NUMERO: 2318A

ANNO: 2018

A P P U N T I

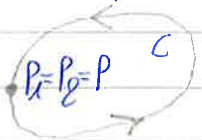
STUDENTE: Campana Simone

MATERIA: Fisica II - Teoria + Esercizi - Prof. Trigiante

DIMOSTRAZIONE (1)

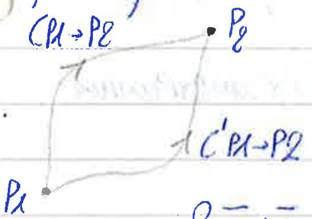
a) $\bar{F}(\bar{x})$ FORZA ELETTRICA CHE DIPENDE DALLA POSIZIONE È CONSERVATIVA;
b) $\forall C$ CAMMINO CHIUSO ORIENTATO $\oint \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0$ IN REGIONE SEMPLICEMENTE CONNESSA;

a) => b) SE $\bar{F}$ È CONSERVATIVA, ALLORA $\int_C \bar{F}\cdot d\bar{l}$ DIPENDE SOLO DAL PUNTO, CONSIDERO UN C CHIUSO:



$$\oint_{P1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} = U(P_1)-U(P_2) = U(P)-U(P) = 0;$$

b) => a) x DIMOSTRARE CHE $\bar{F}$ È CONSERVATIVA DEVO DIMOSTRARE CHE $\int_{CP1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_{C'P1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l}$:



PORTO LA CARICA DA P1 A P2 SEGUENDO C E POI DA P2 TORNO A P1 SEGUENDO C', FACENDO UN PERCORSO CHIUSO:

x IPOTESI: $$\oint \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_{CP1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} + \int_{C'P2\to P1} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \left(\int_{C'P2\to P1} \bar{F}\cdot d\bar{l} = -\int_{C'P1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l}\right) = \int_{CP1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} - \int_{C'P1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} = 0;$$

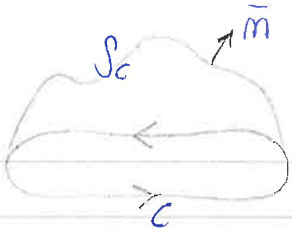
$$\Rightarrow \int_{CP1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l} = \int_{C'P1\to P2} \bar{F}\cdot d\bar{l}.$$

DIMOSTRAZIONE (2)

a) $\bar{F}(\bar{x})$ È CONSERVATIVA;
b) ESISTE $U(\bar{x})$ FUNZIONE SCALARE DIPEND. SOLO DAL PUNTO T.C. $\bar{F}(\bar{x}) = -\nabla U(\bar{x})$;

a) => b) IL TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE PERMETTE DI CALCOLARE LA VARIAZIONE DI UNA FUNZIONE TRA DUE PUNTI MOLTO VICINI TRA LORO, OVVERO:

$$f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)(dx, dy, dz) = \bar{\nabla} f\cdot d\bar{l};$$

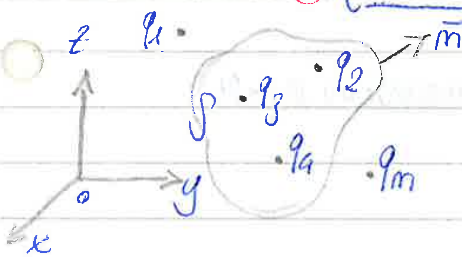


$\oint_C \bar E \cdot d\bar l = $ (TEOREMA DI STOKES) $= \int_{S_C} (\bar\nabla \wedge \bar E)\cdot \bar m \cdot dS =$

$= (\bar\nabla\wedge\bar E = 0$ x IPOTESI$) = 0$ QUINDI $\bar E$ È CONSERVATIVO IN UNO SPAZIO SEMPLICEMENTE CONNESSO.

QUINDI 3 AFFERMAZIONI EQUIVALENTI TRA LORO:
a) $\bar E$ CAMPO ELETTROSTATICO È CONSERVATIVO; b) $\bar E = -\bar\nabla V$; c) $\bar\nabla\wedge\bar E = 0$ IN UNO SPAZIO SEMPLICEMENTE CONNESSO, QUINDI $\bar E$ È IRROTAZIONALE.

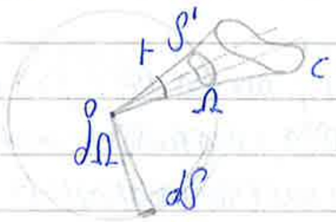
DIMOSTRAZIONE (4) (LEGGE DI GAUSS)



$$\bar E(\bar x) = \sum_{i=1}^{m} \bar E_i(\bar x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i(\bar x - \bar x_i)}{|\bar x - \bar x_i|^3};$$

$$\Phi_S(\bar E) = \oint_S \bar E\cdot\bar m\cdot dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{\text{INTERNE A } S} q_i; \quad \text{(LEGGE DI GAUSS)}$$

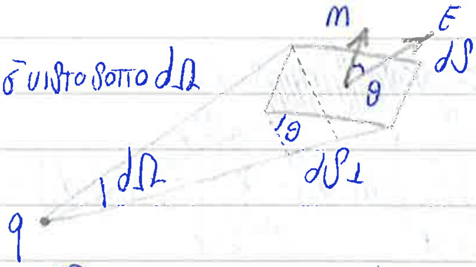
DEFINIZIONE DI ANGOLO SOLIDO: PORZIONE DI SPAZIO RACCHIUSA DA TUTTE LE SEMIRETTE CHE INTERSECANO LA CURVA C. DATA UNA SFERA DI RAGGIO r, L'ANGOLO SOLIDO STACCA UNA CALOTTA S' T.C IL RAPPORTO S'/r^2 NON DIPENDA DALLA SFERA. QUINDI:



$$\Omega = \frac{S'}{r^2} \Rightarrow \Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \text{ ANGOLO SOLIDO GIRO.}$$

UN $d\Omega$ INFINITESIMO LO STACCA UN dS INFINITESIMO CHE SI PUÒ PENSARE GIACERE SUL PIANO TANGENTE ALLA SFERA. QUINDI $d\Omega = dS/r^2$ CON $dS \perp$ ALLA DIREZIONE RADIALE.

dS È VISTO SOTTO $d\Omega$



IL FLUSSO ELEMENTARE ATTRAVERSO dS È DATO DA:

$$d\Phi(\bar E) = \bar E\cdot\bar m\cdot dS = |\bar E|\cdot\cos\theta\cdot dS$$ ($\cos\theta$ POSITIVO O NEGATIVO È DA CUI DIPENDE IL SEGNO DEL FLUSSO).

$dS_\perp$ È LA PROIEZIONE DI dS SULLA DIREZIONE $\perp$ ALLA DIREZIONE RADIALE. x QUELLO DETTO PRIMA:

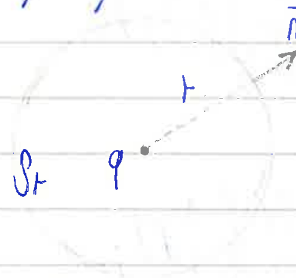
$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{dS|\cos\theta|}{r^2}, \text{ QUINDI: } d\Phi(\bar E) = |\bar E|\cos\theta\cdot dS = \begin{cases} |\bar E|\cdot dS_\perp & \text{se } \cos\theta>0 \\ -|\bar E|\cdot dS_\perp & \text{se } \cos\theta<0\end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE (5)

a) IL CAMPO ELETTROSTATICO $\bar{E}$ È CONSERVATIVO (POICHÉ $\bar{E} = E(r)\bar{u}_r$ È RADIALE);

b) VALE LA LEGGE DI GAUSS (LEGATO ALL'ANDAMENTO DI $\bar{E}$ COME $1/r^2$).

a) + b) $\Rightarrow$ LEGGE DI COULOMB:



LA CARICA q È PUNTIFORME ED È QUINDI DOTATA DI SIMMETRIA SFERICA. UNA LEGGE LA DICE CHE IL CAMPO $\bar{E}$ HA LA STESSA SIMMETRIA DELLA CARICA CHE L'HA GENERATO. L'UNICO CAMPO A SIMMETRIA SFERICA È QUELLO RADIALE, QUINDI SO CHE $\bar{E}(\bar{x}) = E(r)\bar{u}_r$. POICHÉ VALE LA LEGGE DI GAUSS SCELGO COME SUPERFICIE DI GAUSS UNA SFERA DI RAGGIO r CENTRATA SULLA CARICA.

· $\Phi_{S_r}(\bar{E}) = \oint_{S_r} \bar{E}\cdot\bar{m}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$; SULLA SFERA: $\bar{E}\cdot\bar{m} = (E(r)\bar{u}_r)\cdot\bar{u}_r = E(r)$, IN UNA SFERA r È COSTANTE, ALLORA $E(r)$ È COSTANTE SU TUTTI I PUNTI DELLA SFERA.

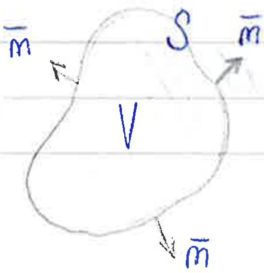
· $\Phi_{S_r}(\bar{E}) = \oint_{S_r} E(r)\, dS = E(r)\oint_{S_r} dS = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ COME VETTORE:

· $\bar{E}(\bar{x}) = E(r)\bar{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r$. SE METTO UNA CARICA q_0 A DISTANZA r DA q, ALLORA q_0 SENTE UNA FORZA DATA DA:

$$\Rightarrow \bar{F}_0 = q_0 \bar{E}(\bar{x}) = \frac{q \cdot q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_r \quad \text{(LEGGE DI COULOMB)}.$$

DIMOSTRAZIONE (6) (FORMULAZIONE LOCALE DELLA LEGGE DI GAUSS)

· IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA PERMETTE DI CALCOLARE IL FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA COME L'INTEGRALE DELLA DIVERGENZA DEL CAMPO SUL VOLUME INTERNO ALLA SUPERFICIE.



$$\Phi_S(\bar{V}) = \oint_S \bar{V}\cdot\bar{m}\, dS = \underbrace{\int_V (\bar{\nabla}\cdot\bar{V})\, dV}_{\text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}} \quad \text{CON } \bar{V} \text{ CAMPO VETTORIALE GENERICO.}$$

2) SE $N_{IN} > N_{OUT}$, ALLORA VUOL DIRE CHE PARTE DELLA CARICA IN ARRIVO SI È FERMATA IN S, QUINDI LA CARICA IN S È AUMENTATA.

$$\Rightarrow \oint \bar{J} \cdot \bar{n} \cdot dS = -\frac{dQ_{INT}}{dt}, \text{ SE } N_{IN} > N_{OUT} \rightarrow u(N_{OUT} - N_{IN}) < 0 \Rightarrow dQ/dt > 0.$$

SE LA CARICA È DIMINUITA, ALLORA VUOL DIRE CHE IN UN PUNTO P SI SONO ORIGINATE DELLE LINEE DI CAMPO E COME SAPPIAMO IN P VARRÀ QUINDI CHE $\bar{\nabla} \cdot \bar{J}(P) > 0$, AL TEMPO STESSO LA CARICA SI È DIRADATA, OVVERO $d\rho/dt < 0$ (LA DENSITÀ DI CARICA DIMINUISCE).
SE LA CARICA È AUMENTATA IN S, ALLORA C'È UN PUNTO P IN CUI SONO TERMINATE DELLE LINEE DI CAMPO; IN QUESTO PUNTO $\bar{\nabla} \cdot \bar{J}(P) < 0$, MA ALLO STESSO TEMPO $d\rho/dt > 0$ (LA DENSITÀ DI CARICA AUMENTA).

$$-\frac{dQ}{dt} = \oint_S \bar{J} \cdot \bar{n} \cdot dS = (\text{TEOREMA DELLA DIVERGENZA}) = \underbrace{\int_V \bar{\nabla} \cdot \bar{J} \cdot dV}; \text{ POICHÉ } dQ = \rho\, dV:$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \underbrace{-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV};$$

ρ È FUNZIONE DEL PUNTO E DEL TEMPO, QUINDI LA DERIVATA TOTALE DIVENTA UNA DERIVATA PARZIALE.

$$\Rightarrow \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \bar{J}\right) dV = 0,$$

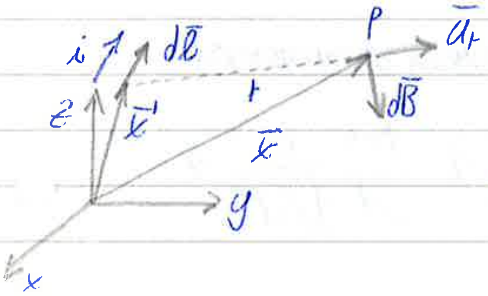
L'INTEGRALE DEVE ESSERE ZERO X OGNI VOLUME SI CONSIDERA, QUINDI L'INTEGRANDO DEVE ESSERE ZERO:

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0} \quad (\text{EQUAZIONE DI CONTINUITÀ}).$$

SE ρ NON VARIA NEL TEMPO ALLORA $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ QUINDI $\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0$ (CONDIZIONE DI STAZIONARIETÀ).

DIMOSTRAZIONE 8 (BIOT-SAVART)

LA 1ª LEGGE DI LAPLACE DICE CHE UN ELEMENTINO DI FILO INFINITESIMO $d\bar{l}$ ORIENTATO NEL VERSO DELLA CORRENTE CHE SCORRE AL SUO INTERNO GENERA UN CAMPO MAGNETICO INFINITESIMO DATO DA:



$$d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\, d\bar{l} \wedge \frac{\bar{u}_r}{r^2}; \text{ IN COORDINATE CARTESIANE:}$$

$$d\bar{B}(\bar{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} i\, d\bar{l}(\bar{x}') \wedge \frac{(\bar{x} - \bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|^3};$$

ADESSO CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI $a >> R$ QUINDI UN FILO INFINITAMENTE LUNGO, ALLORA I TERMINI COME $(a^2/R^2)^{-1}$ SI POSSONO TRASCURARE:

$$\cdot\ \bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\frac{a}{\sqrt{a^2(1+\cancel{R^2/a^2})}}\bar{u} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\bar{u} \Rightarrow \boxed{\bar{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi R}\bar{u}}$$ (LEGGE DI BIOT-SAVART).

DIMOSTRAZIONE (9) ($\bar{B}$ È SOLENOIDALE)

DIRE CHE $\bar{B}$ È SOLENOIDALE VUOL DIRE CHE LE SUE LINEE DI CAMPO SONO DELLE CURVE CHIUSE CHE NON TERMINANO NE SI ORIGINANO IN NESSUN PUNTO. QUINDI SI DEVE DIMOSTRARE CHE $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$.

x PRIMA COSA DIMOSTRIAMO CHE:

$$\cdot\ \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3} = \bar{\nabla}'\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$; LE DERIVATE LE FACCIAMO RISPETTO $\bar{x}'$ QUINDI RISPETTO ALLA POSIZIONE DELL'ELEMENTINO DI FILO:

$$\cdot\ \bar{\nabla}'\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \left(\frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\bar{u}_x,\ \frac{\partial}{\partial y'}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\bar{u}_y,\ \frac{\partial}{\partial z'}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\bar{u}_z\right);$$

$$\cdot\ |\bar{x}-\bar{x}'| = r = [(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{1/2},$$ ALLORA SI AVRÀ CHE:

$$\cdot\ \frac{\partial}{\partial x'}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \frac{1}{r^2}\left(0-\frac{1}{\cancel{2}}(r^{-1/2})^2(-1)\cancel{2}(x-x')\right) = \frac{x-x'}{r^3};$$

$$\Rightarrow \bar{\nabla}'\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = \left(\frac{x-x'}{r^3}\bar{u}_x,\ \frac{y-y'}{r^3}\bar{u}_y,\ \frac{z-z'}{r^3}\bar{u}_z\right) = \frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3};$$

SE DERIVIAMO RISPETTO $\bar{x}$, OVVERO RISPETTO LA POSIZIONE DEL PUNTO, VARIA SOLO IL SEGNO:

$$\cdot\ \bar{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = -\bar{\nabla}'\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$ ADESSO PARTIAMO DALLA 1ª LEGGE DI LAPLACE:

$$\cdot\ \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\bar{J}(\bar{x}')\wedge\frac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}\right]dV = \left(\frac{\bar{x}-\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3} = -\bar{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) =$$

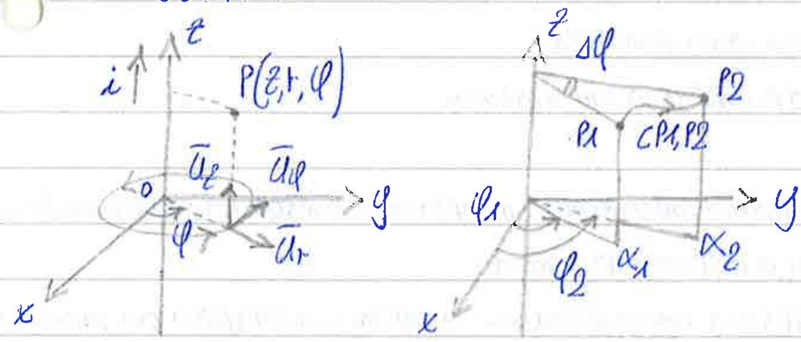
$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\bar{J}(\bar{x}')\wedge\left(-\bar{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\right]dV = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\left[\bar{J}(\bar{x}')\wedge\bar{\nabla}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right]dV;$$

② $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = -1$ (CORRENTI IN VERSO OPPOSTO) → LA FORZA È REPULSIVA.
MOLTO SPESSO È PIÙ UTILE ESPRIMERE UNA FORZA × UNITÀ DI LUNGHEZZA DEL FILO ②:

$$\Rightarrow \bar{F}_{1,2} = \frac{d\bar{F}_{1,2}}{dl_2} = \boxed{-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2}{r}(\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2)\cdot \bar{u}_r.}$$

DIMOSTRAZIONE (11) (LEGGE DI AMPÈRE)

LA LEGGE DI AMPÈRE È L'ANALOGO DELLA LEGGE DI GAUSS × IL CAMPO MAGNETOSTATICO. VALE SOLO × CORRENTI STAZIONARIE. CONSIDERIAMO UN FILO INFINITO PERCORSO DA CORRENTE i E DEFINISCO UN SISTEMA DI COORDINATE CILINDRICHE:



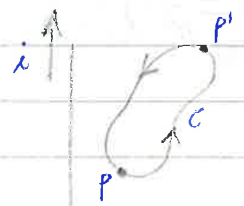
$\bar{u}_z$ È LEGATO AL VERSO DELLA CORRENTE, $\bar{u}_\varphi$ È LEGATO AL VERSO DI i DALLA MANO DESTRA. $\bar{u}_r$ È IL VERSO RADIALE USCENTE. IL CAMPO $\bar{B}$ GENERATO È DATO DA BIOT-SAVART:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\bar{u}_\varphi = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\bar{u}_z \wedge \bar{u}_r;$$

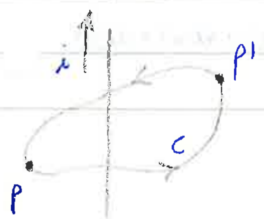
CALCOLO L'INTEGRALE $\int \bar{B}\cdot d\bar{l}$ LUNGO IL PERCORSO $CP1,P2$:

$$\int_{CP1,P2} \bar{B}\cdot d\bar{l} = \int_{CP1,P2} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\bar{u}_\varphi \cdot (dr\,\bar{u}_r + r\,d\varphi\,\bar{u}_\varphi + dz\,\bar{u}_z) = \int_{CP1,P2}\frac{\mu_0 i}{2\pi}d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\mu_0 i}{2\pi}d\varphi =$$

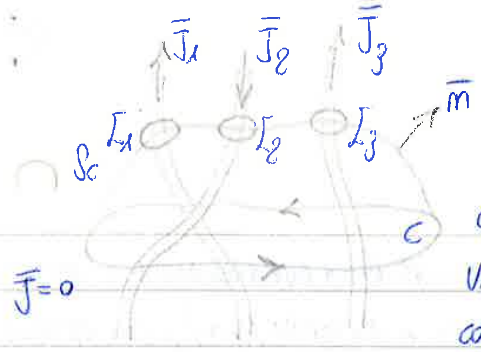
$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\Delta\varphi.$$ CON $\Delta\varphi$ L'ANGOLO DIEDRO TRA I 2 SEMIPIANI CHE SI ORIGINANO IN z E PASSANO × P_1 E P_2. SE L'ANGOLO DIEDRO È LO STESSO, ALLORA L'INTEGRALE È LO STESSO. ADESSO CONSIDERO UN C PERCORSO CHIUSO, DISTINGUO 2 CASI:



1) C NON CONCATENATO CON i, OVVERO POSSO PORTARE IL PERCORSO A DISTANZA INFINITA SENZA INTERSECARE LA CORRENTE. ANDANDO DA P A P' φ AUMENTA, DA P' A P φ DIMINUISCE DI NUOVO, QUINDI $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \oint \bar{B}\cdot d\bar{l} = 0$;



2) C CONCATENATO CON i, NON POSSO PORTARE IL PERCORSO A DISTANZA INFINITA SENZA INTER-



QUINDI UN SISTEMA DI CORRENTI i_1, i_2, i_3 CHE INTERSECANO S_C RISPETTIVAMENTE IN L_1, L_2, L_3 E CHE SONO DESCRITTE DA UN VETTORE DENSITÀ DI CORRENTE $\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3$. INTRODUCO UN UNICO CAMPO $\bar{J}(\bar{x})$ DIVERSO DA ZERO SOLO NEI CONDUTTORI E ZERO FUORI DOVE NON C'È CORRENTE. IL FLUSSO DI $\bar{J}$ ATTRAVERSO S_C SARÀ QUINDI DATO DALLA SOMMA DEI FLUSSI DI $\bar{J}_i$ NEI CONDUTTORI:

$$\int_{S_C} \bar{J}\cdot\bar{m}\cdot dS = \sum_{k=1}^{m} \int_{L_K} \bar{J}_K\cdot \bar{m}\cdot dS \quad \text{CON} \quad \int_{L_K} \bar{J}_K\cdot \bar{m}\cdot dS = \pm i_K$$

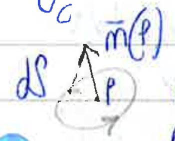
($\pm$ SE $\bar{J}$ È LEGATO O MENO AL VERSO DI C DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA)

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{m} \int_{L_K} \bar{J}_K\cdot \bar{m}\cdot dS = \sum_{k=1\,(\text{CONCATENATE})} \pm i_K \Longrightarrow \int_{S_C} \bar{J}\cdot\bar{m}\cdot dS = \sum_{\text{CORRENTI CONCATENATE}} \pm i_K;$$

LA LEGGE DI AMPÈRE DICE CHE:

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0 \sum_{\text{CONCAT.}} \pm i_K = \mu_0 \int_{S_C} \bar{J}\cdot\bar{m}\cdot dS;$$ ENTRAMBI GLI INTEGRALI DIPENDONO SOLO DA C.

$$\oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = (\text{LEGGE DI STOKES}) = \int_{S_C} (\bar{\nabla}\wedge\bar{B})\,\bar{m}\cdot dS = \mu_0 \int_{S_C} \bar{J}\cdot\bar{m}\cdot dS;$$



POICHÉ L'UGUAGLIANZA DEVE VALERE X OGNI C E S_C CHE SI CONSIDERI, ALLORA SI PUÒ CONSIDERARE UN PERCORSO C INFINITESIMO CHE RACCHIUDE UN dS INFINITESIMO NELL'INTORNO DI P. L'INTEGRALE QUINDI CONSTA DI UN SOLO TERMINE:

$$\Longrightarrow \bar{\nabla}\wedge\bar{B}(P)\cdot\bar{m}\cdot dS = \mu_0\cdot\bar{J}(P)\cdot\bar{m}\cdot dS \Longrightarrow \boxed{\bar{\nabla}\wedge\bar{B}(P) = \mu_0\cdot\bar{J}(P).}$$

1) $\bar{B}$ È SOLENOIDALE $\Longleftrightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$ (FORMA LOCALE), $\oint_S \bar{B}\cdot\bar{m}\cdot dS = 0$ (FORMA INTEGRALE);

2) VALE LA LEGGE DI AMPÈRE: $\bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \mu_0\cdot\bar{J}$ CHE LEGA IL CAMPO $\bar{B}$ ALLE SUE SORGENTI (LE CORRENTI), VALIDA SOLO X CORRENTI STAZIONARIE.

$\Downarrow$

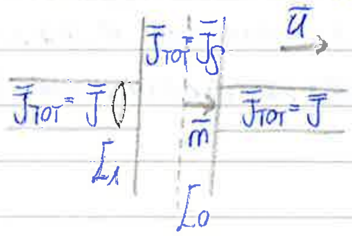
CAMPO MAGNETOSTATICO

DIMOSTRAZIONE 13 (LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL)

IL PROBLEMA È GENERALIZZARE LA LEGGE DI AMPÈRE X CORRENTI NON STAZIONARIE. CONSIDERO UN CIRCUITO IN

$$\Rightarrow i_{\Sigma_0} = \int_{\Sigma_0} \bar{J}_S \cdot \bar{m}\, dS = \int_{\Sigma_0} \frac{i(t)}{\Sigma_0}\, \bar{u}\cdot\bar{u}\, dS = \frac{i(t)}{\Sigma_0}\int_{\Sigma_0} dS = \frac{i(t)}{\Sigma_0}\,\Sigma_0 = i(t);$$

QUINDI IL FLUSSO DI $\bar{J}_S$ È UGUALE ALLA CORRENTE DI CONDUZIONE. POSSO INTRODURRE QUINDI UN NUOVO CAMPO $\bar{J}_{TOT} = \bar{J} + \bar{J}_S$ DETTO DENSITÀ DI CORRENTE TOTALE ED È DIVERSO DA ZERO DAPPERTUTTO, ANCHE TRA LE ARMATURE E IL SUO FLUSSO ATTRAVERSO UNA QUALSIASI SEZIONE DEL CIRCUITO NON DIPENDE DALLA SEZIONE.



$$\cdot \int_{\Sigma_1} \bar{J}_{TOT}\cdot\bar{m}\, dS = \int_{\Sigma_1} \bar{J}\cdot\bar{m}\, dS = i(t);$$

$$\cdot \int_{\Sigma_0} \bar{J}_{TOT}\cdot\bar{m}\, dS = \int_{\Sigma_0} \bar{J}_S\cdot\bar{m}\, dS = i(t);$$

QUINDI $\bar{J}_{TOT}$ DEFINISCE UNA CORRENTE STAZIONARIA. LA LEGGE DI AMPÈRE QUINDI SI MODIFICA COSÌ:

$$\cdot \bar{J}_{TOT} = \bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \Rightarrow \bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \mu_0 \bar{J}_{TOT} = \mu_0\left(\bar{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}\right)$$ IN FORMA INTEGRALE:

$$\cdot \oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0\int_{S_C}\bar{J}\cdot\bar{m}\, dS + \mu_0\int_{S_C}\bar{J}_S\cdot\bar{m}\, dS = \mu_0\int_{S_C}(\bar{J}+\bar{J}_S)\cdot\bar{m}\, dS = \mu_0\int_{S_C}\bar{J}_{TOT}\cdot\bar{m}\, dS;$$

I DUE INTEGRALI DIPENDONO SEPARATAMENTE DALLA SCELTA DI S_C, MA LA LORO SOMMA NON DIPENDE DA S_C. x UN QUALSIASI CAMPO $\bar{E}$ DIPENDENTE DAL TEMPO POSSIAMO SCRIVERE LA CORRENTE DI SPOSTAMENTO:

$$\cdot \left[i_S = \int_{S_C}\bar{J}_S\cdot\bar{m}\, dS = \int_{S_C}\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\cdot\bar{m}\, dS = \varepsilon_0\frac{d}{dt}\left[\int_{S_C}\bar{E}\cdot\bar{m}\, dS\right] = \varepsilon_0\frac{d\Phi(\bar{E})_{S_C}}{dt};\right.$$

$\bar{E}$ IN GENERALE DIPENDE DAL PUNTO E DAL TEMPO, MA ESSENDO LA SUPERFICIE FISSA UNA VOLTA x TUTTE, IL FLUSSO DIPENDE SOLO DAL TEMPO, QUINDI LA DERIVATA PARZIALE DIVENTA DERIVATA TOTALE.

$$\Rightarrow \oint_C\bar{B}\cdot d\bar{l} = \mu_0\left[\sum_{CONC} \pm i_k + \varepsilon_0\frac{d\Phi(\bar{E})_{S_C}}{dt}\right],$$ IN FORMA LOCALE INVECE:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\nabla}\wedge\bar{B} = \mu_0\bar{J}_{TOT} = \mu_0\left(\bar{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right)}$$ (LEGGE DI AMPÈRE-MAXWELL).

ULTIMA COSA, DIMOSTRIAMO CHE $\bar{J}_{TOT}$ È SOLENOIDALE, x FARLO NE CALCOLO LA DIVERGENZA:

$$\cdot \bar{J}_{TOT} = \bar{J}+\bar{J}_S = \bar{J} + \varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} \Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{J}_{TOT} = \bar{\nabla}\cdot\bar{J}+\bar{\nabla}\cdot\bar{J}_S = \bar{\nabla}\cdot\bar{J} + \bar{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_0\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right) =$$ (POSSO SCAM-

SONO SIMMETRICHE, OVVERO RIFERENDOSI A CAMPI ELETTRICO E MAGNETICI VARIABILI NEL TEMPO, MOSTRANO COME DA UN CAMPO MAGNETICO VARIABILE NEL TEMPO SI GENERA UN CAMPO ELETTRICO E DA COME DA UN CAMPO ELETTRICO VARIABILE NEL TEMPO SI GENERA UN CAMPO MAGNETICO. RISPETTO AL CASO STATICO LE EQUAZIONE CHE SONO RIMASTE INVARIATE SONO QUELLE CON LA DIVERGENZA, QUESTE VALGONO ANCHE NEL CASO DI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ VARIABILI. LE EQUAZIONI CON IL ROTORE INVECE HANNO SUBITO DELLE CORREZIONI.

NON SAPENDO NULLA DI RELATIVITÀ, MAXWELL FORMULÒ QUESTE EQUAZIONI RISPETTANDO IL PRINCIPIO DI RELATIVITÀ RISTRETTA, OVVERO LE LEGGI DELL'ELETTROMAGNETISMO HANNO LA STESSA FORMA IN OGNI SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE (CHE SI MUOVONO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME UNO RISPETTO ALL'ALTRO), IL TUTTO IN TERMINI DI UNA SOLA ENTITÀ, OVVERO IL CAMPO ELETTROMAGNETICO, CHE SI PUÒ MANIFESTARE COME $\bar{E}$ O COME $\bar{B}$ A SECONDA DEL RIFERIMENTO.

NEL CASO STATICO LE EQUAZIONI DIVENTANO:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\wedge\bar{E}=0 \iff \oint_C \bar{E}\cdot d\bar{l}=0 \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \oint_S \bar{E}\cdot\bar{n}\cdot dS=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_{INT.} q \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{B}=0 \iff \oint_S \bar{B}\cdot\bar{n}\cdot dS=0 \\ \bar{\nabla}\wedge\bar{B}=\mu_0\bar{J} \iff \oint_C \bar{B}\cdot d\bar{l}=\mu_0\sum_{CONC.} \pm i_k \end{cases}$$

NEL CASO STATICO LE EQUAZIONI SONO DISACCOPPIATE, OVVERO NON MOSTRANO ALCUN LEGAME TRA $\bar{B}$ E $\bar{E}$. QUINDI QUESTE EQUAZIONI O DESCRIVONO IL CAMPO ELETTROSTATICO O IL CAMPO MAGNETOSTATICO. UN CAMPO ELETTROSTATICO NON PUÒ GENERARE UN CAMPO MAGNETOSTATICO.

$\cdot \oint_S(\bar{E}) = \frac{q_{INT}}{\varepsilon_0} = \left(q_{INT}\text{ È DISTRIBUITA SU } d\Sigma\right) = \frac{\sigma(P)\cdot d\Sigma}{\varepsilon_0}$, POICHÉ $d\Sigma$ È MOLTO PICCOLO, ALLORA σ È CIRCA COSTANTE AL SUO INTERNO E UGUALE ALLA DENSITÀ IN P. ABBIAMO 3 CONTRIBUTI AL FLUSSO:

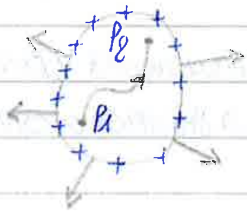
$\cdot \oint_{CILINDRO}(\bar{E}) = \oint_{d\Sigma^\oplus}(\bar{E}) + \oint_{d\Sigma^\ominus}(\bar{E}) + \oint_{SUP.\ LATER.}(\bar{E})$; SU $d\Sigma^\oplus$ $\bar{E} = \bar{E}^\oplus = E^\oplus \bar{m}$, SU $d\Sigma^\ominus$ $\bar{E} = \bar{E}^\ominus = 0$ PERCHÉ ALL'INTERNO DEL CONDUTTORE, SULLA SUPERFICIE LATERALE VALE CHE $\bar{m}\cdot\bar{E} = 0$, QUINDI IN SOSTANZA:

$$\Rightarrow \oint_{CILINDRO}(\bar{E}) = \oint_{d\Sigma^\oplus}(\bar{E}) = \int_{d\Sigma^\oplus}\bar{E}^\oplus\cdot\bar{m}\cdot dS = \left(\text{L'INTEGRALE È UN SEMPLICE TERMINE}\right) = \bar{E}^\oplus\cdot\bar{m}\cdot d\Sigma^\oplus = \bar{E}^\oplus\cdot\bar{m}\cdot d\Sigma;$$

$$\Rightarrow \bar{E}^\oplus\cdot\bar{m}\cdot d\Sigma = E\cdot\bar{m}\cdot\bar{m}\cdot d\Sigma = E\cdot \cancel{d\Sigma} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cancel{d\Sigma} \Rightarrow \bar{E}(P) = \frac{\sigma(P)}{\varepsilon_0}\bar{m}(P);$$

QUINDI SE $\sigma(P) > 0$, ALLORA $\bar{E}$ È RIVOLTO VERSO L'ESTERNO, SE $\sigma(P) < 0$ VERSO L'INTERNO. IN SOSTANZA IL CAMPO ELETTRICO È DIVERSO DA ZERO SOLO ALL'ESTERNO DEL CONDUTTORE.

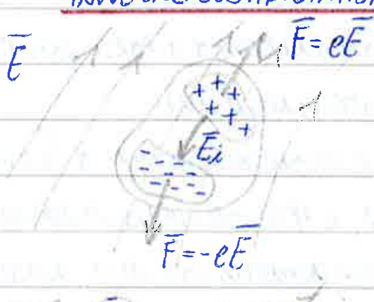
e) LA SUPERFICIE DEL CONDUTTORE È UNA SUPERFICIE EQUIPOTENZIALE:



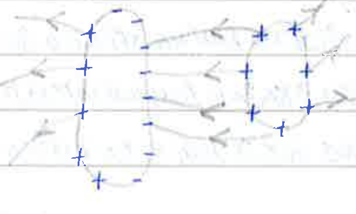
$$\int_{P_1\to P_2}\bar{E}\cdot d\bar{l} = \left(\bar{E} = \bar{0}\text{ ALL'INTERNO}\right) = 0 = V(P_1) - V(P_2) \Rightarrow V(P_1) = V(P_2);$$

SE PRENDO DUE PUNTI SULLA SUPERFICIE VALE LA STESSA COSA, QUINDI IL POTENZIALE È COSTANTE OVUNQUE ALL'INTERNO E SULLA SUPERFICIE.

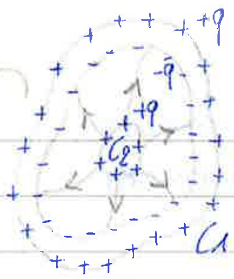
- INDUZIONE ELETTROSTATICA:



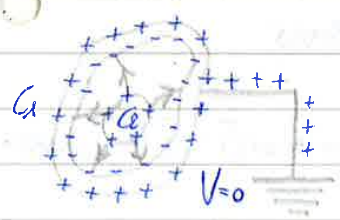
IMMERGENDO UN CONDUTTORE NEUTRO IN UN $\bar{E}$ COSTANTE, ALLORA GLI ELETTRONI SENTONO UNA FORZA $\bar{F} = -e\bar{E}$ CHE LI FA MUOVERE NELLA DIREZIONE OPPOSTA ALLA DIREZIONE DI $\bar{E}$ LASCIANDO UN ECCESSO DI CARICA POSITIVA. LE CARICHE VENGONO SEPARATE E SI CREA UN NUOVO CAMPO $\bar{E}_i$ DETTO CAMPO ELETTRICO INDOTTO. IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO $\bar{E} + \bar{E}_i = 0$ ALL'INTERNO E QUINDI NESSUNA LINEA DI CAMPO DENTRO.



AVVICINANDO UN CONDUTTORE NEUTRO AD UNO CARICO, QUEST'ULTIMO GENERA UN CAMPO ELETTRICO CHE SEPARA LE CARICHE DEL CONDUTTORE NEUTRO. SE NON CI SONO LINEE DI CAMPO CHE SI ORIGINANO O TERMINANO ALL'INFINITO, MA TUTTE LE LINEE DI CAMPO CHE SI ORIGINANO (O TERMINANO) SUL CONDUTTORE CARICO TERMINANO (O SI ORIGINANO) SUL CONDUTTORE NEUTRO, SI PARLA DI INDUZIONE COMPLETA (ES. CONDENSATORE INFINITO).



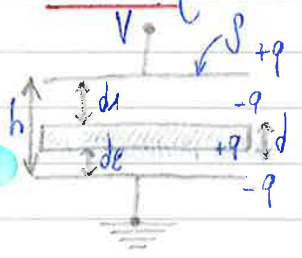
QUESTO È UN CASO DI INDUZIONE COMPLETA IN CUI SULLA SUPERFICIE INTERNA SI CREA UNA CARICA UGUALE E OPPOSTA $-q$. LA SUPERFICIE ESTERNA LASCIA DUNQUE SCOPERTA UNA CARICA $+q$. SE DOVESSIMO SPOSTARE IL CONDUTTORE C_2 CAMBIEREBBE LA DISTRIBUZIONE DELLE CARICHE SUL CONDUTTORE CARICO E SULLA SUPERFICIE INTERNA DI C_1, QUINDI CAMBIANO TUTTE LE DISTANZE E QUINDI CAMBIANO IL CAMPO ELETTRICO E IL POTENZIALE. LA NUOVA INFORMAZIONE NON PUÒ PROPAGARSI ALL'ESTERNO PERCHÉ DENTRO AL CONDUTTORE $\vec{E} = \vec{0}$. LA CARICA ESTERNA DUNQUE NON VEDE COSA SUCCEDE ALL'INTERNO. STESSA COSA SE C_2 FOSSE ALL'ESTERNO, IL CAMBIAMENTO NON SI PROPAGA ALL'INTERNO. QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO PIÙ GENERALE IL CONDUTTORE FUNGE DA SCHERMO ELETTROSTATICO. PER ULTIMO SE C_2 FOSSE AVVICINATO ALLA SUPERFICIE INTERNA, ALLORA LE CARICHE SI NEUTRALIZZEREBBERO; I DUE CONDUTTORI FORMEREBBERO UN UNICO CONDUTTORE DENTRO CUI $\vec{E} = \vec{0}$ OVUNQUE.



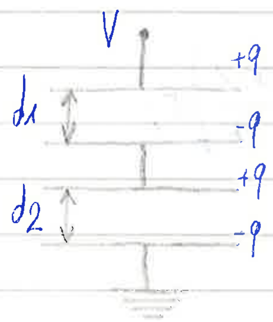
E SE COLLEGASSIMO LA SUPERFICIE ESTERNA CON LA TERRA, LE CARICHE POSITIVE SI DISPERDEREBBERO SULLA TERRA A CUI PER CONVENZIONE È ATTRIBUITO POTENZIALE NULLO. C_1 SI CARICA NEGATIVAMENTE, IL POTENZIALE VARIA DI UNA QUANTITÀ COSTANTE, LA SITUAZIONE ELETTROSTATICA INTERNA È IMMUTATA.

PROPRIETÀ ELETTROSTATICHE DEI DIELETTRICI

- DIELETTRICI (O ISOLANTI): MATERIALI NEI QUALI UN ECCESSO DI CARICA IN UN PUNTO NON È LIBERO DI MUOVERSI.



SUPPONIAMO CHE TRA LE ARMATURE DEL CONDENSATORE NON CI SIA IL VUOTO, MA UNA LASTRA CONDUTTRICE PARALLELA ALLE ARMATURE. POICHÉ UN'ARMATURA È A TERRA, LA DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA LE ARMATURE $\Delta V = V > 0$. NELLA PIASTRA SI VERIFICA INDUZIONE COMPLETA. IL SISTEMA È EQUIVALENTE A 2 CONDENSATORI IN SERIE (LA CARICA INFATTI È LA STESSA).

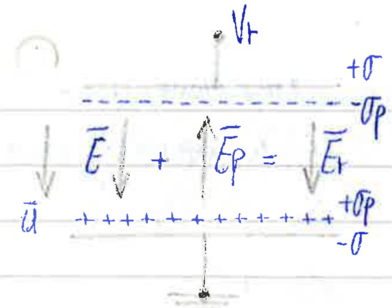


$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1},\quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2} \Rightarrow 1/C_{eq} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\varepsilon_0 S} + \frac{d_2}{\varepsilon_0 S} = \frac{d_1 + d_2}{\varepsilon_0 S};$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1 + d_2} = \left(d = h - (d_1 + d_2) \rightarrow h - d = d_1 + d_2\right) = \frac{\varepsilon_0 S}{h - d};$$

$$\Rightarrow V = \frac{q}{C_{eq}} = \frac{q}{\varepsilon_0 S}(h - d);$$

SE $d = h$, OVVERO LA LASTRA OCCUPA TUTTO LO SPAZIO TRA LE DUE ARMATURE, ALLORA $V = 0$ (LE CARICHE SI ANNULLANO). SE INVECE $d < h$, ALLORA:



Le cariche σ_p non sono fittizie, ma sono reali. Queste cariche generano un campo $\bar{E}_p$ che ha come effetto quello di ridurre l'intensità di $\bar{E}$. Le cariche σ_p che si formano sul dielettrico sono dette cariche di polarizzazione e sono dovute al fenomeno di polarizzazione del dielettrico. Se le cariche di conduzione sono dovute a spostamenti macroscopici di carica (induzione elettrostatica) le cariche di polarizzazione sono il risultato di spostamenti di cariche nell'ordine delle dimensioni della molecola o atomo.

Proprietà generale x dielettrici isotropi e omogenei: si possono ottenere le proprietà in presenza di un materiale da quelle nel vuoto semplicemente sostituendo ε_0 con $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ detta costante dielettrica del mezzo.

Affrontiamo il problema della polarizzazione del dielettrico. x prima cosa distinguiamo i contributi delle cariche di conduzione (sul condensatore) e di polarizzazione (nel dielettrico) al campo elettrico totale $\bar{E}_t$. Definisco due vettori:

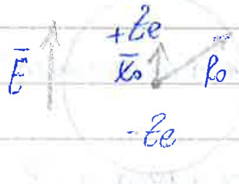
- $\bar{P} = -\varepsilon_0 \bar{E}_p = \sigma_p \bar{u}$ la densità di polarizzazione, un vettore che dipende dalle sole cariche di polarizzazione;
- $\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} = \sigma \bar{u}$ vettore di induzione dielettrica che dipende dalle sole cariche di conduzione;

$$\Rightarrow \bar{E}_t = \bar{E} + \bar{E}_p = \frac{\bar{D}}{\varepsilon_0} - \frac{\bar{P}}{\varepsilon_0}$$

; la situazione elettrostatica nel dielettrico è caratterizzata da questi tre vettori che sono legati tra di loro da questa relazione.

Abbiamo due tipi di polarizzazione: 1) x deformazione; 2) x orientamento. Il primo è sempre presente, ma se quello x orientamento è presente, allora il suo effetto è maggiore della deformazione.

① Polarizzazione x deformazione:



Consideriamo un modello di atomo in cui Z è il n° atomico (n° di elettroni). Il nucleo ha carica $+Ze$, la nube elettronica invece $-Ze$. In assenza di un $\bar{E}$ esterno i baricentri di queste due distribuzioni coincidono; il nucleo si trova al centro della nube. Se accendo un $\bar{E}$ esterno, questo genera una forza t.c. gli elettroni e i protoni si muovono in direzioni opposte. I baricentri vengono spostati fino a raggiungere un equilibrio tra il campo che separa le cariche e la forza elettrostatica che tende a riunire le cariche. x_0 è lo spostamento relativo dei due baricentri.

Quanto vale x_0 all'equilibrio? Supponiamo che la carica $-Ze$ sia distribuita in modo uniforme con densità ρ in una sfera di raggio $R_0 \simeq 10^{-10}$ m (modello semplificato):

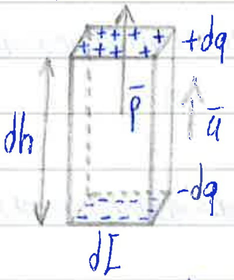
ZIONE A MINORE ENERGIA. IN QUESTO CASO IL VALORE MEDIO NON SARÀ PIÙ ZERO. IL VALORE MEDIO DEL MOMENTO DI DIPOLO $\langle \bar{p} \rangle$ SI MISURA SOMMANDO TUTTI I MOMENTI DI DIPOLO SU UN VOLUMETTO dV INFINITESIMO (CHE CONTIENE UN NUMERO MOLTO GRANDE DI MOLECOLE) E POI DIVIDENDO X IL NUMERO N DI MOLECOLE CONTENUTE IN dV:

$$\cdot \langle \bar{p} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} \bar{p}_i \Rightarrow \sum_{i}^{N} \bar{p}_i \text{ (MOMENTO DI DIPOLO TOTALE IN } dV) = d\bar{p} = N \cdot \langle \bar{p} \rangle.$$

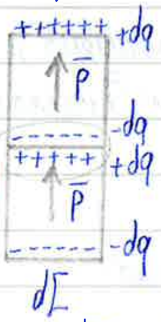
IL VETTORE DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE $\bar{P}$ È DEFINITO COME IL MOMENTO DI DIPOLO X UNITÀ DI VOLUME:

$$\boxed{\cdot \bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV} = \frac{N\langle \bar{p} \rangle}{dV} = n \langle \bar{p} \rangle}$$ CON $n = \frac{N}{dV}$ N° DI MOLECOLE X UNITÀ DI VOLUME;

LA DEFINIZIONE DEL VETTORE $\bar{P}$ È DEL TUTTO GENERALE ED È VALIDA X OGNI FORMA DI POLARIZZAZIONE. CERCHIAMO DI DETERMINARE LA RELAZIONE TRA $\bar{P}$ E LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE CHE GENERANO QUESTO CAMPO.

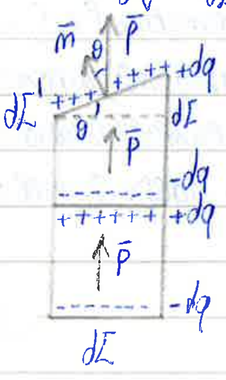


CONSIDERO UN VOLUMETTO dV A FORMA DI PARALLELEPIPEDO TALMENTE PICCOLO DA POTERE CONSIDERARE $\bar{P}$ UNIFORME AL SUO INTERNO. INDICO CON $d\bar{h}$ UN VETTORE CON MODULO dh, OVVERO L'ALTEZZA DEL PARALLELEPIPEDO E ORIENTATO LUNGO $\bar{P}$ (CHE VA DAL ⊖ AL ⊕). IL SISTEMA È EQUIVALENTE AD UN DIPOLO CON MOMENTO TOTALE $d\bar{p} = dq \cdot d\bar{h}$. DENTRO AL VOLUMETTO NON C'È CARICA XCHÈ LE CARICHE INTERNE SI ELIDONO, MA IN SUPERFICIE QUESTO NON SUCCEDE.



SE CONSIDERIAMO $\bar{P}$ UNIFORME DENTRO UN DIELETTRICO, ALLORA VUOL DIRE CHE SE LO SCOMPONGO IN TANTI VOLUMETTI INFINITESIMI, ALLORA NEI PUNTI DI CONTATTO LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE $\pm dq$ SI ELIDONO, SULLE SUPERFICI DEL DIELETTRICO QUESTA COMPENSAZIONE NON AVVIENE. QUINDI SE $\bar{P}$ È UNIFORME NON C'È CARICA DI POLARIZZAZIONE DENTRO AL DIELETTRICO. SE LA SUPERFICIE È ORTOGONALE A $\bar{P}$ (COME IN QUESTO CASO), ALLORA $\sigma_p = dq/d\Sigma$ PERÒ:

$$\cdot \bar{P} = \frac{d\bar{p}}{dV} = \frac{dq\, d\bar{h}}{d\Sigma\, dh} = \frac{dq\, \cancel{dh}}{d\Sigma\, \cancel{dh}}\bar{u} = \frac{dq}{d\Sigma}\bar{u} \Rightarrow \sigma_p = P;$$



SE INVECE LA FACCIA $d\Sigma'$ A CONTATTO CON LA SUPERFICIE È INCLINATA RISPETTO A $\bar{P}$ DI UN ANGOLO θ, ALLORA SICCOME LA CARICA SU $d\Sigma$ È UGUALE A QUELLA SU $d\Sigma'$, ALLORA:

$$\cdot dq(\Sigma) = dq(\Sigma') \Rightarrow P \cdot d\Sigma = \sigma_p \cdot d\Sigma' = \sigma_p (d\Sigma / \cos\theta) \Rightarrow \sigma_p = P \cos\theta = \bar{P} \cdot \bar{m};$$

SE $\bar{P} \cdot \bar{m} > 0$, ALLORA $\sigma_p > 0$, SE $\bar{P} \cdot \bar{m} < 0$ ALLORA $\sigma_p < 0$.

E SE INVECE $\bar{P}$ NON FOSSE UNIFORME? SUPPONIAMO CHE $\bar{P}$ VARI SOLO IN MODULO, MA NON IN DIREZIONE E VERSO. QUESTO CAPITA SE IL MATERIALE NON È OMOGENEO, OVVERO VI SONO MOLECOLE DI TIPO

IN UN MEZZO OMOGENEO $\bar{D}$ È LO STESSO, MA STAVOLTA $\bar{D} = \varepsilon \cdot \bar{E}_T$, QUINDI:

$$\cdot\ \bar{E}_T(\bar{x}) = \frac{1}{\varepsilon}\bar{D}(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon}\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{|\bar{x}-\bar{x}_i|^3}\ ;$$ SI OTTIENE DA QUELLO NEL VUOTO SOSTITUENDO ε_0 CON ε;

CONSIDERIAMO IL CAMPO $\bar{E}_P$ GENERATO DALLE CARICHE DI POLARIZZAZIONE:

$$\cdot\ \bar{P} = -\varepsilon_0\bar{E}_P \Rightarrow \bar{E}_P = -\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \bar{\nabla}\cdot\bar{E}_P = \left(\bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\rho_P\right) = \frac{\rho_P}{\varepsilon_0}$$ QUINDI $\bar{E}_P$ SODDISFA LA LEGGE DI GAUSS, MA X LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE. SE IL MATERIALE È LINEARE (ISOTROPO) E OMOGENEO:

$$\cdot\ \bar{E}_P = -\frac{\bar{P}}{\varepsilon_0} = \left(\bar{P} = \varepsilon_0\chi\bar{E}_T\right) = -\frac{\varepsilon_0\chi}{\varepsilon_0}\bar{E}_T = -\chi\bar{E}_T = -\chi\sum_i^m \frac{q_i}{4\pi\varepsilon}\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{|\bar{x}-\bar{x}_i|^3} =$$

$$= \sum_i^m \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\chi q_i}{\varepsilon_r}\right)\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{|\bar{x}-\bar{x}_i|^3} = \sum \frac{q_{Pi}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{x}-\bar{x}_i}{|\bar{x}-\bar{x}_i|^3} \quad \text{CON } q_{Pi} = -\frac{\chi q_i}{\varepsilon_r};$$

q_{Pi} SONO LE CARICHE DI POLARIZZAZIONE SORGENTI DI $\bar{E}_P$ E SONO UGUALI E OPPOSTE ALLE CARICHE q_i DI CONDUZIONE, QUINDI ATTORNO AD UNA CARICA q_i DI CONDUZIONE SI CREA UNA CARICA DI POLARIZZAZIONE q_{Pi}.
UN'ULTIMA QUESTIONE È DIMOSTRARE CHE LE CARICHE ρ_P EFFETTIVAMENTE ESISTONO SOLO SE IL MATERIALE NON È OMOGENEO. SUPPONIAMO DI ESSERE IN UN DIELETTRICO IN ASSENZA DI CARICHE DI CONDUZIONE:

$$\cdot\ \bar{P} = \varepsilon_0\chi\bar{E}_T = \varepsilon_0\chi\frac{1}{\varepsilon}\bar{D} = \varepsilon_0\chi\frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\bar{D} = \frac{\chi}{\varepsilon_r}\bar{D};$$ FACCIAMO LA DIVERGENZA DI QUESTA ESPRESSIONE:

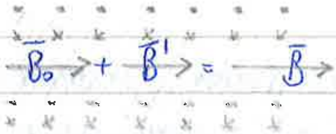
$$\cdot\ \bar{\nabla}\cdot\bar{P} = -\rho_P = \bar{\nabla}\left(\frac{\chi}{\varepsilon_r}\bar{D}\right) = \left(\text{USO LA PROPRIETÀ } \bar{\nabla}(f\cdot\bar{V}) = \bar{\nabla}f\cdot\bar{V} + f\cdot\bar{\nabla}\cdot\bar{V}\right) =$$

$$= \bar{\nabla}\left(\frac{\chi}{\varepsilon_r}\right)\cdot\bar{D} + \frac{\chi}{\varepsilon_r}\bar{\nabla}\bar{D} = \left(\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \bar{0} \text{ NO CARICHE DI CONDUZIONE}\right) = \bar{\nabla}\left(\frac{\chi}{\varepsilon_r}\right)\cdot\bar{D};$$

QUINDI $\rho_P \neq 0$ SE $\bar{\nabla}\left(\frac{\chi}{\varepsilon_r}\right) \neq 0$ QUINDI SE χ E ε_r DIPENDONO DAL PUNTO, OVVERO SE IL MEZZO NON È OMOGENEO.
IN CONCLUSIONE ABBIAMO SCRITTO TRE LEGGI DI GAUSS CHE LEGANO I CAMPI ALLE LORO SORGENTI:

$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\nabla}\cdot\bar{D} = \rho/\varepsilon_0 \\ \bar{\nabla}\cdot\bar{E}_P = -\frac{1}{\varepsilon_0}\bar{\nabla}\cdot\bar{P} = \rho_P/\varepsilon_0 \end{cases} \qquad \bar{\nabla}\cdot\bar{E}_T = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho+\rho_P) \Rightarrow \boxed{\bar{D} = \varepsilon_0\bar{E}_T + \bar{P}}.$$

b) SOSTANZE PARAMAGNETICHE: $\mu_r > 1$, quindi $\chi_m = \mu_r - 1 > 0 \Rightarrow m' i' = \chi_m m \cdot i > 0$, ovvero la corrente amperiana va nello stesso verso della corrente di conduzione. $\bar{B}' = \mu_0 \chi_m m i > 0$ concorde con $\bar{B}_0$:

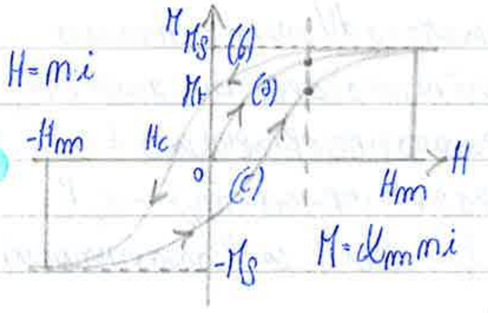


In queste sostanze, quindi l'effetto di $\bar{B}'$ è quello di aumentare l'intensità di $\bar{B}_0$, quindi vale che $|\bar{B}| > |\bar{B}_0|$ con $\chi_m = 10^{-5} \div 10^{-4}$. Esempi sono l'alluminio, il calcio e il magnesio.

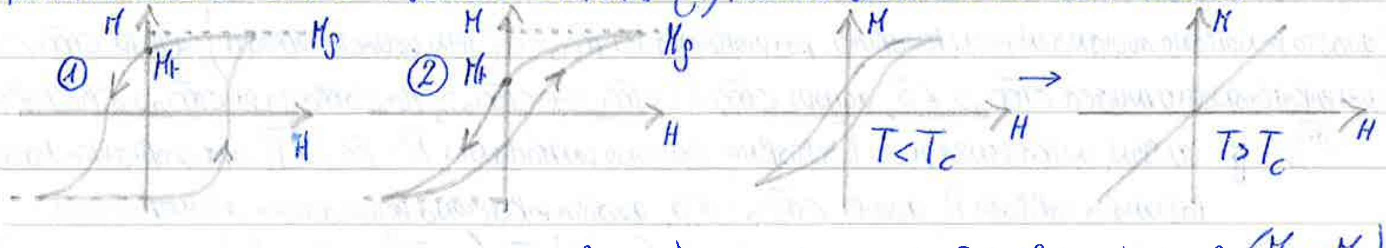
Nei diamagnetici μ_r e χ_m dipendono solo dalla sostanza, ma non dalla temperatura; nei paramagnetici invece μ_r e χ_m dipendono anche dalla temperatura secondo la legge di Curie:

$\chi_m = \frac{K \cdot \rho}{T}$ (se $T \uparrow$ $\chi_m \downarrow$) 1ª legge di Curie, poi perfezionata in $\chi_m = \frac{K\rho}{T - T_c}$ (2ª legge di Curie) con ρ la densità del materiale, K una costante e T_c la temperatura di Curie che specificheremo tra poco.

c) SOSTANZE FERROMAGNETICHE: $\mu_r, \chi_m \approx 10^3 \gg 1$, quindi $|\bar{B}| \gg |\bar{B}_0|$: l'effetto sinergico è molto più forte rispetto ai paramagnetici. Esempi sono il ferro e la magnetite. Anche in questo caso $\bar{M} = \chi_m \bar{H}$, però non è una proporzionalità, $\bar{M}$ non è legato a $\bar{H}$ in modo lineare, quindi χ_m non è una costante. In particolare χ_m dipende da $\bar{H}$; la funzione che lega $\bar{M}$ a $\bar{H}$ non è una funzione ad un solo valore, $\bar{M}$ non dipende solo dalle correnti di conduzione espresse con $\bar{H}$, ma anche da come si è arrivati a quel valore di $\bar{H}$. La storia magnetica del mezzo è detta isteresi ferromagnetica.



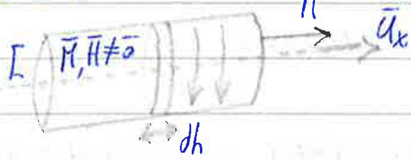
Si parte da $H = 0$ (solenoide non percorso da corrente) e quindi $M = 0$, ovvero magnetizzazione nulla del pezzo di ferro nel solenoide. Se H aumenta fino ad un valore H_m, allora M raggiunge un valore finito M_s di saturazione (campo magnetico esterno molto intenso). Se H diminuisce, allora M diminuisce seguendo un percorso che è diverso, ovvero la curva (b); quando $H = 0$ di nuovo resta una magnetizzazione residua M_r. Calando ancora H ($H < 0$ si inverte la corrente nel solenoide) si arriva ad un valore $H_c < 0$ a magnetizzazione nulla. Diminuendo ancora fino ad un valore $-H_m$ si arriva a $-M_s$. Aumentando H, allora la magnetizzazione aumenta seguendo il percorso (c) fino alla saturazione chiudendo il ciclo.



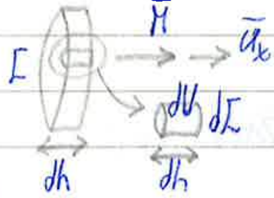
A seconda della forma del ciclo cambiano le proprietà dei ferromagneti: ① ferromagneti duri ($M_r \simeq M_s$)

· RELAZIONE TRA I VETTORI $\bar B, \bar H, \bar M$: CONSIDERO UN SOLENOIDE RIEMPITO DI MATERIALE ISOTROPO E OMOGENEO.

$\bar M = \bar H = \bar 0$



$\bar M = M\bar u_x$ CON $M > 0$, QUINDI STIAMO CONSIDERANDO UN MATERIALE PARAMAGNETICO CON LE CORRENTI AMPERIANE NELLO STESSO VERSO DI QUELLE DI CONDUZIONE. DIVIDO IL MATERIALE IN STRATI DI SPESSORE dh DENTRO CUI $\bar M = \chi_m \bar H$ ($\bar H$ È LO STESSO OVUNQUE E LA CORRENTE DI CONDUZIONE CIRCOLA SOLO SUL SOLENOIDE CHE AVVOLGE IL MATERIALE).



ISOLIAMO LO STRATO E LO DIVIDIAMO IN TANTI CILINDRETTI DI AREA INFINITESIMA $d\Sigma$ CON LO STESSO SPESSORE dh. IL MOMENTO MAGNETICO $d\bar m$ IN dV È DATO DA:

$\cdot\ d\bar m = \bar M \cdot dV = \bar M \cdot d\Sigma\, dh = M\, d\Sigma\, dh\, \bar u_x$;

$d\bar m \neq \bar 0 \sim d\Sigma,\ di_A$

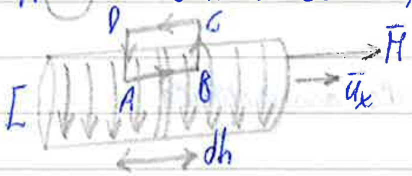
OGNI VOLUMETTO LO POSSO RAPPRESENTARE CON UNA SPIRA DI STESSO MOMENTO MAGNETICO, DI AREA $d\Sigma$ E PERCORSA DA CORRENTE di_A AMPERIANA. VALE QUINDI:

$\cdot\ M\,dh\,d\Sigma\,\bar u_x = \overbrace{di_A\, d\Sigma\, \bar u_x}^{\text{MOMENTO DI UNA SPIRA}} = d\bar m \Rightarrow di_A = M\, dh$ (CORRENTE AMPERIANA EQUIVALENTE);

$\Rightarrow M = di_A / dh$; QUESTA CORRENTE CIRCOLA SULLA SUPERFICIE DEL VOLUMETTO, QUINDI POSSIAMO IMMAGINARE CHE IL MATERIALE SIA DIVISO IN TANTE SPIRE PERCORSE DA CORRENTE, EQUIVERSE A QUELLE DI CONDUZIONE SE IL MATERIALE È PARAMAGNETICO, IN VERSO OPPOSTO SE DIAMAGNETICO. CALCOLO IL $d\bar m$ DELLO STRATO:

$\cdot\ d\bar m_{STRATO} = \int d\bar m_{dV} = \int M\,dh\,d\Sigma\,\bar u_x = M\,dh \int d\Sigma\,\bar u_x = M\,dh\,\Sigma\,\bar u_x = di_A\,\Sigma\,\bar u_x$, OVVERO IL MOMENTO MAGNETICO DI UNA SPIRA, QUINDI OGNI STRATO È ASSIMILABILE AD UNA SPIRA DI SPESSORE INFINITESIMO PERCORSA DA UNA CORRENTE di_A. LE CORRENTI CIRCOLANO SOLO SULLA SUPERFICIE DELLO STRATO:

SE IL MATERIALE È ISOTROPO E OMOGENEO, IN UN PUNTO P ALL'INTERNO SI INCONTRANO 2 SPIRE PERCORSE DALLA STESSA di_A (M È UNIFORME) T.C. $di_A(P) = 0$.

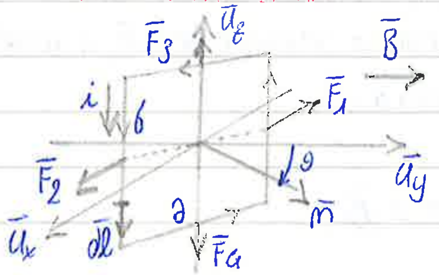


IL CILINDRO È QUINDI ASSIMILABILE AD UN SOLENOIDE DI CARATTERISTICHE m', i' T.C. $m'i' = \chi_m m\, i$ AVVOLTO SUL SOLENOIDE DI PARTENZA.

CONSIDERIAMO UN PERCORSO RETTANGOLARE CON $\overline{AB} = -\overline{CD} = dh\,\bar u_x$ E SUPPONGO VOGLIO CALCOLARE LA CIRCUITAZIONE DI $\bar M$:

$\cdot\ \oint_{ABCD} \bar M \cdot d\bar l = \int_{AB} \bar M \cdot d\bar l + \int_{BC} \bar M \cdot d\bar l + \int_{CD} \bar M \cdot d\bar l + \int_{DA} \bar M \cdot d\bar l$; SU CD $\bar M = \bar 0$, POICHÉ $\bar M \neq \bar 0$ SOLO DENTRO AL MATERIALE, INOLTRE $\bar M \perp \overline{DA}, \overline{BC}$ QUINDI QUESTI DUE LATI NON DANNO CONTRIBUTO. L'UNICO CONTRIBUTO È DATO DAL LATO AB, QUINDI:

MOTO DI UNA SPIRA



SI CONSIDERI UNA SPIRA RETTANGOLARE PERCORSA DA UNA CORRENTE i STAZIONARIA IMMERSA IN UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME $\bar{B} = B\bar{u}_y$, E LIBERA DI RUOTARE INTORNO ALL'ASSE z. $\bar{m}$ È LA NORMALE ALLA SPIRA LEGATA AL VERSO DI i DALLA MANO DESTRA. ϑ È UN ANGOLO ORIENTATO DA $\bar{u}_y$ VERSO $\bar{m}$ CHE DESCRIVE LA POSIZIONE DELLA SPIRA NEL TEMPO. IN FIGURA $\vartheta < 0$ POICHÉ X ANDARE DA $\bar{u}_y$ A $\bar{m}$ BISOGNA MUOVERSI IN VERSO ORARIO (ϑ DECRESCENTI).

LE FORZE AGENTI SU OGNI LATO DELLA SPIRA SONO DATE DALLA 2ª FORMULA DI LAPLACE ELEMENTARE:

$$\cdot\, d\bar{F}(\bar{x}) = i\, d\bar{l}(\bar{x}) \wedge \bar{B}(\bar{x}) \Rightarrow \bar{F} = \oint_{SPIRA} d\bar{F} = \oint_{SPIRA} i\, d\bar{l}(\bar{x}) \wedge \underbrace{\bar{B}(\bar{x})}_{UNIFORME} = i\left(\oint_{SPIRA} d\bar{l}(\bar{x})\right) \wedge \bar{B};$$

$\bar{B}$ È UNIFORME QUINDI SI PUÒ PORTARE FUORI DALL'INTEGRALE, COME ANCHE LA CORRENTE i. L'INTEGRALE $\oint_{SPIRA} d\bar{l}(\bar{x})$ È LA SOMMA DI TANTI VETTORI LUNGO UNO SPOSTAMENTO CHIUSO, QUINDI È ZERO:

$$\Rightarrow \bar{F} = i\left(\oint_{SPIRA} d\bar{l}(\bar{x})\right) \wedge \bar{B} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 + \bar{F}_4 = \bar{0};$$ ESPLICITIAMO LE FORZE CON LA LEGGE DI LAPLACE:

$$\cdot\, \bar{F}_1 = i\bar{b} \wedge \bar{B} = i(+b\bar{u}_z) \wedge (B\bar{u}_y) = ibB(\bar{u}_z \wedge \bar{u}_y) = -ibB\bar{u}_x;$$

$$\cdot\, \bar{F}_2 = i(-b\bar{u}_z) \wedge (B\bar{u}_y) = -ibB(\bar{u}_z \wedge \bar{u}_y) = ibB\bar{u}_x;$$

$$\cdot\, \bar{F}_3 = i(-a\bar{u}_x) \wedge (B\bar{u}_y) = -iaB(\bar{u}_x \wedge \bar{u}_y) = iaB\bar{u}_z = -\bar{F}_4;$$

ANCHE SE LA SOMMA DELLE FORZE È ZERO QUESTO NON ESCLUDE AZIONI MECCANICHE. RISPETTO ALL'ASSE z LE FORZE $\bar{F}_3$ E $\bar{F}_4$ NON CREANO MOMENTO XCHÉ ALLINEATE CON L'ASSE z. $\bar{F}_1$ E $\bar{F}_2$ INVECE CREANO UN MOMENTO RISULTANTE:

$$\cdot\, \bar{M} = \bar{M}(\bar{F}_1) + \bar{M}(\bar{F}_2) = \bar{r}_1 \wedge \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \wedge \bar{F}_2 = (\bar{F}_2 = -\bar{F}_1) = \bar{r}_1 \wedge \bar{F}_1 + \bar{r}_2 \wedge (-\bar{F}_1) = (\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \wedge \bar{F}_1;$$

$\bar{r}_1$ E $\bar{r}_2$ SONO I VETTORE POSIZIONE CHE COLLEGANO L'ORIGINE CON IL PUNTO MEDIO DEI DUE LATI VERTICALI, QUINDI IL VETTORE $\bar{r}_1 - \bar{r}_2$ È ORIENTATO COME $\bar{F}_1$, QUINDI IL PRODOTTO VETTORIALE È RIVOLTO COME $\bar{u}_z$, MA ESSENDO $\vartheta < 0$, ALLORA $\sin\vartheta < 0$, IL PRODOTTO VETTORIALE VERREBBE DISCORDE CON $\bar{u}_z$. SERVE UN "−" X FAR TORNARE IL PRODOTTO VETTORIALE:

$$\cdot\, \bar{M} = -\underbrace{|\bar{r}_1 - \bar{r}_2|}_{a}\, |\bar{F}_1| \sin\vartheta\, \bar{u}_z = -\underbrace{a\, ib}_{m} B \sin\vartheta\, \bar{u}_z;$$ SE $\vartheta < 0$ $\bar{M}$ È RIVOLTO COME $\bar{u}_z$, SE $\vartheta > 0$ $\bar{M}$ È RI=

$$= \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_\oplus}}^{+q} - \overbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_\ominus}}^{-q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_\oplus}-\frac{1}{r_\ominus}\right);$$

ESPRIMIAMO $r_\oplus$ E $r_\ominus$ IN FUNZIONE DELLE COORDINATE DEL PUNTO P DI OSSERVAZIONE. POICHÉ P È MOLTO DISTANTE, ALLORA GLI ANGOLI AL VERTICE SONO MOLTO PICCOLI.

① TRIANGOLO APA': SE L'ANGOLO AL VERTICE È CIRCA ZERO, ALLORA LA SOMMA DEI DUE ANGOLI ALLA BASE È CIRCA 180°, QUINDI $A\hat{A'}P \simeq A'\hat{A}P \approx 90°$, QUINDI È UN TRIANGOLO ISOSCELE, QUINDI $|AP| \simeq |A'P| = r_\oplus$. INOLTRE:

$\cdot\ |AP| = |OP| - |OA'| \Rightarrow r_\oplus = r - |OA|\cos\theta = r - \frac{a}{2}\cos\theta;$

② TRIANGOLO OPO': X LO STESSO MOTIVO DI PRIMA $|OP| \simeq |O'P|$ E IL TRIANGOLO È ISOSCELE. INOLTRE:

$\cdot\ |OP| \simeq |O'P| = r \to |O'P| = |BP| - |BO'| \Rightarrow r = r_\ominus - \frac{a}{2}\cos\theta \Rightarrow r_\ominus = r + \frac{a}{2}\cos\theta.$

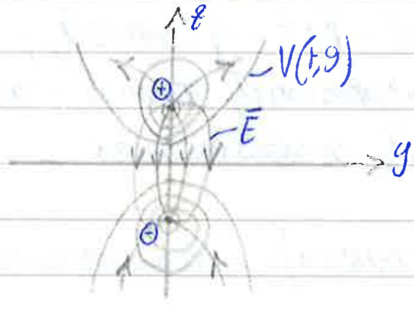
$$\begin{cases} r_\oplus = r - \frac{a}{2}\cos\theta \\ r_\ominus = r + \frac{a}{2}\cos\theta \end{cases} \Rightarrow V(r,\theta) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r - \frac{a}{2}\cos\theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2}\cos\theta}\right) =$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cancel{r} + \frac{a}{2}\cos\theta - (\cancel{r} - \frac{a}{2}\cos\theta)}{r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\cos\theta}{r^2 - \frac{a^2}{4}\cos^2\theta}\right) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{1}{\left(1 - \cancel{\frac{a^2}{4r^2}}\cos^2\theta\right)}$$

$$= \frac{\overbrace{qa}^{p}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow V(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2};$$

LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO QUELLE X CUI IL POTENZIALE È COSTANTE, DA QUESTA CONDIZIONE POSSIAMO RICAVARE L'ANDAMENTO DELLE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI:

$\cdot\ V(r,\theta) = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Rightarrow r^2 = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 V_0}$; SE $V_0 > 0$ (SEMIPIANO CON LA CARICA POSITIVA), ALLORA DEVE VALERE CHE $\cos\theta > 0$. PIÙ CI AVVICINIAMO ALL'ASSE z PIÙ θ DIMINUISCE, QUINDI $\cos\theta \uparrow$. SE INVECE CI ALLONTANIAMO DA z, ALLORA $\theta \uparrow$ E $\cos\theta \downarrow$. POICHÉ $V(r,\theta)$, MANCA LA DIPENDENZA DA φ QUINDI RUOTANDO ATTORNO ALL'ASSE z LE SUPERFICI RIMANGONO LE STESSE. SCELGO IL PIANO $x=0$, IN TUTTI GLI ALTRI PIANI CHE SI ORIGINANO DALL'ASSE z L'ANDAMENTO SI RIPETE:



STANDO VICINO AD UNA CARICA, ALLORA SI VEDE SOLO IL CAMPO DI UNA CARICA, QUINDI LE SUPERFICI EQUIPOTENZIALI SONO DELLE SFERE. ALLONTANANDOSI LE SUPERFICI SI DEFORMANO E SARANNO ORTOGONALI ALLE LINEE DI CAMPO DEL CAMPO $\bar{E}$. NEL SEMIPIANO CONTENENTE LA CARICA NEGATIVA $(V_0 < 0)$ L'ANDAMENTO SARÀ SPECULARE RISPETTO L'ASSE y.

CONSIDERIAMO UN SISTEMA DI CARICHE POSITIVE E NEGATIVE (X ESEMPIO L'ATOMO) GLOBALMENTE NEUTRO CON I BARI=

LA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE È QUELLA X CUI $\vartheta = 0$ $(\bar{M} = \bar{0})$ OVVERO $\bar{p}$ E $\bar{E}$ SONO PARALLELI CONCORDI. IL LAVORO FATTO DALLA COPPIA X FAR RUOTARE IL DIPOLO DA ϑ_1 A ϑ_2 È DATO DA:

$$\cdot W = \int M\, d\vartheta = -pE\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sin\vartheta\, d\vartheta = pE\left(\cos\vartheta_2 - \cos\vartheta_1\right) = U(\vartheta_1) - U(\vartheta_2);$$

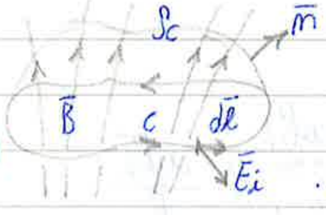
$$\cdot U(\vartheta_2) = -pE\cos\vartheta_2 + \left[pE\cos\vartheta_1 + U(\vartheta_1)\right];$$ SCELGO $\vartheta_1 = 0$ DI RIFERIMENTO IN MODO CHE $U(\vartheta_1) = 0$, IN QUESTO MODO POSSO FISSARE L'ENERGIA POTENZIALE A QUALUNQUE ϑ, OVVERO IL LAVORO FATTO DALLE FORZE ELETTRICHE X FAR RUOTARE IL DIPOLO DA ϑ A $\vartheta = 0$ CORRISPONDENTE ALLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE:

$$\cdot U(\vartheta) = -pE\cos\vartheta + pE = pE\left(1 - \cos\vartheta\right);$$

IL CAMPO ELETTROSTATICO TENDE A FAR RUOTARE IL DIPOLO ELETTRICO FINO A QUANDO $\bar{p}$ E $\bar{E}$ SONO // E CONCORDI, CONDIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE. SE INVECE $\vartheta = \pi$ ALLORA $\bar{p}$ E $\bar{E}$ SONO // DISCORDI ED È UNA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO INSTABILE A ENERGIA POTENZIALE MASSIMA.

CORRENTE ALTERNATA

CONSISTE IN UNA IMPORTANTE APPLICAZIONE DELLA LEGGE DI FARADAY - NEUMANN - LENZ SECONDO CUI UN CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ VARIABILE NEL TEMPO GENERA UN CAMPO ELETTRICO $\bar{E}_i$ NON CONSERVATIVO CHE PRODUCE UNA CORRENTE INDOTTA.



$$\cdot \mathcal{E}_i = \oint_C \bar{E}_i\, d\bar{l} = -\frac{d}{dt}\Phi_C(\bar{B});$$ SCRIVIAMO LA LEGGE IN FORMA LOCALE:

$$\cdot \frac{d}{dt}\Phi_C(\bar{B}) = \frac{d}{dt}\int_{S_C} \bar{B}\cdot\bar{m}\, dS = \int_{S_C} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,\bar{m}\cdot dS;$$

$\bar{B}$ DIPENDE DAL TEMPO E DALLE COORDINATE DEL PUNTO, QUINDI LA DERIVATA, UNA VOLTA PORTATA DENTRO AL SEGNO DI INTEGRALE, DIVENTA DERIVATA PARZIALE.

$$\cdot \oint_C \bar{E}_i\, d\bar{l} = (\text{LEGGE DI STOKES}) = \int_{S_C} \left(\bar{\nabla}\wedge\bar{E}_i\right)\bar{m}\, dS;$$

$$\Rightarrow \int_{S_C} \left(\bar{\nabla}\wedge\bar{E}_i\right)\bar{m}\, dS = -\int_{S_C} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\,\bar{m}\cdot dS;$$ L'UGUAGLIANZA VALE X OGNI S_C, QUINDI POSSO CONSIDERARE UN CONTORNO INFINITESIMO CHE RACCHIUDE UN'AREA dS INFINITESIMA NELLO INTORNO DI UN PUNTO P. INOLTRE I DUE INTEGRALI NON DIPENDONO DA S_C. POICHÉ dS È INFINITESIMA L'INTEGRALE CONSISTE DI UN SOLO TERMINE:

ATTENZIONE CHE $\bar{m}$ È LEGATO AL VERSO DELLA CORRENTE DALLA MANO DESTRA, $\bar{m}$ NON SA NIENTE DEL VERSO DI PERCORRENZA SCELTO; X LA PARTICOLARE CONFIGURAZIONE SCELTA, $\bar{m}$ È // DISCORDE CON $\bar{m}$, SE LA CORRENTE FOSSE ANDATA IN VERSO OPPOSTO ALLORA $\bar{m} // \bar{m}$ CONCORDE.

SI OSSERVA CHE $\bar{M}$ È // DISCORDE CON $\bar{\omega}$ SEMPRE, QUINDI SI OPPONE AL MOTO FACENDO LAVORO NEGATIVO. X MANTENERE LA SPIRA IN MOTO CON ω = COSTANTE OCCORRE FARE UN MOMENTO $\bar{M}$ UGUALE E OPPOSTO ($\bar{M}$ TENDEREBBE A FRENARE LA SPIRA). SE PASSO DA $t=0$ ALL'ISTANTE $t+dt$, $\bar{M}$ PRODUCE UN LAVORO:

$$\cdot\, dW=\bar{M}\cdot d\vartheta=\bar{M}\bar{\omega}\,dt \rightarrow P=\frac{dW}{dt}=\bar{M}\cdot\bar{\omega}=-\omega^2\frac{L^2B^2}{R}\sin^2(\vartheta(t))<0 \text{ (LAVORO NEGATIVO)};$$

AFFINCHÉ ω = COSTANTE OCCORRE APPLICARE UNA POTENZA CHE È $P'=-P$:

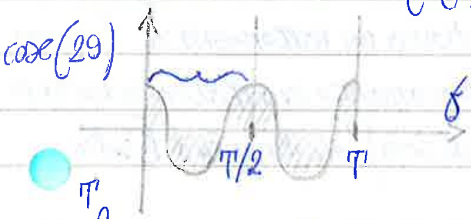
$$\cdot\, P'=-P=\omega^2\frac{L^2B^2}{R}\sin^2(\vartheta(t))>0=i^2(t)\cdot R,$$

QUINDI LA POTENZA P' VIENE DISSIPATA SULLA RESISTENZA CON EFFETTO JOULE IN FORMA DI CALORE.

SI PUÒ DEFINIRE UNA POTENZA MEDIA SCAMBIATA IN UN PERIODO T:

$$\cdot\, P_m=\frac{1}{T}\int_0^T P'(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{(\mathcal{E}_i^{Max})^2}{R}\sin^2(\omega t+\vartheta_0)\,dt;$$

USO LA PROPRIETÀ CHE $\sin^2(\vartheta(t))=\dfrac{1-\cos(2\vartheta(t))}{2}$ CON $\cos(2\vartheta(t))=\cos(\overset{\omega'}{2\omega} t+2\vartheta_0)$:



$$T=\frac{2\pi}{\omega},\quad T'=\frac{2\pi}{\omega'}=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}=\frac{T}{2};$$

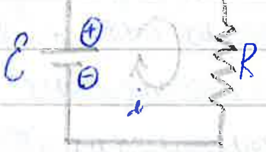
QUINDI LA FUNZIONE $\cos(2\vartheta)$ HA PERIODO CHE È LA METÀ DI $\sin(\vartheta(t))$.

POSSO QUINDI DIRE CHE:

$$\cdot\int_0^T\cos(2(\vartheta(t)))=0$$

IN QUANTO LE AREE SI ELIDONO A VICENDA. ORA FACCIAMO L'INTEGRALE:

$$\cdot\, P_m=\frac{(\mathcal{E}_i^{Max})^2}{RT}\int_0^T\frac{1}{2}\left(1-\cancel{\cos(2\vartheta(t))}^{\,0}\right)dt=\frac{(\mathcal{E}_i^{Max})^2}{R\cancel{T}}\frac{1}{2}\cancel{T}=\boxed{\frac{1}{2R}(\mathcal{E}_i^{Max})^2};$$



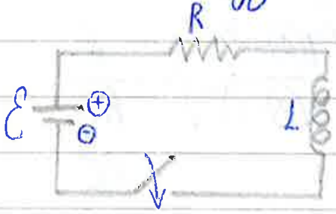
SE LA CORRENTE FOSSE CONTINUA LA POTENZA DISSIPATA SU R IN UN CIRCUITO ALIMENTATO DA $\mathcal{E}$:

$$\cdot\, P=Ri^2=\frac{\mathcal{E}^2}{R}\Rightarrow P_m=\frac{(\mathcal{E}_{eff})^2}{R}=\frac{1}{2R}(\mathcal{E}_i^{Max})^2\Rightarrow\boxed{\mathcal{E}_{eff}=\mathcal{E}_i^{Max}/\sqrt{2}};$$

$\mathcal{E}_{eff}$ È DETTA f.e.m EFFICACE ED È QUELLA CHE IN UN CIRCUITO A CORRENTE CONTINUA EROGA UNA POTENZA PARI ALLA POTENZA MEDIA EROGATA IN UN CIRCUITO A CORRENTE ALTERNATA.

LA CORRENTE $i(t)$ È DOVUTA ALLE CARICHE POSITIVE X CONVENZIONE, QUINDI POICHÉ LE CARICHE ⊕ SI MUOVONO DA POTENZIALE PIÙ ALTO A PIÙ BASSO, ALLORA $V_A > V_B$. CONSIDERIAMO LA PARENTESI $(V_D - V_C)$, IN BASE A CIÒ DETTO VALE CHE $V_C > V_D$, QUINDI $V_D - V_C = -L(di/dt)$. QUINDI L'EQUAZIONE DIVENTA:

$$\mathcal{E} - Ri - L\frac{di}{dt} + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{E} = Ri + L\frac{di}{dt}}$$ (EQUAZIONE CHE TIENE CONTO DELL'AUTOINDUZIONE);



SUPPONIAMO CHE A $t<0$ IL CIRCUITO SIA APERTO; A $t \geq 0$ CHIUDO L'INTERRUTTORE E INIZIA A CIRCOLARE CORRENTE, ALL'INIZIO INVECE NON CIRCOLAVA CORRENTE. ADESSO RISOLVO L'EQUAZIONE:

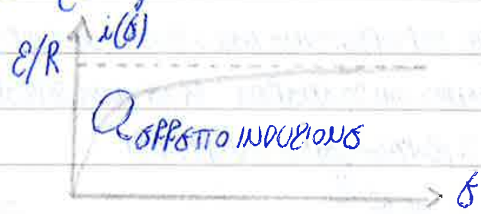
$$\mathcal{E} = Ri + L\frac{di}{dt} \Rightarrow \frac{di}{dt} = \frac{(\mathcal{E}-Ri)}{L} \rightarrow \frac{di}{\mathcal{E}-Ri} = \frac{dt}{L} \rightarrow \frac{di}{Ri-\mathcal{E}} = -\frac{dt}{L}$$; ADESSO INTEGRO:

$$\int_{i(0)}^{i(t)} \frac{di}{Ri-\mathcal{E}} = -\frac{1}{L}\int_0^t dt = -\frac{t}{L}$$; FACCIO UN CAMBIO DI VARIABILE: $y = Ri - \mathcal{E} \rightarrow \frac{di}{dy} = \frac{1}{R}$;

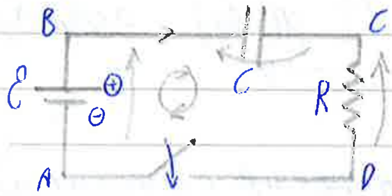
$$\Rightarrow \int_{y(i(0))}^{y(i(t))} \frac{1}{y}\frac{1}{R}dy = -\frac{t}{L} \Rightarrow \int_{Ri(0)-\mathcal{E}}^{Ri(t)-\mathcal{E}} \frac{dy}{y} = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \ln y \Big|_{Ri(0)-\mathcal{E}}^{Ri(t)-\mathcal{E}} = -\frac{R}{L}t;$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{Ri(t)-\mathcal{E}}{Ri(0)-\mathcal{E}}\right) = -\frac{R}{L}t \Rightarrow \frac{Ri(t)-\mathcal{E}}{Ri(0)-\mathcal{E}} = e^{-\frac{R}{L}t}$$ POICHÉ $i(t=0) = 0$:

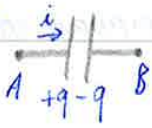
$$\Rightarrow \frac{R}{\mathcal{E}}i(t) - 1 = -e^{-\frac{R}{L}t} \Rightarrow \boxed{i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)}$$



LA CORRENTE VARIA IN MODO ESPONENZIALE FINO A STABILIZZARSI SU UN VALORE LIMITE X $t \to +\infty$ OVVERO $\mathcal{E}/R$ COSTANTE. I FENOMENI DI AUTOINDUZIONE SI SENTONO SOLO ALL'INIZIO, POI DIVENTANO PIÙ PICCOLI NEL TEMPO. SCRIVO L'ESPONENZIALE COME $e^{-t/\tau}$ CON $\tau = L/R$ DETTO TEMPO DI RILASSAMENTO. DOPO 2-3 τ LA CORRENTE CON BUONA APPROSSIMAZIONE SI STABILIZZA. LA CORRENTE DI REGIME È QUELLA CHE CI SAREBBE SENZA INDUZIONE.



ADESSO CONSIDERO UN CIRCUITO CONTENENTE UN CONDENSATORE (CIRCUITO RC). STUDIAMO LA CARICA DI UN CONDENSATORE USANDO LE LEGGI DI KIRCHHOFF.

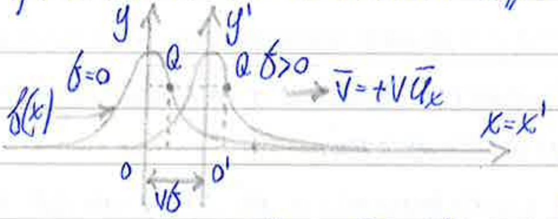


$V_A - V_B = \frac{q}{C}$ (CARATTERISTICA DEL CONDENSATORE)

VELOCITÀ COSTANTE IN UNA SOLA DIREZIONE SENZA CAMBIARE FORMA. IL PUNTO P VIENE SPOSTATO DALLA SUA POSIZIONE INIZIALE (SI MUOVE SU E GIÙ); A SEGUITO DEL PASSAGGIO DELL'ONDA AD OGNI PUNTO È TRASMESSA ENERGIA E METTERLA IN MOTO. SI DISTINGUONO 2 CLASSI IMPORTANTI DI ONDE:

1) ONDE TRASVERSALI: LO SPOSTAMENTO È $\perp$ ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE (CASO DELLA CORDA);

2) ONDE LONGITUDINALI: LO SPOSTAMENTO È $//$ ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE (ONDA SONORA).



DA $t=0$ A $t>0$ L'ONDA SI È SPOSTATA SENZA CAMBIARE PROFILO. E ADESSO SUPP. CHE L'ONDA SI SPOSTI VERSO DESTRA. A $t=0$ LA FORMA DEL PROFILO È DESCRITTA DA UNA FUNZIONE $y(x,t=0)=f(x)$.

I DUE RIFERIMENTI $S\{O,x,y\}$ E $S'\{O',x',y'\}$ A $t=0$ COINCIDONO, MENTRE IN $t>0$ IL RIFERIMENTO S RESTA FISSO MENTRE S' SEGUE L'ONDA E SI MUOVE CON ESSA. RISPETTO A S' IL PROFILO È DESCRITTO SEMPRE DALLA STESSA FUNZIONE $f(x')$, QUINDI E $t>0$ VALE CHE LO SPOSTAMENTO $y(x,t)=f(x')$.

POICHÉ S E S' SI MUOVONO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME UNO RISPETTO ALL'ALTRO, ALLORA VALGONO LE LEGGI DI TRASFORMAZIONE DI GALILEO PER POTER SCRIVERE x' IN TERMINI DI x:

- $x=x'+vt \Rightarrow x'=x-vt$; UN PUNTO Q RESTA FISSO SUL PROFILO, INFATTI LA SUA ORDINATA È LA STESSA A $t=0$ PER S E E QUALUNQUE t PER S', QUINDI:

$\Rightarrow y(x_Q,0)=y(x'_Q,t)=f(x'_Q)=f(x_Q-vt)$, MA POICHÉ $y(x,t)=f(x')$ ALLORA:

$$\Rightarrow y(x,t)=f(x')=f(x-vt)\ \text{(VERSO DESTRA)} \qquad y(x,t)=f(x+vt)\ \text{(VERSO SINISTRA)};$$

QUESTA CONDIZIONE DESCRIVE UN'ONDA DOPO AVER IMPOSTO CHE L'ONDA NON CAMBI FORMA. QUINDI UNA FUNZIONE DESCRIVE UN'ONDA SE x, t SI TROVANO IN UNA COMBINAZIONE BEN PRECISA. UN PUNTO SUL PROFILO IN CUI LA PERTURBAZIONE HA UN DETERMINATO VALORE E ANDAMENTO DEFINISCE LA FASE. NEL NOSTRO CASO LA FASE È DEFINITA DA $x'=x\pm vt$ (x' DEFINISCE UN PUNTO CHE SI MUOVE CON IL PROFILO). SE CONSIDERIAMO Q VALE CHE x'_Q È COSTANTE, QUINDI $dx'_Q/dt=0$:

$$\Rightarrow \frac{dx'_Q}{dt}=\frac{d}{dt}(x_Q\pm vt)=0 \Rightarrow \frac{dx_Q}{dt}=v_Q=\mp v,$$

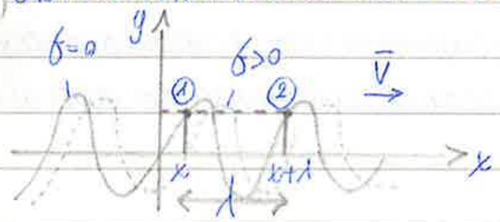
IN S IL PUNTO Q SI MUOVE CON VELOCITÀ v_Q, VERSO DESTRA SE L'ONDA SI MUOVE VERSO DESTRA, VERSO SINISTRA SE L'ONDA SI MUOVE VERSO SINISTRA. ATTENZIONE CHE IL PUNTO Q NON È FISSO RISPETTO ALLA CORDA, MA ISTANTE X ISTANTE CORRISPONDE A PUNTI DIVERSI DELLA CORDA, PERÒ SUL PROFILO Q È UN PUNTO CON UN VALORE DI y_Q BEN PRECISO E UN x'_Q BEN PRECISO.

CERCHIAMO ADESSO L'EQUAZIONE DELLE ONDE USANDO LA RELAZIONE $\boxed{y(x,t)=f(x\pm vt)}$:

NEL CASO DI UN'ONDA PIANA CHE SI PROPAGA LUNGO x VALE CHE $\frac{\partial \vec{f}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{f}}{\partial z} = 0$ E SI RITROVA L'EQUAZIONE DI PRIMA.

$$\begin{cases} \nabla^2 f_x - 1/v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_x = 0 \quad (x) \\ \nabla^2 f_y - 1/v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_y = 0 \quad (y) \\ \nabla^2 f_z - 1/v^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} f_z = 0 \quad (z) \end{cases}$$

UNA PARTICOLARE ONDA UNIDIMENSIONALE È L'ONDA ARMONICA, OVVERO UN'ONDA CHE IN UN CERTO ISTANTE t È DESCRITTA DA UN PROFILO SINUSOIDALE O COSINUSOIDALE.



$$t=0) \quad y(x,t=0) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right);$$

$$t>0) \quad y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi x'}{\lambda}\right) = y_0 \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)\right];$$

I PUNTI ① E ② SONO DUE PUNTI CON LA STESSA FASE, QUINDI DUE FRONTI D'ONDA CHE SENTONO LA STESSA PERTURBAZIONE. IL PROFILO SI RIPETE CON REGOLARITÀ NELLO SPAZIO E LO STESSO VALE PER TUTTI I PUNTI x, $x+\lambda$, $x+2\lambda$ E COSÌ VIA. SE INFATTI CONSIDERO UN PUNTO x E LO MANDO IN $x+\lambda$:

$\frac{2\pi x}{\lambda} \to \frac{2\pi}{\lambda}(x+\lambda) = \frac{2\pi x}{\lambda} + 2\pi$; IL VALORE DEL SENO È VARIATO DI 2π, QUINDI NON È CAMBIATO. IL PROFILO QUINDI SI RIPETE CON REGOLARITÀ NELLO SPAZIO A INTERVALLI PARI A λ (t FISSATO). λ È DETTA LUNGHEZZA D'ONDA ED È ANCHE LA DISTANZA TRA DUE FRONTI D'ONDA SUCCESSIVI. IL PERIODO T DELL'ONDA A COPRIRE UNA DISTANZA PARI A λ:

$\cdot\, T = \frac{\lambda}{v}$ (PERIODO) $\quad \cdot\, \nu = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda}$ (FREQUENZA); $\quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \frac{v}{\lambda}$ (PULSAZIONE).

$\cdot\, y(x,t) = y_0 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - \frac{2\pi}{T} t\right) = y_0 \sin(kx - \omega t)$ CON $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (NUMERO D'ONDA);

UN PUNTO INVESTITO DA UN'ONDA ARMONICA INIZIA A MUOVERSI IN ALTO E IN BASSO (UN PUNTO FISSO RISPETTO ALLA CORDA) QUINDI:

$\cdot\, y(x_P,t) = y_0 \sin(kx_P - \omega t)$ OGNI PUNTO ESEGUE UN MOTO ARMONICO. LA FASE DI UN'ONDA ARMONICA È

c) LUNGO x: $(\bar\nabla\wedge\bar B)_x = \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_z}{\partial y}}}_{0} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_y}{\partial z}}}_{0} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_x}{\partial t} = 0$;

DA QUESTO DEDUCIAMO CHE LE COMPONENTI LUNGO x DI $\bar E$ E $\bar B$ (E_x, B_x) SONO COSTANTI E NON DIPENDONO DA NULLA. CAMPI COSTANTI SONO DOVUTI A DELLE SORGENTI (PIANO INFINITO DI CARICA O SOLENOIDE INFINITO), MA POICHÉ SIAMO LONTANI DALLE SORGENTI, ALLORA POSSIAMO PORRE $E_x = B_x = 0$. L'ONDA CHE CERCHIAMO QUINDI È CARATTERIZZATA DA:

$$\rightarrow E_y(x,t),\ E_z(x,t);\ B_y(x,t),\ B_z(x,t) \Rightarrow \bar E(x,t),\ \bar B(x,t) \perp \text{ ALL'ASSE } x;$$

QUESTI VETTORI, NON AVENDO COMPONENTE LUNGO LA DIREZIONE x DI PROPAGAZIONE, DESCRIVONO ONDE TRASVERSALI, ANCHE LE ONDE ELETTROMAGNETICHE SONO ONDE TRASVERSALI.

SCRIVIAMO LA a) E LA c) LUNGO y E z:

$$\text{a) LUNGO } z: (\bar\nabla\wedge\bar E)_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial y}}}_{0} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t};\ (1)$$

$$\text{a) LUNGO } y: (\bar\nabla\wedge\bar E)_y = \underbrace{\cancel{\frac{\partial E_x}{\partial z}}}_{0} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial B_y}{\partial t};\ (2)$$

$$\text{c) LUNGO } z: (\bar\nabla\wedge\bar B)_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial y}}}_{0} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_z}{\partial t};\ (3)$$

$$\text{c) LUNGO } y: (\bar\nabla\wedge\bar B)_y = \underbrace{\cancel{\frac{\partial B_x}{\partial z}}}_{0} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t};\ (4)$$

DERIVIAMO L'EQUAZIONE (1) RISPETTO A x:

$$(1)\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}B_z = (\text{LE DERIVATE PARZIALI SONO SIMMETRICHE}) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}B_z\right) =$$

$$= (\text{DALLA } (4)) = -\frac{\partial}{\partial t}\left[-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}E_y\right] = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y;$$

$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y = 0$ È L'EQUAZIONE DI UN'ONDA PIANA CHE SI PROPAGA LUNGO L'ASSE x CHE SI MUOVE CON VELOCITÀ $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$, ANCHE $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \simeq 3\cdot10^8\,m/s$.

DERIVIAMO L'EQUAZIONE (2) RISPETTO A x:

$$(2)\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}B_y\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x}B_y\right) = (\text{DALLA } (3)) = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z;$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}E_z - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_z = 0;$$

① $\frac{\partial}{\partial x}E_y = -\frac{\partial}{\partial t}B_z \Rightarrow KE_{0y}\cos(Kx-\omega t) = \omega B_{0z}\cos(Kx-\omega t) \Rightarrow E_y = \frac{\omega}{K}B_z = cB_z;$

② $\frac{\partial}{\partial z}E_z = \frac{\partial}{\partial t}B_y \Rightarrow KE_{0z}\cos(Kx-\omega t) = -\omega B_{0y}\cos(Kx-\omega t) \Rightarrow E_z = -\frac{\omega}{K}B_y = -cB_y;$

$\begin{cases} E_y = cB_z \\ E_z = -cB_y \end{cases}$ BASTANO QUINDI AD ESEMPIO E_y, E_z PER DEFINIRE COMPLETAMENTE IL CAMPO ELETTROMAGNETICO. SI DICE CHE L'ONDA ELETTROMAGNETICA HA 2 GRADI DI LIBERTÀ E VALE X OGNI TIPO DI ONDA.

CALCOLIAMO $\bar{E}\cdot\bar{B}$:

$$\Rightarrow \bar{E}\cdot\bar{B} = E_yB_y + E_zB_z = cB_zB_y - cB_yB_z = 0 \Rightarrow \bar{E}\perp\bar{B};$$

CALCOLIAMO $\bar{E}\wedge\bar{B}$:

$$\Rightarrow \bar{E}\wedge\bar{B} = (\text{HA UNA SOLA COMPONENTE LUNGO } \bar{u}_x) = (E_yB_z - E_zB_y)\bar{u}_x =$$

$$= c(B_z^2 + B_y^2)\bar{u}_x = c|\bar{B}|^2\bar{u}_x$$ // CONCORDE CON IL VERSO DI PROPAGAZIONE;

I MODULI DI $\bar{E}$ E DI $\bar{B}$ NON SONO INDIPENDENTI:

$$|\bar{E}|^2 = E_y^2 + E_z^2 = c^2(B_z^2 + B_y^2) = c^2|\bar{B}|^2 \Rightarrow \boxed{|\bar{E}| = c|\bar{B}|;}$$

DUNQUE LE PROPRIETÀ DELLE ONDE ELETTROMAGNETICHE NEL VUOTO SONO:

1) $\bar{E}, \bar{B}$ SONO PERPENDICOLARI ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE ($\bar{E}\wedge\bar{B}$ // CON IL VERSO DI PROPAGAZIONE);

2) $\bar{E}, \bar{B}$ NON SONO INDIPENDENTI: $|\bar{E}| = c|\bar{B}|$ E POICHÉ $\bar{E}\wedge\bar{B}$ PUNTA VERSO IL VERSO DI PROPAGAZIONE DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA, ALLORA DATI $\bar{v}$ E $\bar{E}$, ALLORA $\bar{B}$ È FISSATO;

3) $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ È LA VELOCITÀ DELLE ONDE NEL VUOTO. IN UN MEZZO ISOTROPO E OMOGENEO $\varepsilon_0 \to \varepsilon$ E $\mu_0 \to \mu$ E LA VELOCITÀ DELL'ONDA SI INDICA CON $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon} = (1/\sqrt{\mu_r\varepsilon_r})(1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}) = c/n$ CON $n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r}$ DETTO INDICE DI RIFRAZIONE. POICHÉ $n > 1$, ALLORA $v < c$, OVVERO LA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE IN UN MEZZO È MINORE RISPETTO A QUELLA NEL VUOTO.

ALTRA CARATTERISTICA DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO È LA POLARIZZAZIONE. POICHÉ PER DESCRIVERE UN'ONDA BASTA FISSARE $\bar{E}$, LA POLARIZZAZIONE È LEGATA AL VERSO DI $\bar{E}$ IN OGNI ISTANTE. 2 TIPI DI POLARIZZAZIONE:

a) LINEARE: IN OGNI PUNTO IL VETTORE $\bar{E}$ VARIA IN MODULO, MA SEMPRE NELLA STESSA DIREZIONE. X ONDE PIANE:

$\bar{E}(x,t) = \bar{E}_0\sin(Kx-\omega t)$, $\bar{E}$ OSCILLA IN MODULO MANTENENDOSI // A $\bar{E}_0$ (CONCORDE O DISCORDE);

b) CIRCOLARE: IN OGNI PUNTO LE COMPONENTI E_y, E_z DI $\bar{E}$ SONO SFASATE DI $\pi/2$. X ONDE PIANE:

È DATA DALLA SOMMA DEI FLUSSI ELEMENTARI SU TUTTA LA SUPERFICIE S:

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \int_S d\Phi(\bar{S}) = \int_S \bar{S}\cdot\bar{n}\, dS = \Phi_S(\bar{S})$$ FLUSSO DEL VETTORE DI POYNTING ATTRAVERSO S;

IL MODULO DEL VETTORE DI POYNTING $|\bar{S}| = \varepsilon_0 c |\bar{E}|^2$ È INTERPRETABILE COME L'ENERGIA x UNITÀ DI TEMPO CHE ATTRAVERSA UNA SUPERFICIE dS INFINITESIMA PERPENDICOLARE ALLA DIREZIONE DI PROPAGAZIONE. INFATTI:

$$\frac{dU}{dt} = \varepsilon_0 c |\bar{E}|^2 \cos\theta\, dS \text{ (FLUSSO ELEMENTARE) SE } \theta = 0: \frac{dU}{dt\,dS} = \varepsilon_0 c \cdot |\bar{E}|^2 = |\bar{S}|;$$

I CAMPI $\bar{E}$ E $\bar{B}$ OSCILLANO MOLTO RAPIDAMENTE, IN PARTICOLARE IN UN INTERVALLO DI TEMPO MOLTO PICCOLO SI PUÒ PASSARE DA FREQUENZE $\nu = 10^2\,Hz$ FINO A $\nu = 10^{15}\,Hz$. QUESTO VUOL DIRE CHE NEL TEMPO DI MISURAZIONE Δt L'ONDA HA COPERTO UN NUMERO m MOLTO ELEVATO DI PERIODI. QUINDI QUELLA CHE POSSIAMO MISURARE È SOLO UN VALORE MEDIO DEL MODULO DEL VETTORE DI POYNTING E QUESTA MEDIA È DETTA INTENSITÀ I:

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} |\bar{S}|\, dt;$$ CALCOLIAMOLO NEL CASO DI UN'ONDA POLARIZZATA LINEARMENTE (ONDA ARMONICA):

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \sin(kx - \omega t) \Rightarrow I = \frac{1}{\Delta t}\varepsilon_0 c \int_0^{\Delta t} |\bar{E}|^2 dt = \frac{\varepsilon_0 c}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} |\bar{E}_0|^2 \sin^2(kx - \omega t)\, dt =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c}{\Delta t}|\bar{E}_0|^2 \int_0^{\Delta t} \sin^2(kx - \omega t)\, dt = \left(\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 c}{\Delta t}|\bar{E}_0|^2 \frac{1}{2}\int_0^{\Delta t}\left(1 - \cos[2(kx - \omega t)]\right) dt;$$ CAMBIO VARIABILE: $\theta = kx - \omega t$:

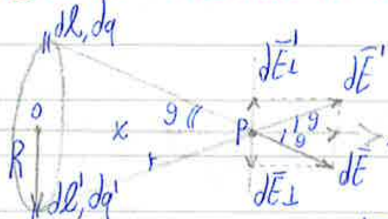
$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon_0 c}{\Delta t}\frac{|\bar{E}_0|^2}{2}\left[\Delta t + \frac{1}{\omega}\int_{kx}^{kx - \omega\Delta t} \cos(2\theta)\, d\theta\right];$$ Δt CONTA UN NUMERO $m \gg 1$ DI PERIODI:

$$\Delta t = mT \rightarrow \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T} m T = 2\pi m$$ QUINDI L'INTEGRALE DEL COSENO SU UN MULTIPLO DI 2π È ZERO:

$$\Rightarrow I = \frac{\varepsilon_0 c}{\cancel{\Delta t}}\frac{|\bar{E}_0|^2}{2}\cancel{\Delta t} = \frac{\varepsilon_0 c}{2}|\bar{E}_0|^2;$$

UN'ONDA POLARIZZATA CIRCOLARMENTE HA $|\bar{E}|$ COSTANTE, QUINDI $I = \varepsilon_0 c |\bar{E}_0|^2 = |\bar{S}|$; NEL VUOTO L'ONDA ELETTROMAGNETICA È CARATTERIZZATA DALLA FREQUENZA ν E DALLA LUNGHEZZA D'ONDA $\lambda = c/\nu$. IN UN MEZZO INVECE LA VELOCITÀ SI INDICA CON $V = c/n$, LA LUNGHEZZA D'ONDA È $\lambda = V/\nu = VT = (c/n)T$ LA FREQUENZA DI-

① CAMPO $\bar{E}$ SULL'ASSE DI UN ANELLO CARICO



DISTRIBUZIONE OMOGENEA DI CARICA DESCRITTA CON $\lambda = \frac{dq}{dl}$ COSTANTE;

$$\Rightarrow q = \int_{anello} dq = \int_{anello} \lambda\, dl = \lambda \int dl = 2\pi R \lambda \Rightarrow \lambda = \frac{q}{2\pi R};$$

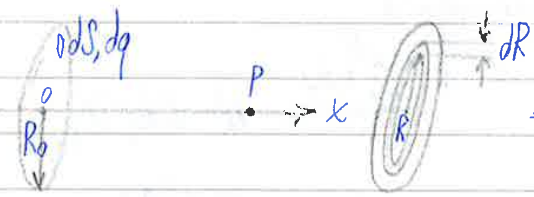
DIVIDIAMO L'ANELLO IN PORZIONI dl DI FILO INFINITESIMO, CALCOLO IL CONTRIBUTO $d\bar{E}$ IN P E POI SI SOMMA SU TUTTO L'ANELLO. GLI ELEMENTINI dl E dl' DIAMETRALMENTE OPPOSTI HANNO LA COMPONENTE $\perp$ A x DI $d\bar{E}$ UGUALI E OPPOSTI, QUINDI TUTTI I $d\bar{E}_\perp$ SI ELIDONO A DUE A DUE. IL CAMPO $\bar{E}$ RISULTANTE SARÀ DIRETTO LUNGO x. INOLTRE $d\bar{E}$ E $d\bar{E}'$ SONO DUE VETTORI UGUALI IN MODULO XCHÉ $dq = dq'$ E LA DISTANZA DA P È LA STESSA. QUINDI:

$$\bar{E}(P) = \int_{anello} d\bar{E}_{//} = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cos\theta\, \bar{u}_x = \left(\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right) \bar{u}_x =$$

$$= \int_{anello} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x = \int_{anello} \frac{\lambda\, dl\, x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x = \left(\text{SOLO } dl \text{ NON È COSTANTE, } x \text{ È FISSATO DA } P\right) =$$

$$= \frac{\lambda x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}}\, 2\pi R\, \bar{u}_x = \left(q = \lambda 2\pi R\right) = \frac{q x}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x.$$

② CAMPO $\bar{E}$ SULL'ASSE DI UN DISCO CARICO



DISTRIBUZIONE OMOGENEA DI CARICA DESCRITTA CON $\sigma = \frac{dq}{dS}$ COSTANTE;

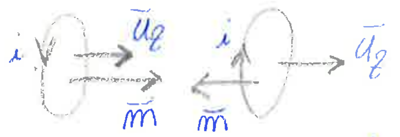
$$\Rightarrow q = \int_{disco} dq = \int \sigma\, dS = \sigma \pi R_0^2 \Rightarrow \sigma = \frac{q}{\pi R_0^2};$$

DIVIDIAMO IL DISCO IN TANTI ANELLI INFINITESIMI DI RAGGIO COMPRESO TRA R E $R+dR$ CON $0 \le R \le R_0$. IL CONTRIBUTO DI OGNI ANELLO INFINITESIMO LO ABBIAMO GIÀ CALCOLATO, QUINDI:

$$\bar{E}(P) = \int_{disco} d\bar{E}_{anello} = \int_0^{R_0} \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x = \left(dq = \sigma(2\pi R\, dR)\right) = \int_0^{R_0} \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} \frac{2R\, dR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x =$$

$$= \frac{\sigma x}{4\varepsilon_0} \int_0^{R_0} \frac{2R\, dR}{(x^2+R^2)^{3/2}} \bar{u}_x = \left(\text{PONGO } y = x^2+R^2 \Rightarrow \frac{dy}{dR} = 2R \Rightarrow dy = 2R\, dR\right) =$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 118



$= \left(i \text{ verso antiorario, quindi } \varphi: 0 \to 2\pi \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{R}{d^2} \cos(\alpha) \cdot 2\pi \, \bar{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{(\pi R)\cos(\alpha)}{d^2} \bar{u}_z =$

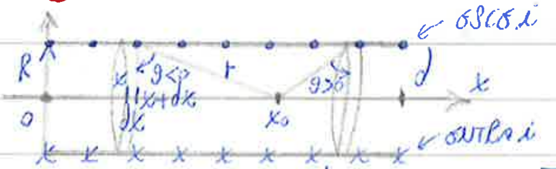
$= \left(\cos(\alpha) = \frac{R}{d} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} i \frac{(\pi R^2)}{d^3} \bar{u}_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i \Sigma \bar{u}_z}{d^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\bar{m}}{d^3};$

$\bar{m} = i \Sigma \bar{u}_z$ MOMENTO DI DIPOLO MAGNETICO DI UNA SPIRA IL CUI VERSO È LEGATO AL VERSO DELLA CORRENTE DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA. SE LA CORRENTE PASSA IN VERSO OPPOSTO $\oint d\varphi = -2\pi \; (\varphi: 2\pi \to 0)$:

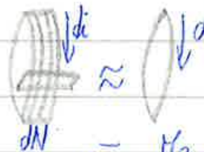
$\bar{B}(P) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{(-i\Sigma \bar{u}_z)}{d^3} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\bar{m}}{d^3}; \quad d = \sqrt{z^2 + R^2}$ SE $z \gg R$ ALLORA $\left(\frac{R}{z}\right)^2 \approx 0$ E $d \approx |z|$, QUINDI:

$\Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\bar{m}}{|z|^3}$ LUNGO L'ASSE, MA MOLTO LONTANO DALLA SPIRA.

(4) CAMPO $\bar{B}$ IN UN SOLENOIDE



SI TRATTA DI UN FILO AVVOLTO IN MODO ELICOIDALE SU UN CILINDRO ATTRAVERSO DA UNA CORRENTE i STAZIONARIA. SI DEFINISCE DENSITÀ DI AVVOLGIMENTI $n = dN/dl$ IL N° DI AVVOLGIMENTI X UNITÀ DI LUNGHEZZA. SE n È COSTANTE, ALLORA $n = N/d$. VOGLIO IL CAMPO $\bar{B}$ IN UN PUNTO LUNGO L'ASSE DEL SOLENOIDE (NEL PUNTO x_0). SUDDIVIDO IL SOLENOIDE IN TANTE BOBINE DI SPESSORE dx CHE CONTIENE UN N° DI AVVOLGIMENTO $dN = n\,dx$.



di: UNA BOBINA È EQUIVALENTE AD UNA SOLA SPIRA IN CUI PASSA UNA CORRENTE $di = i\,dN = i n\,dx$ DI CUI CONOSCIAMO IL VALORE DEL CAMPO $d\bar{B}$ GENERATO:

$\Rightarrow d\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{di\,\Sigma}{r^3} \bar{u}_x = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i n \Sigma}{r^3} dx\, \bar{u}_x;$ INDICO CON θ L'ANGOLO TRA IL PIANO DELLA BOBINA E r ORIENTATO NEL VERSO CHE VA DA r AL PIANO. SI OSSERVA CHE SE $x < x_0$ ALLORA $\theta < 0$ (ORARIO), SE $x > x_0$ ALLORA $\theta > 0$ (ANTIORARIO).

$x - x_0 = r \sin\theta = \left(r = \frac{R}{\cos\theta} \right) = R \,\mathrm{tg}\,\theta; \quad dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta = \frac{R}{\cos^2\theta} d\theta;$

$\Rightarrow d\bar{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i n \Sigma}{R^3} \frac{\cos^3\theta}{\cos^2\theta} R = (\Sigma = \pi R^2) = \frac{\mu_0}{2} n i \cos\theta \, d\theta \, \bar{u}_x;$

$\Rightarrow \bar{B} = \int_{Sol.} d\bar{B} = \frac{\mu_0}{2} n i \int_{\theta_0}^{\theta_1} (\cos\theta) d\theta \, \bar{u}_x = \frac{\mu_0}{2} n i (\sin\theta_1 - \sin\theta_0) \bar{u}_x;$

$\sin\theta_0 = -x_0 / \sqrt{R^2 + x_0^2} \quad \sin\theta_1 = (d - x_0) / \sqrt{(d-x_0)^2 + R^2}; \quad (\theta_0 < 0)$

QUINDI:

CORRENTE ELETTRICA

1

NEI METALLI GLI ELETTRONI SONO DEBOLMENTE ATTRATTI DAL NUCLEO E QUINDI PIÙ LIBERI DI MUOVERSI. POICHÉ NON È POSSIBILE SEGUIRE OGNI ELETTRONE NEL SUO MOTO, QUELLO CHE POSSIAMO MISURARE È UN VALORE MEDIO DELLA VELOCITÀ IN UN VOLUMETTO dV INFINITESIMO CONTENENTE UN NUMERO N DI ELETTRONI MOLTO ELEVATO.

$$\Rightarrow \langle \bar{V} \rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{V}_i$$ CON $\bar{V}_i$ LE VELOCITÀ DEI SINGOLI ELETTRONI IN dV.

IN ASSENZA DI CAMPO ELETTRICO, GLI ELETTRONI NON HANNO UNA DIREZIONE PRIVILEGIATA, MA LE VELOCITÀ $\bar{V}_i$ SONO ORIENTATE CASUALMENTE IN TUTTE LE DIREZIONI, QUINDI $\langle \bar{V} \rangle = \bar{0}$. IN PRESENZA DI CAMPO ELETTRICO ESTERNO INVECE OGNI ELETTRONE È SOGGETTO AD UNA FORZA:

$\Rightarrow \bar{F} = -e\bar{E}$ CHE MUOVE GLI ELETTRONI IN VERSO OPPOSTO A $\bar{E}$. QUESTA COMPONENTE DI MOTO FA IN MODO CHE IL VALORE MEDIO $\langle \bar{V} \rangle$ NON SIA PIÙ NULLO, MA SIA UGUALE AD UNA VELOCITÀ $\bar{V}_d$, UGUALE X TUTTI GLI ELETTRONI, DETTA <u>VELOCITÀ DI DERIVA</u>. QUESTO MOTO DI INSIEME DI CARICHE DOVUTO AD UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO PRENDE IL NOME DI CORRENTE ELETTRICA.

CONSIDERO UNA SUPERFICIE dS INFINITESIMA, VOGLIO SAPERE QUANTA CARICA ATTRAVERSA dS IN UN INTERVALLO DI TEMPO dt INFINITESIMO VICINO ALL'UNITÀ.

INDICO CON $m = N/dV$ LA DENSITÀ DI PORTATORI DI CARICA DENTRO AL CONDUTTORE (PORTATORI DI CARICA X UNITÀ DI VOLUME). X CONVENZIONE LA CORRENTE ELETTRICA È ASSOCIATA AL MOTO DELLE CARICHE POSITIVE, QUINDI IN dV OGNI PORTATORE AVRÀ CARICA $+e$, LA CARICA TOTALE dq CONTENUTA IN dV È QUINDI:

$$\Rightarrow dq = eN = (N = m\,dV) = e\,m\,dV \Rightarrow \rho_q = \frac{dq}{dV} = em \text{ (DENSITÀ DI CARICA)};$$

LA CARICA CHE ATTRAVERSA dS IN dt È QUELLA CONTENUTA NEL CILINDRETTO DI BASE dS E ALTEZZA $V_d\,dt$:

$$\cdot\, dq = e\,m\,dV = (dV = v_d\,dt\cdot dS_\perp = v_d\,dt\,dS\cos\theta) = e\,m\,v_d\,dt\,dS\cos\theta;$$

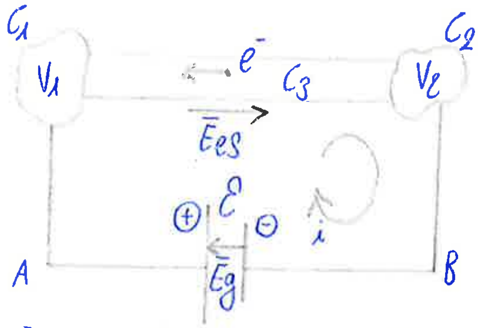
$$\Rightarrow i = \frac{dq}{dt} = e\,m\,V_d\,dS\cos\theta = (\cos\theta = \bar{u}_x\cdot\bar{m}) = \overbrace{(e\,m\,V_d\,\bar{u}_x)}\,\bar{m}\cdot dS = \bar{J}\cdot\bar{m}\cdot dS;$$

DUNQUE L'INTENSITÀ DI CORRENTE i CHE ATTRAVERSA dS È DESCRITTA COME IL FLUSSO ELEMENTARE DI UN VETTORE $\bar{J}$ DETTO <u>DENSITÀ DI CORRENTE</u>. LA SUPERFICIE dS È TALMENTE PICCOLA CHE IL VETTORE $\bar{J}$ PUÒ ESSERE CONSIDERATO UNIFORME AL SUO INTERNO. $\bar{J}$ È QUINDI DEFINITO COME $\bar{J} = e\,m\,\bar{V}_d = \rho_q\cdot\bar{V}_d$.

IL VERSO DI $\bar{J}$ È LEGATO AL VERSO DELLE CARICHE POSITIVE CHE SI MUOVONO DA PUNTI A POTENZIALE MAGGIORE (3)
VERSO PUNTI A POTENZIALE MINORE, SEGUENDO LA DIREZIONE DI $\bar{E}$. ABBIAMO POSTO:

$$\cdot\ i = \int_\Sigma \bar{J}\cdot\bar{n}\cdot dS = \int_\Sigma J\bar{u}_x\cdot\bar{u}_x\cdot dS = J\Sigma;$$

$\cdot\ R = \rho\dfrac{d}{\Sigma}$ È DETTA RESISTENZA E DIPENDE DALLA TEMPERATURA E DAL MATERIALE. SE LA TEMPERATURA SI AVVICINA ALLO ZERO SI OSSERVA CHE $R \to 0$, OVVERO LA CORRENTE CIRCOLA SENZA BISOGNO DI IMPORRE UNA ddp ΔV DALL'ESTERNO.



ALL'EQUILIBRIO ELETTROSTATICO, OGNI PUNTO ALL'INTERNO DI UN CONDUTTORE HA LO STESSO POTENZIALE, QUINDI SI PUÒ CARATTERIZZARE OGNI CONDUTTORE CON UN SOLO VALORE DEL POTENZIALE. DUE CONDUTTORI C_1 C_2 HANNO POTENZIALE V_1, V_2 CON $V_1 > V_2$ QUINDI x ESEMPIO IN C_2 VI È UN ECCESSO DI CARICA NEGATIVA. SE C_1 E C_2 SONO COLLEGATI ATTRAVERSO UN TERZO CONDUTTORE C_3, ALLORA GLI ELETTRONI SONO SOGGETTI AD UN $\bar{E}_{es}$ CHE LI MUOVE DA PUNTI A POTENZIALE MINORE A PUNTI A POTENZIALE MAGGIORE. QUESTA CORRENTE DURA FINCHÉ GLI ELETTRONI RAGGIUNGONO UNA NUOVA CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO T.C IL POTENZIALE È UNIFORME OVUNQUE.

PER FARE IN MODO CHE LA CORRENTE RIMANGA IN CIRCOLO OCCORRE UN GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE T.C VIA VIA CHE GLI ELETTRONI ARRIVANO IN C_1 A POTENZIALE MAGGIORE, LI RIPORTI VERSO C_2 A POTENZIALE MINORE. LA FORZA ELETTROMOTRICE f.e.m È DEFINITA COME IL LAVORO UGUALE E OPPOSTO A QUELLO COMPIUTO DAL CAMPO $\bar{E}_{es}$ CHE TENDE A RIUNIRE LE CARICHE:

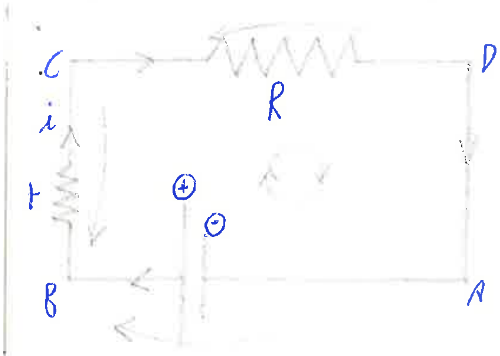
$$\cdot\ W_g = -e\int_{A\to B}\bar{E}_g\cdot d\bar{l} = -W_{es} = -\left[-e(V_2-V_1)\right] \Longrightarrow \mathcal{E} = \int_{B\to A}\bar{E}_g\cdot d\bar{l} = V_2 - V_1 \neq 0;$$

LA f.e.m INTRODUCE UN CAMPO ELETTRICO NON CONSERVATIVO $\bar{E}_g$ CHE COMPIE LAVORO NEGATIVO, DAL MOMENTO CHE IL GENERATORE DEVE VINCERE LA FORZA ELETTRICA CHE TENDE A RIUNIRE LE CARICHE. POICHÉ x CONVENZIONE IL VERSO DELLA CORRENTE È ASSOCIATO ALLE CARICHE POSITIVE, IL VERSO È QUELLO IN FIGURA.

CONSIDERIAMO UN CONDUTTORE PERCORSO DA UNA CORRENTE STAZIONARIA i E DI RESISTENZA R. VALE CHE:

$\cdot\ \Delta V = R\cdot i$; SE NEL TEMPO dt PASSA UNA CARICA POSITIVA $dq = i\,dt$, ALLORA IL LAVORO dW INFINITESIMO FATTO DAL CAMPO $\bar{E}$ È DATO DA:

$$\Longrightarrow dW = \Delta V\cdot dq = (Ri)\cdot i\,dt = Ri^2 dt \Longrightarrow P = \frac{dW}{dt} = Ri^2;$$



IL GENERATORE DI FORZA ELETTROMOTRICE IN REALTÀ È CARATTERIZ= (5) ZATO DA UNA RESISTENZA INTERNA r. USANDO LE LEGGI DI KIRCHHOFF:

$$(V_B-V_A)+(V_C-V_B)+(V_D-V_C)+(V_A-V_D)=0;$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}-ri-Ri+0=0 \Rightarrow \mathcal{E}=(r+R)i;$$

A CAUSA DELLA RESISTENZA INTERNA È NECESSARIO FORNIRE UNA f.e.m PIÙ ALTA X COMPENSARE LA FORZA ELETTROSTATICA. IL LAVORO ELEMENTARE FATTO DAL GENERATORE È QUINDI:

$$\Rightarrow dW=dq\cdot\mathcal{E}=i\cdot\mathcal{E}\,dt=i^2(r+R)\,dt \Rightarrow P=\frac{dW}{dt}=(R+r)i^2.$$

UNA QUOTA DI $\mathcal{E}$ SERVE A VINCERE LA RESISTENZA INTERNA DEL GENERATORE, MENTRE LA QUOTA RIMANENTE SERVE A VINCERE LA RESISTENZA DEL CIRCUITO. $\mathcal{E}$ HA IL COMPITO DI PORTARE LE CARICHE POSITIVE DA PUNTI A POTENZIALE NEGATIVO A PUNTI A POTENZIALE POSITIVO. X EFFETTO JOULE SI GENERA IL CALORE $(R+r)i^2$.

2° LEGGE DI LAPLACE

UNA CARICA q IMMERSA IN UN CAMPO MAGNETICO CON VELOCITÀ $\bar{v}$ SUBISCE UNA FORZA DETTA FORZA DI LORENTZ:

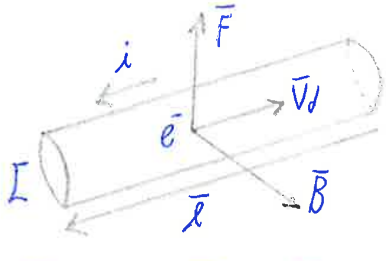
$\bar{F}=q\cdot\bar{v}\wedge\bar{B}$; QUESTA FORZA È QUINDI $\perp$ IN OGNI ISTANTE AL PIANO FORMATO DA $\bar{v}$ E $\bar{B}$.

IL LAVORO COMPIUTO DA QUESTA FORZA X SPOSTARE LA CARICA q LUNGO UNA TRAIETTORIA C È DATO DA:

$$W=\int_C \bar{F}\cdot d\bar{l}=\int_C \bar{F}\cdot\bar{v}\,dt=\int_{t_1}^{t_2} q(\bar{v}\wedge\bar{B})\cdot\bar{v}\,dt=0;$$

LA FORZA COMPIE QUINDI LAVORO NULLO, X IL TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:

$$W=\Delta E_K=E_K^f-E_K^i=0 \Rightarrow E_K=\frac{1}{2}mv^2=\text{COSTANTE (L'ENERGIA CINETICA SI CONSERVA)};$$



CONSIDERO UN CONDUTTORE CILINDRICO PERCORSO DA UNA CORRENTE i STAZIONARIA, DI SEZIONE Σ E LUNGHEZZA l. INDICO CON $\bar{l}$ UN VETTORE DI MODULO l E VERSO DELLA CORRENTE (OPPOSTO A QUELLO DEGLI ELETTRONI).

OGNI ELETTRONE SENTE UNA FORZA DI LORENTZ:

$$\bar{F}_e=-e\bar{v}_d\wedge\bar{B} \Rightarrow \bar{F}_{TOT}=N\cdot(-e\bar{v}_d\wedge\bar{B})=(N=n\cdot V=n\Sigma l)=-ne\Sigma l\,\bar{v}_d\wedge\bar{B}=(l\cdot\bar{v}_d=-\bar{l}\cdot v_d)=$$

$$=\underbrace{nev_d\Sigma}\,\bar{l}\wedge\bar{B}=(i=J\Sigma=nev_d\Sigma)=i\bar{l}\wedge\bar{B};$$

CON UN CONDUTTORE DI FORMA GENERICA, SI SUDDIVIDE IL CONDUTTORE IN TANTE PORZIONI $d\bar{l}$ TALMENTE PICCOLE CHE $\bar{B}$ SIA UNIFORME AL SUO INTERNO E POI SI SOMMANO TUTTI I CONTRIBUTI:

$$d\bar{F}(\bar{x})=i\,d\bar{l}(\bar{x})\wedge\bar{B}(\bar{x}) \Rightarrow \bar{F}=\int_{FILO} d\bar{F}=i\int_{FILO} d\bar{l}(x)\wedge\bar{B};$$

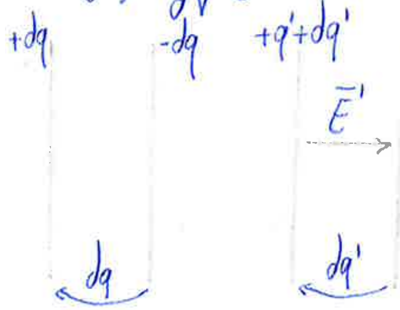
$\bar{B}(\bar{x})$ È IL CAMPO MAGNETICO NEL TRATTO $d\bar{l}(\bar{x})$ ORIENTATO NEL VERSO DELLA CORRENTE.

ENERGIA DI $\bar{E}$

LA CARICA DI UN CONDENSATORE È UN PROCESSO CHE RICHIEDE ENERGIA; QUESTA ENERGIA SERVE A TRASFERIRE UNA CERTA QUANTITÀ DI ELETTRONI DA UN'ARMATURA ALL'ALTRA. ALLA FINE UN'ARMATURA SI SARÀ CARICATA POSITIVAMENTE, L'ALTRA NEGATIVAMENTE. X FARE QUESTO OCCORRE FORNIRE UN LAVORO DALL'ESTERNO UGUALE E OPPOSTO CHE SEPARI LE CARICHE, VINCENDO LA FORZA CHE TIENE UNITE LE CARICHE.

QUESTA ENERGIA FORNITA PRODUCE UN CAMPO ELETTRICO TRA LE ARMATURE; $\bar{E}$ È QUINDI VISTO COME UN OGGETTO FISICO CON UNA SUA ENERGIA DISTRIBUITA NELLO SPAZIO CON UNA DENSITÀ DI ENERGIA:

- $u_e(\bar{x}) = \frac{dU}{dV}(\bar{x})$ CHE DIPENDE DAL PUNTO;

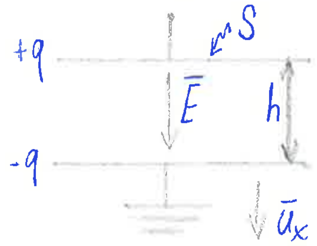


SUPPONGO CHE IL PROCESSO DI CARICA AVVENGA CON TRASFERIMENTO DI QUANTITÀ INFINITESIME DI CARICA dq POSITIVA. IL PRIMO TRASFERIMENTO AVVIENE SENZA LAVORO XCHÈ NON BISOGNA CONTRASTARE NESSUN CAMPO ELETTRICO. SE TRASFERISCO UN ULTERIORE dq' IN UN ISTANTE t', ALLORA LA CARICA SU ARMATURA NEGATIVA DIVENTA $-q'-dq'$; X FARE QUESTO OCCORRE VINCERE IL CAMPO $\bar{E}'$ GENERATO CHE SI OPPONE AL TRASFERIMENTO. IL LAVORO dW È DATO DA:

- $dW = dq'\Delta V' = dq'\left(\frac{q'}{C}\right)$; LA DDP $\Delta V'$ È ASSOCIATO ALLA CARICA q' GIÀ PRESENTE, IL LAVORO TOTALE:

$$\Rightarrow W = \int dW = \int_0^q dq' \frac{q'}{C} = \frac{q^2}{2C};$$

DIMOSTRIAMO CHE QUESTA ENERGIA È ASSOCIATA AL CAMPO ELETTRICO. CONSIDERIAMO UN CONDENSATORE PIANO:



$$U(\text{ENERGIA X CARICARE IL CONDENSATORE}) = \frac{q^2}{2C} = \left(C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}\right) = \frac{q^2 h}{2\varepsilon_0 S} = (q = \sigma S) = \frac{\sigma^2 S^2 h}{2\varepsilon_0 \cancel{S}} = \frac{\sigma^2 S h}{2\varepsilon_0} = (V = Sh \text{ VOLUME TRA LE ARMATURE}) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} V = (\text{MOLTIPLICO E DIVIDO X } \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 V = \frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{E}|^2 V;$$

QUINDI L'ENERGIA X CARICARE IL CONDENSATORE È ANDATA A FINIRE NEL CAMPO ELETTRICO ED È DISTRIBUITA NELLO SPAZIO TRA LE ARMATURE CON UNA DENSITÀ:

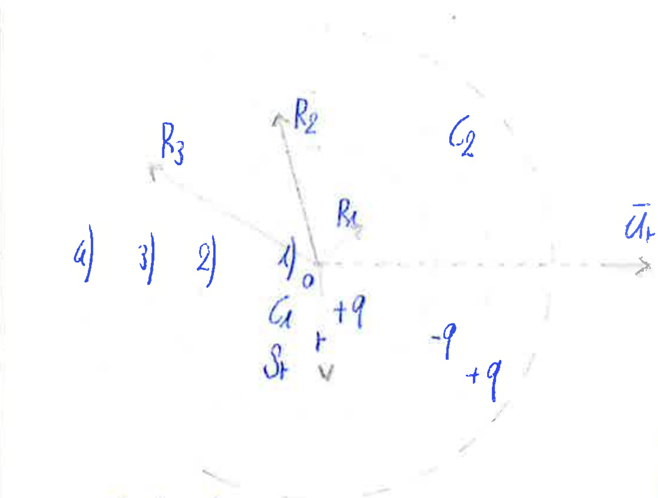
- $u_e(\bar{x}) = \frac{dU}{dV} = \boxed{\frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{E}(\bar{x})|^2}$ (EQUAZIONE GENERALE VALIDA ANCHE X $\bar{E}$ NON UNIFORME);

X IL CONDENSATORE PIANO:

- $\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\bar{u}_x \Rightarrow u_e(\bar{x}) = \frac{\varepsilon_0}{2}|\bar{E}(\bar{x})|^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 \Rightarrow U = \int_V \overset{\text{COSTANTE}}{u_e}\, dV = u_e V = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 V;$

QUINDI L'ENERGIA SPESA X CARICARE IL CONDENSATORE È LA STESSA DI QUELLA IMMAGAZZINATA NEL CAMPO $\bar{E}$.

CONDENSATORE SFERICO



IL CONDENSATORE SFERICO È DATO DA DUE CONDUTTORI SFERICI CONCENTRICI. C_1 È CARICO CON CARICA $+q$, C_2 È INIZIALMENTE NEUTRO. E INDUCONO GENERA UNA CARICA $-q$ SULLA SUPERFICIE INTERNA. DETERMINIAMO IL CAMPO $\bar{E}(\bar{x})$.

IL PROBLEMA È A SIMMETRIA SFERICA, L'UNICO CAMPO A SIMMETRIA SFERICA È IL CAMPO RADIALE $\bar{E}(\bar{x}) = E(r)\bar{u}_r$.

APPLICO LA LEGGE DI GAUSS USANDO UNA SUPERFICIE SFERICA DI RAGGIO r CENTRATA IN O:

$$\Phi_{S_r}(\bar{E}) = \oint_{S_r} \bar{E}\cdot\bar{m}\, dS = \oint E\,\bar{u}_r\cdot\bar{u}_r\, dS = (E(r) \text{ È COSTANTE SULLA SFERA}) = E(r)\, 4\pi r^2;$$

E LA LEGGE DI GAUSS: $\Phi_{S_r}(\bar{E}) = \frac{1}{\varepsilon_0} q_{INT} = E(r)\, 4\pi r^2;$

DISTINGUO 4 REGIONI:

1) $r \le R_1$ (DENTRO C_1): $q_{INT} = 0$ (DENTRO UN CONDUTTORE $\bar{E} = \bar{0}$) $\Rightarrow E(r) = 0;$

2) $R_1 < r \le R_2$: $q_{INT} = +q \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2};$

3) $R_2 < r \le R_3$ (DENTRO C_2): $q_{INT} = 0 \Rightarrow E(r) = 0;$ $(q_{INT} = +q - q = 0)$

4) $r > R_3$: $q_{INT} = \cancel{+q}\cancel{-q} + q = +q \Rightarrow E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

RIASSUMENDO:

$$\bar{E}(\bar{x}) = \begin{cases} r \le R_1 & \bar{0} \\ R_1 < r \le R_2 & q/4\pi\varepsilon_0 r^2\, \bar{u}_r \\ R_2 < r \le R_3 & \bar{0} \\ r > R_3 & q/4\pi\varepsilon_0 r^2\, \bar{u}_r \end{cases}$$

$\bar{E}(\bar{x}) = -\bar{\nabla} V(\bar{x})$ IN COORDINATE POLARI SFERICHE (r, ϑ, φ):

$$E(r)\bar{u}_r = -\frac{\partial V}{\partial r}\bar{u}_r - \frac{1}{r}\frac{\cancel{\partial V}^{0}}{\cancel{\partial \vartheta}}\bar{u}_\vartheta - \frac{1}{r\sin\vartheta}\cancel{\frac{\partial V}{\partial \varphi}}^{0}\bar{u}_\varphi;$$

$$\Rightarrow E(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \text{ (V NON DIPENDE DALLE VARIABILI ANGOLARI)};$$

$$V(r) \begin{cases} r \le R_1 & dV/dr = 0 \Rightarrow V = V_0 = \text{COSTANTE} \\ R_1 < r \le R_2 & dV/dr = -E(r) = -q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \Rightarrow V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r + V_0^{(I)} \\ R_2 < r \le R_3 & dV/dr = 0 \Rightarrow V = V_0^{(II)} = \text{COSTANTE} \\ r > R_3 & dV/dr = -q/4\pi\varepsilon_0 r^2 \Rightarrow V(r) = q/4\pi\varepsilon_0 r + V_0^{(III)}; \end{cases}$$

IN OGNI REGIONE IN GENERALE LE COSTANTI SONO DIVERSE. ADESSO SI IMPONE LA CONTINUITÀ DI V NEL PASSARE DA

ESERCITAZIONE 1 (CAMPO ELETTROSTATICO)

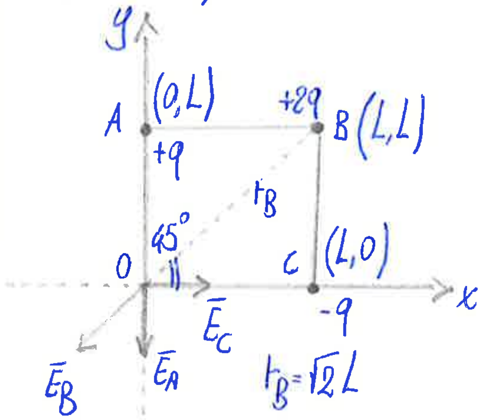
1

1) TRE CARICHE PUNTIFORMI SONO DISPOSTE COME IN FIGURA, AI VERTICI DI UN QUADRATO DI LATO L.

DETERMINARE: a) IL CAMPO ELETTROSTATICO NEL PUNTO O;

b) LA FORZA ELETTRICA SENTITA DA UNA CARICA q_0 POSTA IN O;

c) IL LAVORO DELLE FORZE ELETTRICHE X PORTARE LE CARICHE IN QUESTA CONFIGURAZIONE.



a) X IL PRINCIPIO DI SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

- $\bar{E}_0 = \bar{E}_A + \bar{E}_B + \bar{E}_C$; CALCOLO I 3 CONTRIBUTI:
- $\bar{E}_A = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\bar{u}_y$;
- $\bar{E}_C = \ominus\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(-q)}{L^2}\bar{u}_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\bar{u}_x$ (LA CARICA IN B È NEGATIVA

QUINDI $\bar{E}_C$ VORREBBE DISCORDE A $\bar{u}_x$, QUINDI IL $\ominus$ LO RENDE CONCORDE A $\bar{u}_x$ COME DEVE ESSERE);

- $\bar{E}_B = \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{(\sqrt{2}L)^2}\cos 45°\right)\bar{u}_x + \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{(\sqrt{2}L)^2}\sin 45°\right)\bar{u}_y =$

$= \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_x + \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_y$;

$\Rightarrow \bar{E}_0 = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_x + \left(-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_y =$

$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_x - \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_y\right]$;

IL MODULO È:

- $|\bar{E}_0| = \sqrt{\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\right)^2\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]} = \sqrt{1+\frac{1}{2}+\cancel{\sqrt{2}}+1+\frac{1}{2}-\cancel{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{L^2}\right) = \frac{\sqrt{3}q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\,[N/m]$;

b) LA FORZA ELETTRICA SI SCRIVE COME:

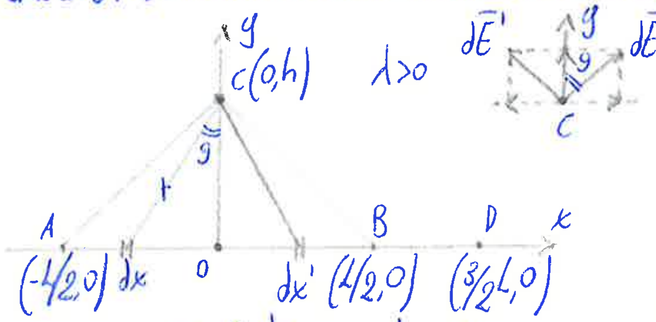
- $\bar{F}_0 = q_0 \cdot \bar{E}_0 = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_x - \left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\bar{u}_y\right]$.

c) IL LAVORO FATTO DALLE FORZE ELETTRICHE X PORTARE LE CARICHE DALLA CONFIGURAZIONE NON INTERAGENTE (IN CUI TUTTE LE DISTANZE SONO INFINITE) A QUELLA IN FIGURA, DATO CHE LA FORZA ELETTROSTATICA È CONSERVATIVA, SI SCRIVE COME DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE TRA LE DUE CONFIGURAZIONI:

- $\{r_{ij}\}_i = \{+\infty, +\infty, +\infty\}$ - $\{r_{ij}\}_f = \{L, L, \sqrt{2}L\}$,

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 118

3) CALCOLARE IL CAMPO ELETTROSTATICO IN MODULO, DIREZIONE E VERSO GENERATO DAL FILO DI LUNGHEZZA L LA CUI CARICA È DISTRIBUITA CON DENSITÀ LINEARE λ COSTANTE, NEI PUNTI C E D. ③



SUDDIVIDO IL FILO IN TANTI PEZZETTI DI FILO dx CHE CONTENGONO UNA CARICA INFINITESIMA dq. X SIMMETRIA PER OGNI dx CORRISPONDE UN dx' T.C $d\bar{E}$ E $d\bar{E}'$ HANNO COMPONENTE LUNGO $\bar{u}_x$ UGUALI E OPPOSTE, QUINDI SI ELIDONO NELLA SOMMA. CONTANO SOLO I CONTRIBUTI LUNGO $\bar{u}_y$:

$$\cdot\, d\bar{E}_C = d\bar{E} + d\bar{E}' = \left(\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\cos\theta\,\bar{u}_y = \left(\lambda = \frac{dq}{dx} \rightarrow dq = \lambda dx\right) = 2\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\bar{u}_y =$$

$$= \frac{\lambda dx}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta\,\bar{u}_y;$$

IL CAMPO $\bar{E}$ TOTALE È DATO DALLA SOMMA DI TUTTI I CONTRIBUTI INFINITESIMI, IL CHE EQUIVALE A FARE UN INTEGRALE, IN QUESTO CASO FATTO SU METÀ INTERVALLO. COME VARIABILE DI INTEGRAZIONE SCELGO L'ANGOLO θ. SCRIVO r IN FUNZIONE DI θ:

$$\cdot\, h = r\cos\theta \rightarrow r = h/\cos\theta;$$

$$\cdot\, x = r\sin\theta = \frac{h}{\cos\theta}\sin\theta = h\,\mathrm{tg}\,\theta \rightarrow \frac{dx}{d\theta} = \frac{h}{\cos^2\theta} \rightarrow dx = \frac{h}{\cos^2\theta}d\theta;$$

$$\Longrightarrow d\bar{E}_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{\cos^2\theta}}\frac{\cancel{\cos^2\theta}}{h^{\cancel{2}}}\cos\theta\, d\theta\,\bar{u}_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cos\theta\,\bar{u}_y;$$

INTEGRO TRA $\theta = 0$ E IL θ CORRISPONDENTE A $r = AC$:

$$\cdot\, \bar{E}_C = \int d\bar{E}_C = \int_{\theta_{AC}}^{0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\cos\theta\,\bar{u}_y = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\sin\theta_{AC}\,\bar{u}_y;$$

$$\cdot\, \sin\theta_{AC} = \frac{L/2}{AC} = \frac{L/2}{\sqrt{\frac{L^2}{4}+h^2}} \rightarrow \bar{E}_C = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 h}\frac{L/2}{\sqrt{L^2/4+h^2}}\bar{u}_y;$$

IN D INVECE OGNI CONTRIBUTO $d\bar{E}$ INFINITESIMO È RIVOLTO LUNGO $\bar{u}_x$:

$$\cdot\, d\bar{E}_D = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\bar{u}_x = \left(dq = \lambda dx \text{ e } r = \frac{3}{2}L - x\right) = \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{2}L - x\right)^2}\bar{u}_x;$$

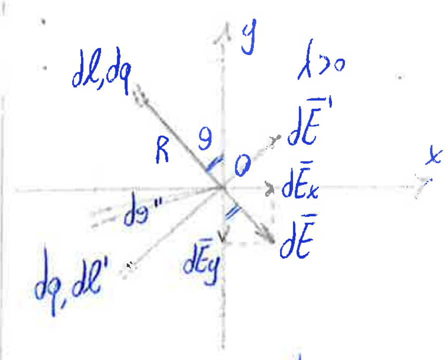
$$\Longrightarrow \bar{E}_D = \int d\bar{E}_D = \int_{-L/2}^{+L/2}\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0\left(\frac{3}{2}L-x\right)^2}\bar{u}_x;$$

FACCIO UN CAMBIO DI VARIABILE:

$$y = \frac{3}{2}L - x \rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 \rightarrow dx = -dy;$$

$$\cdot\, \bar{E}_D = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-L/2}^{+L/2}\frac{dx}{\left(\frac{3}{2}L-x\right)^2}\bar{u}_x = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{y(-L/2)}^{y(L/2)}\frac{dy}{y^2}\bar{u}_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{2L}^{L}\frac{dy}{y^2}\bar{u}_x =$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{y}\right]_{2L}^{L}\bar{u}_x = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{L}+\frac{1}{2L}\right)\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2L}\bar{u}_x = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon_0 L}\bar{u}_x.$$



PER RAGIONI DI SIMMETRIA LA SOMMA DI TUTTI I $d\bar{E}_y$ È ZERO, QUINDI IL CAMPO $\bar{E}$ NELL'ORIGINE O SARÀ RIVOLTO LUNGO $\bar{u}_x$. 5

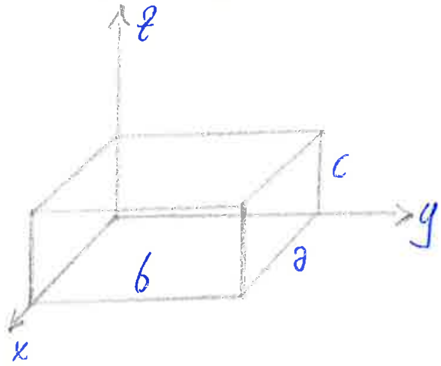
$$d\bar{E}_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\,\bar{u}_x = \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\,\bar{u}_x = (dl = R\,d\theta) =$$

$$= \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\sin\theta\, d\theta\,\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\, d\theta\,\bar{u}_x;$$

$$\Rightarrow \bar{E}_0 = \int d\bar{E}_x = \int \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta\, d\theta\,\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\,\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[-(-1)+1\right]\bar{u}_x =$$

$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\bar{u}_x = \frac{q}{2\varepsilon_0(\pi R)^2}\bar{u}_x = \frac{5\cdot 10^{-9}}{2\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot(3{,}14\cdot 0{,}2)^2}\bar{u}_x = 416{,}2\,\bar{u}_x\,[N/C].$$

7) UNA CARICA È DISTRIBUITA ALL'INTERNO DI UN PARALLELEPIPEDO DI SPIGOLI $a = 1m$, $b = 2m$ E $c = 50\,cm$ (RISPETTIVAMENTE LUNGO x, y, z). DATO IL CAMPO $\bar{E} = \alpha x^2\bar{u}_x + \beta\left(\frac{z}{a}\right)\bar{u}_y - \gamma(xyz)\bar{u}_z$. LE COSTANTI HANNO VALORE $\alpha = 4\pi$, $\beta = 3\pi$ E $\gamma = 4/5\,\pi$. CALCOLA LA DENSITÀ VOLUMICA ρ NEL PARALLELEPIPEDO E LA CARICA TOTALE.



USIAMO LA LEGGE DI GAUSS IN FORMA LOCALE:

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \rho/\varepsilon_0; \quad \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z};$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 2\alpha x, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = -\gamma xy;$$

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 2\alpha x - \gamma xy = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho(x,y,z) = \varepsilon_0(2\alpha x - \gamma xy);$$

LA CARICA TOTALE:

$$dq = \rho\, dV \rightarrow q = \int_V dq = \int_V \rho\, dV = \int \varepsilon_0(2\alpha x - \gamma xy)\,dx\,dy\,dz = \varepsilon_0\left[2\alpha\int_V x\,dx\,dy\,dz - \gamma\int_V xy\,dx\,dy\,dz\right] =$$

$$= \varepsilon_0\left[2\alpha\int_0^b dy\cdot\int_0^c dz\int_0^a x\,dx - \gamma\int_0^a x\,dx\cdot\int_0^b y\,dy\cdot\int_0^c dz\right] = \varepsilon_0\left[2\alpha b c\frac{a^2}{2} - \gamma c\frac{b^2}{2}\frac{a^2}{2}\right] =$$

$$= \varepsilon_0\pi a^2 c\left[4b - \frac{b^2}{5}\right] = 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 3{,}14\cdot 1^2\cdot 50\cdot 10^{-2}\left[4\cdot 2 - \frac{(2)^2}{5}\right] = 1\cdot 10^{-10}\,C.$$

8) SIA DATA UNA LASTRA DI SPESSORE $d = 5\,cm$ ED ESTENSIONE INFINITA. AL SUO INTERNO È DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE UNA CARICA POSITIVA CON DENSITÀ VOLUMICA $\rho = dq/dV = 10^{-6}\,C/m^3$. DETERMINARE:

a) IL CAMPO $\bar{E}$ IN TUTTO LO SPAZIO $\left(x < -\frac{d}{2},\ -\frac{d}{2} < x < \frac{d}{2},\ x > \frac{d}{2}\right)$;

b) IL POTENZIALE ELETTRICO V IN TUTTO LO SPAZIO;

c) IL LAVORO FATTO DALLE FORZE ELETTRICHE SU UNA CARICA $q = -10^{-7}\,C$ CHE VIENE SPOSTATA DA $x = -\frac{d}{2}$ A $x = d$.

$$V(x)=\begin{cases} -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}x+V_0 \\ -\dfrac{x^2}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}+V_0^{I} \\ \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}x+V_0^{II} \end{cases}$$

IN GENERALE LE 3 COSTANTI DI INTEGRAZIONE SONO DIVERSE. AFFINCHÈ $V(x)$ SIA DERIVABILE È NECESSARIO CHE SIA CONTINUA. LE 3 COSTANTI SI DETERMINANO IMPONENDO LA CONTINUITÀ NEL PASSARE DA UNA ZONA ALL'ALTRA. (7)

$\cdot$ IN $x=\frac{d}{2}$: $V\left(\frac{d}{2}^+\right)=V\left(\frac{d}{2}^-\right)\rightarrow -\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\frac{d}{2}+V_0=-\frac{\rho}{2\varepsilon_0}\frac{d^2}{4}+V_0^{I}$;

$\Rightarrow V_0=V_0^{I}+\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}$;

$\cdot$ IN $x=-\frac{d}{2}$: $V\left(-\frac{d}{2}^+\right)=V\left(-\frac{d}{2}^-\right)\rightarrow \frac{-\rho(d^2/4)}{2\varepsilon_0}+V_0^{I}=\frac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(-\frac{d}{2}\right)+V_0^{II}$;

$\Rightarrow V_0^{II}=\frac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}+V_0^{I}$; $\Rightarrow V_0=V_0^{II}$;

$$\cdot V(x)=\begin{cases} -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}x+\dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}+V_0^{I} = -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(x-\dfrac{d}{4}\right)+V_0^{I} \\ -\dfrac{x^2}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}+V_0^{I} = -\dfrac{x^2}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}+V_0^{I} \\ \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}x+\dfrac{\rho d^2}{8\varepsilon_0}+V_0^{I} = \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(x+\dfrac{d}{4}\right)+V_0^{I} \end{cases}$$

ABBIAMO SCRITTO $V(x)$ INTERMINI DI UNA SOLA COSTANTE D'INTEGRAZIONE CHE POSSO DETERMINARE IMPONENDO POTENZIALE NULLO SE $x=0$, QUINDI:

$\cdot V(x=0)=0=-\frac{x^2}{2}\frac{\rho}{\varepsilon_0}+V_0^{I}=0+V_0^{I}$

$\Rightarrow V_0^{I}=0.$

$$\cdot V(x)=\begin{cases} -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(x-\dfrac{d}{4}\right) & \text{se } x>d/2 \\ -\dfrac{x^2}{2}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{se } -d/2<x<d/2 \\ \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0}\left(x+\dfrac{d}{4}\right) & \text{se } x<-d/2 \end{cases}$$

IL LAVORO PER SPOSTARE q_0 DA $x=-d/2$ A $x=d$ È DATO DA:

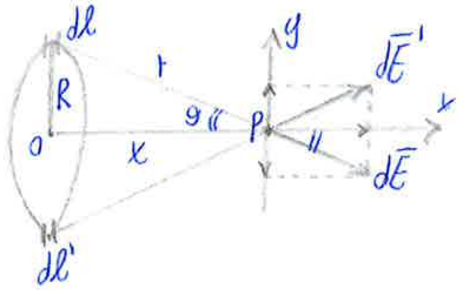
$$\cdot W=q\left(V\left(-\frac{d}{2}\right)-V(d)\right)=q\left(-\frac{3\rho d^2}{4\varepsilon_0}+\frac{\rho d^2}{2\varepsilon_0}\right)\frac{1}{2}=q\left(\frac{1}{4}\frac{\rho d^2}{\varepsilon_0}\right)=-10^{-7}\left(\frac{1}{4}\frac{10^{-6}\cdot(0{,}05)^2}{8{,}85\cdot10^{-12}}\right)=$$

$$=-7{,}06\cdot10^{-6}\,J=\underline{-7{,}06\,\mu J}.$$

9) SIA DATA UNA CARICA q DISTRIBUITA IN MODO UNIFORME ALL'INTERNO DI UN VOLUME SFERICO DI RAGGIO R. CALCOLARE IL CAMPO ELETTROSTATICO E IL RELATIVO POTENZIALE DENTRO E FUORI LA DISTRIBUZIONE DI CARICA.

$\cdot$ CONSIDERAZIONI SULLA SIMMETRIA: UNA SFERA HA SIMMETRIA SFERICA, QUINDI IL CAMPO ELETTRICO DEVE AVERE LA STESSA SIMMETRIA. MUOVENDOMI ATTORNO ALLA SFERA A PARITÀ DI DISTANZA DAL CENTRO $\bar{E}$ DEVE APPARIRMI LO STESSO. $\bar{E}$ SARÀ QUINDI RADIALE USCENTE $(q>0)$, OVVERO $\bar{E}=E(r)\bar{u}_r$.

10) CALCOLARE IL CAMPO $\bar{E}$ GENERATO SULL'ASSE DI UN ANELLO CARICO CON UNA CARICA DISTRIBUITA CON DENSITÀ LINEARE λ. (9)



SUDDIVIDO L'ANELLO IN TANTI PEZZI dl INFINITESIMI CHE CONTENGONO UNA CARICA dq. PER OGNI dl ESISTE UN dl' DIAMETRALMENTE OPPOSTO T.C LE COMPONENTI LUNGO $\bar{u}_y$ DI $d\bar{E}$ E $d\bar{E}'$ SONO UGUALI E OPPOSTE. QUINDI I CONTRIBUTI LUNGO $\bar{u}_y$ SI ELIDONO DUE A DUE. $\bar{E}$ SARÀ RIVOLTO LUNGO $\bar{u}_x$.

$\cdot\ d\bar{E}_x = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\cos\vartheta\,\bar{u}_x$; ϑ È L'ANGOLO TRA ~~IL PIANO DELL'ANELLO~~ L'ASSE X E LA DISTANZA r (TRA L'ALTRO È LO STESSO X TUTTI I dl).

$$\cdot\ d\bar{E}_x = \left(R = r\cos\vartheta \to r = \frac{R}{\cos\vartheta}\right) = \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}\bar{u}_x = \left(r = \sqrt{x^2+R^2}\right) = \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\bar{u}_x ;$$

$$\to \bar{E}(P) = \int d\bar{E}_x = \int \frac{\lambda\,dl}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\bar{u}_x = \left(x \text{ È FISSATO DA P, È TUTTO COSTANTE TRANNE } dl\right) =$$

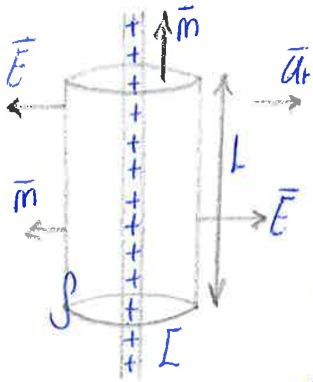
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^3)^{3/2}}\int_{ANELLO} dl\,\bar{u}_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(x^2+R^2)^{3/2}}\cdot 2\pi R = \left(q = \lambda 2\pi R\right) =$$

$$= \frac{q\cdot x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(x^2+R^2)^{3/2}}\bar{u}_x ;$$

SE $x \gg R$, CIOÈ A GRANDE DISTANZA DALL'ANELLO, ALLORA R^2 SI PUÒ TRASCURARE NELLA SOMMA:

$$\Rightarrow \bar{E}(P) = \frac{q\,x}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^3}\bar{u}_x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\bar{u}_x \quad \text{(CAMPO ELETTROSTATICO DI UNA CARICA PUNTIFORME).}$$

11) CALCOLARE IL CAMPO ELETTRICO A DISTANZA r GENERATO DA UN FILO UNIFORMEMENTE CARICO POSITIVAMENTE DI LUNGHEZZA INFINITA LA CUI DENSITÀ LINEARE È λ.



IL PROBLEMA HA SIMMETRIA CILINDRICA, QUINDI $\bar{E}$ DEVE AVERE LA STESSA SIMMETRIA. QUINDI RUOTANDO ATTORNO AL FILO A DISTANZA FISSA DA ESSO, $\bar{E}$ DEVE ESSERE LO STESSO. $\bar{E}$ È QUINDI $\perp$ AL FILO IN VERSO USCENTE: $\bar{E} = E(r)\bar{u}_r$.

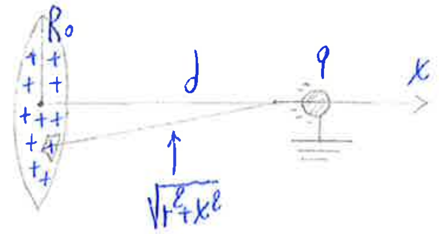
APPLICO GAUSS AD UN CILINDRO CON IL FILO COME ASSE:

$$\cdot\ \Phi_S(\bar{E}) = \int_S \bar{E}\cdot\bar{m}\,dS = \left(\bar{m} \equiv \bar{u}_r\right) = \int E(r)\bar{u}_r\cdot\bar{u}_r\,dS = E(r)\cdot\int_{CILINDRO} dS = \left(\text{L'UNICO CONTRIBUTO AL FLUSSO È DOVUTO ALLA SUPERFICIE LATERALE}\right) =$$

$$= E(r)\int_{SUP.LAT.} dS = E(r)\cdot 2\pi r\,L = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \to \bar{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\bar{u}_r .$$

COME SI OSSERVA ALLA FINE LA LUNGHEZZA DEL FILO SI ELIDE, QUINDI NON DIPENDE DALLA LUNGHEZZA.

12) SIA DATO UN DISCO DI RAGGIO R_0 SU CUI È DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE UNA CARICA q_0 CON DENSITÀ SUPERFICIALE $\sigma = q_0/\pi R_0^2$. UNA SFERETTA METALLICA DI RAGGIO $R_1 \ll R_0$ HA IL CENTRO DISPOSTO LUNGO L'ASSE DEL DISCO A DISTANZA d DA ESSO. SE LA SFERETTA È MESSA A CONTATTO CON LA TERRA (A POTENZIALE $V=0$), CALCOLARE LA CARICA q SULLA SFERETTA. DATI: $R_1 = 1mm$, $R_0 = 10cm$, $\sigma = 10^{-11} C/m^2$, $d = 30cm$. (11)



IL DISCO GENERA UN CAMPO ELETTRICO CHE INDUCE UNA SEPARAZIONE DI CARICA SULLA SFERETTA (INDUZIONE ELETTROSTATICA); LE CARICHE ⊕ SONO ATTRATTE, QUELLE ⊕ VENGONO RESPINTE. METTENDO A TERRA IL LATO DELLA SFERETTA CON LE CARICHE ⊕, QUESTE SI DISPERDONO NELLA TERRA LASCIANDO UNA CARICA NETTA NEGATIVA. ADESSO SIA LA SFERA SIA IL DISCO GENERANO UN LORO CAMPO ELETTRICO, QUINDI IL CAMPO ELETTRICO TOTALE È LA SOMMA DEI CAMPI ELETTRICI E IL POTENZIALE TOTALE IN OGNI È LA SOMMA DEI POTENZIALI. OVVERO:

$\cdot V(\bar{x}) = V_{DISCO}(\bar{x}) + V_{SFERA}(\bar{x})$; QUELLO CHE BISOGNA IMPORRE È CHE DOVE STA LA SFERETTA IL POTENZIALE SIA NULLO, QUINDI:

$\cdot V(SFERA) = V_{DISCO}(SFERA) + V_{SFERA}(SFERA) = 0$; CALCOLIAMO I DUE TERMINI. COME SAPPIAMO LA SFERETTA CONDUTTRICE GENERA UN POTENZIALE COSTANTE AL SUO INTERNO E SULLA SUPERFICIE:

$$\cdot \bar{E}_{SFERA} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\bar{u} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_s^2}\bar{u} \rightarrow V_{SFERA} = -\int \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_s^2}dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_s} + COSTANTE;$$

LA COSTANTE SI PUÒ DEFINIRE IMPONENDO POTENZIALE SE $r \rightarrow +\infty$ (r OVVIAMENTE È LA DISTANZA DAL CENTRO DELLA SFERETTA): $V_{SFERA}(r \rightarrow +\infty) = 0 = 0 + COSTANTE \rightarrow COSTANTE = 0$. SE SULLA SFERA IL POTENZIALE È COSTANTE ALLORA CONVIENE CONSIDERARE $r_s = R_1$: $V_{SFERA}(SFERA) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$;

ADESSO CALCOLIAMO IL POTENZIALE DEL DISCO:

SCOMPONGO IL DISCO IN TANTI ELEMENTI INFINITESIMI DI SUPERFICIE dS CHE CONTENGONO UNA CARICA dq INFINITESIMA, TALMENTE PICCOLA CHE PUÒ ESSERE CONSIDERATA PUNTIFORME. L'ELEMENTINO dS HA BASE dr E ALTEZZA $r d\theta$. CALCOLO IL POTENZIALE SULL'ASSE DEL DISCO.

$$\cdot dV(x) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \left(\sigma = \frac{dq}{dS} \rightarrow dq = \sigma \cdot dS = \sigma \cdot r d\theta \cdot dr\right) = \frac{\sigma \cdot r d\theta \cdot dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}};$$

$$\rightarrow V(x)_{DISCO} = \int_{DISCO} dV(x) = \int \frac{\sigma \cdot r d\theta\, dr}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_{DISCO}\frac{r d\theta\, dr}{\sqrt{x^2+r^2}} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{R_0}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr =$$

$$= \frac{\sigma}{2\cancel{4}\pi\varepsilon_0}\cdot \cancel{2\pi}\int_0^{R_0}\frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}}dr;$$ RISOLVIAMO L'INTEGRALE A PARTE:

· SE $x<0$: $\frac{-x}{-(x-l)}=4 \to \frac{x}{x-l}=4 \to x=4(x-l)=4x-4l \to x=\frac{4}{3}l>0$ NON È SOLUZIONE; (13)

· SE $0<x<l$: $\frac{x}{-(x-l)}=4 \to \frac{x}{l-x}=4 \to x=4(l-x)=4l-4x \to x=\frac{4}{5}l$ È UNA SOLUZIONE;

· SE $x>l$: $\frac{x}{x-4}=4 \to x=\frac{4}{3}l$ È UNA SOLUZIONE.

$V=0$ SE: $\begin{cases} x_1=\frac{4}{5}l=16\,cm \\ x_2=\frac{4}{3}l=26{,}7\,cm \end{cases}$

(N.B.): SE $x<0$ ALLORA $|x|=-x$ E $|x-l|=-(x-l)$.

IL CAMPO ELETTRICO TOTALE È LA SOMMA DEI CAMPI ELETTRICI:

$$\bar{E}=\bar{E}_1+\bar{E}_2=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{x}-\bar{x}_1}{|\bar{x}-\bar{x}_1|^3}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{x}-\bar{x}_2}{|\bar{x}-\bar{x}_2|^3}=\left(\bar{x}_1=\bar{0},\ \bar{x}_2=l\bar{u}_x,\ \bar{x}=x\bar{u}_x\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1x}{|x|^3}+\frac{q_2(x-l)}{|x-l|^3}\right);$$

$$\Longrightarrow \frac{q_1x}{|x|^3}+\frac{q_2(x-l)}{|x-l|^3}=0 \to \frac{4x}{|x|^3}=\frac{x-l}{|x-l|^3};$$

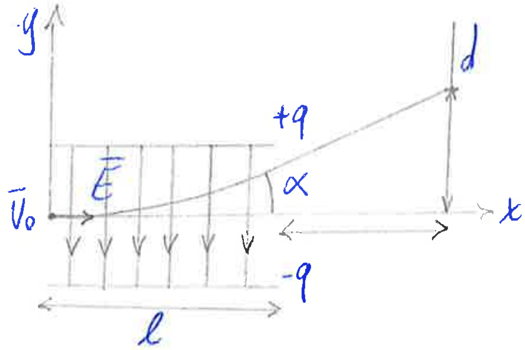
· SE $x<0$: $\frac{4\cancel{x}}{-x^{\cancel{3}2}}=\frac{\cancel{x-l}}{-(x-l)^{\cancel{3}2}} \to \frac{x^2}{(x-l)^2}=4 \to x=40$ NON È SOLUZIONE;

· SE $0<x<l$: $\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}=\frac{\cancel{x-l}}{-(x-l)^{\cancel{3}2}} \to \frac{x^2}{(x-l)^2}=-4$ NESSUNA SOLUZIONE;

· SE $x>l$: $\frac{4\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}}=\frac{\cancel{x-l}}{(x-l)^{\cancel{3}2}} \to \frac{x^2}{(x-l)^2}=4 \to x=40$ È SOLUZIONE.

$E=0$ SE $x=40\,cm$.

15) UN ELETTRONE VIENE IMMESSO CON VELOCITÀ INIZIALE $\bar{V}_0$ NELLA DIREZIONE DELL'ASSE x NELLA REGIONE TRA DUE LASTRE CARICHE CON CARICA UGUALE E OPPOSTA; LE DUE LASTRE SONO MOLTO VICINE, IN QUESTO MODO IL CAMPO $\bar{E}$ È UNIFORME TRA LE ARMATURE. $\bar{V}_0$ È // ALLE LASTRE DI LUNGHEZZA l. AD UNA DISTANZA L DALLE LASTRE È POSTO UNO SCHERMO. DETERMINARE L'ANGOLO DI DEFLESSIONE α DELL'ELETTRONE E LA DISTANZA d DEL PUNTO DI IMPATTO DELL'ELETTRONE SULLO SCHERMO DALL'ASSE x.



SUDDIVIDIAMO IL MOTO IN DUE MOMENTI:

1) IL MOTO TRA LE PIASTRE; 2) IL MOTO FUORI DALLE PIASTRE;

SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DEL MOTO DELL'ELETTRONE TRA LE PIASTRE:

$$\bar{F}=m\bar{a} \to -e\bar{E}=-e(-E\bar{u}_y)=eE\bar{u}_y=m(a_x\bar{u}_x+a_y\bar{u}_y);$$

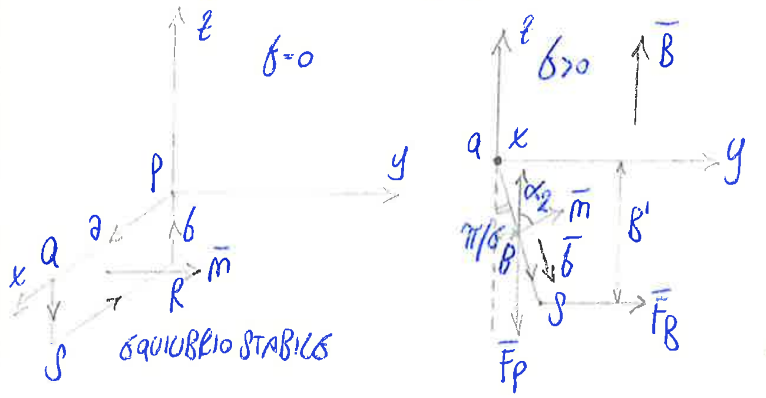
L'ACCELERAZIONE HA SOLO DUE COMPONENTI POICHÉ IL MOTO SI SVOLGE SU UN PIANO.

ADESSO PROIETTO L'EQUAZIONE DI NEWTON LUNGO LE DUE DIREZIONI x E y:

ESERCITAZIONE 2 (CAMPO MAGNETOSTATICO) ①

1) UNA SPIRA RETTANGOLARE RIGIDA DI LATI $PQ = RS = a = 20$ cm E $QR = SP = b = 10$ cm HA DENSITÀ DI LINEA $\lambda = 5\cdot 10^{-3}$ g/cm PERCORSA DA UNA CORRENTE i. ESSA RUOTA SENZA ATTRITO ATTORNO AL LATO PQ PARALLELO ALL'ASSE X ORIZZONTALE, INIZIALMENTE NELLA POSIZIONE DI EQUILIBRIO STABILE NEL CAMPO DELLA FORZA PESO. QUANDO SULLA SPIRA AGISCE UN CAMPO MAGNETICO $\bar{B} = B\bar{u}_z$ CON $B = 2\cdot 10^{-2}$ T ESSA RUOTA DI UN ANGOLO $\vartheta = \pi/6$.

DETERMINARE: a) LA CORRENTE i; b) IL LAVORO FATTO DALLE FORZE MAGNETICHE NELLA ROTAZIONE.



a) ALL'EQUILIBRIO DEVE VALERE CHE IL MOMENTO DELLA FORZA PESO E DELLA FORZA MAGNETICA DEVONO COMPENSARSI. INFATTI LA SPIRA NON TRASLA, MA RUOTA SOLTANTO.

X LA FORZA PESO:

$\cdot\ \bar{F}_P = -mg\bar{u}_z = (m = \lambda l) = -\lambda l g\bar{u}_z =$
$= -\lambda(2a+2b)g\bar{u}_z = -2\lambda(a+b)g\bar{u}_z;$

LA FORZA PESO È APPLICATA NEL BARICENTRO DELLA SPIRA:

$\cdot\ B(\text{BRACCIO DELLA FORZA PESO}) = \frac{b}{2}\sin\vartheta \Rightarrow |\bar{M}_P| = F_P\cdot B = 2\lambda(a+b)g\frac{b}{2}\sin\vartheta = \lambda b(a+b)g\sin\vartheta;$

X LA FORZA MAGNETICA USIAMO LA 2ª LEGGE DI LAPLACE:

$\cdot\ \bar{F}_B = \bar{F}_{QS} + \bar{F}_{SR} + \bar{F}_{RP};\quad \bar{F}_{QS} = i\,\overline{QS}\wedge\bar{B} = i(-b\cos\vartheta\bar{u}_z + b\sin\vartheta\bar{u}_y)\wedge B\bar{u}_z = iBb\sin\vartheta(\bar{u}_y\wedge\bar{u}_z) =$
$= iBb\sin\vartheta\bar{u}_x;$

$\cdot\ \bar{F}_{SR} = i\,\overline{SR}\wedge\bar{B} = i(-a\bar{u}_x)\wedge B\bar{u}_z = -iaB(\bar{u}_x\wedge\bar{u}_z) = iaB\bar{u}_y;$

$\cdot\ \bar{F}_{RP} = i\,\overline{RP}\wedge\bar{B} = i(b\cos\vartheta\bar{u}_z - b\sin\vartheta\bar{u}_y)\wedge B\bar{u}_z = -iBb\sin\vartheta(\bar{u}_y\wedge\bar{u}_z) = -iBb\sin\vartheta\bar{u}_x$

$\cdot\ \bar{F}_B = iBb\cancel{\sin}\vartheta\bar{u}_x + iaB\bar{u}_y - iBb\cancel{\sin}\vartheta\bar{u}_x = iaB\bar{u}_y;$

LA FORZA MAGNETICA È APPLICATA NEL BARICENTRO DEL LATO SR, OVVERO NEL SUO CENTRO:

$\cdot\ B'(\text{BRACCIO DELLA FORZA MAGNETICA}) = b\cos\vartheta \Rightarrow |\bar{M}_B| = F_B\cdot B' = iabB\cos\vartheta;$

$\Rightarrow |\bar{M}_P| = |\bar{M}_B| \Rightarrow \lambda\cancel{b}(a+b)g\sin\vartheta = i a\cancel{b}B\cos\vartheta \rightarrow i = \frac{\lambda(a+b)g}{aB}\,\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} = \frac{\lambda(a+b)g}{aB}\,\mathrm{tg}\,\vartheta =$

$= \frac{(5\cdot10^{-3})\cdot(20+10)\cdot10^{-2}\cdot 9{,}81}{20\cdot10^{-2}\cdot 2\cdot10^{-2}}\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{6} = \underline{2{,}12\,A};$

NON SAPENDO IL VERSO DELLA CORRENTE ABBIAMO FISSATO UN VERSO ARBITRARIO CON CUI FARE I CALCOLI. POICHÉ LA CORRENTE È VENUTA POSITIVA, ALLORA EFFETTIVAMENTE ABBIAMO SCELTO IL VERSO GIUSTO; FOSSE VENUTA NEGATIVA, ALLORA IL VERSO ERA QUELLO OPPOSTO.

LA J ATTRAVERSO UNA SEZIONE DEL FILO È $N \cdot i_{6}$, È QUESTA LA CORRENTE CHE DEVO CONSIDERARE. IL CAMPO (3)
$\bar{B}$ DI UN FILO INFINITO È DATO DA BIOT-SAVART:

$$\bar{F} = N i_6 a \left(\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_f}{y} - \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_f}{y+a} \right) \bar{u}_y = N i_6 a \frac{\mu_0}{2\pi} i_f \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \bar{u}_y = N i_6 i_f a \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{y + a - y}{y(y+a)} \right) \bar{u}_y =$$

$$= \frac{N i_6 i_f a^2 \mu_0}{2\pi y(y+a)} \bar{u}_y = \frac{20 \cdot 2 \cdot 50 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 1{,}2566 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 3{,}14\, y(y+0{,}02)} [N] \bar{u}_y = 1{,}60 \cdot 10^{-7} \frac{1}{y(y+0{,}02)} \bar{u}_y [N].$$

b) IL LAVORO FATTO DA $\bar{F}$ È DATO DA:

$$W_{y_1 \to y_2} = \int_{y_1}^{y_2} \bar{F}(y)\, d\bar{y} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{1{,}60 \cdot 10^{-7}}{y(y+0{,}02)} \bar{u}_y \cdot dy\, \bar{u}_y = 1{,}60 \cdot 10^{-7} \int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y(y+0{,}02)} dy;$$

CALCOLO L'INTEGRALE A PARTE:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y(y+0{,}02)} dy; \quad \frac{1}{y(y+0{,}02)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+a} = \frac{Ay + Aa + By}{y(y+a)} = \frac{y(A+B) + Aa}{y(y+a)} \quad \begin{cases} Aa = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \begin{cases} A = 1/a \\ B = -1/a \end{cases}$$

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{1}{y(y+a)} dy = \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+a} \right) \frac{1}{a} dy = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{y}{y+a} \right) \Bigg|_{y_1}^{y_2} = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{y_2 (y_1 + a)}{y_1 (y_2 + a)} \right);$$

$$\Longrightarrow W_{y_1 \to y_2} = 1{,}60 \cdot 10^{-7} \frac{1}{0{,}02} \ln \left(\frac{0{,}02 \cdot (0{,}01 + 0{,}02)}{0{,}01 \cdot (0{,}02 + 0{,}02)} \right) = 3{,}24 \cdot 10^{-6}\, J.$$

c) POICHÉ SIAMO A DISTANZA MOLTO GRANDE DAL FILO ($y_3 = 20\,cm \gg a$) ALLORA SI POSSONO TRASCURARE LE DIMENSIONI DELLA SPIRA E CONSIDERARE $\bar{B}$ UNIFORME NELLA SPIRA E PARI A $\bar{B}$ CALCOLATO IN y_3. POSSO ESPRIMERE QUESTO LAVORO COME DIFFERENZA DI ENERGIA MECCANICA, IN QUESTO CASO È SOLO ENERGIA POTENZIALE.

$$W = \Delta E_p = -mB\cos\theta_2 - (-mB\cos\theta_1) = mB\cos\theta_1 - mB\cos\theta_2 = mB(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) =$$

$$= (\theta_1 = 0 \text{ e } \theta_2 = \pi) = mB(y_3)(1 - (-1)) = 2mB(y_3) = 2 i_6 N a^2 \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_f}{y_3} =$$

$$= \frac{2 \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1{,}2566 \cdot 10^{-6} \cdot 50}{3{,}14 \cdot 20 \cdot 10^{-2}} = 7{,}96 \cdot 10^{-7}\, J.$$

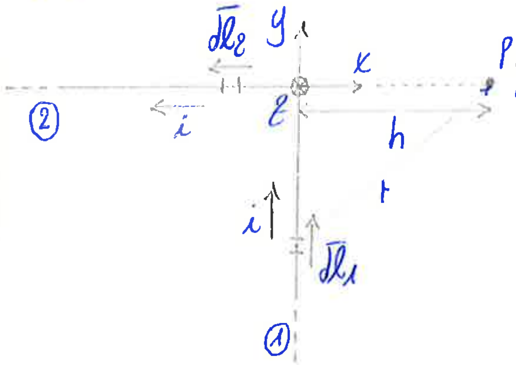
3) TRE LUNGHI FILI CONDUTTORI RETTILINEI SONO TRA LORO PARALLELI E DISPOSTI AI VERTICI DI UN TRIANGOLO EQUILATERO DI LATO $2a = 15\,cm$, COME IN FIGURA. ESSI SONO PERCORSI DALLA STESSA CORRENTE $i = 10\,A$ CONCORDE CON L'ASSE z. CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ NEL CENTRO C DEL TRIANGOLO E LA FORZA f X UNITÀ DI LUNGHEZZA AGENTE SUL FILO DISPOSTO SULL'ASSE y.

(5)

$$= -\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{h}\ln\left(\frac{K-x-K}{0-x-h}\right) = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{h}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)\bar{u}_z$$; PER $x = 0{,}01\,m$:

$$\cdot\ \bar{B}(x=0{,}01\,m) = \frac{1{,}2566\cdot 10^{-6}}{2\;3{,}14}\,\frac{10}{0{,}02}\ln\left(\frac{0{,}01+0{,}02}{0{,}01}\right)\bar{u}_z = 1{,}1\cdot 10^{-4}\,T\,\bar{u}_z.$$

5) SI CONSIDERI UN FILO CONDUTTORE INFINITAMENTE LUNGO, PIEGATO AD ANGOLO RETTO E PERCORSO DA UNA CORRENTE CONTINUA $i = 1A$. DETERMINARE IL CAMPO $\bar{B}$ DA ESSO GENERATO NEL PUNTO P $(h = 20\,cm)$.



LE DUE PORZIONI DI FILO SONO DUE FILI SEMINFINITI. IL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN PEZZETTO DI FILO È DATO DALLA 1^a LEGGE DI LAPLACE, OVVERO:

$$\cdot\ d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{d\bar{l}\wedge\bar{u}_r}{r^2}; \quad \bar{u}_r = \frac{\bar{r}}{|r|};$$

LA PORZIONE DI FILO (2) HA $d\bar{l}_2 \parallel \bar{u}_r$ QUINDI NON DA CONTRIBUTO AL CAMPO MAGNETICO $(d\bar{l}\wedge\bar{u}_r = 0)$. SOLO (1) DA CONTRIBUTO.

LA DISTANZA DI OGNI ELEMENTINO $d\bar{l}_1$ DAL PUNTO P È:

$\cdot\ r^2 = y^2 + h^2$ (CON $y: [-\infty, 0]$) $\cdot\ d\bar{l} = +dy\,\bar{u}_y$; IL CONTRIBUTO $d\bar{B}$ È DATO DA:

$$\cdot\ d\bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} i\, d\bar{l}\wedge\frac{\bar{r}}{|r^3|} = (\bar{r} = y\bar{u}_y + h\bar{u}_x) = \frac{\mu_0}{4\pi} i (dy\,\bar{u}_y)\wedge\frac{(y\bar{u}_y + h\bar{u}_x)}{|r^3|} = \frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy\,h}{(h^2+y^2)^{3/2}}\bar{u}_z\ *;$$

$$\Rightarrow \bar{B} = \int d\bar{B} = \int_{-\infty}^{0}\frac{\mu_0}{4\pi} i \frac{dy\,h}{(h^2+y^2)^{3/2}}\bar{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi} h i \frac{1}{h^2}\left[\frac{y}{(y^2+h^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{h}\left[\frac{y}{(y^2+h^2)^{1/2}}\right]_{-\infty}^{0}\bar{u}_z;$$

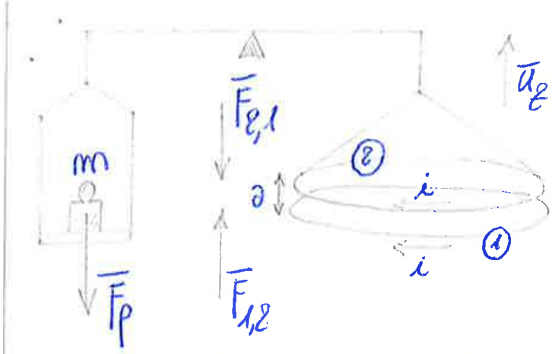
$$\cdot\ \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{(y^2+h^2)^{1/2}} \sim \frac{y}{(y^2)^{1/2}} = \frac{y}{y} = 1$$ (h SI TRASCURA NELLA SOMMA);

$$\cdot\ \lim_{y\to 0}\frac{y}{(y^2+h^2)^{1/2}} \sim \frac{y}{(h^2)^{1/2}} = \frac{y}{h} = 0 \Rightarrow \bar{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{h}(1-0)\bar{u}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i}{h}\bar{u}_z = \frac{1{,}2566\cdot 10^{-6}}{4\;3{,}14}\,\frac{1}{0{,}2}\bar{u}_z =$$

$$= 0{,}5\cdot 10^{-6}\,T\,\bar{u}_z.$$

6) SONO DATI DUE FILI CONDUTTORI RETTILINEI INDEFINITI E PARALLELI, POSTI AD UNA DISTANZA $2d$, PERCORSI DA DUE CORRENTI DI STESSA INTENSITÀ i. CALCOLARE IL CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ GENERATO NEL PIANO IN CUI GIACCIONO I FILI. CONSIDERARE SIA IL CASO IN CUI LE CORRENTI SONO DIRETTE NELLO STESSO VERSO SIA IN VERSO OPPOSTO.

· IL CAMPO $\bar{B}$ GENERATO DAL FILO INFINITO È DATO DA BIOT-SAVART SECONDO CUI $\bar{B}$ DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA DAL FILO, QUINDI IN UN RIFERIMENTO x, y, z COME IN FIGURA, NON DIPENDE NÉ DA y NÉ DA z.



POICHÈ LE DUE SPIRE SONO MOLTO VICINE TRA DI LORO, ALLORA NON SI RENDONO CONTO DELLA CURVATURA, QUINDI SI COMPORTANO COME DUE FILI INFINITI. QUESTA APPROSSIMAZIONE È TANTO MIGLIORE DAL MOMENTO CHE $R \gg a$. I DUE FILI SONO PERCORSI DA DUE CORRENTI EQUIVERSE, QUINDI SI ATTRAGGONO. (7)

· $\bar{F}_{1,2} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i\cdot i}{a}\bar{u}_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i^2}{a}\bar{u}_2$ (FORZA X UNITÀ DI LUNGHEZZA); LA FORZA QUINDI È:

· $\bar{f}_{1,2} = l\cdot\bar{F}_{1,2} = \cancel{2\pi} R\frac{\mu_0}{\cancel{2\pi}}\frac{i^2}{a}\bar{u}_2 = \frac{\mu_0 R i^2}{a}[N]\,\bar{u}_2$;

X AVERE EQUILIBRIO LA FORZA MAGNETICA DEVE EQUILIBRARE LA FORZA PESO:

· $|\bar{F}_P| = |\bar{f}_{1,2}| \Rightarrow mg = \frac{\mu_0 R i^2}{a} \Rightarrow m = \frac{\mu_0 R i^2}{g\cdot a} = \frac{1{,}256\cdot10^{-6}\cdot 0{,}3\cdot 1^2}{9{,}81\cdot 3\cdot10^{-3}} = 1{,}28\cdot10^{-5}\,[Kg]$.

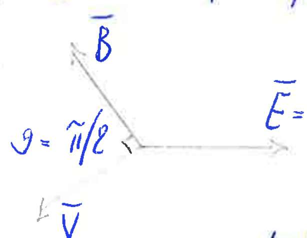
9) UN CAMPO ELETTRICO $\bar{E}$ CON $|\bar{E}| = 1{,}5\ KV/m$ ED UN CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ CON $|\bar{B}| = 0{,}44\ T$ AGISCONO SU UN ELETTRONE IN MOTO CON VELOCITÀ $\bar{V}$ T.C. LA FORZA RISULTANTE SU DI ESSO SIA NULLA. CALCOLARE $|\bar{V}|$ MINIMA E DISEGNARE $\bar{B}, \bar{E}, \bar{V}$.

· LA FORZA ELETTRICA È DATA DA: $\bar{F}_e = q\cdot\bar{E} = -e\bar{E}$;

· LA FORZA MAGNETICA È DATA DALLA FORZA DI LORENTZ: $\bar{F}_L = q\bar{v}\wedge\bar{B} = -e\bar{v}\wedge\bar{B}$;

X IPOTESI LE DUE FORZE SI COMPENSANO:

· $\bar{F}_e + \bar{F}_L = \bar{0} \Rightarrow -\cancel{e}\bar{E} - \cancel{e}\bar{v}\wedge\bar{B} = \bar{0} \Rightarrow \bar{E} = -\bar{v}\wedge\bar{B}$ QUINDI $\bar{E}$ È $\perp$ SIA A $\bar{v}$ SIA A $\bar{B}$, IN VERSO DISCORDE A QUELLO DATO DALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA.



$\bar{E} = -\bar{v}\wedge\bar{B}$ · $|\bar{E}| = |\bar{v}|\cdot|\bar{B}|\sin\theta \Rightarrow |\bar{v}| = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{B}|\sin\theta}$; $|\bar{v}|$ È MINIMA SE $\sin\theta$ È MASSIMO, OVVERO $\theta = \pi/2$:

$$\Rightarrow |\bar{v}| = \frac{|\bar{E}|}{|\bar{B}|} = \frac{1{,}5\cdot10^3\ V/m}{0{,}44\ T} = 3409{,}09\ m/s = 3{,}4\,[Km/s].$$

10) UN FILO DI LUNGHEZZA $l = 62\ cm$ E MASSA $m = 13\ g$ È SOSPESO TRAMITE DUE ELETTRODI FLESSIBILI IN UN CAMPO MAGNETICO $\bar{B}$ CON $|\bar{B}| = 440\ mT$. DETERMINARE VALORE E VERSO DELLA CORRENTE CHE DEVE ATTRAVERSARE IL FILO X ANNULLARE LA FORZA ELASTICA NEGLI ELETTRODI.

· AFFINCHÈ LA FORZA ELASTICA SIA NULLA I DUE ELETTRODI NON DEVONO NÈ COMPRIMERSI NÈ ALLUNGARSI, QUINDI LA FORZA PESO E QUELLA MAGNETICA SUL FILO DEVONO COMPENSARSI.

$$\Rightarrow \bar F = \left(-i\frac{l}{2}\cancel{B_\oplus} - i\frac{l}{2}\cancel{B_\ominus} + i\frac{l}{2}\cancel{B_\ominus} + i\frac{l}{2}\cancel{B_\oplus}\right)\bar u_y + \left(ilB_\ominus - ilB_\oplus\right)\bar u_x =$$

$$= il\left(B_\ominus + B_\oplus\right)\bar u_x = 10^{-3}\cdot 0{,}01\cdot\left(10^{-4} - 10^{-3}\right)\bar u_x = \underline{-9\cdot 10^{-9}[N]\,\bar u_x}.$$

12) È DATO UN SOLENOIDE DI LUNGHEZZA $L = 3$ cm E RAGGIO $r = 2$ mm IN CUI SCORRE UNA CORRENTE $i = 2A$. CALCOLARE IL NUMERO DI SPIRE CHE CORRISPONDE AD UN VALORE DI $B = 0{,}1$ T DENTRO AL SOLENOIDE.

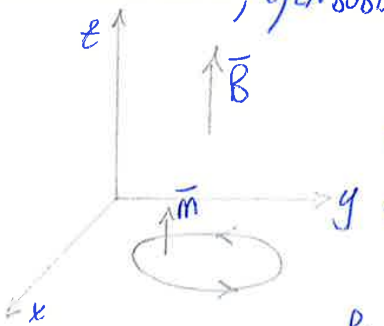
· POICHÉ LA LUNGHEZZA È MOLTO MAGGIORE DELLA SEZIONE, ALLORA IL SOLENOIDE PUÒ ESSERE CONSIDERATO INFINITO:

$$\cdot\ B = \mu_0 n i = \mu_0\frac{N}{L}i \Rightarrow N = \frac{B\,L}{\mu_0\, i} = \frac{0{,}1\cdot 3\cdot 10^{-2}}{1{,}2566\cdot 10^{-6}\cdot 2} = \underline{1194 \text{ SPIRE}}.$$

ESERCITAZIONE 3 (CAMPI $\bar B$ NON STAZIONARI - AUTOINDUTTANZA)

1) UNA BOBINA CIRCOLARE DI $N = 200$ SPIRE HA RAGGIO $r = 0{,}1$ m ED È APPOGGIATA SUL PIANO xy CON L'ASSE // AD UN CAMPO MAGNETICO UNIFORME DI INTENSITÀ $B = 0{,}2$ T ORIENTATO NEL VERSO POSITIVO DELL'ASSE z. CALCOLARE LA f.e.m INDOTTA NELLA BOBINA SE, IN UN INTERVALLO $\Delta t = 0{,}1$ s:

a) $\bar B$ VIENE RADDOPPIATO; b) $\bar B$ È RIDOTTO A ZERO; c) VIENE INVERTITO IL VERSO DEL CAMPO; d) LA BOBINA È RUOTATA DI $\frac{\pi}{2}$ ATTORNO ALL'ASSE x; e) LA BOBINA È RUOTATA DI 180° ATTORNO ALL'ASSE x.



FISSO UN VERSO DI PERCORRENZA ARBITRARIO DELLA CORRENTE COME IN FIGURA. LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ DICE CHE:

$$\cdot\ \mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}\Phi(\bar B)_{BOB} = -\frac{d}{dt}N\int_{BOB}\bar B(t)\cdot\bar m\,dS = -\frac{d}{dt}N\int_{BOB}B(t)\,\bar u_z\cdot\bar u_z\,dS =$$

$$= -N\pi r^2\frac{dB}{dt}$$; CON LA SEPARAZIONE DI VARIABILE:

$$\cdot\ \mathcal{E}_i\,dt = -N\pi r^2\,dB \Rightarrow \int_{B_f}^{B_i} dB = -\frac{\mathcal{E}_i}{N\pi r^2}\int_0^t dt \Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{B_f - B_i}{t}N\pi r^2.$$ ADESSO APPLICO AI VARI CASI:

a) $B_i = 0{,}2$ $B_f = 2\cdot 0{,}2 = 0{,}4$ T $\Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{0{,}4 - 0{,}2}{0{,}1}\cdot 200\cdot 3{,}14\cdot(0{,}1)^2 = \underline{-12{,}56\text{ V}}$;

b) $B_i = 0{,}2$T $B_f = 0$T $\Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{0 - 0{,}2}{0{,}1}\cdot 200\cdot 3{,}14\cdot(0{,}1)^2 = \underline{12{,}56\text{ V}}$;

c) $B_i = 0{,}2$T $B_f = -0{,}2$T $\Rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{-0{,}2 - 0{,}2}{0{,}1}\cdot 200\cdot 3{,}14\cdot(0{,}1)^2 = \underline{25{,}12\text{ V}}$;

NEGLI ULTIMI DUE PUNTI DOVREMMO MODIFICARE LA RELAZIONE PRECEDENTE POICHÉ $\bar u_z$ E $\bar m$ NON SONO // TRA DI LORO, MA FORMANO UN ANGOLO ϑ.

11

$\cdot \bar{F}_{BC} = i(b\bar{u}_y) \wedge B\bar{u}_z = ibB(\bar{u}_y \wedge \bar{u}_z) = ibB\bar{u}_x;$

$\cdot \bar{F}_{CD} = i(-b\bar{u}_x) \wedge B\bar{u}_z = ibB\bar{u}_y \quad \cdot \bar{F}_{DA} = \bar{0}$ (IL LATO $\overline{DA}$ NON È IMMERSO IN $\bar{B}$);

$\Rightarrow \bar{F} = (\cancel{-ibB} + \cancel{ibB})\bar{u}_y + ibB\bar{u}_x + \bar{0} = ibB\bar{u}_x;$

$\Rightarrow \bar{F} = ibB\bar{u}_x = -\frac{bBv(t)}{R} bB\cancel{\bar{u}_x} = m\frac{dv}{dt}\cancel{\bar{u}_x} \Rightarrow -\frac{(bB)^2}{R}v(t) = m\frac{dv}{dt};$

ABBIAMO UN'EQUAZIONE DIFFERENZIALE CHE POSSIAMO RISOLVERE RISPETTO LA VELOCITÀ CONOSCENDO LE CONDIZIONI INIZIALI, OVVERO $x(t=0) = b$ E $v(t=0) = v_0$:

$$\cdot \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} = -\frac{(bB)^2}{mR}\int_0^t dt = -\frac{(bB)^2}{mR}t \rightarrow \ln\left(\frac{v(t)}{v_0}\right) = -\frac{(bB)^2}{mR}t \Rightarrow v(t) = v_0 \exp\left\{-\frac{(bB)^2}{mR}t\right\};$$

SE $t = t_1 = 2{,}9\,s$: $v(t_1 = 2{,}9\,s) = 4\cdot10^{-2}\exp\left\{-\frac{(0{,}2\cdot0{,}5)^2}{4\cdot10^{-3}\cdot25}\cdot2{,}9\right\} = \underline{0{,}030\,[m/s]}.$

b) L'ENERGIA DISSIPATA SI PUÒ ESPRIMERE COME VARIAZIONE DI ENERGIA MECCANICA CHE IN QUESTO CASO È SOLO ENERGIA CINETICA XCHÈ IL MOTO SI SVOLGE SU UN PIANO ALLA STESSA QUOTA DALL'INIZIO ALLA FINE, OPPURE XCHÈ LA SPIRA NON RUOTA DURANTE IL PROCESSO ($\bar{m}$ E $\bar{B}$ FORMANO SEMPRE LO STESSO ANGOLO).

$$\cdot \Delta E = E_K^f - E_K^i = \frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(v^2(t_1) - v_0^2) = \frac{4\cdot10^{-3}}{2}(0{,}030^2 - (4\cdot10^{-2})^2) = \underline{-1{,}4\cdot10^{-6}\,J}.$$

DURANTE IL PROCESSO QUINDI LA SPIRA PERDE VELOCITÀ.

c) UNA VOLTA IMMERSA COMPLETAMENTE IN $\bar{B}$ IL FLUSSO DIVENTA:

$\cdot \Phi(\bar{B}) = (x = 2b) = Bb(2b - b) = Bb^2$ IL FLUSSO È COSTANTE, QUINDI NON VARIA PIÙ E NON PASSA PIÙ CORRENTE.

INTEGRIAMO $v(t)$ X CALCOLARE $x(t)$:

$$\cdot v(t) = v_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \text{ CON } \tau = \frac{mR}{(bB)^2} \overset{10\,s}{=} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\} \rightarrow \int_{x_0=b}^{x=2b} dx = v_0\int_0^t \exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}dt;$$

$$\Rightarrow x(t) = b + v_0(-\tau)\int_0^t \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}dt = \tau v_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right);$$

$$\cdot \text{SE } x(t = t_2) = 2b = b + \tau v_0\left(1 - e^{-t_2/\tau}\right) \Rightarrow t_2 = \tau\ln\left(\frac{\tau v_0}{\tau v_0 - b}\right) = 10\ln\left(\frac{10\cdot4\cdot10^{-2}}{10\cdot4\cdot10^{-2} - 20\cdot10^{-2}}\right) = \underline{6{,}93\,s}.$$

LA VELOCITÀ CORRISPONDENTE È:

$$\cdot v(t = t_2) = 4\cdot10^{-2}\exp\left\{-\frac{6{,}93}{10}\right\} = \underline{0{,}020\,[m/s]};$$

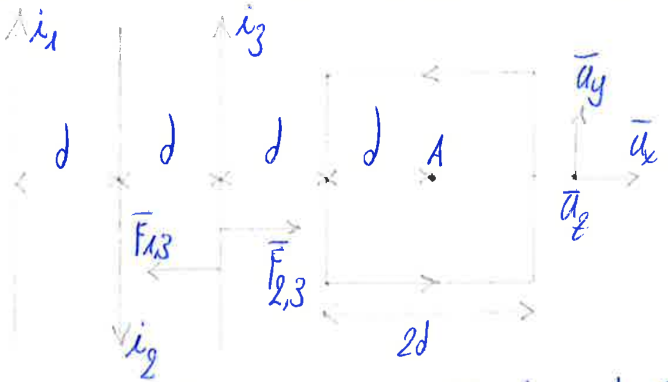
e) X CALCOLARE LA CARICA CHE SCORRE DURANTE IL PROCESSO DA $t_0 = 0$ A $t = t_2$ BISOGNA CONSIDERARE LA DEFINIZIONE DI CORRENTE COME DERIVATA DELLA CARICA NEL TEMPO:

(13)

c) LA RESISTENZA R DELLA SPIRA SAPENDO CHE A $t=0$ LA CORRENTE INDOTTA È $i_{IND.}=5{,}5\cdot10^{-4}A$;

d) LA CARICA CHE CIRCOLA NELLA SPIRA DA $t=0$ A $t\to+\infty$;

e) LA RISULTANTE DELLE FORZE SULLA SPIRA A $t\to+\infty$.



a) X LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI:

$\cdot\ \bar{B}_A=\bar{B}_1+\bar{B}_2+\bar{B}_3$; A $t=0$ VALE:

$\cdot\ i_1=i_0,\ i_2=3i_0,\ i_3=2i_0$;

POICHÉ ABBIAMO DEI FILI INDEFINITI ALLORA $\bar{B}$ È DATO DALLA LEGGE DI BIOT-SAVART:

$$\cdot\ \bar{B}_A=\bar{B}_1(A)+\bar{B}_2(A)+\bar{B}_3(A)=\left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{4d}\bar{u}_z\right)+\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{3d}\bar{u}_z\right)+\left(-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_3}{2d}\bar{u}_z\right)=$$

$$=\frac{\mu_0}{2\pi d}\left(-\frac{i_0}{4}+\frac{3\cancel{i_0}}{\cancel{3}}-\frac{2\cancel{i_0}}{\cancel{2}}\right)\bar{u}_z=-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_0}{4}\bar{u}_z=-5\cdot10^{5}\,T\,\bar{u}_z;$$

b) i_1 E i_3 SONO PERCORSI DA CORRENTE NELLO STESSO VERSO, QUINDI LA FORZA $\bar{F}_{1,3}$ È ATTRATTIVA; i_2 E i_3 INVECE CIRCOLANO IN VERSO OPPOSTO, QUINDI $\bar{F}_{2,3}$ È REPULSIVA.

$$\cdot\ \bar{F}_3=\bar{F}_{1,3}+\bar{F}_{2,3}=-\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1\cdot i_3}{2d}\bar{u}_x+\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2\cdot i_3}{d}\bar{u}_x=\left(-\frac{\mu_0}{2\pi d}i_0^2+\frac{\mu_0}{\pi d}3i_0^2\right)\bar{u}_x=$$

$$=\frac{\mu_0}{\pi d}i_0^2\left(-\frac{1}{2}+3\right)\bar{u}_x=\frac{5\mu_0}{2\pi d}i_0^2\bar{u}_x=\frac{5\cdot1{,}2566\cdot10^{-6}}{2\cdot3{,}14\cdot0{,}1}(100)^2\bar{u}_x=0{,}10\left[\frac{N}{m}\right]\bar{u}_x;$$

c) I CAMPI $\bar{B}_1$ E $\bar{B}_3$ NON VARIANO NEL TEMPO, MA SOLO CON LA DISTANZA, QUINDI NON DANNO CONTRIBUTO ALLA VARIAZIONE DI FLUSSO. SOLO $\bar{B}_2$ DA CONTRIBUTO POICHÉ È L'UNICO CHE VARIA NEL TEMPO. IL FLUSSO $d\phi(\bar{B}_2)$ INFINITESIMO ATTRAVERSO LA SPIRA È:

$$\cdot\ d\phi(\bar{B}_2)=d\bar{B}_2\cdot\bar{m}\cdot dS=\left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{x}\bar{u}_z\right)\bar{u}_z\,dx\,dy=\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{x}dx\,dy;$$

SE PONGO L'ORIGINE DEL RIFERIMENTO SUL FILO 2 ALL'ALTEZZA DI A, ALLORA GLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE SARANNO $x[2d,4d]$ E $y[-d,+d]$, QUINDI:

$$\cdot\ \Phi(\bar{B}_2)=\int_{SPIRA}d\phi(\bar{B}_2)=\frac{\mu_0}{2\pi}i_2\int_{2d}^{4d}\frac{1}{x}dx\cdot\int_{-d}^{+d}dy=\frac{\mu_0}{2\pi}i_2\,2d\cdot\ln\left(\frac{4d}{2d}\right)=\frac{\mu_0}{\pi}i_2\,d\cdot\ln(2);$$

LA LEGGE DI FARADAY-NEUMANN-LENZ DICE CHE:

$$\cdot\ \mathcal{E}_i=-\frac{d}{dt}\Phi(\bar{B}_2)=-\frac{\mu_0}{\pi}d\cdot\ln(2)\frac{di_2}{dt}=-\frac{\mu_0}{\pi}d\cdot\ln(2)\cdot3i_0e^{-t/\tau}\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{d\cdot\mu_0}{\pi\tau}\ln(2)\cdot3i_0e^{-t/\tau};$$

LA RESISTENZA TOTALE È:

$$\cdot 2R = \frac{\mathcal{E}_i}{i_{IND.}} = \frac{(-2,4)}{-0,24} = 10 \rightarrow \underline{R = 5\,\Omega};$$

b) LA FORZA MAGNETICA SI ESPRIME CON LA 2ª LEGGE DI LAPLACE. SEGUENDO IL VERSO EFFETTIVO DELLA CORRENTE (VERSO ORARIO), AVREMO CHE LA FORZA SULLE BARRE È DATO DA:

$$\cdot \bar{F}_1 = i(-L\bar{u}_y)\wedge(B\bar{u}_z) = -iLB(\bar{u}_y\wedge\bar{u}_z) = -iLB\bar{u}_x = -0,24\cdot1,2\cdot0,40\,\bar{u}_x = \underline{-0,1152[N]\bar{u}_x};$$

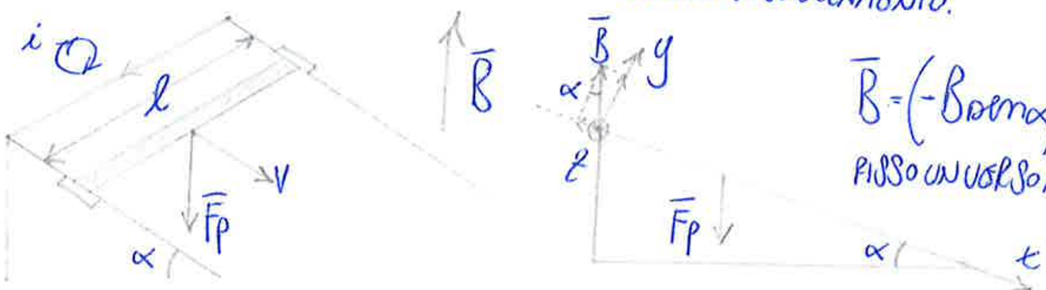
$$\cdot \bar{F}_2 = i(L\bar{u}_y)\wedge(Bu_z) = iLB(\bar{u}_y\wedge\bar{u}_z) = iLB\bar{u}_x = \underline{0,1152[N]\bar{u}_x};$$

LA FORZA $\bar{F}_1$ È RIVOLTA IN VERSO OPPOSTO A $\bar{u}_x$, $\bar{F}_2$ INVECE È RIVOLTA LUNGO $\bar{u}_x$. QUESTO VUOL DIRE L'EFFETTO DI $\bar{F}_1$ È QUELLO DI FRENARE LA BARRA ①, $\bar{F}_2$ INVECE TENDE AD ACCELERARE LA BARRA ②.

c) $i = \frac{dq}{dt} \rightarrow dq = i\,dt \rightarrow q = \int dq = \int_0^t i\,dt = i\,t$; SE $t = 10s$: $q(t=10s) = 0,24\cdot10 = \underline{2,4\,C}$.

6) SU UN PIANO INCLINATO DI UN $\alpha = 30°$ RISPETTO ALL'ORIZZONTALE, SONO POSTE DUE ROTAIE PARALLELE DISTANTI $l = 10\,cm$, RESISTENZA TRASCURABILE E CONNESSE TRA LORO ALL'ESTREMITÀ. SU DI ESSE SCORRE SENZA ATTRITO UNA SBARRETTA CONDUTTRICE DI MASSA $m = 10\,g$ E RESISTENZA $R = 0,1\,\Omega$. IL TUTTO È IMMERSO IN UN C.M UNIFORME E COSTANTE, DIRETTO VERTICALMENTE DI MODULO $B = 0,5\,T$. A $t = 0$ LA SBARRETTA È LASCIATA LIBERA DI SCIVOLARE SUL PIANO INCLINATO. CALCOLARE: a) LA f.e.m INDOTTA NELLA SBARRETTA E LA CORRENTE INDOTTA NELLA SPIRA INDIVIDUATA DAL SISTEMA ROTAIE-SBARRETTA IN FUNZIONE DELLA VELOCITÀ DELLA SBARRETTA;

b) LA VELOCITÀ LIMITE DELLA SBARRETTA NEL SUO MOTO DI SCIVOLAMENTO.



$$\bar{B} = (-B\sin\alpha)\bar{u}_x + (B\cos\alpha)\bar{u}_y$$

FISSO UN VERSO ARBITRARIO DELLA CORRENTE.

a) $$\Phi(\bar{B}) = \int \bar{B}\cdot\bar{n}\,dS = \int(-B\sin\alpha\,\bar{u}_x + B\cos\alpha\,\bar{u}_y)\cdot\bar{u}_y\,dS = \int B\cos\alpha\,dS = B\cos\alpha\int dS = B\cos\alpha(l\cdot x);$$

$$\cdot \frac{d\Phi(\bar{B})}{dt} = Bl\cos\alpha\frac{dx}{dt} = Bl\cos\alpha\cdot v(t) \rightarrow \mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi(\bar{B})}{dt} = -Bl\cos\alpha\cdot v(t) = -0,5\cdot0,1\cdot\cos30°\cdot v(t) = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{40}v(t)};$$

LA CORRENTE INDOTTA QUINDI SARÀ: