto a $\frac{1}{4}$ del bordo di fuga
- K_h, K_{θ} : rigidità flessionali e torsionali
(in T non appl. una c_b per metodo pannelli)

Allora:

$$Q_L = (Q_e + Q_a + Q_{in}) \delta \theta = 0 \rightarrow \text{poiché } \delta \theta \text{ è arbitrario: } Q_e + Q_a + Q_{in} = 0$$

Si preferisce legare le Lagrangiane a quantità scalari del problema:

$$P = \frac{1}{2} K \theta^2 = \text{en. potenziale elastico} \rightarrow Q_e = \frac{\partial P}{\partial \theta} = K \theta \cdot \theta$$

$$K = \text{en. cinetica} \rightarrow Q_{in} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = I_{\theta} \ddot{\theta}$$

Per il generico grado di libertà q_i del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial P}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, \dots, N$$

EQUAZIONI DI LAGRANGE

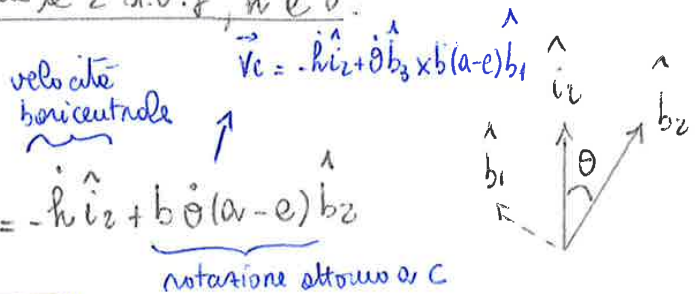
Q_i sono le altre Lagrangiane presenti nel sistema, che dipendono da esso o esso. Per ottenerle è necessario utilizzare il PLV.

Le equazioni di Lagrange valgono anche per sistemi non conservativi, tipici dell'accelerazione.

Torniamo allora al nostro problema a 2 d.o.f., h e θ :

$$P = \frac{1}{2} k_h h^2 + \frac{1}{2} k_{\theta} \theta^2$$

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_c \cdot \vec{v}_c + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2, \text{ con } \vec{v}_c = -\dot{h} \hat{i}_2 + b \dot{\theta} (a-e) \hat{b}_2$$



$$\Rightarrow K = \frac{1}{2} m (\dot{h}^2 + 2b \times \theta \dot{h} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} I_p \dot{\theta}^2, \text{ con } k_{\theta} = e - a \rightarrow \text{accoppiamento inerziale}$$

$$I_p = I_c + m b^2 \times \theta^2 \text{ mom. inerzia risp. ore elastico}$$

L'accoppiamento inerziale indica che se $e \neq a$, la presenza di forze inerziali genera torsione accoppiata a flessione.

La formula di K deriva da:

$$\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c = (-\dot{h} \hat{i}_2 + b \dot{\theta} (a-e) \hat{b}_2) \cdot (-\dot{h} \hat{i}_2 + b \dot{\theta} (a-e) \hat{b}_2) = \dot{h}^2 - 2 \dot{h} \dot{\theta} b (a-e) + b^2 \dot{\theta}^2 (a-e)^2 = \dot{h}^2 + 2b \times \theta \dot{h} \dot{\theta} + b^2 \times \theta^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} m (\dot{h}^2 + 2b \times \theta \dot{h} \dot{\theta}) + \frac{1}{2} \underbrace{(m \times \theta^2 b^2 + I_c)}_{I_p} \dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \begin{cases} m(\ddot{h} + b x_0 \ddot{\theta}) \\ m b x_0 \ddot{h} + I_p \ddot{\theta} \end{cases} ; \quad \frac{\partial P}{\partial q_i} = \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial h} = k_R h \\ \frac{\partial P}{\partial \theta} = k_\theta \theta \end{cases}$$

Allora:

EQUAZIONI DEL MOTO

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \dot{h}} \right) + \frac{\partial P}{\partial h} = Q_h \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{K}}{\partial \dot{\theta}} \right) + \frac{\partial P}{\partial \theta} = Q_\theta \end{cases}$$

→

$$\begin{cases} m(\ddot{h} + b x_0 \ddot{\theta}) + k_R h = -L \\ m b x_0 \ddot{h} + I_p \ddot{\theta} + k_\theta \theta = M \frac{1}{4} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) L \end{cases}$$

CASO OMOGENEO DISACCOPIATO ($x_\theta = 0$)

$$\left. \begin{matrix} Q_\theta = Q_h = 0 \\ x_\theta = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{cases} m \ddot{h} + k_R h = 0 \\ I_p \ddot{\theta} + k_\theta \theta = 0 \end{cases} \quad \text{sistema 2 d.o.f. disaccoppiati}$$

Da un punto di vista dinamico, in tal caso è più possibile avere una instabilità. Poiché $m > 0, k_R > 0, k_\theta > 0, I_p > 0$, si avrà una soluzione del tipo:

$$(h, \theta) = (\tilde{h}, \tilde{\theta}) e^{\lambda t}, \text{ con } \lambda = i\omega \rightarrow \text{2 modi oscillanti e indipendenti}$$

Instabilità si avrebbe se $k_R, k_\theta < 0$ per effetto aerelastico, ma tale caso sarebbe di DIVERGENZA e non avrebbe senso studiare il flutter.

Ad esempio k_θ può diventare < 0 quando il fusolo si trova davanti all'asse elastico e $k_{TOT} = k_\theta + k_{el} < 0$.

⇒ se non c'è divergenza ⇒ $\lambda = i\omega$ perché sistema non smontato

CASO OMOGENEO ACCOPIATO ($x_\theta \neq 0$)

$$\begin{cases} m(\ddot{h} + b x_0 \ddot{\theta}) + k_R h = 0 \\ I_p \ddot{\theta} + m b x_0 \ddot{h} + k_\theta \theta = 0 \end{cases} \rightarrow \text{se c'è un } h, \text{ c'è anche un } \theta \text{ e viceversa}$$

Osserviamo che nella realtà x_θ è una proprietà dell'aeroplano, non dell'ala. Per semplificare il problema aerelastico, occorre ora esprimere le forze aerodinamiche in qualche modo.

$$\{F_a\} = [M_a] \{\ddot{x}\} + [C_a] \{\dot{x}\} + [K_a] \{x\}$$

Introduciamo i seguenti parametri adimensionali:

$r^2 = \frac{I_p}{mb^2}$, rapporto tra momento d'inerzia del profilo e momento d'inerzia della massa d'aria attorno al profilo

$\sigma = \frac{\omega h}{\omega_0 b}$, rapporto tra le frequenze naturali del sistema.

$\mu = \frac{m}{\rho \omega_0 \pi b^2}$, rapporto tra la massa del profilo e la massa d'aria attorno al profilo

$V = \frac{U}{b \omega_0}$ → $b \omega_0$ è la velocità ridotta nel bordo d'attacco e nel bordo di fuga, se il profilo ruota attorno al suo centro.

$V =$ VELOCITÀ RIDOTTA, indice di quanto sia instazionaria il moto (in genere $V \approx 0.1$ al massimo)

$v = \frac{p U}{b}$, dove $p =$ autovalore complesso integrato da ricavare.

Il sistema diventa allora:

$$\begin{bmatrix} p^2 U^2 m + m \sigma^2 \omega_0^2 b^2 & m \chi_0 p^2 U^2 + \frac{2m U^2}{\mu} \\ m p^2 U^2 \chi_0 & I_p \frac{p^2 U^2}{b^2} + \frac{I_p U^2}{b^2 V^2} - 2m \frac{(1+a)}{2+a} \frac{U^2}{\mu} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dividendo per $m U^2$:

$$\begin{bmatrix} p^2 + \frac{\sigma^2}{V^2} & \chi_0 p^2 + \frac{2}{\mu} \\ p^2 \chi_0 & r^2 p^2 + \frac{r^2}{V^2} - \frac{2}{\mu} \frac{(1+a)}{2+a} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{METODO p}$$

Il METODO p si può utilizzare quando è possibile scrivere le forze aerodinamiche in funzione dei gradi di libertà derivati nel tempo

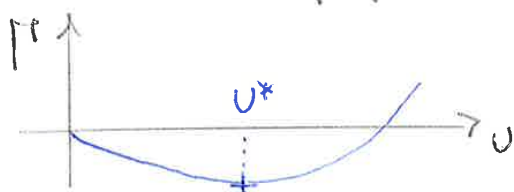
Annunciando il determinante della matrice, si ottengono le soluzioni non banali:

$$p_1 = \frac{b}{U} \gamma_1 = \frac{b}{U} (\Gamma_1 \pm i \Omega_1)$$

$$p_2 = \frac{b}{U} \gamma_2 = \frac{b}{U} (\Gamma_2 \pm i \Omega_2)$$

Considerazioni:

- dal punto di vista progettuale il rapporto $\frac{c_{it}}{c_{if}}$ è molto importante. Per l'aviazione leggera, in genere $\frac{c_{it}}{c_{if}} \approx 3-4$. Valori elevati di tale rapporto possono ridurre le velocità per cui $c_{it} = c_{if}$.
- l'ero di cui viene utilizzata comporta uno smorzamento nullo prima del flutter. Ciò non aiuta a comprendere completamente il fenomeno. Se avessimo un profilo per cui:



potremmo affermare che dopo $U = U^*$ il flutter potrebbe effettivamente verificarsi

DIVERGENZA:

Consideriamo la 2ª eq. del moto nel caso stazionario:

$$m b \ddot{x}_0 + I_p \ddot{\theta} + k_\theta \theta = M \left(\frac{1}{4} + b \left(\frac{1}{2} + a \right) \right) L$$

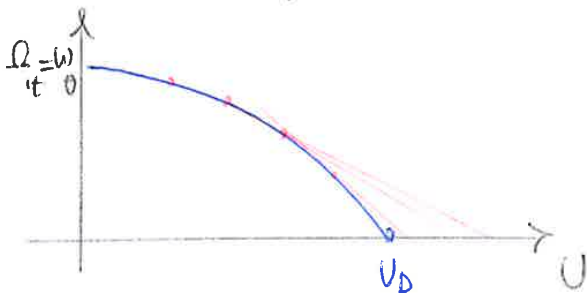
$$k_\theta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L, \text{ dove } L = \frac{1}{2} \rho U^2 \pi \theta z b$$

Allora:

$$\underbrace{(k_\theta - b \left(\frac{1}{2} + a \right) 2 \pi \rho_0 b U^2)}_{k_a} \theta = 0 \Rightarrow U_D = \sqrt{\frac{k_\theta}{b \left(\frac{1}{2} + a \right) 2 \pi \rho_0}}$$

Supponiamo ora di considerare le forze d'inerzia, nel caso disaccoppiato ($x_0 = 0$):

$$I_p \ddot{\theta} + k_\theta \theta = b \left(\frac{1}{2} + a \right) L \rightarrow \text{problema dinamico}$$



Aumentando le velocità, poiché $k - k_a \downarrow$,

$$w_D = \sqrt{\frac{k - k_a}{I_p}} \downarrow$$

Questo perché: $I_p \ddot{\theta} + (k - k_a) \theta = 0$

$$I_p \lambda^2 + (k - k_a) = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k - k_a}{I_p}} = \pm i w_D$$

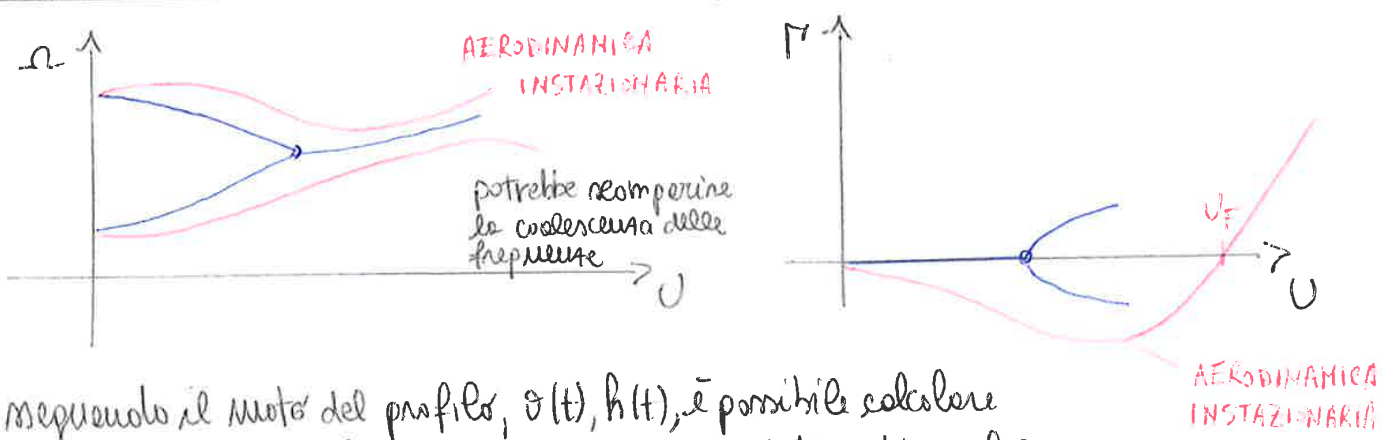
La divergenza si avrà all'annullarsi della frequenza, quando $k - k_a = 0$.

→ METODO DINAMICO PER IL CALCOLO DELLA DIVERGENZA (non distruttivo).

Allora, l'assetto dinamico di un profilo non dipende soltanto dal suo moto, perché ad esempio la serie in frequenza la distribuzione di portanza \rightarrow STATI ADDIZIONALI
 Per cui:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[\quad \right] \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \left[\quad \right] \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \left[\quad \right] \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \quad \\ \quad \end{Bmatrix} \\ & \text{STATI ADDIZIONALI} = f(h, \theta, \dot{h}, \dot{\theta}, \dots) \end{aligned} \right.$$

Se mi interessano e introduco gli effetti degli stati addizionali:



Assumendo il moto del profilo, $\theta(t), h(t)$, è possibile calcolare le forze aerodinamiche senza ricorrere agli stati addizionali, se il moto è ARMONICO.

Andremo a determinare delle espressioni per le forze aerodinamiche che saranno caratterizzate da una parte reale e una immaginaria, poiché è presente uno SFASAMENTO, derivante dalla presenza dei vortici di scia.

(Analogo allo smorzamento, che nell'equazione caratteristica introduce il termine $i\lambda$)

RICAPITOLANDO:

$$\begin{cases} m\ddot{h} + m b x_0 \ddot{\theta} + K_h h = -L \\ I_p \ddot{\theta} + m b x_0 \ddot{h} + K_\theta \theta = M_{1/4} + b(\frac{1}{2} + a)L \end{cases}$$

In generale, tale sistema è del tipo:

$$([M] - [M_a]) \ddot{x} + ([C] - [C_a]) \dot{x} + ([K] - [K_a]) x = \{0\}$$

① AERODINAMICA STAZIONARIA

$$\theta_{inst} \equiv \theta_{staz} \Rightarrow \theta \text{ non è funzione di } \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \dot{h}, \ddot{h}$$

Dove $\sigma_{\alpha} = f(\theta, h, \lambda) \Rightarrow$ introduzione di ulteriori incognite

Il problema generale assume dunque la seguente forma:

$$\begin{cases} ([M] - [M_{\alpha}]) \dot{h} \dot{x} + ([C] - [C_{\alpha}]) \dot{h} \dot{x} + ([K] - [K_{\alpha}]) \dot{h} \dot{x} = \dot{h} \dot{0} \\ [A] \lambda = \dot{0} \end{cases}$$

Se riuscissimo ad esprimere gli stati addizionali in funzione solamente di θ e h , potremmo continuare ad utilizzare il metodo p. Tale problema risulta molto complesso da affrontare, per cui scegliamo un'altra strada da percorrere.

FLUTTER CLASSICO

Il problema si forma nei METODI K, dove $K = \frac{b}{U} \omega$, con $\omega =$ freq. di oscillazione.

K è detta frequenza ridotta e fornisce indicazioni circa l'instazionarietà del moto. La quantità b in fatto è una velocità trasversale di un punto del profilo posto a b dall'asse elastico.

Nel problema del flutter classico si cerca di scrivere un'espressione per le forze aerodinamiche, dato il moto del profilo nel tempo.

IPOTESI

$$\begin{cases} h(t) = \bar{h} e^{i\omega t} \\ \theta(t) = \bar{\theta} e^{i\omega t} \end{cases} \rightarrow \text{moto armonico} \Rightarrow \begin{cases} L(t) = \bar{L} e^{i\omega t} \\ M(t) = \bar{M} e^{i\omega t} \end{cases}$$

Anche le forze aerodinamiche prendono un'espressione simile a quella di θ e h . L'espressione di \bar{L} e \bar{M} è la seguente:

$$\begin{aligned} \bar{L} &= -\pi \rho_{\infty} b^3 \omega^2 [l_h(K, M_{\infty}) \bar{h} + l_{\theta}(K, M_{\infty}) \bar{\theta}] \\ \bar{M} &= \pi \rho_{\infty} b^4 \omega^2 [m_h(K, M_{\infty}) \bar{h} + m_{\theta}(K, M_{\infty}) \bar{\theta}] \end{aligned} \quad \text{con } \begin{cases} K = \text{freq. ridotta} \\ M_{\infty} = n^{\circ} \text{ di Mach} \end{cases}$$

Allora, occorre calcolare $l_h, l_{\theta}, m_h, m_{\theta}$, che in generale sono funzioni complesse. Esistono differenti teorie che ci permettono di fare ciò, giungendo all'espressione di \bar{L}, \bar{M} . Noi utilizzeremo quella di THEODORSEN.

L'oscillazione instazionaria di Theodorsen è perfetta per l'analisi della

Con tale metodo iterativo si riesce a calcolare la velocità di FLUTTER U_F .

LIMITE: non si hanno informazioni su cosa succede prima del flutter, perché non è possibile conoscere le caratteristiche di smorzamento del sistema, in quanto è stato supposto MOTO ARMONICO (smorzamento nullo per definizione)

METODO K (U-g)

Con tale metodo si cerca di valutare lo smorzamento del sistema, introducendolo nelle equazioni del moto i seguenti termini:

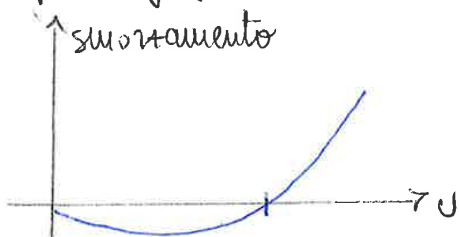
$$\begin{cases} m\ddot{h} + m b x_0 \ddot{\theta} + K_h h = -L + D_h \rightarrow \text{smorzamento grado libertà } h \\ I_p \ddot{\theta} + m b x_0 \ddot{h} + K_\theta \theta = M_{1/4} + b \left(\frac{1}{2} + a\right) L + D_\theta \rightarrow \text{smorzamento grado libertà } \theta \end{cases}$$

Tali smorzamenti sono legati alle quantità g_h, g_θ , che rappresentano dati empirici dell'ordine di (0.01-0.05), attraverso le relazioni:

$$\begin{cases} D_h = \bar{D}_h e^{i\omega t} = -i g_h m \omega_h^2 \bar{h} e^{i\omega t} \\ D_\theta = \bar{D}_\theta e^{i\omega t} = -i g_\theta I_p \omega_\theta^2 \bar{\theta} e^{i\omega t} \end{cases} \rightarrow \text{lo smorzamento è espresso in funzione del quadrato della frequenza, che è legata all'energia.} \rightarrow \text{smorzamento è una frazione dell'energia associata al moto del grado di libertà scelto.}$$

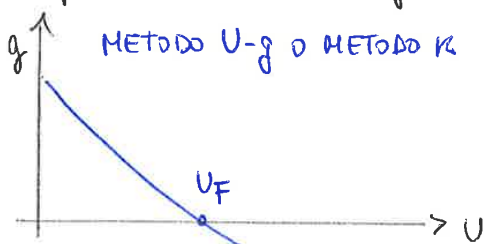
Con tali relazioni si ha un nuovo sistema di equazioni e si può calcolare un nuovo determinante.

Un tale modo si riesce ad introdurre uno smorzamento nel sistema, ottenendo i seguenti grafici:



Si è introdotto uno smorzamento nelle condizioni pre-flutter. Il problema è che tale metodo vale entro certi limiti, in quanto g_h, g_θ li scegliamo noi e al variare di essi si ottengono risultati diversi.

Una cosa che si può fare è porre $g_h = g_\theta = g$ come si conosce. In tal caso, annullando la parte reale e immaginaria del determinante, si può calcolare il valore di g .



Un tale modo è possibile valutare U_F e avere informazioni prima del flutter, avendo g come si conosce.

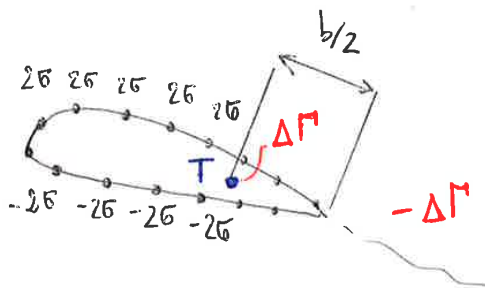
La g determina la nascita di una matrice di smorzamento strutturale che prima non era presente.

Ipotesi:

- PIECOLE PERTURBAZIONI
- FLUIDO INVISCIDO
- SCIA NEL PIANO
- NO SEPARAZIONE
- FLUSSO INCOMPRESSIBILE

$\Rightarrow \Phi = \text{potenziale irrotazionale} \Rightarrow \begin{cases} \nabla^2 \Phi = 0 \\ \text{Bernoulli} \end{cases} \rightarrow$ Si calcola w da $\nabla^2 \Phi = 0$,
 si sostituisce in Bernoulli, si calcola la pressione e si integra per ottenere L, M .

Il flusso, per la CONDIZIONE di TANGENZA, non può attraversare il profilo, per cui questo può essere schematizzato con una distribuzione di pozzi e sorgenti in modo che tale condizione sia soddisfatta.



Si pone poi un vortice di intensità $\Delta\Gamma$ nel punto T, a $b/2$ dal bordo di fuga e, affinché il teorema di Kelvin sia soddisfatto, dovrà esistere un vortice di intensità $-\Delta\Gamma$ nella scia.

Dall' aerodinamica, sono note le espressioni di:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_G(x,y) &= \text{nota} \\ \Phi_{\Delta\Gamma}(x,y) &= \text{nota} \end{aligned} \right\}$$

PASSI FONDAMENTALI

(A) PARTE NON CIRCOLATORIA LEGATA A G

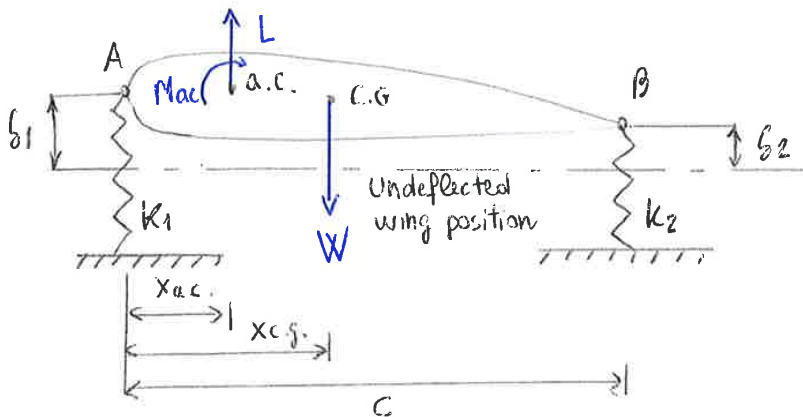
Dall' aerodinamica: $G \equiv W_{geom} \equiv V_a \rightarrow$ l'intensità del pozzo o della sorgente è legata alle condizioni di ingresso o di uscita del flusso

Da V_a si determina l'intensità del pozzo e della sorgente, si determinano le espressioni:

$\Phi_G(x,y), \Phi_{\Delta\Gamma}(x,y) \rightarrow \nabla^2 \Phi = 0 \rightarrow$ si calcola $w \rightarrow$ Bernoulli \rightarrow calcolo $p \rightarrow$ integra p per ottenere L, M .

ESERCITAZIONE 1

ES. 2 - MODELLO A DUE GRADI DI LIBERTÀ



Im tal caso, per piccoli angoli di rotazione:

$$\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta = \frac{\delta_1 - \delta_2}{c}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \delta_1 - c\theta$$

Per questo caso, occorre scrivere due equazioni di equilibrio:

$$\uparrow) L - W - k_1 \delta_1 - k_2 \delta_2 = 0 \quad (1)$$

$$\curvearrowright) Mac + L(c - x_{ca}) - W(e - x_{cg}) - k_1 \delta_1 e = 0 \quad (2)$$

dove: $L = q S c C_L \alpha (\alpha_R + \theta)$; $Mac = q S c C_{Mac}$; $q = \frac{1}{2} \rho U^2$

Da (1):

$$L - W - k_1 \delta_1 - k_2 \delta_1 + k_2 c \theta = 0 \Rightarrow \delta_1 = \frac{L - W + k_2 c \theta}{k_1 + k_2}$$

Sostituendo in (2):

$$Mac + L(c - x_{ca}) - W(e - x_{cg}) - k_1 c \left(\frac{L - W + k_2 c \theta}{k_1 + k_2} \right) = 0$$

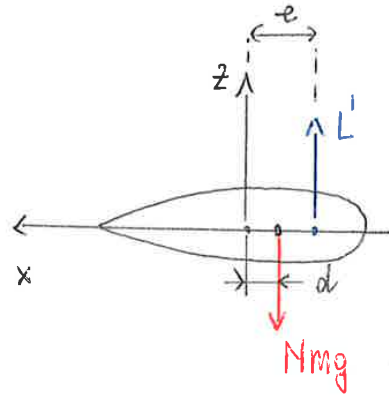
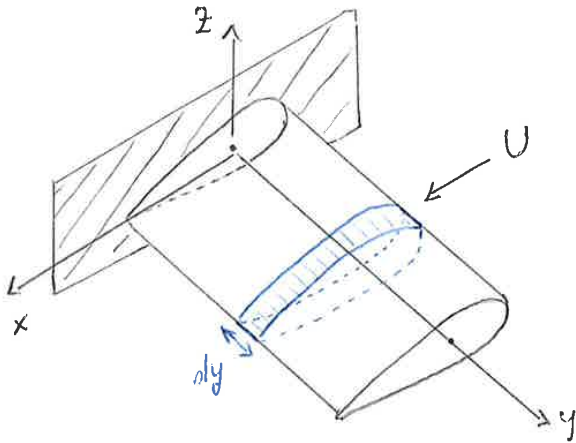
$$Mac + L \underbrace{\left(c - x_{ca} - \frac{k_1 c}{k_1 + k_2} \right)}_{X_1} - W \underbrace{\left(e - x_{cg} - \frac{k_1 e}{k_1 + k_2} \right)}_{X_2} - \frac{k_1 k_2 c^2}{k_1 + k_2} \theta = 0$$

$$q S c C_{Mac} + q S C_L \alpha X_1 \alpha_R + q S C_L \alpha X_1 \theta - W X_2 - \frac{k_1 k_2 c^2}{k_1 + k_2} \theta = 0$$

$$\theta \left(-q S C_L \alpha X_1 + \frac{k_1 k_2 c^2}{k_1 + k_2} \right) = q S c C_{Mac} + q S C_L \alpha X_1 \alpha_R - W X_2$$

$$\theta = \frac{q S c C_{Mac} + q S C_L \alpha X_1 \alpha_R - W X_2}{\frac{k_1 k_2 c^2}{k_1 + k_2} - q S C_L \alpha X_1} = \frac{\alpha_R \left(1 - \frac{x_{ca}}{c} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) + \frac{C_{Mac}}{C_L \alpha} - \frac{W}{q S C_L \alpha} \left(1 - \frac{x_{cg}}{c} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right)}{\frac{k_1}{k_1 + k_2} - \frac{k_2 c}{q S C_L \alpha} - \left(1 - \frac{x_{ca}}{c} - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right)}$$

DIVERGENZA DI UNA SUPERFICIE ALARE FLESSIBILE CONTINUA



N fattore di carico legato ad un'azione inversa, come una mano \neq vno.

Vogliamo risolvere un problema di risposta aerodinamica, per cui vogliamo calcolare la rotazione $\theta(y)$ dell'ala che modifica localmente l'incidenza dei profili lungo l'apertura.

$$\alpha = \alpha_R + \theta(y)$$

Indichiamo con L' e M' la portanza e il momento per unità di lunghezza.

$$M' = M'_{ae} + eL' - Nmgd, \text{ con } N = 1 + \frac{Az}{g}$$

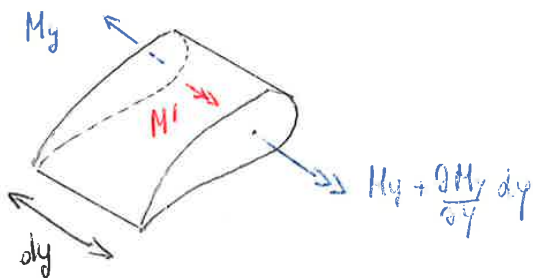
Per il calcolo di L' , M'_{ae} utilizzeremo la TEORIA DELLA STRISCEA, che trascura tutti gli effetti aerodinamici tridimensionali associati ad un allungamento finito ed estende a tutto l'ala le relazioni viste per la sezione tipica.

Allora:

$$L' = \rho c c_e, \text{ con } c_e = c_e(y) = \omega \alpha(y) = \omega (\alpha_R + \theta(y))$$

$$M'_{ae} = \rho c^2 c_{mae}$$

Consideriamo poi un elemento elementare della semiala:



$$M_y + \frac{\partial M_y}{\partial y} dy - M_y + M'_y = 0$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(GJ_t \frac{d\theta}{dy} \right) = -M'$$

Supponiamo costante la rigidità torsionale

rigidità strutturale *rigidità aerodinamica*

Sostituendo il valore di M' :

$$GJ_t \frac{d^2\theta}{dy^2} = -\rho c^2 c_{mae} - e\rho c c_e + Nmgd \rightarrow \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{\rho c a e}{GJ_t} \theta = -\frac{1}{GJ_t} (\rho c^2 c_{mae} + \rho c e \alpha_R - Nmgd)$$

EQUAZIONI COSTITUTIVE FLESSIONE E TORSIONE

FLESSIONE M_x

$$M_x = - \int_A \sigma_{yy} z dA \quad \text{ipotizziamo gli assi } x, y, z \text{ baricentrici e principali} \rightarrow \text{centro di}$$

$$\sigma_{yy} = E \epsilon_{yy} = E (w'_{1y} - z \Phi_{x,y}) \rightarrow M_x = - \int_A z E (w'_{1y} - z \Phi_{x,y}) dA = I_x \Phi_{x,y} E = EI_x \Phi_{x,y}$$

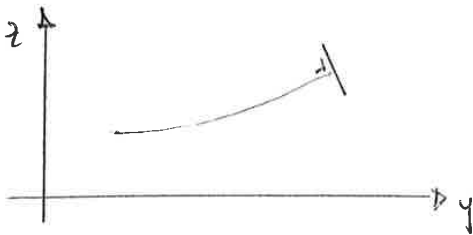
$$M_x = EI \Phi_{x,y}$$

termine disponibile
nello rispetto al
baricentro

Momento legato alla curvatura
(derivata della rotazione)

Se considerassimo la teoria di Eulero-Bernoulli:

ipotesi \rightarrow la sezione rimane piana e ortogonale all'asse di deformazione



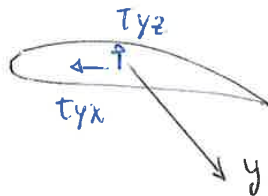
$$\gamma_{yz} = 0 = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \rightarrow w'_{1y} - \Phi_x = 0 \rightarrow \Phi_x = w'_{1y}$$

$$\Rightarrow M_x = EI_x w'_{1y} \quad \text{equazioni differenziali della linea elastica}$$

Con tale relazione, scritta anche per M_z , si avrebbero solo 4 incognite $u^{(0)}, v^{(0)}, w^{(0)}$ e la torsione.

TORSIONE M_y

$$M_y = \int_A (\tau_{yx} z - \tau_{yz} x) dA$$



$$\tau_{yx} = G \gamma_{yx} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \Phi_{y,y} G$$

$$\tau_{yz} = G \gamma_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = -x \Phi_{y,y} G$$

$$\Rightarrow M_y = \int_A (x^2 + z^2) \Phi_{y,y} G dA = G I_p \Phi_{y,y} \rightarrow$$

momento d'inerzia
polare

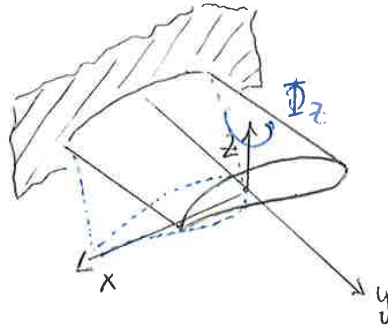
$$M_y = G I_p \Phi_{y,y}$$

nel caso più generale al posto
di I_p c'è J_t ,
fattore di rigidità
torsionale, legato alla
distribuzione degli
sforzi di taglio nella
sezione

Il momento torcente è legato alle variazioni della rotazione

FLESSIONE ATTORNO ASSE Z

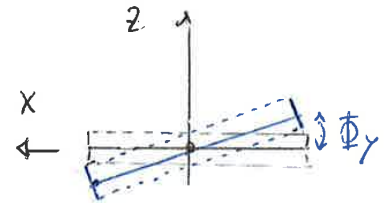
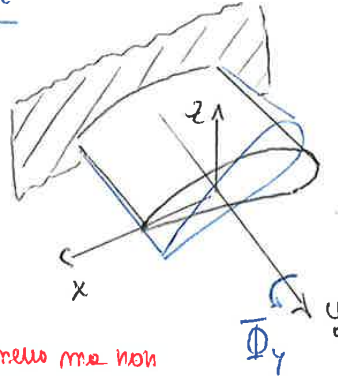
$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(y) \\ v(x,y,z) = x \Phi_z(y) \\ w(x,y,z) = 0 \end{cases}$$



La rotazione positiva è nell'altro verso. I punti con x positiva, muovendo, hanno y positiva

FLESSIONE ATTORNO A Y - TORSIONE

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \Phi_y(y) z \\ v(x,y,z) = 0 \\ w(x,y,z) = -\Phi_y(y) x \end{cases}$$



CASO COMBINATO

ci sarebbe un mezzo ma non si usa

$$\begin{cases} u(x,y,z) = u^{(0)}(y) + z \Phi_y(y) \\ v(x,y,z) = v^{(0)}(y) + x \Phi_z(y) - z \Phi_x(y) \\ w(x,y,z) = w^{(0)}(y) - x \Phi_y(y) \end{cases}$$

Espressione di Taylor rispetto alle elasticità
 -> da 3 incognite 3D in piano a 6 incognite 1D.

Modello di spostamenti utilizzato nella trave classica.

Tale modello non riesce a prevedere la deformabilità della sezione, importante in elastoelasticità.

È possibile arricchire il campo di spostamenti nel seguente modo:

$$\begin{cases} u(x,y,z) = \sum_{ij} x^i z^j u_{ij}(y) \\ v(x,y,z) = \sum_{ij} x^i z^j v_{ij}(y) \\ w(x,y,z) = \sum_{ij} x^i z^j w_{ij}(y) \end{cases}$$

->

il loro combinato sopra riportato è un caso particolare di tale modello di spostamenti. Ho senso aumentare in maniera indefinita il n° di incognite? Esistono dei termini dell'elasticità che offriamo che all'aumentare dei termini di espansione all'infinito, la soluzione tende a quella tridimensionale

Ad esempio:

$$u(x,y,z) = F_1(x,z) u_1(y) + F_2(x,z) u_2(y)$$

e nel modello della trave classica,

$u_1(y) = u^{(0)}$; $u_2(y) = \Phi_y(y)$; $F_1(x,z) = -z$; $F_2(x,z) = x$. Analogamente per gli altri due spostamenti.
 Mm generale: $u(x,y,z) = F_1(x,z) u_1(y) + F_2(x,z) u_2(y) + F_3(x,z) u_3(y) + \dots + F_N(x,z) u_N(y) = F_C(x,z) u_C(y)$
 Se lo spostamento può variare da punto a punto possiamo descrivere anche le def. della sezione.

Il problema da risolvere è dunque:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{q c a e}{G J t} \theta = -\frac{1}{G J t} (q c^2 c_{mac} + q c a e \alpha_R - N m g d) \\ y=0 \rightarrow \theta=0 \\ y=L \rightarrow d\theta/dy=0 \end{cases}$$

tipico parametro aerelastico che contiene e, responsabile dell'accoppiamento aerodinamico

Poniamo:

$$\lambda^2 = \frac{q c a e}{G J t}; \quad \bar{\alpha}_R = \frac{c c_{mac}}{e e} - \frac{N m g d}{q c a e} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2 \theta = -\lambda^2 (\alpha_R + \bar{\alpha}_R)$$

Soluzione omogenea:

$$e^{\nu y} \rightarrow \nu^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow \nu = \pm i \lambda \Rightarrow \theta_{om}(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y)$$

Integrale particolare:

$$\theta_p(y) = \cos t = C \Rightarrow C \lambda^2 = -\lambda^2 (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \Rightarrow C = -(\alpha_R + \bar{\alpha}_R)$$

$$\Rightarrow \theta(y) = A \sin(\lambda y) + B \cos(\lambda y) - (\alpha_R + \bar{\alpha}_R)$$

Imponendo le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} y=0 \rightarrow \theta=0 &\Rightarrow B = \alpha_R + \bar{\alpha}_R \\ y=L \rightarrow \theta'=0 &\Rightarrow A = B \tan(\lambda L) \end{aligned} \Rightarrow \theta(y) = (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) [\tan(\lambda L) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1]$$

RISPOSTA AEROELASTICA

$$\begin{aligned} \text{Moto } \theta(y) \rightarrow \alpha = \alpha_R + \theta(y) &\rightarrow L' = q c a (\alpha_R + \theta(y)) \rightarrow L = \int L' dy \\ M' = M_{lac} + e L' - N m g d &\quad M = \int M' dy \end{aligned}$$

Avvicinandosi al tip dell'ala si aumenta e si ha dunque un eccesso di forza aerodinamica.

Per determinare la condizione di divergenza avremmo potuto risolvere direttamente l'equazione omogenea.

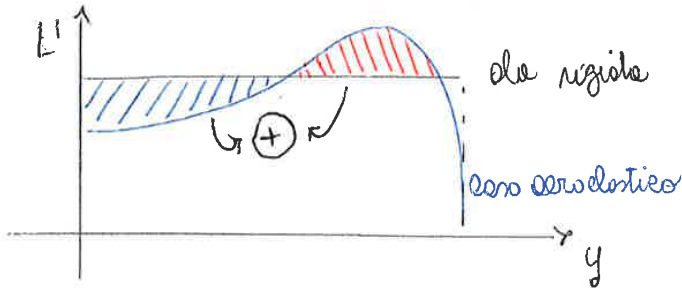
Im tal caso però è facile determinare tale condizione critica:

$$\theta(y) \rightarrow \infty \text{ quando } \lambda L \rightarrow \pi/2 \Rightarrow \text{in tal caso } q = q_D$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{q c a e}{G J t}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L} \rightarrow q_D = \frac{G J t}{e a c} \left(\frac{\pi}{2L} \right)^2$$

PRESSIONE DINAMICA DI DIVERGENZA

• CONSERVAZIONE DEL FATTORE DI CARICO $\rightarrow L = \int L' dy = W$



\Rightarrow occorre scegliere un anetto tale per cui le due aree evidenziate siano uguali.

Attraverso i comandi di volo è possibile contrastare lo risposta aerodinamica in maniera che valore del fattore di carico desiderato, senza sollecitare eccessivamente le strutture

Osserviamo inoltre che se L aumenta \Rightarrow aumenta la resistenza indotta \Rightarrow consumi maggiori $(D \propto [a \cdot \theta(y)]^2)$

A320 \rightarrow possiede un sistema di controllo della deformazione aerodinamica dell'ala

CALCOLO DELLA PORTANZA

$$L' = q c a \alpha (\alpha_R + \theta(y)) = q c a [\alpha_R + (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) (\text{tg}(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1)]$$

$$L = 2 \int_0^l L' dy = 2 \int_0^l q c a [\alpha_R + (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) (\text{tg}(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1)] dy =$$

$$= 2 q c a \left\{ \alpha_R l + (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left(-\text{tg}(\lambda l) \frac{\cos(\lambda y)}{\lambda} \Big|_0^l + \frac{\sin(\lambda y)}{\lambda} \Big|_0^l - l \right) \right\} =$$

$$= 2 q c a \left\{ \alpha_R l + (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left(-\frac{\sin(\lambda l)}{\lambda} + \frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda l)}{\lambda} - l \right) \right\} =$$

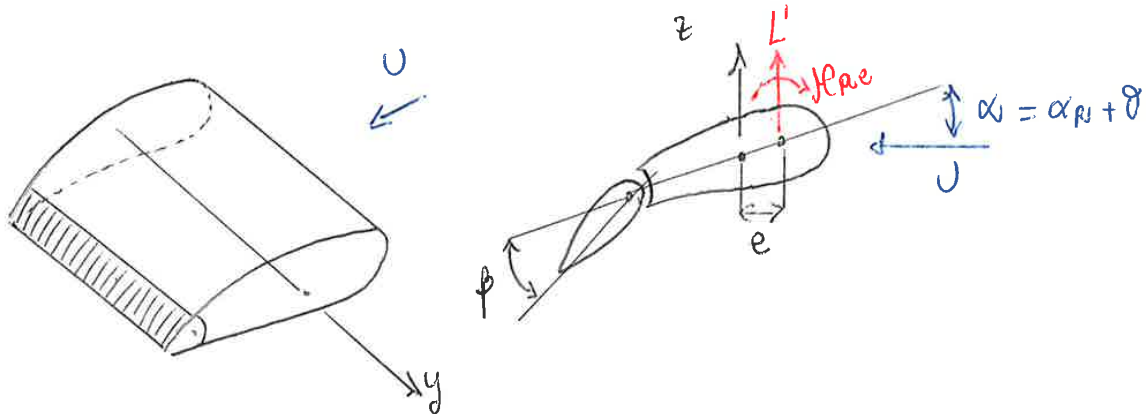
$$= 2 q c a \left\{ \alpha_R l + l (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \left(\frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda l} - 1 \right) \right\} = 2 q c a l \left\{ (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda l} - \bar{\alpha}_R \right\}$$

$$\Rightarrow L = 2 q c a l \left\{ (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda l} - \bar{\alpha}_R \right\}$$

CALCOLO DEL FATTORE DI CARICO E DI α_R

$$\begin{cases} N = L/W = \frac{2 q c a l}{W} \left\{ (\alpha_R + \bar{\alpha}_R) \frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda l} - \bar{\alpha}_R \right\} \\ \bar{\alpha}_R = \frac{C_{mac}}{a \cdot e} - \frac{N m g d}{q c a e} \end{cases}$$

INVERSIONE DEL COMANDO DEGLI ALETONI



Ipotesizziamo che l'aletone si estenda lungo tutta l'ala:

Per semplicità consideriamo $d_r = 0$.

$$\begin{aligned} c_l &= a\alpha + e_{lp}\beta \\ c_{mae} &= e_{mp}\beta \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} L' = qc c_l = qc(a\theta + e_{lp}\beta) \\ M' = eL' + qc e^2 c_{mae} = qc^2 e_{mp}\beta + eL' \end{cases}$$

Dall'equazione di equilibrio alla rotazione:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(GJt \frac{d\theta}{dy} \right) = -M' = -eL' - qc^2 e_{mp}\beta \rightarrow \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{GJt}\theta = \frac{(qc^2 e_{mp}\beta - qce c_{lp}\beta)}{GJt}$$

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{qcae}{GJt}\theta = -\frac{qcae}{GJt} \left(\frac{c_{mp}\beta}{a-e} + \frac{c_{lp}\beta}{a} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2\psi\beta}$$

$$\text{con } \lambda^2 = \frac{qcae}{GJt}, \quad \psi = \frac{c_{mp}\beta}{ae} + \frac{c_{lp}\beta}{a} = \frac{c_{mp}\beta + c_{lp}\beta e}{ae}$$

Risolvendo il problema:

$$\begin{cases} \frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2\psi\beta \\ \theta(0) = 0 \\ \theta'(l) = 0 \end{cases}$$

Si ottiene:

Omogeneo: $\nu^2 + \lambda^2 = 0 \rightarrow \nu = \pm i\lambda \Rightarrow \theta_{om}(y) = A \cos(\lambda y) + B \sin(\lambda y)$

Integrale particolare: $\theta_p = C \rightarrow C = -\psi\beta$

$\rightarrow \theta(y) = A \cos(\lambda y) + B \sin(\lambda y) - \psi\beta$