



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2317A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Faraci Alessio

MATERIA: Instabilita - Prof. Carpinteri

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

INSTABILITÀ STATICA E DINAMICA DELLE STRUTTURE

A.A. 2017/2018

POLITECNICO DI TORINO



Prof. Alberto Carpinteri

TEORIA

Alessio Faraci

Indice

Introduzione	1
Parte A - Instabilità dell'equilibrio elastico	2
1 Travi rettilinee ad elasticità concentrata	11
1.1 Sistemi meccanici discreti ad un grado di libertà	11
1.2 Sistemi meccanici discreti ad n gradi di libertà	16
2 Travi rettilinee ad elasticità diffusa	26
2.1 Travi rettilinee ad elasticità diffusa: problema di Eulero	26
2.2 Instabilità dei telai (portali - sistemi di travi)	38
3 Lastre soggette a compressione e instabilità flessio-	42
3.1 Instabilità della trave su suolo elastico	42
3.2 Lastre soggette a compressione	44
3.3 Instabilità flessio-torsionale (problema di Prandtl)	51
4 Anelli e gusci - Archi e gusci ribassati (Snap-through)	55
4.1 Travi ad asse curvilineo: anelli e archi	55
4.2 Archi e gusci ribassati soggetti alla forza peso	61
4.3 Interazione tra 2 collassi: euleriano e di snap-through	70
Parte B - Coperture e ponti di grandi luce	76
5 Coperture di grandi luce e Snap-through	76
5.1 Coperture di grandi luce - aspetti storici	76
5.2 Analogie e differenze tra membrane (2D) e funi (1D)	78
5.3 Coperture reticolari di grande luce	80
5.4 Esempi del fenomeno di Snap-through	82
6 Ponti ad arco, strallati e sospesi	86
6.1 Tipologie strutturali dei ponti e luce limite teorica	86

6.2	Ponti ad arco in calcestruzzo armato	87
6.3	Ponti strallati	92
6.4	Ponti sospesi	95
6.4	Instabilità euleriana per ponti strallati	101
7	Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza (flutter)	106
7.1	Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza	106
7.2	Sistemi meccanici discreti con 1 g.d.l.	107
7.2	Sistemi meccanici discreti con n g.d.l.	111
7.3	Sistemi meccanici continui	117
7.4	Problema di Prandtl in regime dinamico	121
8	Instabilità aeroelastica (flutter) - forze follower	125
8.1	Forze non conservative di tipo follower	125
8.2	Sistema a 1 g.d.l.	127
8.3	Sistema a 2 g.d.l. - colonna di Ziegler	128
8.4	Colonna ad elasticità diffusa (con 1 massa)	131
8.5	Colonna ad elasticità diffusa (con 2 masse)	135
8.6	Ponti di grande luce (sistema a n gradi di libertà)	136
8.7	Instabilità aeroelastica in ponti sospesi: div. tors. e flutter	140
Parte C - Edifici di grande altezza		144
9	Edifici di grande altezza: storia e algoritmo generale	144
9.1	Edifici di grande altezza - aspetti storici	144
9.2	Irrigidimento: controventamento di telai e complessi strutt.	149
9.3	Ripartizione dei carichi orizzontali	151
9.4	Algoritmo generale	152
9.5	Irrigidimento: influenza tamponamenti su rigidità telai	159

10	Nuclei irrigidenti a sezione sottile aperta: teoria di Vlasov	163
10.1	Nuclei irrigidenti a sezione sottile aperta	163
10.2	La teoria di Vlasov	167
11	Ripartizione delle azioni orizzontali - metodo di Capurso	178
11.1	Trave a mensola soggetta a carichi trasversali	178
11.2	Ripartizione delle azioni orizzontali - metodo di Capurso	182
12	Dinamica e stabilità negli edifici di grande altezza	185

INTRODUZIONE

A. Instabilità dell'equilibrio elastico

La perdita di stabilità dell'equilibrio elastico è, assieme allo snervamento e alla frattura fragile, uno dei 3 fenomeni fondamentali di collasso strutturale. Tali fenomeni non avvengono in genere separatamente, ma interagiscono durante le fasi di collasso.

Ci occuperemo adesso di 2 collassi strutturali, entrambi di tipo **globali** (collassi che riguardano tutta la struttura e non solo una sezione):

- (1) **instabilità euleriana (buckling)** - *instabilità in regime statico*
(carico di punta e instabilità dell'equilibrio elastico)
Riguarda:
 - (a) travi/pilastri/piloni snelle/i (elementi di dimensione 1)
 - (b) lastre piane/gusci sottili (elementi di dimensione 2)
- (2) **risonanza strutturale** - *instabilità in regime dinamico*
(collasso per interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza)

Entrambi i collassi prevedono un materiale di tipo elastico lineare. I due collassi possono anche interagire tra loro.

I problemi di instabilità non si verificano sempre, ma solo sotto particolari condizioni, ad esempio in ponti con grande snellezza soggetti al carico del vento (collasso misto: instabilità + dinamica). L'instabilità dell'equilibrio elastico si verifica in genere per elementi strutturali snelli soggetti a sollecitazioni di compressione.

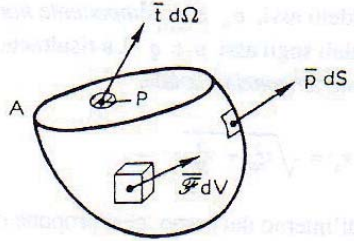
L'instabilità di cui stiamo parlando è l'instabilità dell'equilibrio elastico. C'è però anche un'interazione tra il collasso di buckling e plasticizzazione a compressione: instabilità dell'equilibrio elasto-plastico (tipologia di collasso mista che può avvenire nei telai e nelle lastre).

N.B. Caratteristiche che comandano l'instabilità:

- **snellezza** di una trave: $\lambda = L / \rho$
- **spessore** lastra/guscio (sottili): $\lambda = \text{spessore} / L$

Nel caso di coperture ribassate l'altra caratteristica che ci facilita l'instabilità è il **grado di ribassamento**. Più una copertura è ribassata più è soggetta ad instabilità.

'nascita' del vettore delle tensioni. Infatti, se consideriamo un punto P qualsiasi del nostro corpo, e sezioniamo il corpo con un piano A passante per P (**Figura A.2**), ciascuna delle due porzioni in cui il solido risulterà diviso sarà in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie e sotto l'azione delle forze di volume.



- Figura A.2 -

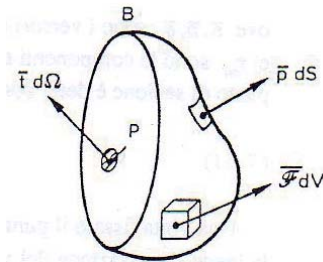
Le equazioni cardinali dunque diventano:

$$\int_{S_A} \{p\} dS + \int_{\Omega_A} \{t\} d\Omega + \int_{V_A} \{F\} dV = \{0\},$$

$$\int_{S_A} \{r\} \wedge \{p\} dS + \int_{\Omega_A} \{r\} \wedge \{t\} d\Omega + \int_{V_A} \{r\} \wedge \{F\} dV = \{0\},$$

dove $\{t\}$ è appunto il vettore di tensione (ovvero la forza trasmessa nell'areola $d\Omega_A$).

Il vettore di tensione non è in genere ortogonale al piano A (come accade in condizioni idrostatiche), ed è funzione sia del punto P scelto che del piano A scelto. Infatti se si considerasse un altro piano diverso da A sempre passante per P , il vettore $\{t\}$ risulterebbe diverso (**Figura A.3**).



- Figura A.3 -

Riassumendo: l'ipotesi di piccoli spostamenti considera le equazioni cardinali della statica in relazione alla configurazione indeformata poiché gli spostamenti elastici sono ipotizzati così piccoli da poter confondere la configurazione deformata con l'indeformata nella valutazione delle caratteristiche interne.

Adesso rimuoviamo l'ipotesi di piccoli spostamenti. Non è più lecito dunque scrivere le equazioni di equilibrio nella configurazione indeformata. Dobbiamo perciò scriverle nella configurazione deformata. Con questa nuova assunzione il problema diventa non lineare

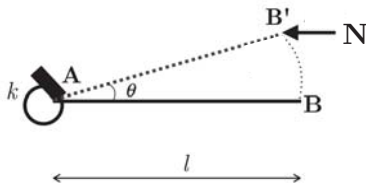
N.B. Quando è presente una forza assiale, nell'ipotesi di piccoli spostamenti non riesco a tenerne conto. Quindi ogni qual volta ci sia compressione assiale bisogna porsi la domanda se vi è instabilità o meno, e dunque procedere con un'analisi di grandi spostamenti.

N.B. Lo sforzo assiale di compressione provoca un significativo incremento di spostamento e di sollecitazione che può essere colto imponendo l'equilibrio solo nella configurazione deformata (magari considerando spostamenti geometricamente piccoli).

Anche in assenza di carichi trasversali, gli sforzi di compressione possono dar luogo (all'aumentare del carico) a significativi ed improvvisi incrementi di spostamento e sollecitazione a causa dell'instabilità dell'equilibrio.

◆ Asta compressa

Consideriamo il caso di un'asta rigida con cerniera rotazionale di rigidezza k soggetta solo a sforzo normale N e non a carichi trasversali. Scriviamo l'equilibrio nell'ipotesi di grandi spostamenti.



$$M_{A,inst} = Nl \sin \theta$$

$$M_{A,stab} = k \cdot \theta$$

L'equilibrio si ha quando :

$$M_{A,inst} = M_{A,stab}$$

$$\text{ovvero per : } \begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{\theta}{\sin \theta} = \frac{Nl}{k} \end{cases}$$

Come si nota, le soluzioni sono due (soluzione non più unica).

La configurazione di equilibrio iniziale, ovvero quella per cui $\theta = 0$ è stabile?

Introduco una perturbazione piccola $\theta \neq 0$ e vedo se l'asta tende a tornare nella configurazione orizzontale o tende ad allontanarsi. In A nasce il momento instabilizzante:

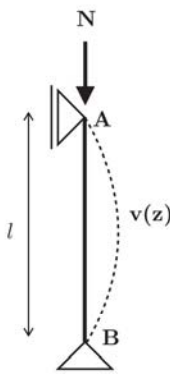
$$M_{A,inst} = Nl \sin \theta$$

poichè θ è piccolo posso confondere il seno con l'angolo dunque:

$$M_{A,inst} = Nl\theta$$

◆ Carico critico di Eulero

Fin adesso abbiamo considerato l'asta rigida. Ora consideriamo la trave deformabile. Anche per le travi deformabili compresse, la configurazione di equilibrio per cui la trave rimane rettilinea diviene instabile oltre ad un certo valore di carico. Il fenomeno è detto svergolamento (svergolamento = perdita di stabilità dell'equilibrio elastico) e il carico critico prende il nome di carico di punta o carico critico di Eulero. Il carico è funzione della snellezza della trave. Tanto più la trave è snella tanto più il carico che porta a rottura la struttura è basso.



Consideriamo una trave doppiamente appoggiata caricata da uno sforzo normale N .

La configurazione rettilinea è di equilibrio, ma è stabile?

Introduciamo una piccola perturbazione descritta dalla configurazione deformata $v(z)$ (con v = spostamento trasversale).

Punto per punto (della trave) nasce un momento instabilizzante che tende a far allontanare la trave dalla configurazione di equilibrio:

$$M_{inst} = N \cdot v$$

D'altro canto se nasce una curvatura, questa sarà legata al momento e tenderà a far tornare la trave nella configurazione rettilinea originaria:

$$M_{stab} = EJ \cdot \chi = -EJ \cdot v''$$

con $\chi = -v''$ (nell'ipotesi di piccoli spostamenti)

Ponendo il momento stabilizzante uguale a quello instabilizzante otteniamo la condizione di equilibrio indifferente:

$$M_{stab} = M_{inst}$$

$$Nv = -EJ \cdot v''$$

$$v'' + \frac{N}{EJ}v = 0 \rightarrow \text{equazione differenziale del 2° ordine}$$

ponendo $\alpha^2 = N / EJ$ si ottiene

$$v'' + \alpha^2 v = 0$$

la cui soluzione è del tipo: $v(z) = A \cos(\alpha z) + B \sin(\alpha z)$

con A e B costanti di integrazione determinabili imponendo le condizioni al contorno.

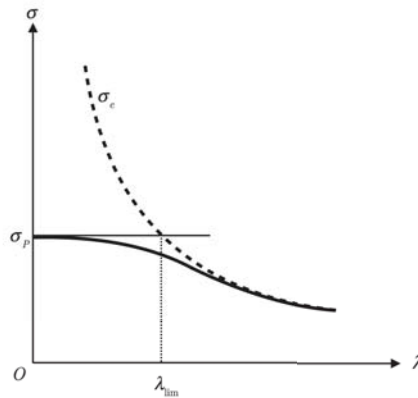
◆ Interazione snervamento-svergolamento

Abbiamo calcolato il carico critico. Al carico critico corrisponde all'interno della trave una tensione detta pressione critica:

$$\sigma_c = \frac{N_c}{A} = \frac{\pi^2 EJ}{Al^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

con $\lambda = l / \rho$ snellezza della trave

Diagrammando la pressione critica si ottiene una curva monotona decrescente. La tensione $\sigma_c \rightarrow \infty$ per $\lambda \rightarrow 0$, ma ciò non è fisicamente significativo in quanto una trave, seppur poco snella, tende comunque a rompersi non a tensioni ∞ ma a tensioni limiti per i materiali, ovvero alla tensione di snervamento per i materiali metallici σ_p .



Affinchè questo grafico sia significativo devo tracciare la tensione di snervamento σ_p . Dunque la tensione che provoca la crisi del materiale sarà la minore tra le 2 curve (quella tratteggiata e quella orizzontale):

$$\sigma_{crisi} = \min(\sigma_c, \sigma_p)$$

$\lambda > \lambda_{lim} \rightarrow$ TRAVI SNELLE \rightarrow la trave tende ad andare in crisi per svergolamento

$\lambda < \lambda_{lim} \rightarrow$ TRAVI TOZZE \rightarrow la trave tende ad andare in crisi per snervamento

Il valore di snellezza limite si ottiene eguagliando la pressione critica con la tensione di snervamento ottenendo:

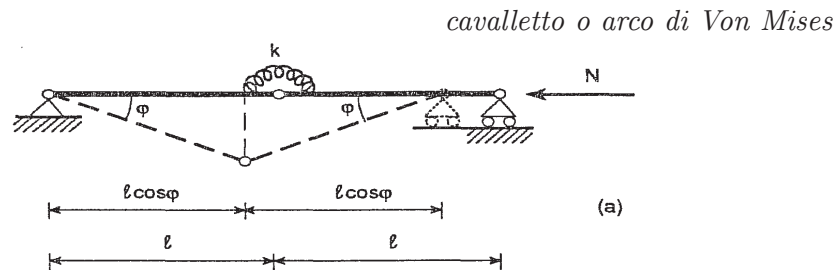
$$\lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

In realtà però il comportamento non è dato dal caso ideale visto prima in cui sceglievo la minore tra le due curve. Il comportamento reale è dato da una curva che è il raccordo

1. TRAVI RETTILINEE AD ELASTICITÀ CONCENTRATA

1.1 Sistemi meccanici discreti ad un grado di libertà

Consideriamo un sistema costituito da due aste rigide collegate da una cerniera rotazionale elastica di rigidezza k , vincolate alle estremità con una cerniera e un carrello. L'elasticità è concentrata nel centro dove c'è la cerniera elastica (cerniera elastica vuol dire che è una cerniera che ha una rotazione proporzionale al momento applicato e viceversa). Questa trave è soggetta ad una forza orizzontale N . Si assume come coordinata generalizzata la rotazione assoluta φ .



La trave può instabilizzarsi con un modo che non è più sinusoidale. Si instabilizza in maniera più semplice con due tratti rettilinei (deformata tratteggiata in figura). Nella deformazione il carrello si sposta.

Lo studio dell'instabilità del sistema può essere effettuato in 2 modi:

- calcolo energetico
- metodo dell'equilibrio diretto: $M_{inst} = M_{stab}$

◆ Calcolo energetico

L'energia potenziale totale W dell'intero sistema si definisce come quell'energia potenziale elastica (qui concentrata nella molla - elasticità concentrata) sottratta del potenziale dei carichi (ovvero del lavoro compiuto dal carico esterno per gli spostamenti virtuali). Dunque, l'energia potenziale totale dell'intero sistema vale:

$$W(\varphi) = \underbrace{\frac{1}{2}k(2\varphi)^2}_{\text{energia potenziale elastica}} - \underbrace{2N\ell(1 - \cos\varphi)}_{\text{potenziale elastico dei carichi}} \quad \text{perchè i bracci sono 2}$$

2φ = angolo totale formato dai due bracci

k = è una rigidezza data da un momento fratto una rotazione

$\ell(1 - \cos\varphi)$ = differenza tra la lunghezza del braccio e la sua proiezione, ovvero è l'avvi-

◆ **Metodo dell'equilibrio diretto**

Se non voglio far ricorso all'approccio energetico, considero il metodo dell'equilibrio diretto: $M_{\text{inst}} = M_{\text{stab}}$ (per Eulero utilizzavamo questo metodo sezione per sezione, qui ci interessa invece farlo solo nella sezione centrale, ovvero in quella sezione dove c'è la cerniera rotazionale elastica).

$$M_i = M_s$$

$$M_i = Nl \sin \varphi \simeq Nl\varphi,$$

$$M_s = 2k\varphi.$$

Il braccio è uguale all'abbassamento in mezzeria $l \sin \varphi$, per angoli piccoli si può approssimare $l \sin \varphi \approx l\varphi$ linearizzando il vincolo (ipotesi di cinematica linearizzata). Eguagliando $M_{\text{inst}} = M_{\text{stab}}$ si ottiene il carico critico:

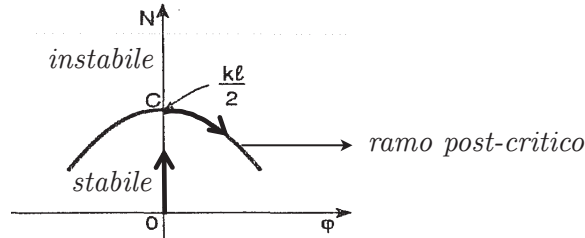
$$N_c = \frac{2k}{l} \quad \leftarrow \text{ con approssimazione su } \varphi$$

$$N_c = \frac{2k\varphi}{l \sin \varphi} \quad \leftarrow \text{ senza approssimazione su } \varphi$$

Con l'approssimazione si semplificano i calcoli, ma si perde la definizione di comportamento post-critico (non è definita più la parabola).

è *softening*. Quindi devo controllare il fenomeno tramite φ : impongo φ e vedere che questa reazione N diminuisce sempre più. C'è dunque un carico di picco.

Osservazione: non è il materiale ad essere hardening o softening, ma è il sistema. Il materiale è elastico (la molla è elastica).



Per verificare l'instabilità del ramo post-critico è possibile considerare la convessità del potenziale e quindi le sue derivate di ordine superiore, per $\varphi = 0$:

$$\begin{aligned} W'(0) &= W''(0) = W'''(0) = 0 \\ W^{IV}(0) &= -3k\ell^2 < 0. \end{aligned}$$

Stavolta la prima derivata diversa da zero è la derivata 4° ed è minore di zero. Dunque C è un punto di massimo. Dunque c'è instabilità.

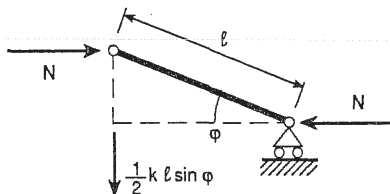
◆ Metodo dell'equilibrio diretto

Allo stesso modo, se non voglio far ricorso all'approccio energetico, considero il metodo dell'equilibrio diretto:

$$M_i = M_s$$

$$M_i = N\ell \sin \varphi \simeq N\ell\varphi,$$

$$M_s = \frac{1}{2}k\ell^2 \sin \varphi \cos \varphi \simeq \frac{1}{2}k\ell^2 \varphi.$$



Il momento instabilizzante è uguale a prima. Il momento stabilizzante invece è diverso: è dato dalla reazione verticale della molla (forza di richiamo elastico) moltiplicata per il $\ell \cos \varphi$. Perché la forza di richiamo elastico vale $\frac{1}{2}k\ell \sin \varphi$? $\ell \sin \varphi$ è l'escursione della molla, k è la rigidezza, $\frac{1}{2}$ è dovuto alla simmetria: questa forza è la metà che compete alla parte destra della struttura (l'altra metà compete alla parte sinistra, quindi in realtà la forza di richiamo totale è $k\ell \sin \varphi$).

Sviluppando la precedente relazione in serie di Taylor intorno all'origine (linearizzando), si ottiene:

$$\begin{aligned} W(x_1, x_2) &\simeq \frac{k}{2\ell^2} (5x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_1x_2) - \\ &\quad - \frac{N}{\ell} (x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2). \end{aligned}$$

Le condizioni di equilibrio si impongono la stazionarietà della funzione (derivata di W rispetto x_1 e $x_2 = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_1} &= x_1 \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) - x_2 \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial x_2} &= -x_1 \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) + x_2 \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) = 0. \end{aligned}$$

Queste due relazioni costituiscono un sistema omogeneo di equazioni algebriche lineari e ammettono soluzione diversa da quella ovvia quando si annulla il determinante dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) & - \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) \\ - \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) & \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) \end{vmatrix} = 0$$

Sviluppando il determinante si ottiene un'equazione algebrica di secondo grado in N :

$$\left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right)^2 = 0$$

Sviluppando si ottiene:

$$N^2 - \frac{4k}{\ell}N + 3\frac{k^2}{\ell^2} = 0$$

che fornisce i 2 autovalori:

$$\begin{aligned} N_{c1} &= \frac{k}{\ell}, \\ N_{c2} &= 3\frac{k}{\ell}. \end{aligned}$$

Inserendo questi valori nel sistema si ottengono i due autovettori:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) - x_2 \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) &= 0, \\ -x_1 \left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) + x_2 \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) &= 0. \end{aligned}} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= x_2, \\ x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Da queste due relazioni si ricava:

$$\begin{aligned} x_1 \left(N - \frac{2k}{\ell} \right) + \frac{k}{\ell} x_2 &= 0, \\ \frac{k}{\ell} x_1 + x_2 \left(N - \frac{2k}{\ell} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Anche in questo caso il sistema omogeneo appena scritto ammette altre soluzioni oltre quella banale quando il determinante dei coefficienti si annulla, ottenendo l'equazione caratteristica:

$$\begin{vmatrix} \left(N - \frac{2k}{\ell} \right) & \frac{k}{\ell} \\ \frac{k}{\ell} & \left(N - \frac{2k}{\ell} \right) \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \boxed{N^2 - \frac{4k}{\ell}N + 3\frac{k^2}{\ell^2} = 0}$$

L'equazione caratteristica che otteniamo è la stessa ottenuta col metodo energetico, dunque autovalori e autovettori sono gli stessi (stesso risultato per altra via).

◆ Calcolo della matrice di rigidezza elastica

Per $N=0$, la matrice che abbiamo calcolato a pag. 17, coincide con la matrice di rigidezza del sistema discreto che abbiamo considerato:

$$\boxed{\begin{vmatrix} \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) & -\left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) \\ -\left(\frac{4k}{\ell^2} - \frac{N}{\ell} \right) & \left(\frac{5k}{\ell^2} - \frac{2N}{\ell} \right) \end{vmatrix}} = 0. \quad (\text{matrice pag.17})$$

La matrice di rigidezza elastica si costruisce per colonne. Ogni colonna rappresenta l'insieme delle reazioni vincolari ponendo uguale a 1 uno spostamento e uguale a zero tutti gli altri (metodo degli spostamenti). I punti notevoli per scrivere la matrice sono i due punti dove ci sono le cerniere.

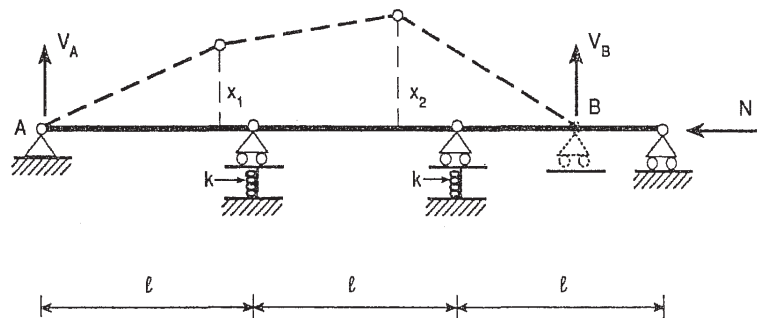
N.B. La matrice di rigidezza totale del sistema è la somma di due matrici: il primo addendo è legato alla rigidezza k , il secondo invece allo sforzo normale N . La matrice composta dai soli primi addendi rappresenta la matrice di rigidezza elastica, mentre la matrice composta dai secondi addenti è una matrice di rigidezza geometrica e va detratta dalla prima.

La matrice calcolata a pag.19 invece non mostra un significato fisico altrettanto evidente.

$$\begin{vmatrix} \left(N - \frac{2k}{\ell}\right) & \frac{k}{\ell} \\ \frac{k}{\ell} & \left(N - \frac{2k}{\ell}\right) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{matrice pag.19})$$

Per $N=0$ rappresenta la matrice di rigidezza del sistema quando, come caratteristiche statiche, vengono assunti i momenti reattivi delle cerniere elastiche, non duali delle coordinate x_1 e x_2 .

Consideriamo adesso un altro sistema a 2 gradi di libertà costituito da 3 aste rigide su 4 appoggi, di cui quelli centrali sono cedevoli elasticamente di rigidezza k .



◆ Calcolo energetico

L'energia potenziale totale stavolta vale:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - N\ell \left[3 - \cos\left(\arcsin \frac{x_1}{\ell}\right) - \cos\left(\arcsin \frac{x_2}{\ell}\right) - \cos\left(\arcsin \frac{x_2 - x_1}{\ell}\right) \right].$$

Sviluppando in serie di Taylor intorno all'origine si ottiene:

$$W(x_1, x_2) \simeq \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) - \frac{N}{\ell}(x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2).$$

Studiamo adesso l'Hessiano:

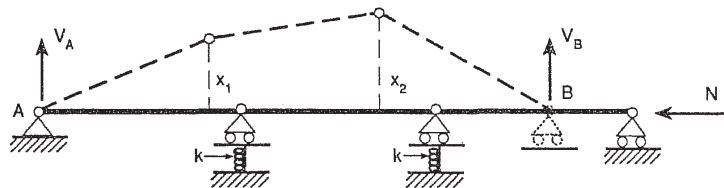
$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_1 \partial y_2} \\ \frac{\partial^2 W}{\partial y_2 \partial y_1} & \frac{\partial^2 W}{\partial y_2^2} \end{bmatrix},$$

$$\text{Det}[H] = k^2 \left[-2 \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right)^2 - 8 \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right)^4 - \frac{143}{4} \left(\frac{\varepsilon}{\ell} \right)^6 - \dots \right].$$

Non essendo l'Hessiano definito positivo, il ramo post-critico risulta instabile.

◆ Metodo dell'equilibrio diretto

Il problema appena illustrato può essere risolto imponendo l'equilibrio alla rotazione delle due aste estreme rispetto le cerniere intermedie.



Si ipotizzano due reazioni estreme V_A e V_B (non note ma da trovare). Si fa l'equilibrio alla rotazione delle due aste estreme rispetto le cerniere intermedie:

$$M_i = M_s \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \underbrace{N x_1}_{\text{Momento instabilizzante}} = \underbrace{V_A \ell}_{\text{Momento stabilizzante}}, \\ \underbrace{N x_2}_{\text{Momento instabilizzante}} = \underbrace{V_B \ell}_{\text{Momento stabilizzante}}, \end{array}$$

Come trovo V_A e V_B ? Scrivo 2 equazioni di equilibrio globali: 1 alla traslazione verticale di tutto il sistema, 1 alla rotazione attorno al punto A dell'intera struttura:

$$\begin{aligned} (->) \quad & V_A + V_B = k(x_1 + x_2), \\ \text{A) } \quad & k x_1 \ell + 2 k x_2 \ell = 3 V_B \ell, \end{aligned}$$

Si ottiene:

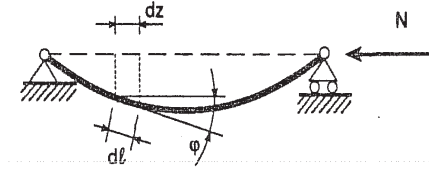
$$\begin{aligned} V_B &= \frac{k}{3}(x_1 + 2x_2), \\ V_A &= \frac{k}{3}(2x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Nel caso di entrambi i sistemi pocanzi considerati, la matrice di rigidezza geometrica è la medesima e si presenta come segue:

$$[K_g] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \\ -\frac{1}{\ell} & \frac{2}{\ell} \end{bmatrix} \quad (17.40)$$

N.B. La matrice di rigidezza elastica è simmetrica per il teorema di Betti. Anche la matrice geometrica è simmetrica.

Consideriamo adesso il secondo addendo che compone W : Nw , e cerchiamo di esprimere w in funzione di $v(z)$:



Lo spostamento w del punto di applicazione della forza N ($w =$ avvicinamento dei due vincoli) vale:

$$w = \int_0^\ell (d\ell - dz) = \int_0^\ell (1 - \cos \varphi) d\ell,$$

$d\ell$ è l'ipotenusa

dz è la proiezione

φ è l'angolo di inclinazione (non è costante stavolta ma varia da concio a concio)

($\varphi = v'$ se trascuro la deformazione a taglio)

(stavolta non sono lunghezze finite come nel caso di travi ad elasticità concentrata).

Sviluppando il $\cos \varphi$ in serie di Taylor, e trascurando la deformazione dovuta al taglio, l'espressione di w diventa:

$$w \simeq \frac{1}{2} \int_0^\ell \varphi^2 dz \simeq \frac{1}{2} \int_0^\ell v'^2 dz,$$

Quindi abbiamo così espresso w in funzione della derivata prima al quadrato di $v(z)$.

Consideriamo adesso il primo addendo che compone W : l'energia di deformazione elastica e cerchiamo di esprimerlo in funzione di $v(z)$.

Per farlo dobbiamo ricordarci la definizione della curvatura:

$$\chi = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{d}{dz} \left(-\frac{dv}{dz} \right) = -\frac{d^2v}{dz^2} \quad \chi = \frac{M}{EI}$$

(convenzione segni: φ è positivo se antiorario, w è positivo se verso il basso)

quindi:

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EI_x}.$$

Sostituendo quest'ultima espressione, insieme a quella trovata poco fa di w nell'espressione iniziale di W si ottiene infine l'espressione del potenziale totale in funzione di $v(z)$:

$$W = \int_0^\ell \left[\frac{1}{2} (EI v''^2 - N v'^2) - qv \right] dz.$$

Imporre la stazionarietà vuol dire annullare $\delta W=0$, ovvero cerco il minimo in sostanza.

Il prossimo passaggio che faremo è quello di evitare di avere queste derivate anche sulle variazioni (le derivate vanno bene su v ma non su δv). Come faccio? Integro due volte consecutivamente per parti. L'integrazione per parti mi aiuta a scaricare 1 delle due funzioni e carica l'altra dal punto di vista delle derivate.

$$\delta W = [EIv''\delta v]_0^l - \int_0^l EIv'''\delta v' dz + [-Nv'\delta v]_0^l + \int_0^l Nv''\delta v dz + \int_0^l -q\delta v dz$$

$$- [(EIv''' + Nv')\delta v]_0^l + [EIv''\delta v']_0^l + \int_0^l (EIv^{IV} + Nv'' - q)\delta v dz = 0.$$

Nell'integrazione per parti non c'è solo l'operazione di scarico e carico, ma ci sono pure i termini finiti (rappresentati con parentesi quadre con gli estremi $0, l$). Sotto parentesi quadra si carica uno dei due termini, ma non si scarica l'altro. Quindi l'operazione di scarico e carico avviene solo all'interno degli integrali. (I termini finiti rappresenteranno poi le condizioni al contorno).

Alla fine ho su tutti e 3 gli addendi ho la variazione della funzione stessa e non delle sue derivate. Questo però l'ho pagato trovandomi delle derivate di ordine superiore della funzione stessa. Oltre alla derivata 4° c'è il termine Nv'' che rappresenta gli effetti del secondo ordine.

Osservazione: il segno di Nv'' è +. Questo + mi deriva dal fatto che ho fatto una somma integrazione per parti (quando integro per parti metto un - davanti l'integrale, - · - = +)

Quest'ultima equazione di stazionarietà, dovendo valere per ogni perturbazione δv , fa sì che le seguenti equazioni risultano identicamente soddisfatte:

$$\boxed{EIv^{IV} + Nv'' - q = 0,}$$

$$(EIv''' + Nv')\delta v = 0, \quad \text{per } z = 0, l, \quad (v' = \text{rotazione})$$

$$(EIv'')\delta v' = 0, \quad \text{per } z = 0, l. \quad (v'' = \text{curvatura})$$

$$(EIv''')\delta v = 0, \quad \text{per } z = 0, l. \quad (v''' = \text{taglio})$$

La prima di queste 3 equazioni è detta equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine (Nv'' rappresenta l'effetto della non linearità geometrica). Essa contiene al suo interno due equazioni già note:

- (1) a meno del termine Nv'' coincide con l'equazione differenziale della trave elastica ($EIv^{IV} - q = 0$).
- (2) mentre se ponessi $q=0$ ritroverei $EIv^{IV} + Nv'' = 0$, ovvero la derivata seconda dell'equazione di Eulero ($EIv^{II} + Nv = 0$)

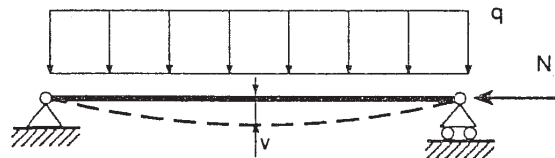
Sostituendo l'equilibrio alla traslazione in quello alla rotazione si ottiene:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} - N \frac{d^2 v}{dz^2} + q = 0$$

Ricordando la relazione tra momento e curvatura infine si ottiene:

$$EIv^{IV} + Nv'' - q = 0$$

Consideriamo adesso un caso particolare dove il carico q è uniforme (problema di Eulero con perturbazione iniziale).



L'integrale generale dell'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine

$$EIv^{IV} + Nv'' - q = 0,$$

si presenta nella forma:

$$v(z) = \underbrace{A \cos \alpha z + B \sin \alpha z + Cz + D}_{\text{integrale generale}} + \underbrace{\frac{qz^2}{2N}}_{\text{integrale particolare}}$$

dove si è posto:

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}.$$

Le quattro costanti arbitrarie A, B, C, D , sono determinate dalle condizioni al contorno

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ v(l) = 0 \\ EIv'''(0) = 0 \\ EIv'''(l) = 0 \end{cases}$$

si ottengono quindi:

$$A = -D = \frac{q}{\alpha^2 N}, \quad B = \frac{q}{\alpha^2 N} \frac{1 - \cos \alpha l}{\sin \alpha l}, \quad C = -\frac{q l}{2N}.$$

Si ha:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l & l & 1 \\ -\alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha^2 \cos \alpha l & -\alpha^2 \sin \alpha l & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Il sistema ammette soluzione diversa da quella banale se e solo se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo. Dall'annullamento del determinante della matrice dei coefficienti si ha:

$$\sin \alpha l = 0$$

Tale condizione coincide con quella che annulla la rigidezza flessionale della trave.

◆ Calcolo col metodo dell'equilibrio diretto

Alla stessa medesima soluzione si può giungere imponendo che in ciascuna sezione instabilizzante (collasso globale perchè impongo per ciascuna sezione):

$$M_i = M_s$$

con:

$$M_i = Nv$$

$$M_s = -EI \frac{d^2 v}{dz^2}.$$

Eguagliando si ottiene l'equazione omogenea perchè appunto non abbiamo il carico trasversale:

$$v'' + \alpha^2 v = 0$$

dove si è posto:

$$\alpha^2 = \frac{N}{EI}.$$

L'integrale generale dell'equazione differenziale è:

$$v(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z$$

imponendo le 2 condizioni al contorno:

$$v(0) = v(l) = 0.$$

pressione critica di Eulero, che, in base all'equazione del carico critico di Eulero, può porsi nella forma:

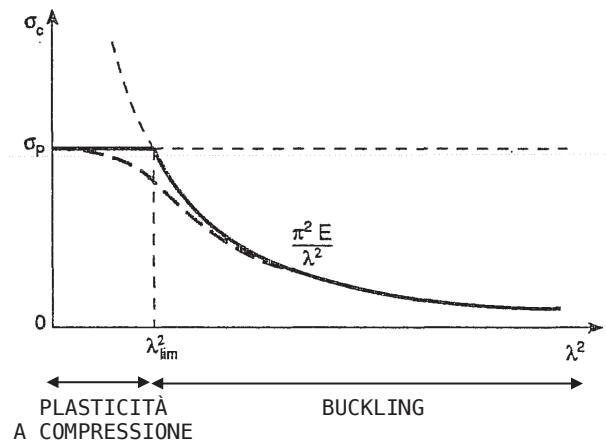
$$\sigma_c = \pi^2 \frac{EI}{\ell^2 A} = \pi^2 E \frac{\rho^2}{\ell^2}$$

con ρ = raggio di inerzia della sezione nella direzione dell'asse di flessione.

Introducendo $\lambda = \ell/\rho$ allora:

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

che diagrammata fornisce l'iperbole di Eulero:



Tale iperbole prevede carichi critici tendenti a zero per snellezze tendenti all'infinito, e, al contrario, e carichi critici tendenti all'infinito per snellezze tendenti a zero. Per travi tozze ($\lambda \rightarrow 0$) l'instabilità non avverrebbe se non per $\sigma_c \rightarrow \infty$, ma faccio un cutoff perchè per $\lambda^2 < \lambda_{\text{lim}}^2$ interviene un altro tipo di collasso plastico a compressione, in quanto per travi tozze si ha crisi per snervamento:


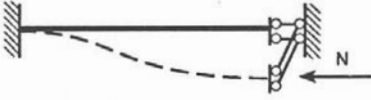

$$\sigma_c = \sigma_P$$

può precedere, anche nettamente, quella per svergolamento.

Se non vi fosse alcuna interazione tra le due crisi, si passerebbe dall'una all'altra con discontinuità in corrispondenza di una snellezza limite (λ_{lim} si trova da $\sigma_c = \sigma_P$):

$$\lambda_{\text{lim}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}},$$

funzione del modulo elastico E e della tensione di snervamento σ_P del materiale. Quindi troviamo solo che è funzione di due caratteristiche del materiale!

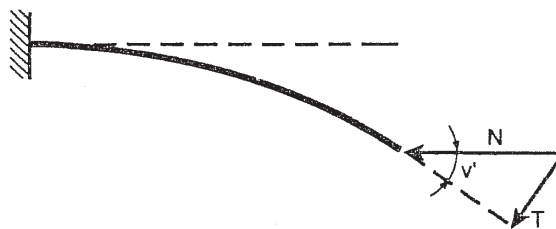
Condizioni cinematiche	Condizioni statiche	Carico critico N_{C1}	Lunghezza libera ℓ_0
			
$v(0) = 0$ $v'(0) = 0$	$v(\ell) = 0$ $v'(\ell) = 0$	Nessuna	$4 \pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$
			
$v(0) = 0$ $v'(0) = 0$	$v(\ell) = 0$	$v''(\ell) = 0$	$\pi^2 \frac{EI}{\ell^2}$
			
$v(0) = 0$ $v'(\ell) = 0$	$v''(0) = 0$ $v''(\ell) = 0$		$\pi^2 \frac{EI}{4\ell^2}$

(v'' è proporzionale al momento flettente, v''' è proporzionale allo sforzo tagliante)

Osservazione: il taglio si può calcolare in 2 modi

- (1) Nel caso della mensola dalla definizione di taglio inteso come componente della forza N ortogonale all'asse deformato:

$$T(\ell) = N\phi(\ell) = Nv'(\ell) \quad (17.74)$$



- (2) Dalla condizione statica (dall'equazione della linea elastica) si perviene allo stesso risultato:

$$EIv'''(\ell) + Nv'(\ell) = 0$$

poichè $T = -EI v'''$ si ottiene $T = Nv'(\ell)$

Se la barra è soltanto incernierata agli estremi, l'aumento critico di temperatura vale:

$$\Delta T_C = \frac{\pi^2}{\alpha \lambda^2}$$

mentre esso risulta quadruplo se la barra è incastrata (si arriva a questa conclusione valutando le lunghezze libere di inflessione: siccome l_0 è la metà, al quadrato, diventa 4 volte il carico critico). α in questo caso è il coefficiente di dilatazione termica.

Quando il sistema di travi (telai) non può essere ricondotto agli schemi già visti, è possibile applicare il Metodo degli Elementi Finiti, considerando le matrici di rigidezza elastica e geometrica. Infatti, per la singola trave non è solo definita la matrice di rigidezza elastica 6x6 (oppure 4x4 se considero la trave indeformabile assialmente), ma anche la matrice di rigidezza geometrica.

Metodo degli Elementi Finiti

Per la trave i-esima si assume:

$$\mathbf{v}_i(z) = \underbrace{\{\eta_i\}^T}_{(1 \times 4)} \underbrace{\{\delta_i\}}_{(4 \times 1)}$$

v_i = spostamento trasversale,

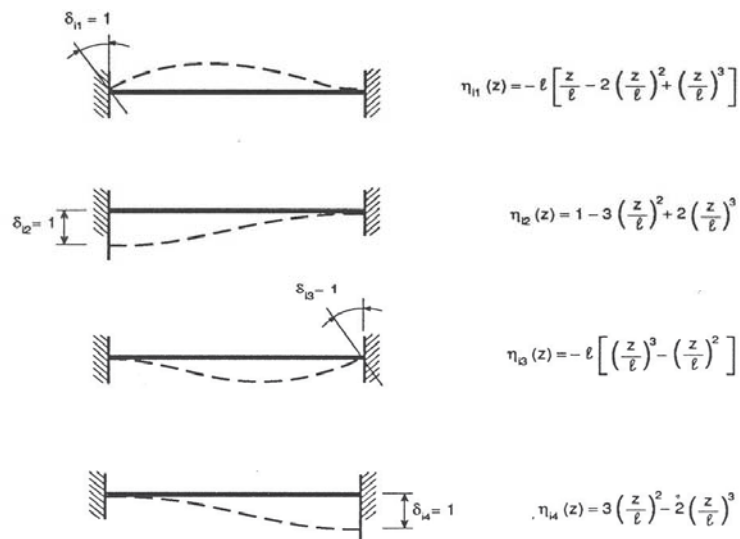
$\{\eta_i\}$ = vettore delle funzioni di forma;

$\{\delta_i\}$ = vettore degli spostamenti nodali.

Le funzioni di forma $\{\eta_i\}$ devono essere scelte in modo tale che risulti:

$$v_i'(0) = -\delta_{i1}, \quad v_i(0) = \delta_{i2}, \quad v_i'(\ell_i) = -\delta_{i3}, \quad v_i(\ell_i) = \delta_{i4}$$

Per travi a sezione costante, le funzioni di forma risultano essere cubiche, e si ottengono imponendo, a turno, uno degli spostamenti $\delta_{ij}=1$ e lasciando gli altri nulli



Svolgendo i calcoli con le funzioni di forma scritte a pag. 39 (ovvero sostituendo i valori di η) si ottiene:

MATRICE DI RIGIDEZZA ELASTICA LOCALE

$$[K_i] = EI_i \begin{bmatrix} \frac{4}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{2}{l_i} & \frac{6}{l_i^2} \\ -\frac{6}{l_i^2} & \frac{12}{l_i^3} & -\frac{6}{l_i^2} & -\frac{12}{l_i^3} \\ \frac{2}{l_i} & -\frac{6}{l_i^2} & \frac{4}{l_i} & \frac{6}{l_i^2} \\ \frac{6}{l_i^2} & -\frac{12}{l_i^3} & \frac{6}{l_i^2} & \frac{12}{l_i^3} \end{bmatrix}$$

MATRICE DI RIGIDEZZA GEOMETRICA LOCALE

$$[K_{gi}] = \frac{1}{l_i} \begin{bmatrix} \frac{2}{15}l_i^2 & -\frac{1}{10}l_i & -\frac{1}{30}l_i^2 & \frac{1}{10}l_i \\ -\frac{1}{10}l_i & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10}l_i & -\frac{6}{5} \\ -\frac{1}{30}l_i^2 & -\frac{1}{10}l_i & \frac{2}{15}l_i^2 & \frac{1}{10}l_i \\ \frac{1}{10}l_i & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10}l_i & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

N.B. In sostanza, la presenza dello sforzo normale N decrementa la rigidezza dell'elemento i -esimo.

Per quanto riguarda le successive operazioni del Metodo degli Elementi Finiti, si procede con la rotazione e l'espansione delle matrici locali di rigidezza. L'operazione di assemblaggio, infine, consegna la matrice di rigidezza globale, così che il problema agli autovalori per la ricerca dei carichi critici si formula nel modo seguente:

$$\text{Det} ([K] - \lambda[K_g]) = 0.$$

dove λ rappresenta il moltiplicatore dei carichi esterni.

Nei casi in cui la snellezza della struttura sia rilevante, l'instabilità dell'equilibrio elastico-plastico può avvenire prima del collasso plastico ed è quindi la condizione più critica che deve essere considerata a livello progettuale.

Commentiamo la relazione:

sarebbe l/2 diviso 2

$$W = \frac{\ell}{4} \sum_n A_n^2 \left(EI \frac{\pi^4 \pi^4}{\ell^4} - N \frac{\pi^2 \pi^2}{\ell^2} + K \right)$$

↓
se facciamo la derivata seconda di un seno (o anche di un coseno), cambia segno, ma poi è al quadrato, quindi viene una potenza 4

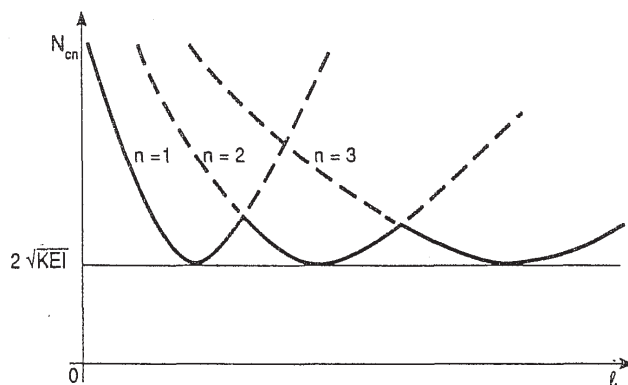
Questa energia deve rimanere definita positiva, allora tutti i termini devono essere positivi. Quando invece i termini si annullano ci sarà la situazione estrema dell'equilibrio indifferente. L'espressione di W cessa di essere definita positiva appena N sia tale da annullare uno dei termini in parentesi tonda. Ponendo $W=0$ (o meglio la parentesi tonda), si ottiene (dividendo poi $\pi n^2 / \ell^2$):

$$N_{cn} = EI \frac{\pi^2 \pi^2}{\ell^2} + K \frac{\ell^2}{\pi^2 \pi^2}$$

Compare un n^2 a numeratore nel primo addendo e un n^2 a denominatore nel secondo addendo! Quindi non è che all'aumentare di n ci saranno degli andamenti monotoni dell'espressione di N_{cn} ma avremo degli andamenti complicati.

N.B. Fin adesso quando abbiamo considerato gli N_c per le travi discrete o a elasticità diffusa, n era sempre a numeratore, dunque aumentando n , l' N_c aumentava. Qui non possiamo dire lo stesso, perchè come detto n appare sia a numeratore che a denominatore. Intuitivamente, la prima deformata che si formava negli esempi precedenti qui è sostanzialmente impedita dalla presenza del letto di molle che pone dei vincoli aggiuntivi.

Grafichiamo adesso l'espressione di N_{cn} in funzione della lunghezza l per capire al variare di n ed l (mentre fisso EI).



Curva non monotona che mostra punti di cuspidi, e ha dei minimi sempre allo stesso livello, ciò vuol dire, da un punto di ista meccanico, che la criticità è sempre la stessa, quindi posso avere 1 trave di pochi metri o di 1 km, ma poichè ci sono sempre le molle che la tengono, la criticità è sempre la stessa. In maniera asintotica le cuspidi si abbassano e tendono alla forza $2\sqrt{KEI}$

N_x ed N_y sono gli sforzi normali, ortogonali tra loro, agenti lungo l'asse x e y della lastra (stato membranale). Essi sono moltiplicati per la loro curvatura.

N_{xy} è la corrispondente di τ_{xy} (il 2 sta perchè per la reciprocità agiscono su due facce ortogonali), e moltiplica la derivata seconda mista di w , che non è una curvatura, ma ha a che fare con la torsione. Esso rappresenta un angolo unitario di torsione da un punto di vista fisico. Nel nostro caso rappresenta uno scorrimento angolare perchè essendo N_{xy} una τ_{xy} lavora per uno 'scorrimento angolare' γ .

Per dimostrare quanto detto si procede in questo modo:

- (1) Si vede quanto vale la ϕ (energia di deformazione a flessione). L'energia di deformazione per unità di superficie di una lastra piana inflessa vale:

$$\Phi = -\frac{1}{2} \left(\underbrace{M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}_{\substack{\text{momento} \\ \text{per curvatura}}} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

- (2) Sviluppo i calcoli ricordandomi delle relazioni dei momenti:

$$\begin{aligned} M_x &= D(\chi_x + \nu\chi_y) \\ M_y &= D(\chi_y + \nu\chi_x) \\ \underbrace{M_{xy}}_{\substack{\text{momento} \\ \text{torcente}}} &= \frac{D(1-\nu)}{2} \chi_{xy} \end{aligned}$$

- (3) Esprimo la curvatura come derivate seconde e poi sostituisco gli M in (1) ottenendo ϕ in funzione delle derivate seconde (curvature al quadrato):

$$\Phi = \frac{1}{2} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + D(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 .$$

- (4) Nell'ipotesi di lastra indeformabile a taglio e inestensibile, l'energia potenziale dovuta al regime membranale N_x, N_y, N_{xy} in una configurazione inflessa è:

$$\Phi_N = \frac{1}{2} \left[\underbrace{N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2}_{\text{come per la trave}} + \underbrace{2 N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)}_{\text{il prodotto delle 2 derivate prime rappresenta lo scorrimento angolare}} \right]$$

- (5) L'energia potenziale totale della lastra inflessa è perciò uguale alla somma degli integrali dell'energia di deformazione e dell'energia potenziale degli sforzi membranali:

$$W = \Phi + \Phi_N$$

$$W = \frac{1}{2}D \int_A \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

$$W = \frac{1}{2}D \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right. \\ \left. - 2(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy + \\ + \frac{1}{2} \int_A \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

- (6) Imponendo la stazionarietà di W si ottiene:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.$$

Adesso sostituisco $w(x,y)$ in $\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = -\frac{N}{D}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$ e divido per il fattore comune $A_{nm} \sin n\pi(x/a) \sin m\pi(y/b)$, ottengo così:

$$\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4 + 2\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^4 = \frac{N}{D}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$$

↓
c'è proprio a perchè è il lato caricato

e quindi ricavo N_c^{nm} :

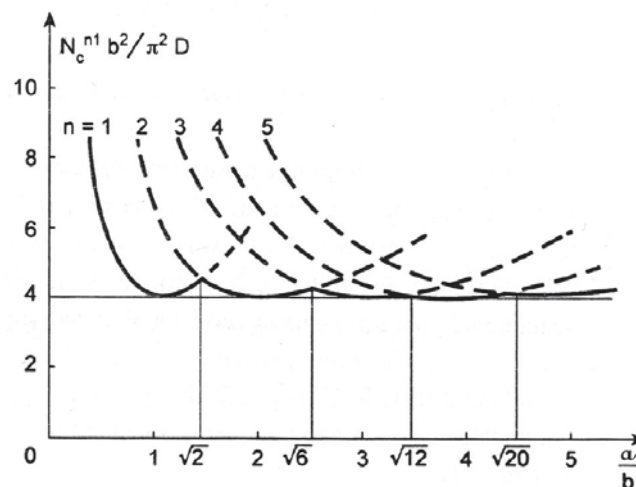
$$N_c^{nm} = \pi^2 D \frac{a^2}{n^2} \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)^2$$

Il più piccolo valore di N_c^{nm} carico critico si ottiene per $m=1$ poichè m compare soltanto a numeratore nell'espressione appena scritta (mentre n come nel caso di trave su appoggi elastici compare sia a numeratore che a denominatore). Dunque si ha:

$$N_c^{n1} = \pi^2 \frac{D}{b^2} \left(n \frac{b}{a} + \frac{1}{n} \frac{a}{b}\right)^2$$

che assomiglia all'espressione vista per la trave su letto di molle, infatti mantengo soltanto n a numeratore e denominatore, ma invece che l stavolta ho il rapporto tra i lati (rapporto di forma della lastra). Questa formula corrisponde ad una deformata con una sola semionda lungo il lato b ed n semionde lungo il lato a .

Si riporta adesso il diagramma del carico critico adimensionalizzato in funzione del rapporto a/b tra i lati del rettangolo. In realtà si ha una successione di curve al variare di n , ma per ciascun valore di a/b , si ha un determinato valore di n tale per cui N_c^{n1} è minimo.

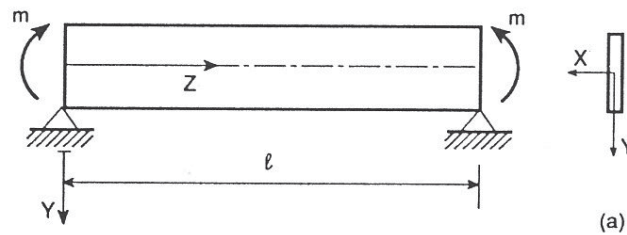


(valgono gli stessi discorsi di prima)

3.3 Instabilità flessio-torsionale (problema di Prandtl)

Questo tipo di instabilità avviene per travi sottili, ma può capitare anche in travi a sezione compatta con snellezza elevata. Collasso quindi che riguarda lastre o travi.

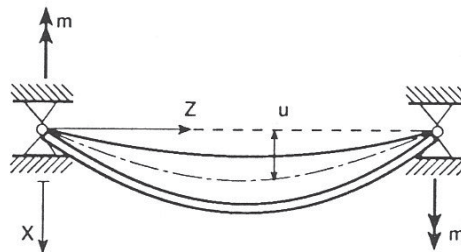
Si consideri una trave di sezione rettangolare sottile soggetta a flessione uniforme tramite l'applicazione alle estremità di due momenti m contenuti nel piano YZ di maggiore rigidità flessionale. La trave è vincolata in modo che sia impedita la rotazione attorno all'asse longitudinale Z .



w = spostamento lungo l'asse y (principale)
 u = spostamento lungo l'asse x (fuori dal piano) e φ = rotazione sono delle perturbazioni che possono portare a collasso.

Consideriamo adesso una configurazione deformata della trave, con inflessione nel piano XZ di minore rigidità flessionale e contemporanea torsione attorno all'asse Z .

Vedendo la trave dall'alto:



◆ Metodo dell'equilibrio diretto

Risolviamo allora il problema col metodo dell'equilibrio diretto.

L'inflessione $u(z)$ e la rotazione torsionale $\varphi_z(z)$ generano delle sollecitazioni instabilizzanti, ovvero generano delle componenti del momento esterno m rispettivamente nella direzione assiale Z e nella direzione trasversale Y . La flessione fuori dal piano mi genera una torsione fuori dal piano, mentre la torsione (come perturbazione) mi genera un momento flettente instabilizzante: praticamente si incrociano gli effetti.

Come faccio ad ottenere una sola equazione? Derivo la prima equazione rispetto a z (tutti i due membri) e inserendo la derivata seconda di u nella seconda equazione si ottiene:

$$\frac{d^2 \varphi_z}{dz^2} + \frac{m^2}{EGI_y I_t} \varphi_z = 0.$$

(la novità sta nel fatto che non vi è uno spostamento ma una rotazione incognita)

Posto:

$$\alpha^2 = \frac{m^2}{EGI_y I_t},$$

L'equazione diventa (della stessa forma di quella del problema dell'asta caricata di punta):

$$\varphi_z'' + \alpha^2 \varphi_z = 0$$

L'integrale generale di questa equazione differenziale è:

$$\varphi_z(z) = A \cos \alpha z + B \sin \alpha z,$$

e soddisfa le equazioni al contorno:

$$\varphi_z(0) = \varphi_z(\ell) = 0,$$

Per

$$\boxed{A=0} \quad \text{e} \quad \boxed{\sin \alpha \ell = 0}$$

In alternativa si può ricavare un'equazione in funzione di u e non di φ , derivando la seconda delle due equazioni precedenti rispetto z e inserendo il risultato nella prima:

$$\frac{d^3 u}{dz^3} + \frac{m^2}{EGI_y I_t} \frac{du}{dz} = 0$$

Posto:

$$\alpha^2 = \frac{m^2}{EGI_y I_t},$$

L'equazione diventa (della stessa forma di quella del problema dell'asta caricata di punta):

$$u'''+\alpha^2 u'=0$$

che ha le stesse radici dell'equazione differenziale in φ . Essendo analoghe le condizioni al contorno $u(0) = u(l) = 0$ si perviene alla stessa condizione di criticità.

**4. ANELLI E GUSCI CILINDRICI SOGGETTI ALLA
PRESSIONE ESTERNA
ARCHI E GUSCI RIBASSATI SOGGETTI ALLA
FORZA PESO (SNAP-THROUGH)**

Vedremo in seguito, come collasso, lo Snap-through. Esso è un collasso per instabilità dell'equilibrio elastico. Quando parlo di Snap-through introduco come elemento nuovo, la considerazione della deformabilità assiale per le travi o membranale dei gusci. Per gradi di ribassamento elevati, prevale il collasso di Snap-through!

4.1 Travi ad asse curvilineo: anelli e archi

Cerchiamo l'equazione che governa l'instabilità di strutture curve. Consideriamo una trave ad asse curvilineo, inestensibile ($\epsilon = 0$) e non deformabile a taglio ($\gamma = 0$). Sotto tali ipotesi, le equazioni cinematiche possono scriversi come segue:

$$\begin{bmatrix} \gamma \\ \epsilon \\ \chi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ds} & -\frac{1}{r} & +1 \\ \frac{1}{r} & \frac{d}{ds} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{ds} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \\ \varphi \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} \varphi &= -\frac{dv}{ds} + \frac{w}{r} \\ \frac{dw}{ds} &= -\frac{v}{r}, \\ \chi &= \frac{d\varphi}{ds}. \end{aligned}$$

Inserendo l'espressione della rotazione in quella della curvatura si ottiene:

$$\chi = -\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{d}{ds} \left(\frac{w}{r} \right)$$

trascurando poi la variazione intrinseca (perchè r si assume costante) e applicando l'equazione:

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{v}{r},$$

si ottiene:

$$\chi = -\frac{d^2 v}{ds^2} - \frac{v}{r^2}.$$

Ricordando poi la relazione che lega il momento flettente alla curvatura, si trova l'equazione della linea elastica per travi curve (per ora non ci sono effetti del 2° ordine):

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{r^2} = -\frac{M}{EI}$$

v è l'incognita: funzione spostamento radiale (sarà l'autofunzione) per $r \rightarrow \infty$ questo termine è 0, ricadiamo nel caso di travi rettilinee

Sostituendo $N_{A'}$ in $M_{B'}$ ottengo:

lo devo inserire poi nell'equazione \leftarrow $M_{B'} = M_{A'} - q \left(\overline{A'O} \cdot \overline{A'C} - \frac{1}{2} \overline{A'B'}^2 \right)$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{r^2} = -\frac{M}{EI}$$

Ma prima di inserirla, poichè è ancora un'espressione troppo complicata, uso il teorema di Pitagora generalizzato per un triangolo scaleno per cercare di semplificarla:

Tra i lati del triangolo $OA'B'$ sussiste la relazione:

$$\overline{B'O}^2 = \overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - 2 \overline{A'O} \overline{A'B'} \cos \omega \rightarrow CA'$$

da cui risulta:

$$\overline{A'O} \overline{A'C} = \frac{1}{2} \left(\overline{A'O}^2 + \overline{A'B'}^2 - \overline{B'O}^2 \right)$$

Introduco l'ultima equazione in quella di $M_{B'}$ e ottengo:

$$M_{B'} = \overline{M_{A'}} - \frac{1}{2} q \left(\overline{A'O}^2 - \overline{B'O}^2 \right)$$

pure incognito

(all'interno delle parentesi tonde c'è la differenza tra i quadrati dei raggi deformati: il primo $> R$ e il secondo più corto di R)

poichè:

$$\overline{A'O} = R + \overline{v_0} \rightarrow \text{valore iniziale della funzione } v \text{ in } A' \text{ (è una costante)}$$

$$\overline{B'O} = R + \overline{v} \rightarrow \text{spostamento trasversale generico sezione per sezione (incognita)}$$

Inserendo questi due valori nell'espressione di $M_{B'}$. Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, si possono trascurare gli infinitesimi di ordine superiore, quindi si ha che:

$$M_{B'} = M_{A'} + \overline{qR}(v - v_0)$$

*parametro geometrico
e di carico*

Ricordandoci che: $ds = R d\theta$, e sostituendo finalmente $M_{B'}$ nell'equazione della linea elastica per travi curve si ottiene:

$$\frac{d^2 v}{d\theta^2} + v = -\frac{R^2}{EI} [M_{A'} + qR(v - v_0)]$$

Applicando la condizione:

$$v(\vartheta = 0) = v_0$$

Si ricava il valore di B dell'equazione $v(\vartheta) = A \sin \alpha\vartheta + B \cos \alpha\vartheta + \frac{qR^3 v_0 - M_{A'} R^2}{qR^3 + EI}$

$$B = \frac{M_{A'} R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI}$$

In definitiva si ottiene:

$$v(\vartheta) = \frac{M_{A'} R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \cos 2\vartheta + \frac{qR^3 v_0 - M_{A'} R^2}{qR^3 + EI}. \quad (\text{deformata})$$

Dalla condizione di inestensibilità assiale:

$$\frac{dw}{ds} = -\frac{v}{r} \quad (w = \text{spostamento tangenziale})$$

si ottiene:

$$\frac{dw}{d\vartheta} = -v$$

quindi:

$$\frac{dw}{d\vartheta} = -\frac{M_{A'} R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \left[\cos 2\vartheta - \frac{qR^3 v_0 - M_{A'} R^2}{qR^3 + EI} \right]$$

e quindi integrando:

$$w(\vartheta) = -\frac{M_{A'} R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \frac{1}{2} \sin 2\vartheta - \frac{qR^3 v_0 - M_{A'} R^2}{qR^3 + EI} \vartheta$$

Per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$ lo spostamento assiale w deve annullarsi per simmetria e quindi (l'unica significativa è quella per $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$):

$$M_{A'} = qRv_0.$$

Introducendo $M_{A'}$ in $v(\vartheta) = \frac{M_{A'} R^2 + v_0 EI}{qR^3 + EI} \cos 2\vartheta + \frac{qR^3 v_0 - M_{A'} R^2}{qR^3 + EI}$

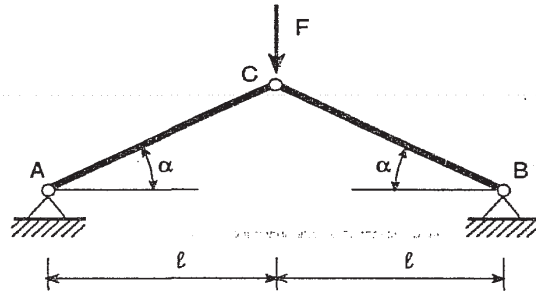
Si ottiene la seguente deformata che rappresenta una ovalizzazione del tubo:

$$v(\vartheta) = v_0 \cos 2\vartheta$$

4.2 Archi e gusci ribassati soggetti alla forza peso

Introduciamo adesso un altro tipo di instabilità, non dell'equilibrio elastico, ma l'instabilità di **snap-through** (fenomeno a scatto: salto orizzontale di una funzione)

Consideriamo l'arco ribassato (cavalletto ribassato, con α (noto) piccolo $\approx 10^\circ \div 20^\circ$) costituito da due bielle assialmente deformabili di rigidezza K . La curvatura in questo caso non la considero neppure per semplificare le cose. Questo cavalletto è soggetto ad un carico verticale F in chiave.



Si indica con φ la riduzione dell'angolo α per effetto della forza F

L'ipotesi che si fa è che considero indeformabile a flessione la trave, ma deformabile assialmente (al contrario di quanto fatto per il problema di Eulero!).

Impostiamo il problema da un punto di vista energetico. Se si considerano solo deformazioni simmetriche il sistema avrà un solo grado di libertà. Considero una rigidezza assiale K come se fossero due molle allora il potenziale elastico può scriversi come (sarebbe $1/2 K$ ma poichè sono 2 le travi devo moltiplicare per 2 e si elide l' $1/2$):

$$\Phi(\varphi) = K \left[\frac{l}{\cos \alpha} - \frac{l}{\cos(\alpha - \varphi)} \right]^2$$

\downarrow \downarrow
lunghezza *lunghezza*
iniziale *finale*

(φ è il parametro cinematico (coordinata generalizzata) che regola il problema)

Nell'ipotesi di arco ribassato possiamo porre:

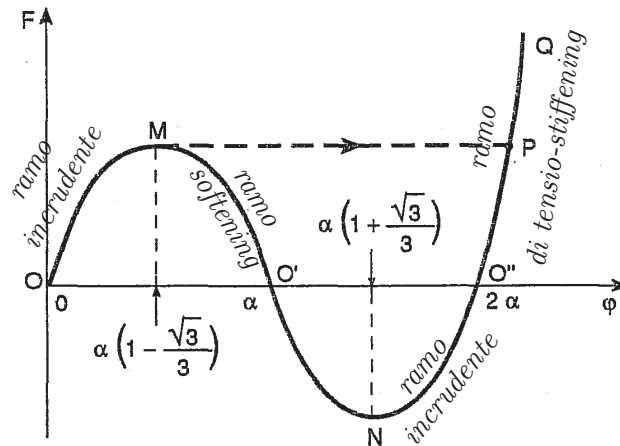
$$\cos \alpha \simeq 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\cos(\alpha - \varphi) \simeq 1 - \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)^2,$$

Ricordando lo sviluppo in serie di Taylor del coseno si ha:

$$\frac{1}{\cos \alpha} \simeq 1 + \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\frac{1}{\cos(\alpha - \varphi)} \simeq 1 + \frac{1}{2}(\alpha - \varphi)^2$$



O = centro di simmetria polare

OM = tratto di tipo incrudente (hardening)

MO' = tratto di softening (la seguio imponendo la φ perchè non posso fare crescere più la F che invece va calando)

O' = è un punto notevole perchè $\varphi = \alpha$, ho annullato in sostanza la freccia (le due bielle sono in compressione). La situazione è di equilibrio instabile

O'N = continuo ad imporre φ , ma stavolta ho una reazione verso l'alto invece che verso il basso, quindi per controllare il fenomeno vuol dire che devo dare delle forze verticali verso l'alto (se no c'è lo scatto)

NO'' = ramo di hardening

O'' = le due bielle hanno una configurazione opposta a quella iniziale e infatti la F è zero per la terza volta.

N.B. Mentre O' mi rappresenta una configurazione di equilibrio instabile, le altre 2, O e O'' rappresentano una configurazione di equilibrio stabile.

O''Q = aumentando di nuovo la forza ho un irrigidimento

N.B. L'elasticità è sempre lineare (materiale), ma è non lineare geometricamente.

Esistono dunque tre posizioni di equilibrio con $F=0$. Mentre la prima e l'ultima rappresentano condizioni di equilibrio stabile, quella intermedia è la condizione di equilibrio instabile rappresentata dalla configurazione di bielle allineate e compresse.

Uno studio rigoroso della stabilità si può fare utilizzando la derivata seconda dell'energia potenziale totale:

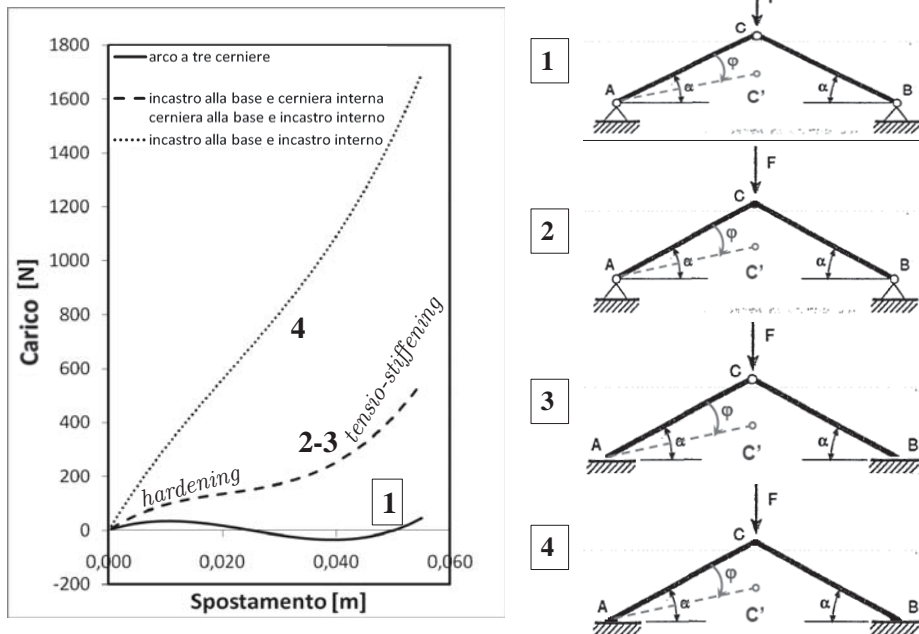
$$W''(\varphi) = K\ell^2(3\varphi^2 - 6\alpha\varphi + 2\alpha^2)$$

che è maggiore di zero per: $\varphi < \alpha \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ovvero, $\varphi > \alpha \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

N.B. Se si vuole percorrere il ramo virtuale MNP, è necessario controllare il fenomeno imponendo un angolo φ crescente con continuità. In questo caso la forza F la si può interpretare come una reazione vincolare, che tra M e N decresce, diventando oltre il punto O' persino negativa. Ciò significa che è necessaria, oltre la configurazione a bielle allineate, una forza volta verso l'alto per procedere lungo la curva F in modo controllato.

Il cavalletto che abbiamo trattato è in sostanza un arco a 3 cerniere. Se cambiamo le condizioni di vincolo cosa accade?

ANALISI AL VARIARE DELLE CONDIZIONI DI VINCOLO

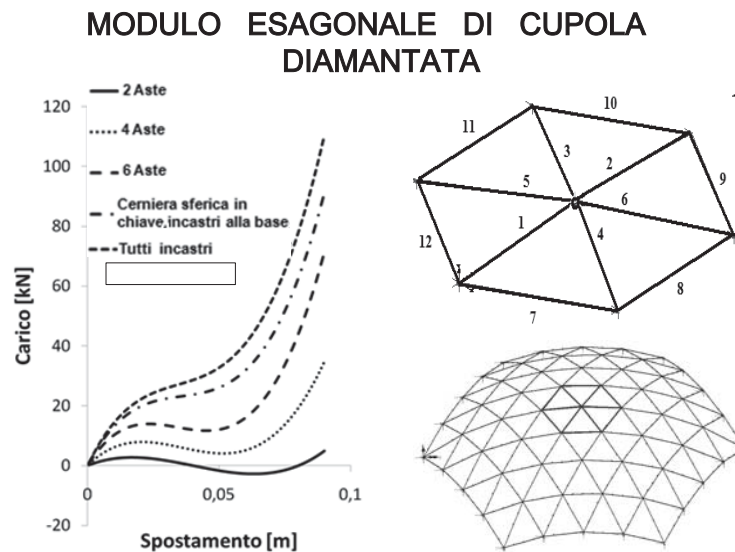


La curva continua (1) quella che abbiamo già vista prima.

Se irrigidisco la chiave (al posto della cerniera metto un incastro interno) oppure equivalentemente irrigidisco le basi (2 incastri al posto delle 2 cerniere), vi è una risposta intermedia: curva tratteggiata (2-3). Si nota che adesso il fenomeno dello snap-through sparisce, perchè la curva è tutta monotona (non presenta instabilità di tipo meccanico).

Se irrigidisco ancora di più il mio sistema (incastro sia negli appoggi che nella chiave) ho una risposta data dalla curva (4). Presenta sempre un flesso ma meno accentuato delle altre curve (leggero incrudimento - flesso - leggero irrigidimento). Sembra un comportamento quasi lineare.

Concludiamo dunque dicendo che: irrigidendo il sistema, il sistema si avvicina sempre più ad un andamento lineare.



Aumentando il numero di aste e la 'rigidità' dei vincoli scompare il fenomeno di snap-through.

ALTRE OSSERVAZIONI

Per governare il fenomeno dello snap-through possiamo utilizzare due mezzi: lo spessore e il modulo elastico. Lo spessore influisce sulla forma della curva, mentre il modulo elastico influisce sulla sua magnitudo, cioè impone il valore del 1° carico critico di collasso.

N.B. È interessante osservare come lo spessore influisca direttamente sulla forma della curva mostrando un comportamento a snap-through per spessori ridotti e invece un comportamento molto meno instabile per spessori più elevati (Fig. 4.8, 4.9, 4.10, 4.11). L'effetto del modulo elastico agisce invece soltanto sul carico che può essere sopportato dal guscio (Fig. 4.12, 4.13).

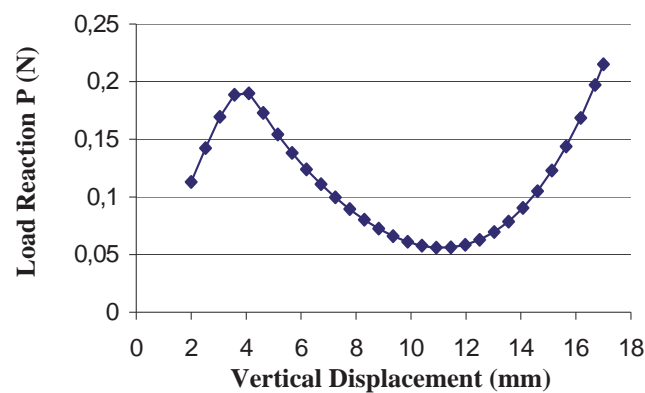


Fig. 4.8 – Curva carico-spostamento del nodo 18 con $E=3.10 E^9$ e spessore $s=2$ mm.

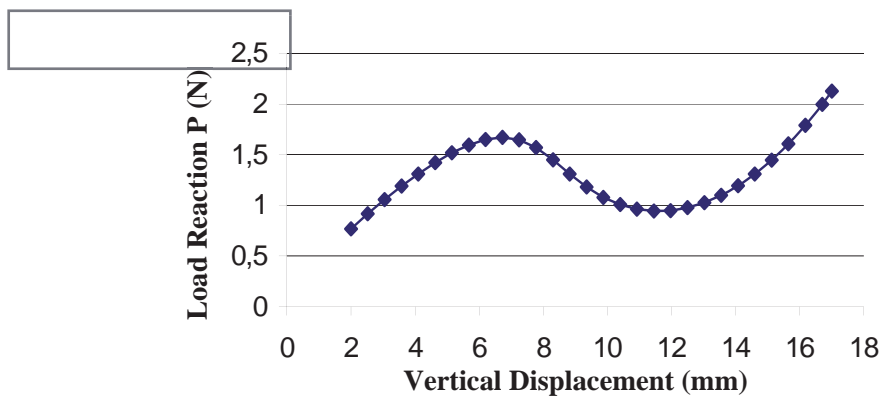


Fig. 4.12 – Curva carico-spostamento del nodo 18 con $E=3.10 E^8$ e spessore $s= 5$ mm.

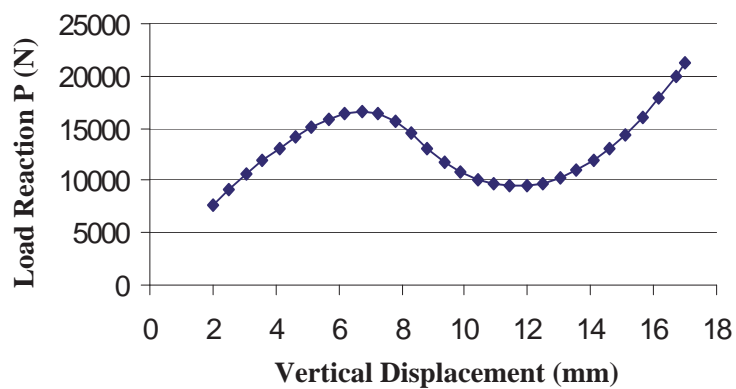


Fig. 4.13 – Curva carico-spostamento del nodo 18 con $E=3.10 E^{12}$ e spessore $s= 5$ mm.

ARCO RIBASSATO

Carico critico euleriano

Quando la forza N raggiunge il carico critico Euleriano le aste dell'arco perdono rigidità flessionale. L'equilibrio passa alla configurazione adiacente.

$$N = \frac{1}{2} \frac{F}{\sin \alpha}$$

sforzo normale nelle aste

$$N_{cr, Eu} = \pi^2 \frac{EI}{L^2} = \frac{1}{2} \frac{F_{cr, Eu}}{\sin \alpha}$$

$$F_{cr, Eu} = 2\pi^2 \frac{EI}{L^2} \sin \alpha$$

Snap-Through

$$\eta(\varphi) = l \tan \alpha - l \tan(\alpha - \varphi)$$

$$F = 2N \sin \alpha = 2N \sin(\alpha - \varphi)$$

Si esprime il carico N come:

$$N = \frac{EA}{L} u \quad (a)$$

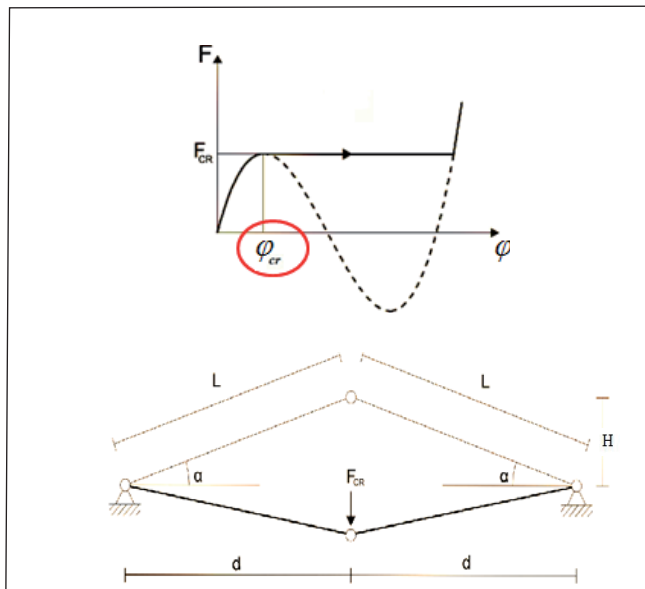
dove: $u = L - L' = L \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} \right) \quad (b)$

è quindi possibile ottenere F in funzione dell'angolo φ

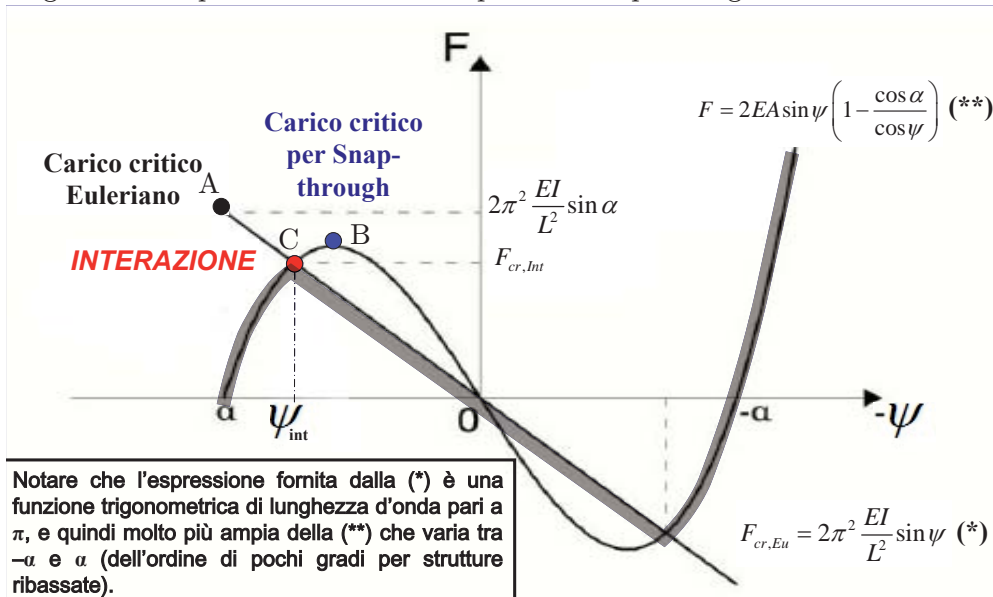
$$F = 2EA \sin(\alpha - \varphi) \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\cos(\alpha - \varphi)} \right)$$

considerando la condizione di stazionarietà si studia la derivata prima:

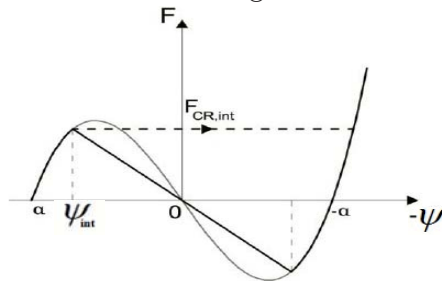
$$\frac{dF}{d\varphi} = 2EA \left(\cos(\alpha - \varphi) - \frac{\cos \alpha}{\cos^2(\alpha - \varphi)} \right)$$

$$(\alpha - \varphi)_{cr} \equiv \psi_{cr} = \arccos \left((\cos \alpha)^{\frac{1}{3}} \right)$$


Cosa succede? Se all'interno delle aste raggiungiamo il valore di N_{cr} andiamo ad intersecare nel grafico di sopra un F_{cr} che non è quello di snap-through!



Considerando i 2 fenomeni indipendenti troverei 2 punti di collasso A e B. Ma se considero l'interazione trovo C (che corrisponde ad un F di collasso inferiore!). Quando c'è interazione in realtà la curva di snap-through non è più quella che avevamo trovato, ma è quella evidenziata (Eulero è l'innescò che innescò uno snap-through con F_{cr} minore). In definitiva la nostra struttura collassa sempre per snap-through ma ad un carico critico più basso al valore del carico critico dei singoli due collassi appunto per l'interazione.



Interazione		Nessuna Interazione	
	con $N_{cr,EB} < F_{cr,ST}$		Intersezione post-picco
	con $N_{cr,EB} > F_{cr,ST}$		Nessuna intersezione tra i percorsi

Il comportamento strutturale dipende da seguenti parametri:

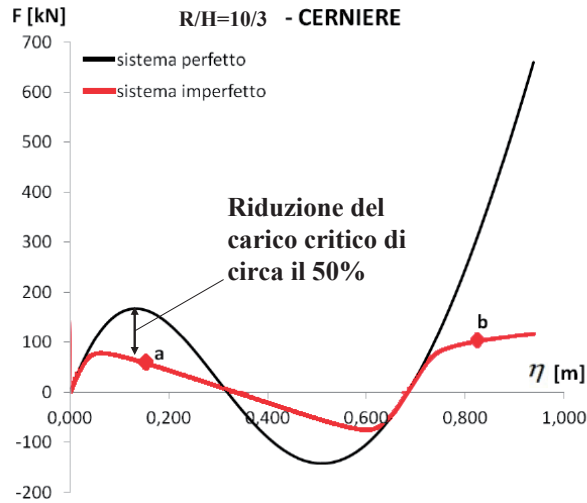
Snellezza

$$\lambda = \sqrt{\frac{AL^2}{I}} \quad (11)$$

Grado di ribassamento

$$\tan \alpha = \frac{H}{\ell} \quad (12)$$

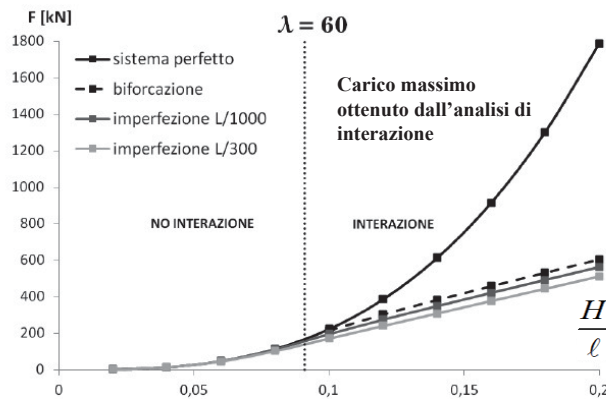
Consideriamo ora un esempio che mette in conto pure le imperfezioni costruttive.









Nel sistema imperfetto si ha un abbattimento del carico di collasso. In particolare questo presenta una curva che ha la forma di un collasso per interazione (curva + tratto rettilineo). Ciò ci porta a dire che: l'innescò Euleriano è molto sensibile alle imperfezioni. Quindi abbiamo un collasso per snap-through, innescato dall'instabilità euleriana, innescata a sua volta dalle imperfezioni costruttive.

N.B. L'effetto dell'interazione è maggiore quando il grado di ribassamento è alto. L'effetto dell'interazione è maggiore tanto più la snellezza è alta. Il valore delle imperfezioni non è influente: se metto $L/1000$ o $L/300$ è praticamente la stessa cosa: l'effetto è sempre quello di un abbattimento del carico (sempre più o meno della stessa percentuale). Quindi non c'è un abbattimento in funzione del valore delle imperfezioni, ma conta solo se ci siano o meno imperfezioni (e la loro forma).

VARIAZIONE DEL CARICO CRITICO AL VARIARE DEL GRADO DI RIBASSAMENTO

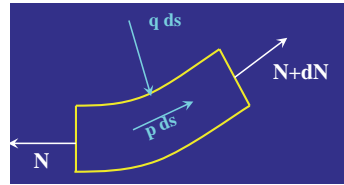


<p>Candela Xoxhimilco Restaurant Roof (SPA)</p>	<p>1958</p>	<p>-</p>	<p>CLS con rete elettrosaldata - spessore di 4.5 cm</p> 
<p>Isler Wyss Garden Center (SWI)</p>	<p>1960</p>	<p>-</p>	<p>modelli in scala: tele bagnate in sospensione e ribaltava (solo compressione) fattore innovativo: Isler capisce che la cosa più conveniente è fare scaricare a terra gli appoggi, non su altre strutture come contrafforti</p> 
<p>Freyssinet Orly dirigible hangars (FRA)</p>	<p>1920</p>	<p>86</p>	<p>volta cilindrica ad archi (no struttura ribassata)</p> 
<p>Taillibert Roofs for a school (FRA)</p>	<p>1975</p>	<p>-</p>	<p>rispetto a Isler struttura più tozza e che scarica su dei contrafforti</p> 
<p>Nervi Hangar di Orbetello (ITA)</p>	<p>1942</p>	<p>60</p>	<p>struttura in CLS - volta cilindrica non completa ma sostenuta da dei contrafforti - struttura nervata (riprende la concezione di nervatura del Pantheon)</p> 
<p>Nervi Palazzetto dello sport (ITA)</p>	<p>1957</p>	<p>60</p>	<p>struttura come il Pantheon: nervature + foro circolare che scarica le tensioni membranali soprattutto quelle meridiane</p> 

Rimane soltanto N . La terza equazione scompare, mentre le prime due diventano esprimendole nell'unica incognita N :

$$\frac{N}{r} = q$$

$$\frac{dN}{ds} = -p$$



Da ciò risulta che la fune non può assumere qualsiasi forma, ma è costretta a seguire la sua curva delle pressioni (perchè il problema è formulato in 2 equazioni in 1 incognita) altrimenti non ci sarebbe equilibrio.

Analogamente, il problema elastico per le membrane (o di gusci sottili) internamente isostatico, essendo la matrice statica quadrata di dimensioni (2x2):

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{d}{ds} + \frac{\sin \alpha}{r} \right) & -\frac{\sin \alpha}{r} \\ -\frac{1}{R_1} & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_s \\ N_\vartheta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{F}_s \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

↑
sforzi
membranali
(forze per unità di lunghezza)

Stavolta il problema statico è caratterizzato da due equazioni in 2 incognite quindi è sempre possibile trovare una soluzione di equilibrio indipendentemente dalla forma assunta dalla membrana stessa, contrariamente al caso della fune (qualsiasi forma di guscio si mette sempre in equilibrio, esiste sempre una soluzione - problema isostatico internamente quindi risolvo il problema con solo equazioni di equilibrio).

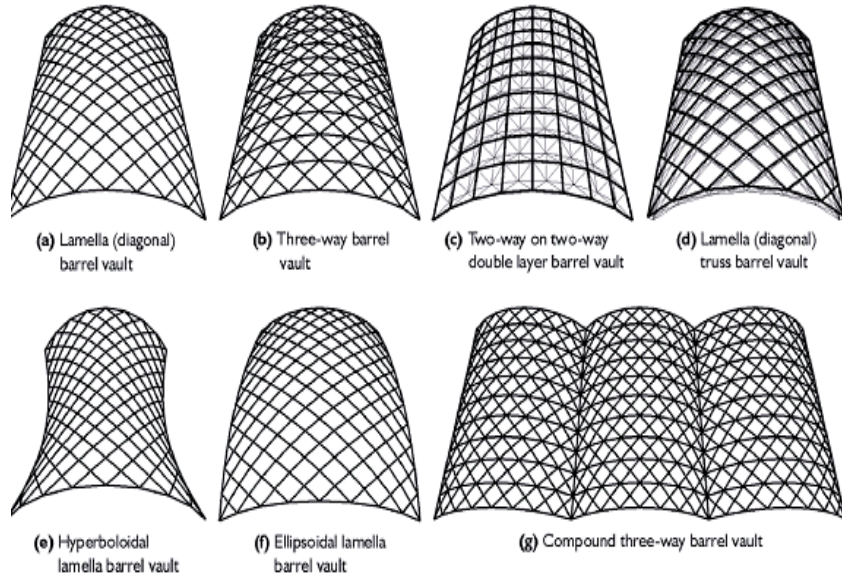
(stiamo parlando di cupole/strutture assial simmetriche; s =coordinata lungo il meridiano, ϑ =coordinata angolare attorno al parallelo).

N.B. In una cupola emisferica N_s sforzo membranale lungo il meridiano, è sempre di compressione. Mentre lo sforzo lungo il meridiano N_s risulta essere sempre di compressione, lo sforzo lungo il parallelo tenderà invece a cambiare di segno, con la conseguente nascita di sforzi di trazione per un valore di φ (latitudine) pari circa a $51^\circ 49'$.

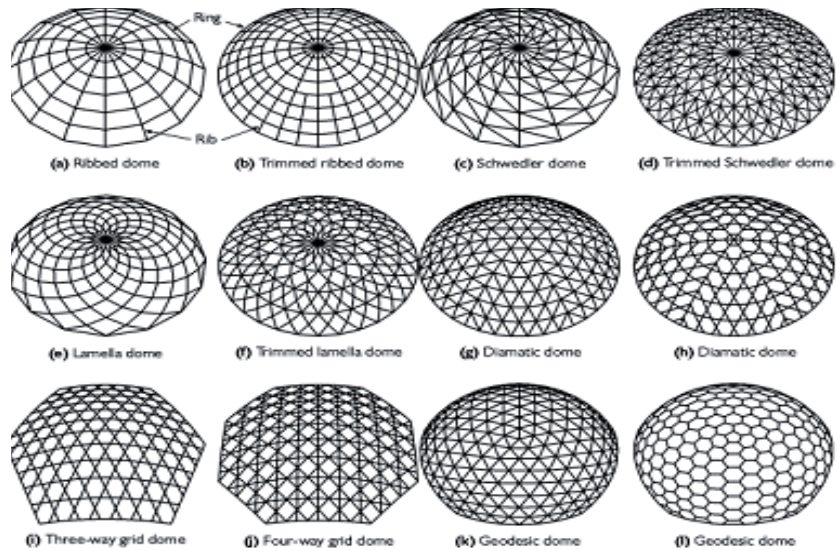
fascia da armare



(b) *volte cilindriche reticolari*



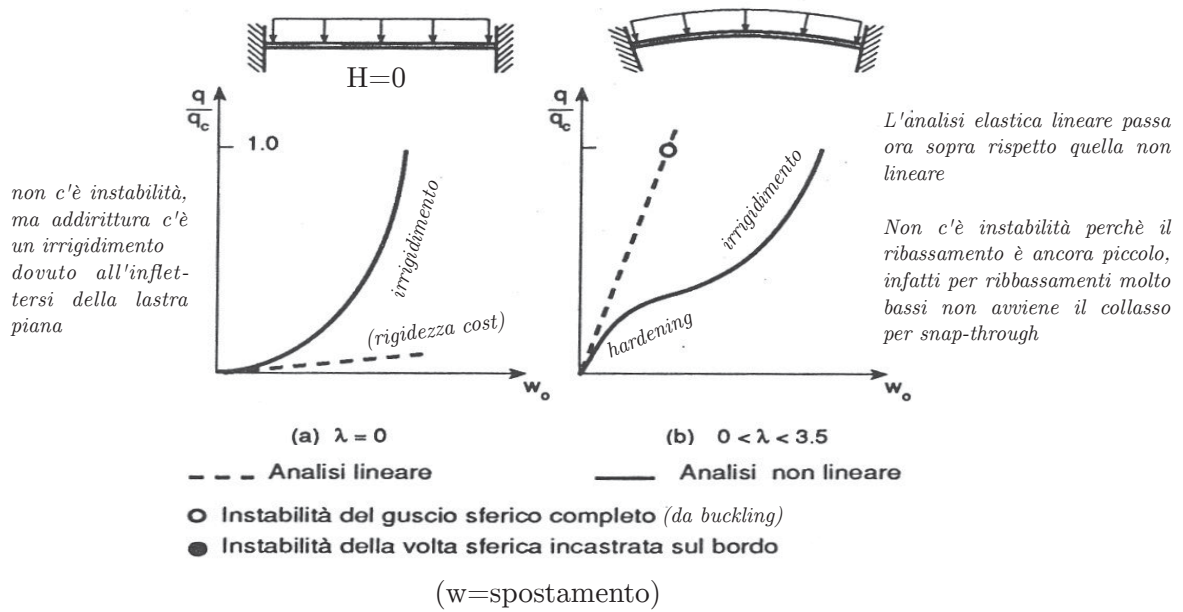
(c) *calotte sferiche reticolari (cupole)*



DIAMATIC DOME	SCHWEDLER DOME	GEODESIC DOME

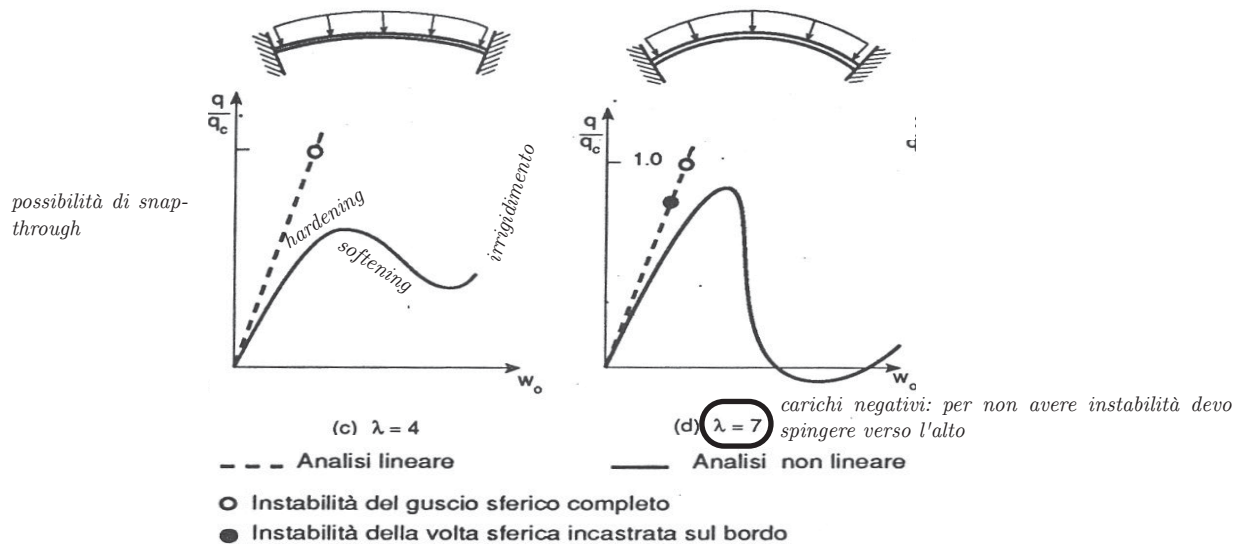
Cosa succede al variare di H/h ? Facciamo variare H (da 0 ↑) e vediamo cosa succede.

► TENSIO-STIFFENING AND HARDENING

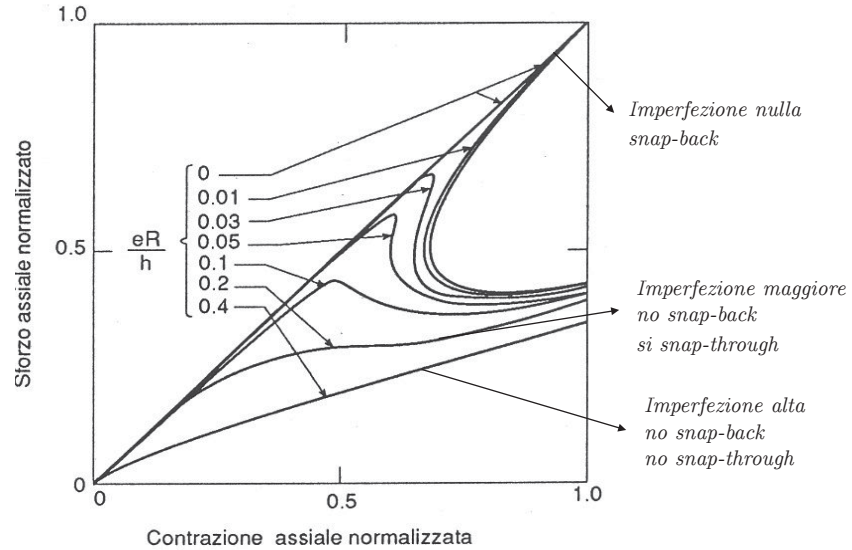


- (sx) lastra circolare con carico verticale (ipotesi di grandi spostamenti)
- (dx) struttura molto ribassata

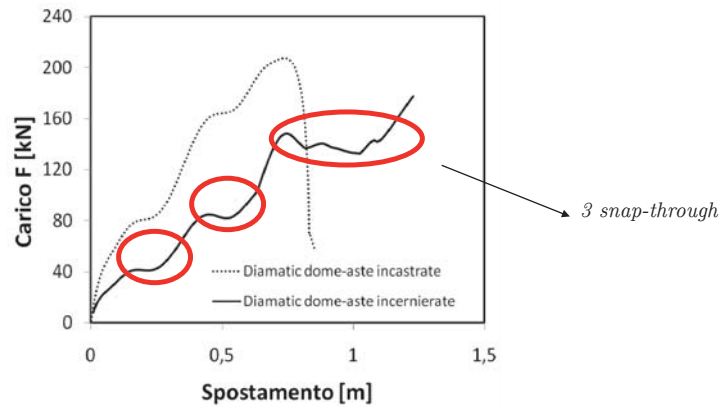
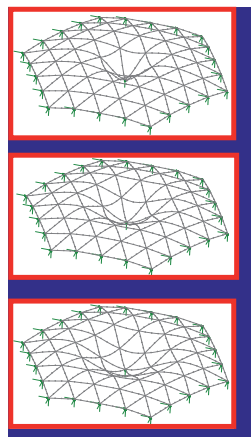
► SNAP-THROUGH



All'aumentare delle imperfezioni iniziali la risposta strutturale tende a divenire meno instabile, scomparendo il fenomeno dello snap-back. A prova è riportato nel grafico sottostante la risposta carico-contrazione assiale nel caso di un guscio cilindrico caricato assialmente, al variare dell'eccentricità della sezione trasversale (imperfezioni). Per imperfezioni elevate scompare anche il fenomeno di snap-through.

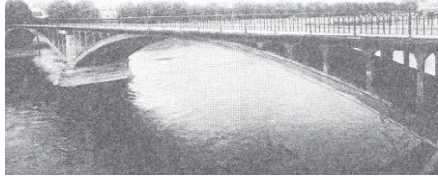






SNAP-THROUGH PROGRESSIVO (l'ammaccatura si dilata)



6.2 Ponti ad arco in calcestruzzo armato




Il CLS armato non è il primo materiale che viene utilizzato per la costruzione dei ponti. Ma si è iniziato con la ghisa e con l'acciaio (il cemento armato è arrivato alla fine dell'800).

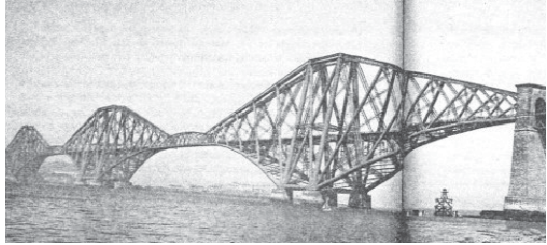
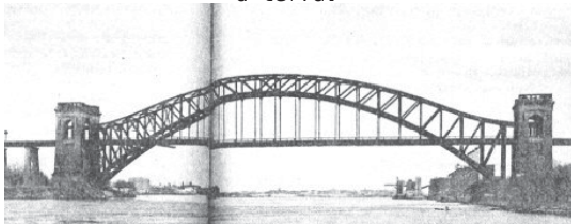
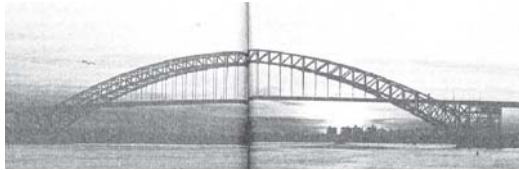


PROGETTISTA - PONTE	ANNO	LUCE[m]	CARATTERISTICHE
Hennebique Vienne River Bridge (FRA)	1899	50	Ponte con la luce maggiore dell'800. 
Maillart Stauffacher Bridge (SWI)	1899	40	Arco a 3 cerniere nascosto da una facciata in muratura 
Maillart Zuoz Bridge (SWI)	1901	40	Arco nudo senza facciata in muratura (Primo ponte scatolare costruito) 
Maillart Schwandbach Bridge (SWI)	1933	40	Ponte ad arco elegante con piano stradale curvo. L'arco è sottilissimo (praticamente è una struttura a guscio sottile). I puntoni che sorreggono il piano stradale sull'arco sono in realtà delle pareti sottili con sezione variabile trapezoidale 

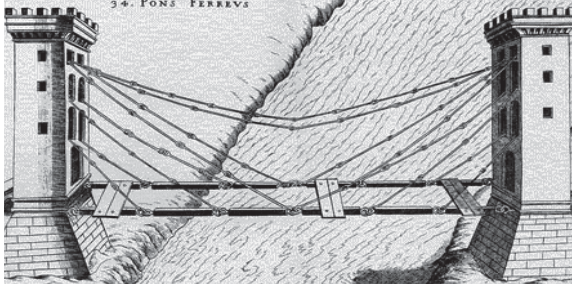


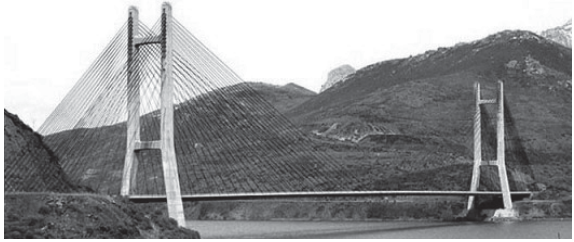

Menn Ganter Bridge (SWI)	1980	174	<p>Stralli affogati nel CLS. E' un ponte in cemento armato precompresso con i cavi che passano attraverso 'gli stralli' di CLS. (problemi di manutenzione)</p> 
--------------------------------	------	-----	---



6.3 Ponti ad arco metallici

Già alla fine del '700 si utilizzavano i metalli per progettare i ponti.

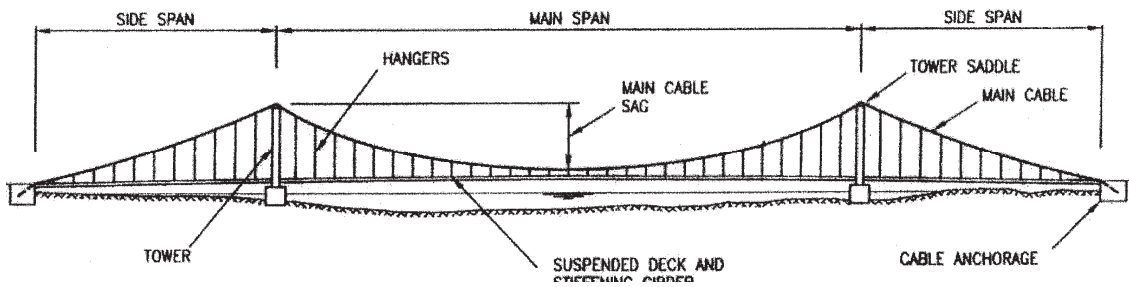
PROGETTISTA - PONTE	ANNO	LUCE[m]	CARATTERISTICHE
Darby Iron Bridge (ENG)	1780	30	<p>Ponte in ghisa - geometria a semicerchio - piano stradale sopra. L'arco che viene messo in compressione è costituito solo da alcuni di tutti gli archi presenti nella struttura. La geometria è quella ad arco a tutto sesto (si rifà alla geometria classica romana).</p> 
Telford Craigellachie Bridge (ENG)	1814	45	<p>Ponte in ghisa - cambia la geometria: arco ribassato. Arco reticolare, con struttura di trasmissione dei carichi sempre reticolare che collega il piano stradale all'arco.</p> 
Brunel Saltash Bridge (ENG)	1860	140	<p>Struttura ad arco tubolare che scarica sui piloni, più una fune di sospensione (Struttura reticolare data da un arco e una fune - a mezza strada tra un ponte ad arco e un ponte sospeso)</p> 

<p>Baker Forth Bridge (SCO)</p>	<p>1890</p>	<p>520</p>	<p>Ponte ad arco (arco sotto e catenaria sopra al contrario di Brunel - schema robustissimo e costoso (doppio del materiale)). Ponte a schema a mensola, perchè mezza campata ricorda una mensola di forma rastremata.</p> 
<p>Lindenthal Hell Gate Bridge (USA)</p>	<p>1926</p>	<p>300</p>	<p>La struttura ad arco vera e propria è solo quella del corrente inferiore, quello del corrente superiore è principalmente un fattore estetico, infatti l'arco superiore si scarica sulle torri mentre quello inferiore a terra.</p> 
<p>Amman Bayonne Bridge (USA)</p>	<p>1931</p>	<p>510</p>	<p>Luce comparabile con i record di oggi. In acciaio con piano stradale a metà altezza. Arco reticolare 'moderno' che scarica a terra. (Amman è il più grande progettista di ponti sospesi del '900)</p> 
<p>Freeman Sidney Harbour Bridge (AUS)</p>	<p>1932</p>	<p>503</p>	<p>Porta 8 corsie stradali, 2 linee ferroviarie, 1 marciapiede e 1 pista ciclabile.</p> 
<p>New River George Bridge (USA)</p>	<p>1978</p>	<p>518</p>	<p>Dobbiamo arrivare al 1978 per avere un ponte ad arco con luce > di quello di Amman. Il più lungo del mondo fino al 2009. Il piano stradale stavolta passa sopra</p> 

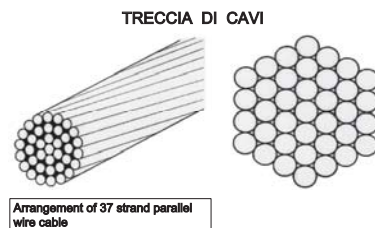
PROGETTISTA - PONTE	ANNO	LUCE[m]	CARATTERISTICHE
Veranzio Pons Ferreus (ITA)	1500	-	Il ponte strallato prende ispirazione dal ponte levatoio. 
Morandi Viadotto Polcevera (ITA)	1960	210	Morandi usava delle funi di precompressione. 
Morandi Maracaibo Bridge (VENEZ)	1960	235	Stralli sempre utilizzando cavi da precompressione. 
Barrios de Luna Bridge (SPA)	1983	440	Gli stralli sono un misto tra ventagli (paralleli) e ad arpa (partenti da uno stesso punto). 
Annacis Bridge (CAN)	1986	485	Stralli fitti simmetrici 

<p>Sutong Bridge (CHI)</p>	<p>2008</p>	<p>1088</p>	
<p>Rusky Bridge (RUS)</p>	<p>2012</p>	<p>1104</p>	


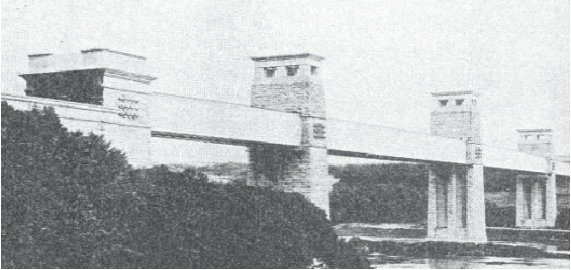


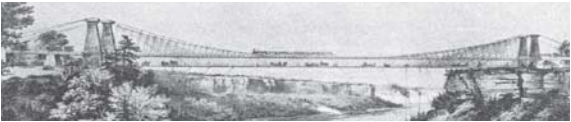
6.4 Ponti sospesi

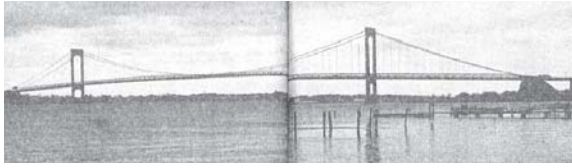

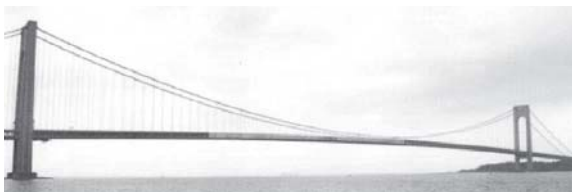




Come si vede dallo schema strutturale, i ponti sospesi non hanno bisogno di pile molto alte, ma nemmeno tanto basse.



(diametro circa 1 metro e mezzo)

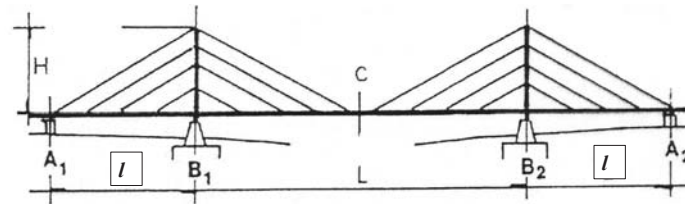
PROGETTISTA - PONTE	ANNO	LUCE[m]	CARATTERISTICHE
Telford Menai Bridge (ENG)	1826	177	Catena al posto di un cavo. Problemi di stabilità dovuti a vibrazioni per il vento 
Stephenson Britannia Bridge (ENG)	1850	140	Tentativo di ponte sospeso. Impalcato tubolare molto robusto che alla fine i cavi non vennero messi più perchè inutili. 
Ellet Wheeling Suspension Bridge (USA)	1850	308	Luce molto superiore rispetto le prime 
Roebing Brooklyn Bridge (USA)	1883	486	Impalcato leggero. Irrigidito per evitare il collasso dovuto alle oscillazioni del vento (stralli + pendini) (usa i 2 schemi strallati e sospesi) Raddoppia la luce grazie al fatto che usa sia ghisa che acciaio 
Roebing Niagara river bridge (USA)	1855	250	Troppo snello. Ha 2 vie ferrovia sotto e sopra piano stradale. Cavi pendini e rafforzato pure con stralli 

<p>Ammann Bronx-Whitestone Bridge (USA)</p>	<p>1939</p>	<p>700</p>	
<p>Tacoma Bridge (USA)</p>	<p>1940</p>	<p>853</p>	<p>Il ponte è crollato a causa del flutter. Oscillazioni torsionali e flessionali (instabilità dinamica flesso-torsionale). Gli impalcati non si possono fare così sottili</p> 
<p>Ammann Verrazzano Bridge (USA)</p>	<p>1964</p>	<p>1300</p>	
<p>Freeman Humber Bridge (ENG)</p>	<p>1981</p>	<p>1410</p>	
<p>Great Belt Bridge (DEN)</p>	<p>1998</p>	<p>1624</p>	

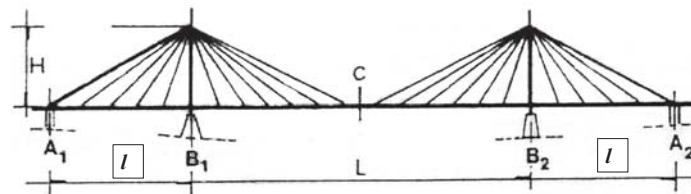
6.4 Instabilità euleriana per ponti strallati

Nei ponti strallati di grande luce, le dimensioni di travata e pile e l'entità degli sforzi normali in esse prodotti dai carichi permanenti e dai carichi utili, fanno temere possibili fenomeni di instabilità nel piano verticale.

SCHEMI FONDAMENTALI DI PONTE STRALLATO



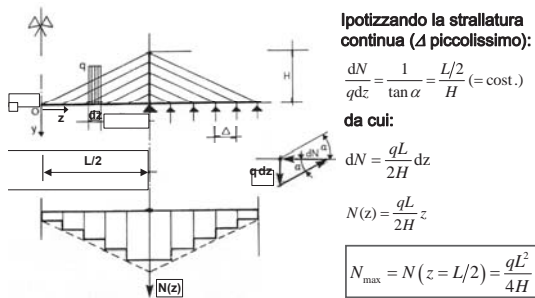
Ponte strallato a 3 luci con schema ad arpa



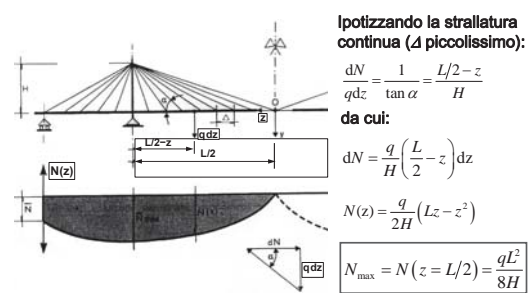
Ponte strallato a 3 luci con schema a ventaglio

SFORZI NORMALI NELL'IMPALCATO

SCHEMA AD ARPA



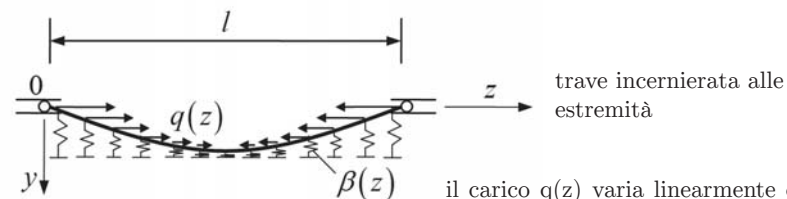
SCHEMA A VENTAGLIO



Rispetto ai ponti sospesi, gli impalcato dei ponti strallati hanno una compressione (problema che da instabilità e che non si presenta nei ponti sospesi). I punti dell'impalcato (legati agli stralli) sono più vincolati nei ponti strallati perchè convergono nelle pile che sono elementi più rigidi, mentre nei ponti sospesi convergono nei cavi flessibili le cui deformazioni dipendono dalle deformazioni dell'impalcato (i ponti sospesi sono in genere più lunghi e più flessibili).

Come si comporta l'impalcato? Rispetto alle pile la situazione si complica. C'è una forza di compressione distribuita variabile. Poi ci sono pure dei richiami elastici (molle). Dunque l'impalcato può essere schematizzato come una trave su suolo elastico con rigidità delle molle variabile in funzione di z , questo perché la rigidità tra i vari stralli non è costante: gli stralli più lunghi (quelli che vanno dalla pila verso la mezzera) sono meno rigidi perché più lunghi e più inclinati, mentre quelli più corti e più verticali sono più rigidi. Gli stralli danno da un lato stabilità perché sorreggono l'impalcato, dall'altro danno instabilità perché generano delle forze di compressione nell'impalcato.

**TRAVE SU LETTO ELASTICO DI MOLLE E SOGGETTA
A CARICO DISTRIBUITO BI-LINEARE (*)**



il carico $q(z)$ varia linearmente da zero in mezzera al valore massimo q_m alle estremità (in particolare è quello che succede nello schema a ventaglio). La risultante di questo carico sarà $[q_m \cdot (l/2)]/2 \cdot 2$

a) $\beta = 0$ (letto di molle assente)

$$N_{\max, cr} = \left(\frac{q_m l}{4} \right)_{cr} = 20.5 \frac{EI}{l^2}$$

b) $\beta = \text{cost.}$ (letto di molle a rigidità uniforme)

La deformata critica ha un numero di semionde tanto maggiore quanto più β è grande.

$$N_{\max, cr} = \left(\frac{q_m l}{4} \right)_{cr} = k \frac{EI}{l^2}$$

N critico è funzione di un coefficiente k che è funzione della rigidità del letto di molle e della trave (rapporto)

$[\beta l^3 / 16EI] =$	0	5	10	15	20	60	100	150	200	300	500	1000
$k =$	20,5	35,9	50,3	63,6	72,5	96	118	143	164	197	237	326

c) β variabile con z (di solito decrescente verso la mezzera)

La soluzione si ricerca in modo analogo al caso precedente, ma i calcoli sono più complicati.

N.B. Più è rigido il letto di molle (ovvero maggiore è β) più sarà maggiore il numero di semionde della deformata critica.

DETERMINAZIONE APPROSSIMATA DELLA DEFORMATA CRITICA E DI λ_c

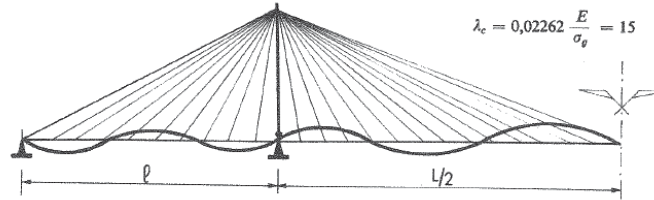


Fig. 2.23a. Instabilità dell'impalcato nel piano verticale modo antisimmetrico.

Ai fini del calcolo di λ_c , la deformata critica può essere rappresentata in modo sufficientemente approssimato da una funzione sinusoidale del tipo:

$$V(\xi) = \sin \frac{3\pi \xi}{l} \quad \left(\xi = z/H = \text{variabile adimensionalizzata} \right)$$

$n=3$ (numero di semionde indipendentemente dal n° degli stralli)

da cui:

$$\lambda_c = \frac{E}{\sigma_g} \left[\frac{I \sigma_g}{E^3 g} 1716 + 0.007 \right]$$

σ_g = funzione di compressione degli stralli dovuti al carico permanente g

E = modulo elastico impalcato

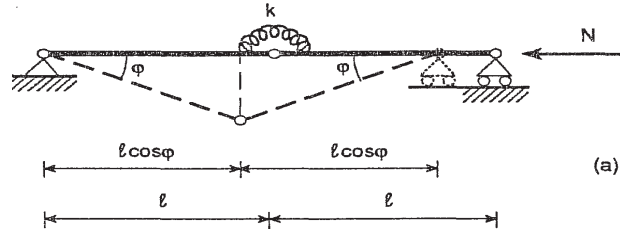
$E/\sigma_g = e^*$ = rigidezza relativa tra impalcato e strallo

se è grande vuol dire che l'impalcato è più rigido rispetto allo strallo e viceversa

Il cavo non ha una forma propria ma assume la forma in dipendenza dalla tensione agente al suo interno, e anche la sua rigidezza ne è funzione. Più è teso un cavo più posso applicare carichi trasversali maggiori, ottenendo deformazioni più piccole, quindi la rigidezza (rispetto a carichi trasversali) del cavo aumenta con la tensione del cavo. Nella realtà succede che il cavo inclinato (esempio nei ponti sospesi) è meno rigido rispetto a quelli rettilinei: più il cavo è lungo e meno è rigido. In sostanza se tende di più alla verticale è più rigido.

7.2 Sistemi meccanici discreti con un grado di libertà

Consideriamo una trave appoggiata con una molla rotazionale (cerniera elastica) al centro, soggetta ad un carico di punta N (la massa m è considerata concentrata nella cerniera)



Il potenziale totale W (potenziale elastico + potenziale dei carichi esterni) e l'energia cinetica T dell'intero sistema valgono:

$$W(\varphi) = \frac{1}{2} k(2\varphi)^2 - 2Nl(1 - \cos \varphi)$$

$$T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt}(l \sin \varphi) \right]^2 + \frac{1}{2} m \left[\frac{d}{dt}(l - l \cos \varphi) \right]^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$$

ovvero: $\frac{1}{2} m v^2$ (dove $v = l\dot{\varphi}$)

$l\varphi = \text{spostamento} \rightarrow \text{derivo} \rightarrow l\dot{\varphi} = \text{velocità}$

dove: $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} \leftarrow \text{Compare il TEMPO!}$

Si scrive adesso l'equazione del moto attraverso l'equazione di Lagrange dove compaiono proprio W e T:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = - \frac{\partial W}{\partial \varphi}$$

Inserendo T e W di prima in quest'ultima equazione e derivando si ottiene:

$$\frac{1}{2} m l^2 \ddot{\varphi} = -2k\varphi + Nl\varphi \quad (A)$$

Inertial moment
related to half mass
(for symmetry)

Spring moment

External moment

- $1/2$ salta fuori per simmetria
- $\ddot{\varphi}$ = accelerazione angolare

Nel caso di massa rotante non si fa $m \cdot a$ ma *momento d'inerzia · accelerazione angolare*
Il primo membro è un momento.

B. Lezione 7 - Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza (flutter)

Se $\omega^2=0$, siamo sempre nella statica. Se ω^2 inizia a crescere, N critico diminuisce.

N.B. Ovvero, se abbiamo una vibrazione nell'asta, il carico critico diminuisce: instabilità in regime dinamico.

Il problema può essere visto al contrario ricavando ω^2 dalla relazione: ovvero è uguale a un valore costante meno N, cioè se $N=0$ ritroveremo la frequenza di risonanza, se invece N è presente, la frequenza diminuisce, infatti è come se l'asta fosse più flessibile (esempio corda di violino).

$$\begin{aligned} \text{se } \omega \uparrow &\Rightarrow N \downarrow \\ \text{se } N \uparrow &\Rightarrow \omega \downarrow \end{aligned} \quad (\text{interazione})$$

quando i 2 autovalori raggiungono i loro valori critici, l'altro si annulla:

$$\left. \begin{aligned} N_c &\Rightarrow \omega = 0 && \Rightarrow \text{Instabilità} \\ \omega_c = \omega_{\text{risonanza}} &\Rightarrow N = 0 && \Rightarrow \text{Risonanza} \end{aligned} \right\} \text{fenomeni separati}$$

Casi limiti:

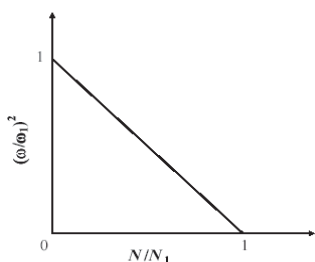
(1) $N = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/m}$
con ω_1 , frequenza naturale del sistema (omega di risonanza)

(2) $m = 0$ (vuol dire Inerzia nulla, la dinamica non incide) (ovvero $\omega = 0$) $\Rightarrow N_1 = \frac{2k}{l}$
con N_1 = carico euleriano di Buckling (N critico)

Possiamo scrivere più elegantemente la formula in forma dimensionale:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_1}\right) = 1$$

Otteniamo l'equazione di una retta in forma segmentaria. Si vede che la diminuzione di N oppure di ω^2 avviene in maniera lineare. Graficando si capisce meglio:



Questo segmento di retta va ad incontrare gli assi nei valori critici rispettivi. La retta mi da l'infinità di tutte le coppie che mi danno la crisi.

Casi limiti:

$$(1) \quad N = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{k/m}$$

con ω_1 , frequenza naturale del sistema (omega di risonanza)

$$(2) \quad m = 0 \text{ (vuol dire Inerzia nulla, la dinamica non incide) (ovvero } \omega = 0) \Rightarrow N_1 = \frac{kl}{2}$$

con N_1 = carico euleriano di Buckling (N critico)

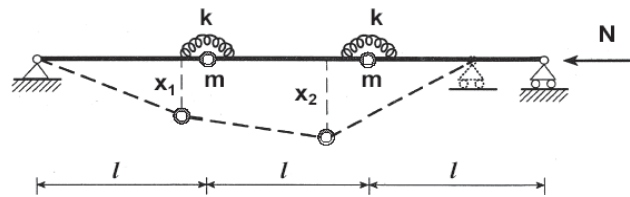
Possiamo scrivere più elegantemente la formula in forma dimensionale, ottenendo di nuovo come nel caso di prima:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_1}\right) = 1$$

Le stesse considerazioni fatte per il caso precedente valgono anche per questo.

7.2 Sistemi meccanici discreti con n gradi di libertà

Consideriamo lo stesso schema del primo esempio visto nel capitolo, ma al posto di avere una molla rotazionale, ne abbiamo 2. La massa m è concentrata nelle 2 cerniere.



Scriviamo il potenziale e l'energia cinetica:

$$W(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k \left[\left(\arcsin \frac{x_1}{l} - \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left(\arcsin \frac{x_2}{l} + \arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 \right]$$

$$- Nl \left[3 - \cos \left(\arcsin \frac{x_1}{l} \right) - \cos \left(\arcsin \frac{x_2}{l} \right) - \cos \left(\arcsin \frac{x_2 - x_1}{l} \right) \right]$$

$$T(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 x_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{2x_1\dot{x}_1}{l} + \frac{x_2\dot{x}_2}{l} + \frac{x_2\dot{x}_1}{l} + \frac{x_1\dot{x}_2}{l} \right)^2$$

B. Lezione 7 - Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza (flutter)

Si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{k}{ml^2} - \frac{N}{ml}$$

$$\omega^2 = 9 \frac{k}{ml^2} - \frac{3N}{ml}$$

(n relazioni in base al n g.d.l.)

Casi limiti:

$$(1) \quad N = 0 \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{k/ml^2} \\ \omega_2 = \sqrt{9k/ml^2} \end{cases}$$

con ω_1, ω_2 , frequenze naturali del sistema (omega di risonanza)

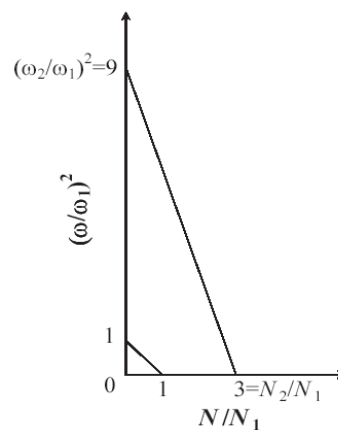
$$(2) \quad m = 0 \text{ (vuol dire Inerzia nulla, la dinamica non incide) (ovvero } \omega = 0) \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{k}{l} \\ N_2 = \frac{3k}{l} \end{cases}$$

con N_1, N_2 = carichi euleriani di Buckling (N critico)

Possiamo scrivere più elegantemente la formula in forma dimensionale, ottenendo di nuovo come nel caso di prima:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_2}\right) = 1$$



In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} - N \begin{bmatrix} \frac{2}{l} & -\frac{1}{l} \\ -\frac{1}{l} & \frac{2}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - N[K_g]\{q\} = \{0\}$$

Cerchiamo la soluzione nella forma esponenziale:

$$\{q\} = \{q_0\}e^{i\omega t}$$

Otteniamo inserendo questa nell'equazione precedente:

$$([K] - N[K_g] - \omega^2[M])\{q_0\} = \{0\}$$

Quello che c'è tra parentesi tonda è come se fosse una matrice di rigidezza a 3 addendi: matrice di rigidezza elastica, matrice di rigidezza geometrica che si detrae dalla prima, e una matrice di rigidezza dinamica che va a detrarsi anch'essa.

Per ottenere delle soluzioni non ovvie, dobbiamo annullare la parentesi tonda imponiamo:

$$\det([K] - N[K_g] - \omega^2[M]) = 0$$

(sempre con N e ω^2 autovalori)

Si ottiene:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - 3\frac{N}{ml}$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} - \frac{N}{ml}$$

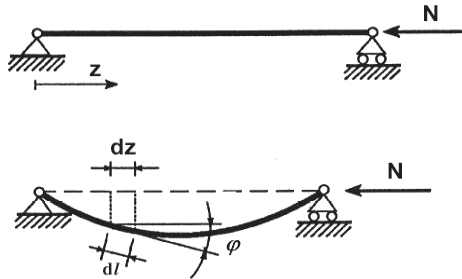
(n relazioni in base al n g.d.l.)

Casi limiti:

- (1) $N = 0 \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = \sqrt{k/m}$ ho praticamente 2 oscillatori armonici indipendenti
con ω_1, ω_2 , frequenze naturali del sistema (omega di risonanza)

7.3 Sistemi meccanici continui (*problema di Eulero in regime dinamico*)
 (*analisi modale della trave con effetti del 2° ordine*)

Consideriamo la trave di eulero: trave a sezione costante, inestensibile e non deformabile a taglio, mentre deformabile a flessione.



Partiamo dall'equazione differenziale della linea elastica con effetti del secondo ordine scritta però sostituendo il carico distribuito con la forza di inerzia:

$$(C) \quad EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{forza di inerzia (parte dinamica)}$$

- v = freccia
- z = coordinata longitudinale
- μ = densità lineare (massa per unità di lunghezza) della trave
- $\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$ = accelerazione
- gli spostamenti longitudinali non ci sono (trascurabili) per semplicità

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0} \quad \longrightarrow \quad \text{equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine}$$

(primi 2 termini di (C))

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0} \quad \longrightarrow \quad \text{equazione differenziale della dinamica della trave libera}$$

(primo e terzo termine di (C)) (no forzante)

Questa equazione si può riscrivere imponendo: $\alpha^2 = N/EI$ (che diventa il mio autovalore) come:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \alpha^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - \frac{\mu}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

B. Lezione 7 - Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza (flutter)

Considerando (1), equazione dell'oscillatore armonico, l'integrale completo è dato da:

$$f(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

presenta 2 costanti arbitrarie A e B

Considerando (2), bisogna trovare l'equazione caratteristica che diventa un'equazione di 2° ordine in λ^2 ovvero nella forma: $a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0$

l'integrale completo è:

$$\eta(z) = Ce^{\lambda_1 z} + De^{\lambda_2 z} + Ee^{-\lambda_1 z} + Fe^{-\lambda_2 z}$$

presenta 4 costanti arbitrarie C D E F

dove λ_1, λ_2 sono funzioni di α e β

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{-\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 + 4\beta^4}}{2}}$$

In caso di sistemi meccanici continui (infiniti DOFs (g.d.l)) abbiamo un infinito numero di autovalori ω_i e β_i e un infinito numero di autofunzioni f_i e η_i .

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2},$$

L'integrale completo di questa equazione differenziale è dato, utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, dalla sommatoria:

$$v(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i(z) f_i(t),$$

con:

$$f_i(t) = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t,$$
$$\eta_i(z) = C_i e^{\lambda_{1i} z} + D_i e^{\lambda_{2i} z} + E_i e^{-\lambda_{1i} z} + F_i e^{-\lambda_{2i} z}$$

A, B sono determinate sulle basi delle condizioni iniziali

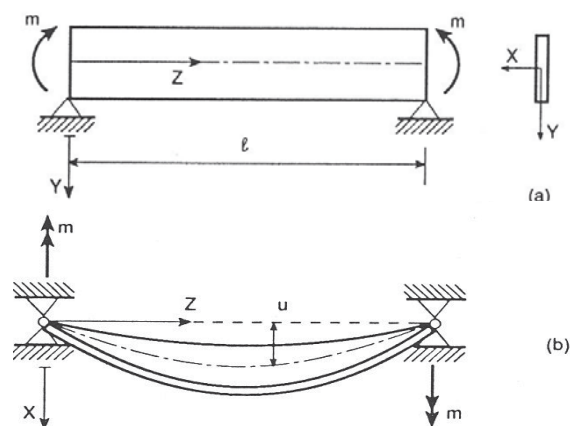
C, D, E, F sono determinate imponendo le condizioni al contorno

Ma in verità io vado ad usare solo le condizioni al contorno per trovare i miei autovalori (se invece voglio risolvere il problema completamente devo usare anche le condizioni iniziali)

7.4 Problema di Prandtl in regime dinamico

Ricordiamo che il problema dell'instabilità flessio-torsionale, vale anche per travi di sezione qualsiasi (e non per forza solo sottile).

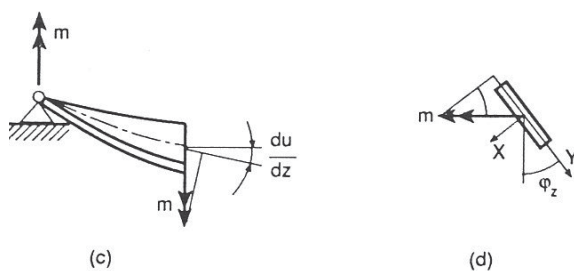
Consideriamo una trave a sezione rettangolare sottile:



Essa è soggetta a 2 perturbazioni: inflessione fuori dal piano, torsionale.

Rispetto a prima il sistema risulta più complicato. Non arriviamo ad un'equazione risolvente, ma arriveremo a 2 equazioni perchè, per ogni coordinata, abbiamo 2 g.d.l. (e non più 1), e quindi troveremo non un'infinità di curve critiche, ma una doppia infinità.

Stavolta i carichi esterni sono 2 momenti flettenti. Essi possono provocare instabilità.



In campo statico avevamo visto che la perturbazione flessionale genera una coppia torcente instabilizzante, mentre la rotazione genera un momento flettente instabilizzante (effetto incrociato).

B. Lezione 7 - Interazione tra instabilità dell'equilibrio elastico e risonanza (flutter)

Mettiamo il prodotto di funzioni (a variabili separate) dentro l'equazione a 3 termini di prima, derivando, otteniamo l'equazione matriciale:

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu\rho^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{\Phi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} EI_y \frac{n^4\pi^4}{l^4} & 0 \\ 0 & GI_t \frac{n^2\pi^2}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} - m \begin{bmatrix} 0 & \frac{n^2\pi^2}{l^2} \\ \frac{n^2\pi^2}{l^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \text{matrice} & \downarrow & \text{matrice} & & \text{matrice} \\ \text{delle masse} & \text{funzioni} & \text{di rigidezza} & & \text{di rigidezza} \\ & \text{temporali} & \text{elastica} & & \text{geometrica} \end{matrix}$$

In forma compatta:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} - m[K_g]\{q\} = \{0\}$$

$$\{q\} = (U, \Phi)^T$$

Cercando una soluzione nella forma esponenziale: $\{q\} = \{q_0\}e^{i\omega t}$

Otteniamo:

$$([K] - m[K_g] - \omega^2[M])\{q_0\} = \{0\}$$

per avere soluzione diversa della ovvia annullo il determinante:

$$\det([K] - m[K_g] - \omega^2[M]) = 0$$

matrice matrice matrice
di rigidezza di rigidezza di rigidezza
elastica geometrica dinamica

dove m (sollecitazione) e ω^2 sono gli autovalori.

Casi limiti:

$$(1) \quad m = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_n^{flex} = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sqrt{\frac{EI_y}{\mu}}$$

$$\omega_n^{tors} = \frac{n\pi}{\rho l} \sqrt{\frac{GI_t}{\mu}}$$

$\omega_n^{flex}, \omega_n^{tors}$ = natural flexural and torsional eigenfrequencies of the beam

8. INSTABILITA' AEROELASTICA IN PONTI DI GRANDE LUCE : IL FLUTTER
INSTABILITA' IN REGIME DINAMICO:
FORZE NON-CONSERVATIVE
DI TIPO FOLLOWER

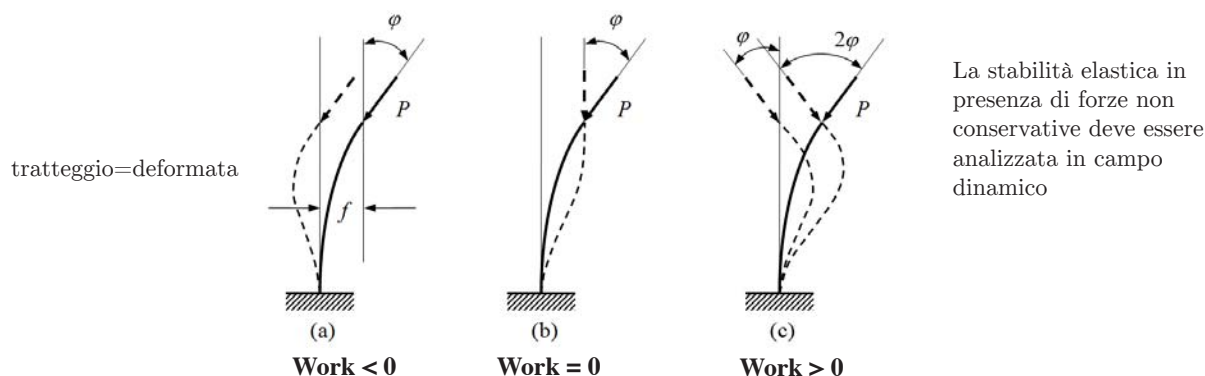
8.1 Forze non conservative di tipo follower

Flutter = instabilità oscillatoria aeroelastica (flesso-torsionale)

Galloping = puramente flessionale

Per i ponti molto flessibili è necessario vedere le forze come forze non conservative, (forze di tipo follower).

Le forze follower (non-conservative) sono forze non più parallele a se stesse, ma sono forze che seguono la deformata (qualsiasi essa sia), ovvero resta tangente alla deformata. L'instabilità data da queste forze è di tipo dinamico, intrinsecamente oscillatorio (ovvero è la stessa instabilità che genera le oscillazioni).



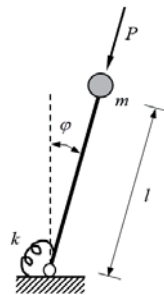
- (a) si inclina prima la forza e poi la si fa spostare parallelamente a se stessa. La componente verticale non compie lavoro, mentre quella orizzontale compie un lavoro negativo.
- (b) si fa il contrario: si sposta la forza parallelamente a se stessa prima e poi la si inclina, nell'inclinazione non si fa lavoro, allora il lavoro è nullo. Già con questo caso si può dire che la forza non è conservativa perchè arriviamo alla stessa configurazione, ma non compiamo lo stesso lavoro (mentre la definizione di forza conservativa ci dice che: il lavoro risulta uguale indipendentemente dal percorso di carico, ma dipende solo dallo stato iniziale e finale)
- (c) inclino la forza verso sinistra (lavoro negativo) e la porto dalla parte opposta (lavoro negativo), --=+

Per riassumere, con il metodo dinamico possiamo distinguere 2 forme di transizione dalla stabilità all'instabilità:

- (1) $\omega_r = 0$ e $\omega_i < 0$: perdita statica di stabilità (divergenza), caratterizzata da un movimento non oscillatorio di ampiezza crescente
- (2) $\omega_r \neq 0$ e $\omega_i < 0$: perdita dinamica di stabilità (flutter), caratterizzata da un movimento oscillatorio (periodico) di ampiezza crescente

8.2 Sistema ad 1 g.d.l

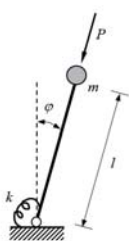
STATIC ANALYSIS



$$k\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \quad (\text{trivial solution})$$

The only possible solution is the trivial one, i.e., the initial equilibrium configuration is always stable.

DYNAMIC ANALYSIS (WITHOUT DAMPING)



$$ml^2\ddot{\varphi} + k\varphi = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$$

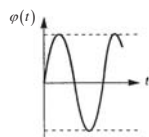
$$\dot{\varphi} = i\omega\varphi_0 e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2\varphi_0 e^{i\omega t}$$

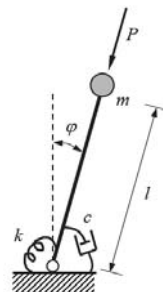
$$-ml^2\omega^2 + k = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^2 = \frac{k}{ml^2}$$



DYNAMIC ANALYSIS (WITH DAMPING)

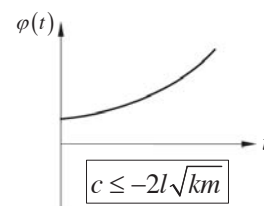
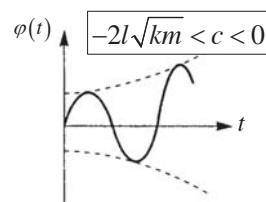
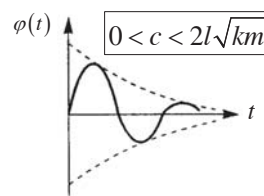
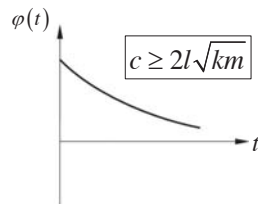


$$ml^2\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + k\varphi = 0$$

$$-ml^2\omega^2 + ci\omega + k = 0$$

$$\omega_{1,2} = \frac{-ci \pm \sqrt{-c^2 + 4ml^2k}}{-2ml^2}$$

$$= \frac{ci}{2ml^2} \mp \frac{\sqrt{4ml^2k - c^2}}{2ml^2}$$



Se non risolviamo in maniera dinamica non troviamo l'instabilità.

Includendo la forza di inerzia nelle equazioni di equilibrio del momento scritte nella pagina precedente, si ottiene il seguente sistema di 2 equazioni differenziali ordinarie in φ_1, φ_2 come funzioni del tempo t :

$$\begin{aligned} ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)2l + ml\dot{\varphi}_1 l + Pl(\varphi_2 - \varphi_1) + k\varphi_1 &= 0 \\ ml(\ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2)l + k(\varphi_2 - \varphi_1) &= 0 \end{aligned}$$

La soluzione del sistema di equazioni può essere cercata nella forma:

$$\varphi_1 = q_1 e^{i\omega t} \quad \varphi_2 = q_2 e^{i\omega t}$$

(omega in certi casi verrà anche complesso)

Sostituendo queste nel sistema precedente (e le sue derivate) (il termine $e^{i\omega t}$ si elide), viene fuori un sistema matriciale di due equazioni omogenee lineari in q_1 e q_2 :

$$\begin{bmatrix} (k - Pl) - 3ml^2\omega^2 & Pl - 2ml^2\omega^2 \\ -k - ml^2\omega^2 & k - ml^2\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Soluzioni diverse dalla ovvia, si ha quando si annulla il determinante. Questo porta ad una equazione quadratica in ω^2 :

$$(ml^2\omega^2)^2 - 2(3k - Pl)(ml^2\omega^2) + k^2 = 0$$

La soluzione della quale è:

$$ml^2\omega^2 = (3k - Pl) \pm \sqrt{(3k - Pl)^2 - k^2} = (3k - Pl) \pm \sqrt{(4k - Pl)(2k - Pl)}$$

Ovvero:

$$ml^2\omega^2 = (3k - Pl) \pm \sqrt{(4k - Pl)(2k - Pl)}$$

1. $P < 2k/l$: the two roots ω^2 are real positive \Rightarrow Stability.

carico di flutter \leftarrow 2. $P = 2k/l$: the two roots ω^2 are coincident \Rightarrow the solutions are of the type $t \sin \omega t$ or $t \cos \omega t \Rightarrow$ Instability of the oscillatory type (flutter).

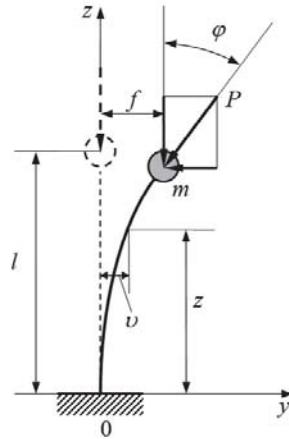
siamo già in crisi

3. $2k/l < P < 4k/l$: the two roots ω^2 are complex \Rightarrow Instability of the oscillatory type (flutter). avremo sia la parte reale che immaginaria (comportamento oscillatorio e divergente contemporaneamente)

4. $P \geq 4k/l$: the two roots ω^2 are real negative \Rightarrow Instability of the non-oscillatory type (divergence).

8.4 Colonna ad elasticità diffusa (con massa concentrata in punta)

La colonna (mensola) è assunta priva di massa, puramente flessibile, con la massa concentrata in punta, e caricata da una forza costante di tipo follower P.



Si considera per risolvere il problema la freccia all'estremità e la rotazione in punta:

$$v(z)$$

$$\varphi \cong v'(l), \quad f = v(l)$$

Qui il sistema avrebbe infiniti gradi di libertà, ma vedremo che non è proprio così.

Analisi di stabilità usando il metodo statico

Per piccole deflessioni abbiamo: $P_z \cong P$, $P_y \cong P\varphi$.

L'equazione differenziale della linea elastica della colonna è:

$$\text{momento instabilizzante } \left(EI \frac{d^2 v}{dz^2} \right) = \underbrace{P(f - v) - P\varphi(l - z)}_{\text{momento stabilizzante}}$$

ponendo: $P/EI = \alpha^2$ si ottiene:

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \alpha^2 v = \alpha^2 [f - \varphi(l - z)]$$

La cui soluzione generale è:

$$v = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + f - \varphi(l - z)$$

Ottengo:

$$v(z, t) = V(z) e^{i\omega t}$$

$$f(t) = F e^{i\omega t}$$

$$\varphi(t) = \Phi e^{i\omega t}$$

con ω (costante) incognita e F e ϕ funzioni di z .

Se ω è reale, allora la trave avrà oscillazioni armoniche con frequenza angolare ω attorno la sua configurazione rettilinea. Se invece è complessa e la parte immaginaria è negativa, allora corrisponde ad un'ampiezza di risposta la quale diventa infinitamente sempre più ampia nel tempo. Se indichiamo : $\omega = \omega_{reale} + i \cdot \omega_{immag}$ allora:

$$v(z, t) = V(z) e^{(i\omega_r - \omega_i)t}$$

e se $\omega_i < 0$, allora compare un termine incrementale esponenzialmente nell'espressione di $v(z,t)$. Sostituendo la definizione di sopra e α^2 nell'equazione dinamica di equilibrio otteniamo:

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \alpha^2 V = \alpha^2 F - \alpha^2 \Phi (l-z) + \frac{m\omega^2 F}{EI} (l-z)$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è :

$$V(z) = C_1 \sin \alpha z + C_2 \cos \alpha z + F - \Phi (l-z) + \frac{m\omega^2 F}{\alpha^2 EI} (l-z)$$

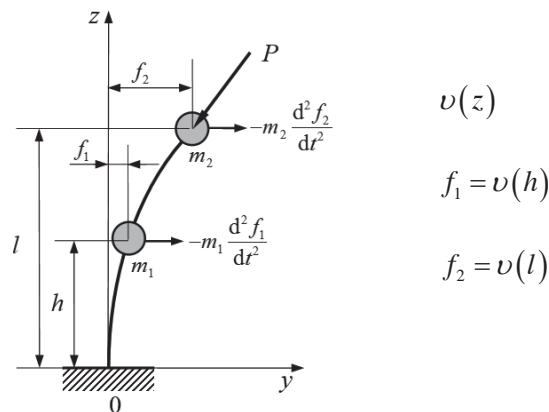
dove le costanti C_1 C_2 F e ϕ possono essere determinate imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$V(0) = 0, \quad V'(0) = 0, \quad V(l) = F, \quad V'(l) = \Phi$$

Si ottiene dunque un sistema algebrico il cui determinante è:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 + \frac{m\omega^2 l}{\alpha^2 EI} & -l \\ \alpha & 0 & -\frac{m\omega^2}{\alpha^2 EI} & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 & 0 \\ \alpha \cos \alpha l & -\alpha \sin \alpha l & -\frac{m\omega^2}{\alpha^2 EI} & 0 \end{vmatrix}$$

8.5 Colonna ad elasticità diffusa (con 2 masse concentrate)



(si riconduce il sistema a 2 g.d.l. ovvero le 2 frecce dove sono concentrate le masse)

La forza di flutter può essere espressa come:

$$P_c = \beta \frac{EI}{l^2}$$

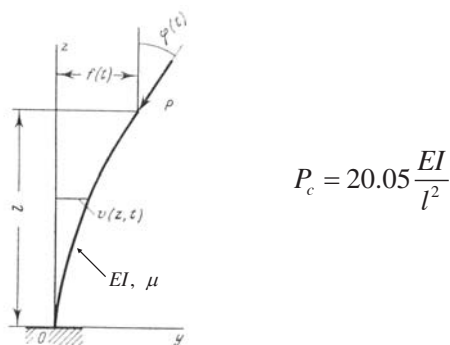
beta è un coefficiente che dipende dalla posizione delle masse (ovvero dal rapporto h/l) e dal rapporto tra le masse m_1/m_2 .

Particular cases:

1. $m_1 = 0 \Rightarrow \beta \cong 20.19$ (the same result of the previous example).
2. $m_2 = 0$ and $h = l/2 \Rightarrow \beta \cong 80.76$ (four times larger than in the previous case).
3. $m_1 = m_2$ and $h = l/2 \Rightarrow \beta \cong 14.61$.

nel punto 3. si può notare come se mettiamo due masse il sistema diventa più instabilizzabile perchè da 20.19 si passa a 14.61 (carico di flutter più basso del 25%)

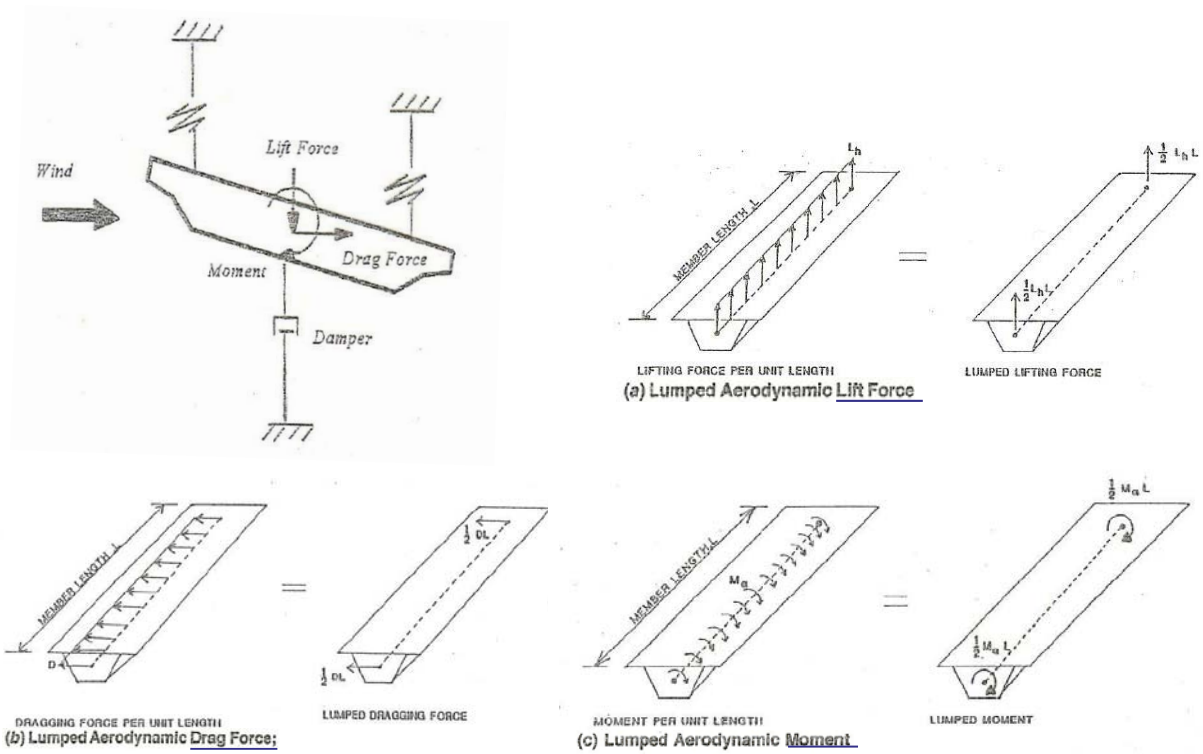
CANTILEVER BEAM WITH DISTRIBUTED MASS (BECK'S COLUMN)



$$P_c = 20.05 \frac{EI}{l^2}$$

Distribuire tutta la massa su tutta la trave (complicando i calcoli) o considerarla concentrata in cima porta allo stesso risultato!

B. Lezione 8 - Instabilità in regime dinamico: forze non-conservative di tipo follower



(lift = portanza; drag = deriva)

Queste forze aerodinamiche auto-eccitate possono essere scritte come:

$$\begin{array}{c}
 \text{pressione} \\
 \text{instabilizzante} \\
 \left\{ \begin{array}{l} L_{se} \\ D_{se} \\ M_{se} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \rho U^2 \left([F_d] \{\delta\} + \frac{1}{U} [F_v] \{\dot{\delta}\} \right) \\
 \uparrow \\
 \text{self-excited lift force} \\
 \text{drag force} \\
 \text{moment}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{local flutter derivative matrices} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 \text{---} \quad \text{---}
 \end{array}$$

pedice d = displacement

pedice v = velocity

U = velocità media del vento

REDUCTION TO TWO ONE-DOF SYSTEMS



FIG. 5. Luling Bridge Fundamental Bending Mode \longrightarrow galloping



FIG. 6. Luling Bridge Fundamental Sway Mode \longrightarrow buffeting *per la fatica*

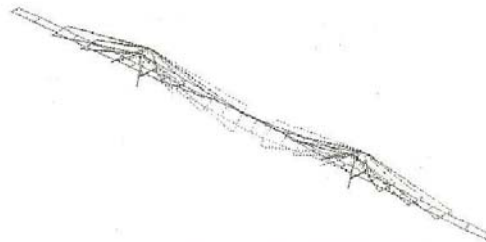


FIG. 7. Luling Bridge Fundamental Torsion Mode \longrightarrow flutter

We consider the two fundamental bending (vertical) and torsion eigenmodes.

Pre- and postmultiplying the previous equation by the j th eigenvector:

$$\{\delta_{0,j}\}^T \left(-\omega^2 [M] + \omega \left([C] - \frac{1}{2} \rho U [C^*] \right) i + [K] - \frac{1}{2} \rho U^2 [K^*] \right) \{\delta_{0,j}\} = \{0\}$$

we obtain:

$$-\omega^2 m_j + \omega \left(c_j - \frac{1}{2} \rho U c_j^* \right) i + k_j - \frac{1}{2} \rho U^2 k_j^* = 0, \quad \text{for } j=1,2$$

By equating the total damping to zero and solving the remaining equation:

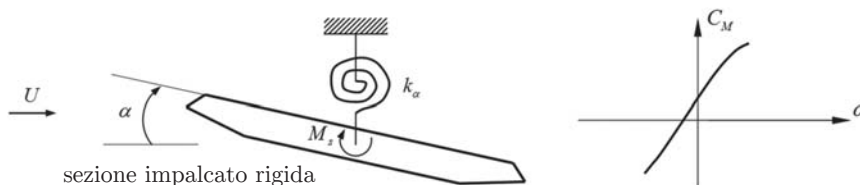
$$U_{F,j} = \frac{2 c_j}{\rho c_j^*} \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_{F,j}^2 = \frac{k_j - \frac{1}{2} \rho U_{F,j}^2 k_j^*}{m_j}$$

N.B. Nel metodo generale a n gradi di libertà lo smorzamento lo metto ma non è necessario (potrei anche non metterlo). Mentre nel metodo semplificato (dove mi riconduco ad 1 sistema ad 1 solo g.d.l.) devo conoscere per forza lo smorzamento in quanto è un elemento necessario.

DIVERGENZA TORSIONALE

Modello elementare a singolo grado di libertà (modello sezionale)

questo modello può rappresentare la sezione centrale del ponte, quella più debole



k_α = rigidezza torsionale per unità di lunghezza (Nm/m)

Momento elastico per unità di lunghezza (stabilizzante):

$$M_e = k_\alpha \alpha$$

Momento aerodinamico per unità di lunghezza (instabilizzante): instabilizzante perchè tende a fare aumentare l'angolo alfa

$$M_s = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[C_M(0) + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \alpha \right]$$

(α piccolo)

anche per alfa=0 il momento M_s non è nullo (se $C_M(0)$ è diverso da zero), quindi anche a ponte orizzontale, con vento nullo orizzontale, il momento è diverso da zero.

In condizioni di equilibrio deve essere: (nell'ottica dell'equilibrio diretto)

$$M_e = M_s$$

$$k_\alpha \alpha = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left[C_M(0) + \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \alpha \right]$$

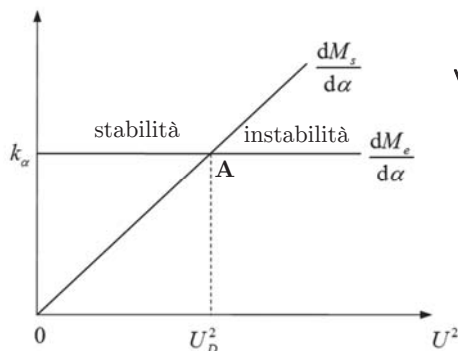
$$\underbrace{\left[k_\alpha - \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} \right]}_{k_{tot}} \alpha - \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 C_M(0) = 0$$

k_{tot} = rigidezza totale (elastica più aerodinamica)

Dalla condizione $k_{tot} = 0$ si determina la velocità critica di divergenza (instabilità di tipo statico) torsionale ($\alpha \rightarrow \infty$ per $k_{tot} \rightarrow 0$):

$$U_D = \sqrt{\frac{2k_\alpha}{\rho B^2 \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}}}$$

il modello semplificato ad 1 g.d.l è a sfavore di sicurezza in quanto sovrastima la velocità critica. Se metto n g.d.l. la velocità critica diminuisce. E' più bassa perchè posso avere un accoppiamento tra flessione e torsione (instabilità flessio-torsionale che è più pericoloso di quello puramente torsionale perchè il sistema è più deformabile).



Per $U=U_{cr}$ non sono in condizione di equilibrio indifferente, perchè U è tale da equilibrare solo la parte elastica, mentre il termine noto no, dunque quella configurazione è instabile.

Variazioni del momento di reazione elastica e del momento aerodinamico in funzione della velocità del vento

$$\frac{dM_e}{d\alpha} = k_\alpha \quad \frac{dM_s}{d\alpha} = \frac{1}{2} \rho U^2 B^2 \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0}$$

dopo il punto A (corrispondente ad U_D l'incremento di momento aerodinamico è maggiore all'incremento di momento elastico e quindi non posso avere più stabilità

dipendere dal moto armonico del ponte (flessionale e torsionale)(moto = spostamenti e velocità, mentre le accelerazioni le trascuriamo in quanto la massa del ponte è molto grande rispetto alla massa d'aria che sposta quando oscilla e quindi le componenti inerziali possono essere trascurate, mentre consideriamo le componenti elastiche (rigidezza ovvero termini proporzionali agli spostamenti) e smorzamento (termini proporzionali alle velocità).

Flutter a singolo grado di libertà

È principalmente governato dallo smorzamento.

Se tra i termini di smorzamento aerodinamico si considerano significativi solamente quelli associati ad H_1^* e A_2^* , gli smorzamenti totali (meccanici più aerodinamici) sono dati da:

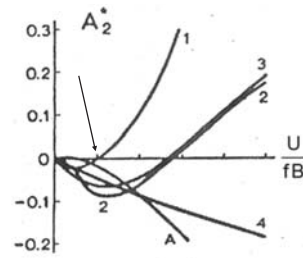
$$c_{h,tot} = c_h - \frac{1}{2} \rho U B K H_1^* (K) \quad \text{governa il flutter verticale}$$

$$c_{\alpha,tot} = c_\alpha - \frac{1}{2} \rho U B^3 K A_2^* (K) \quad \text{governa il flutter torsionale}$$

esempio del Tacoma











Oscillazione torsionale antisimmetrica (linea nodale al centro della campata)



Derivata di flutter A_2^* -controlla il flutter torsionale- per il 1° Tacoma (curva 1).

A_2^* diventa positiva a partire da $U/fB \approx 2$, per cui, per velocità del vento sufficientemente alte, lo smorzamento totale $c_{\alpha,tot}$ può diventare negativo. La velocità di flutter dipende fortemente anche dallo smorzamento meccanico c_α .

<p>Empire State building (USA)</p>	<p>1931</p>	<p>375</p>	<p>Prima pietra miliare</p> 
<p>Kahn John Hancock center (USA)</p>	<p>1970</p>	<p>370</p>	<p>Tentativo di superare il record ma non riescono (seconda scuola di Chicago). Rastremato e controventamenti che prendono più piani</p> 
<p>World Trade Center (USA)</p>	<p>1973</p>	<p>410</p>	<p>Parallelepipedo (minimale)</p> 
<p>Kahn Sears Tower (USA)</p>	<p>1974</p>	<p>435</p>	<p>Sempre la seconda scuola di Chicago (più blocchi di altezza diversa accorpati)</p> 

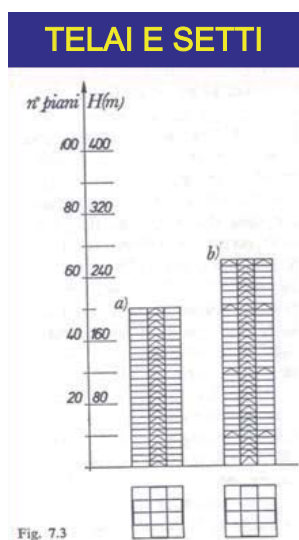
<p>Petronas Twin Towers (Malesia)</p>	<p>1997</p>	<p>445</p>	<p>Fanno record mondiale</p> 
<p>Jin Mao Tower (Shanghai)</p>	<p>1998</p>	<p>421</p>	<p>Dalla battaglia tra Chicago e New York si passa alle battaglie di oriente</p> 
<p>Financial Center (Hong Kong)</p>	<p>2003</p>	<p>415</p>	
<p>World Trade Financial Center (Shanghai)</p>	<p>2003</p>	<p>492</p>	<p>Cavatappi'. Il portale in alto è stato costruito per ragioni di fluidodinamica (vento) Record per pochi mesi</p> 

9.2 Irrigidimento: controventamento di telai e complessi strutturali

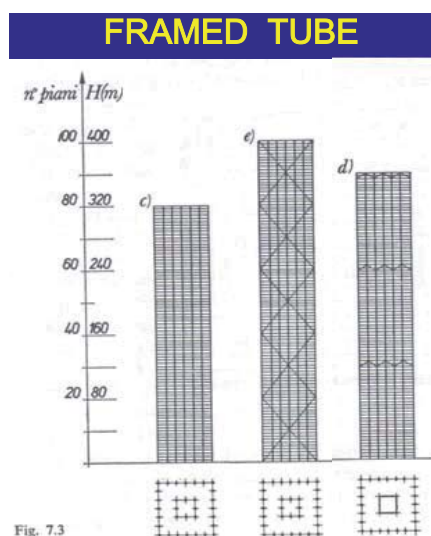
Per gli edifici alti acquistano fondamentale importanza sia l'effetto delle azioni orizzontali che la limitazione dei relativi spostamenti. Per assicurare la resistenza alle azioni orizzontali e per limitare gli spostamenti orizzontali degli impalcati è necessario introdurre delle strutture di controventamento:

- diagonali irrigidenti
- setti e/o nuclei irrigidenti
- elementi tubolari esterni

Tra una 40ina e una 60ina di piani (circa tra i 100 e i 200 m) la soluzione più diffusa è quella di strutture a telaio controventate tramite mensole verticali. Guardando la pianta si nota come la struttura è ancora a telaio. Per irrigidire si mettono dei setti.



Altezze maggiori (quindi tra circa 300 e 400 m (circa 100 piani)), possono essere raggiunte adottando differenti tipologie strutturali, in cui la resistenza alle azioni orizzontali viene quasi affidata alle pareti esterne che delimitano la costruzione. Avere un involucro esterno chiuso, vuol dire avere una grande rigidità torsionale. Quindi la struttura può essere schematizzata come una grande mensola a sezione sottile chiusa (struttura tubolare intelaiata (maglia molto fitta))



9.3 Ripartizione dei carichi orizzontali tra gli elementi verticali di un edificio di grande altezza e/o di forma irregolare

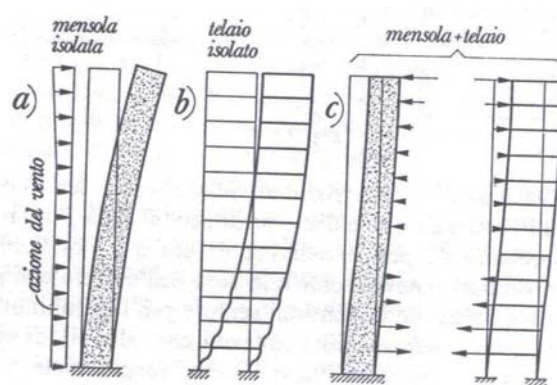
Facciamo l'ipotesi che l'edificio sia costituito da tante mensole verticali collegate ai piani.

◆ Setti irrigidenti (Shear Walls)

Setti = pareti verticali irrigidenti (irrigidiscono di più rispetto ai semplici controventi in diagonale).

I setti sono importanti per limitare gli spostamenti orizzontali, evitando dissesti delle pareti di tamponamento e degli infissi, o la sconnessione dei giunti.

(ragionare nel piano oggi giorno può diventare fuor sviante (solo strutture semplici) —> 3D)



(deformazione intesa anche come curvatura)

- (a) mensola isolata (come se fosse un unico setto) si deforma a flessione. Alla base si deforma poco, mentre molto in punta.
- (b) il telaio si deforma quasi solo a taglio. Si deforma al contrario di (a), ovvero si deforma molto alla base, mentre in testa (poichè il taglio è molto piccolo) le deformazioni sono nulle
- (c) mensola (setto) + telaio

Nel caso (c), ipotizzando che la mensola sia collegata al telaio mediante un sistema di bielle rigide poste alle quote dei vari piani, è possibile scrivere l'equazione di congruenza, imponendo l'annullamento degli spostamenti relativi del sistema mensola-telaio (ovvero impongo che gli spostamenti della mensola siano uguali a quelli del telaio):

$$[C_1] \cdot (\{F\} - \{X\}) = [C_2] \{X\}$$

dove $\{X\}$ è il vettore delle incognite iperstatiche (n forze orizzontali a cui sono soggetti i pendoli). $[C_1]$ e $[C_2]$ sono le matrici di cedevolezza di piano rispettivamente del setto e del telaio, mentre $[F]$ è il vettore delle forze esterne.

Gli elementi irrigidenti sono supposti assialmente indeformabili e interconnessi mediante solai infinitamente rigidi nel proprio piano. Si hanno quindi 3 g.d.l per piano. Quindi, dobbiamo immaginare di avere questi elementi tutti in parallelo collegati da questi piani rigidi. Questa è una semplificazione notevole in quanto possiamo descrivere il moto di ciascun piano con 3 parametri: ogni piano, essendo rigido, roto-trasla e quindi abbiamo 2 traslazioni e 1 rotazione (molto meno rispetto a un modello FEM).

Adesso si presenta una formulazione generale nella quale le forze interne trasmesse agli elementi resistenti si ottengono premoltiplicando il vettore delle forze esterne per una matrice di ripartizione.

Consideriamo lo schema di un singolo elemento verticale, ad esempio una mensola, un setto, o qualcosa di più complesso. Applichiamo a questa struttura verticale su tutti gli N piani una forza lungo l'asse X una lungo l'asse Y (forze trasversali o taglianti) e un momento torcente attorno a Z .

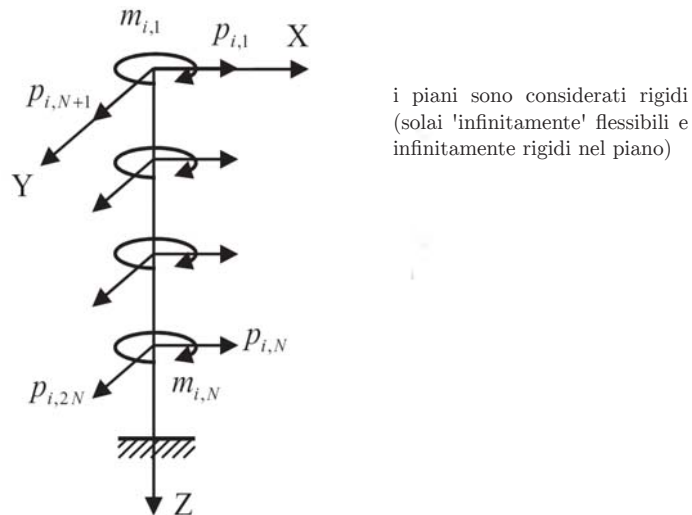


Fig. 1. Internal loadings F_i (transmitted to the i -t bracing) in the global coordinate system. Note that the highest floor is indicated with 1 and the lowest with N .

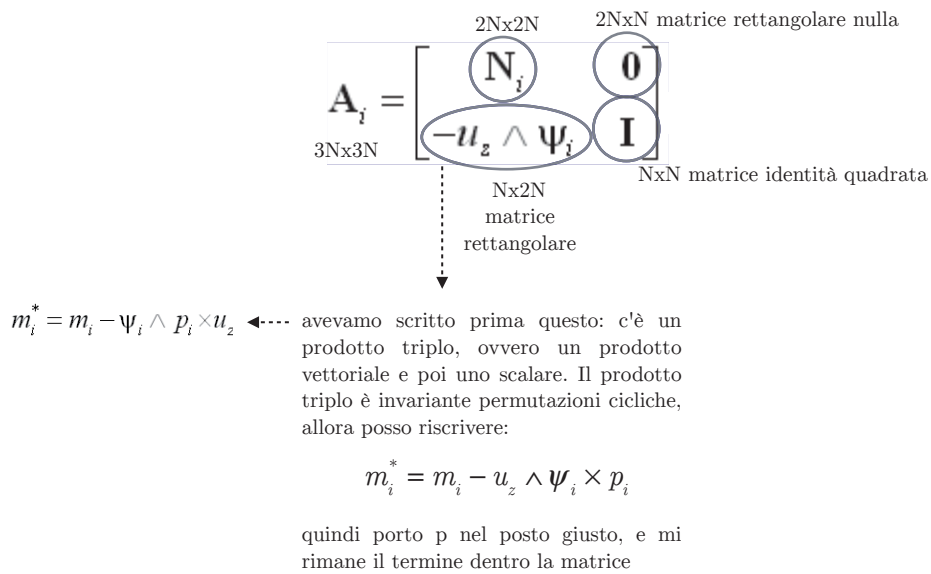
Gli assi (X, Y, Z) sono sinistrorsi.

N = numero di piani (va da 1 all'ultimo piano fino ad N al primo piano)

N_{TOT} = numero di elementi irrigidenti (ovvero numero di mensole)

(l'algoritmo fa mettere prima tutte le forze lungo X , poi lungo Y , e poi i momenti, non li fa mettere tutte insieme per piano)

(rispetto al modello piano di prima, le forze per piano sono adesso 3)



La sotto-matrice $u_z \wedge \psi_i$ si può riscrivere con una matrice dove in prima riga ci sono i versori dei 3 assi cartesiani, il vettore u_z in seconda riga e in ultima riga ψ_i :

$$C_i^T = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x_i & y_i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_i & x_i \\ & \end{bmatrix}$$

$N \times 2N$ $N \times 2N$ ↑ viene fuori una matrice $N \times 2N$ composta da 2 sotto-matrici diagonali ($N \times N$) che rappresentano il prodotto $u_z \wedge \psi_i$
 ↓ facendo ora il determinante di questa matrice

Quindi la matrice A diventa:

$$A_i = \begin{bmatrix} N_i & \mathbf{0} \\ -C_i^T & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$3N \times 3N$

Abbiamo cosa succede alle forze fin ora, ma cosa succede invece agli spostamenti? Che legge ci sarà per rototraslazione degli assi per gli spostamenti?

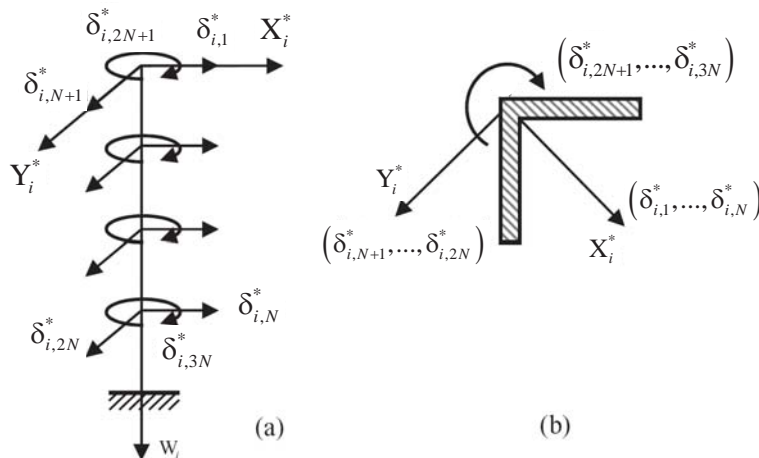


Fig. 3. Degrees-of-freedom of the i -th bracing in the local coordinate system.

Che relazione lega invece forza e spostamento nel sistema globale?

Usando le relazioni: $F_i^* = \mathbf{A}_i F_i$ e $\delta_i^* = \mathbf{B}_i \delta_i$, e mettendole in:

$$F_i^* = \mathbf{K}_i^* \delta_i^*$$

otteniamo:

$$\mathbf{A}_i F_i = \mathbf{K}_i^* \mathbf{B}_i \delta_i$$

Premoltiplichiamo tutte e 2 i membri per \mathbf{A}_i^{-1} si ha:

$$F_i = (\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{K}_i^* \mathbf{B}_i) \delta_i$$

In pratica mi sono costruito una relazione che lega F e δ nel sistema globale. Quindi ho trovato (termine tra parentesi) quanto vale la matrice di rigidezza nel sistema globale:

$$\mathbf{K}_i = (\mathbf{A}_i^{-1} \mathbf{K}_i^* \mathbf{B}_i)$$

ciò vuol dire che le matrici \mathbf{A} e \mathbf{B} mi servono per ricavare la matrice di rigidezza globale a partire da quella locale.

con:

$$\mathbf{K}_i^* = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{pi}^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{mi}^* \end{bmatrix}$$

Il vettore δ_i degli spostamenti dell' i -esimo elemento di dimensione $3N$, è connesso al vettore δ degli spostamenti rigidi degli N piani tramite la relazione:

$$(A) \quad \delta_i = \mathbf{T}_i \delta \quad \begin{array}{l} \text{relazione di congruenza} \\ \text{(tutti i piani devono seguire il moto del solaio)} \end{array}$$

N.B. Non c'è l'indice i perchè piano per piano facciamo l'ipotesi di congruenza (ipotesi meccanica), ovvero ciascuna tripletta di spostamenti nel sistema globale deve essere collegata agli spostamenti di piano, che non dipendono più dal singolo elemento, ma sono caratteristiche cinematiche di tutto il piano, perchè il piano è rigido e roto-trasla e questi 3 valori sono sempre invarianti rispetto ai punti di questo piano (moto rigido): è per questo che manca l'indice

nella relazione \mathbf{T} è la matrice di trasformazione di dimensione $3N \times 3N$

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{C}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{array}{l} \cdots \rightarrow \text{esprime la legge che collega gli spostamenti di 2} \\ \text{punti di un corpo rigido} \\ \cdots \rightarrow \text{esprime l'invarianza della rotazione} \end{array}$$

Qual era lo scopo dell'algoritmo? Quello di trovare δ , ovvero gli spostamenti, come se dalle N mensole posso trattare il sistema come se fosse una unica mensola. Come si vede dalla relazione appena scritta δ lo posso scrivere sia in funzione della forza totale e nell'altro le forze trasmesse all'i-esimo elemento.

Riarrangiando l'espressione si ottiene infine:

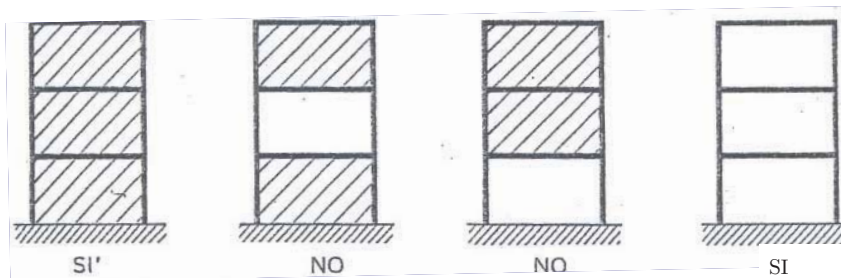
$$F_i = \bar{K}_i \bar{K}^{-1} F$$

che ci dice in che modo si ripartiscono le forze esterne sull'i-esimo elemento: grazie alla matrice di ripartizione $\bar{K}_i \bar{K}^{-1}$ (è come se fosse un coefficiente di ripartizione, ovvero un rapporto tra una rigidezza parziale ed una totale del sistema (analogamente alla ripartizione di una forza tra diversi elementi resistenti in parallelo))

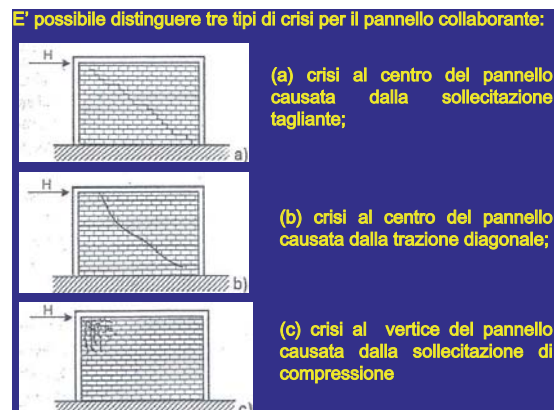
N.B. La somma delle matrici di ripartizione è uguale alla matrice unitaria.

9.5 Irrigidimento: influenza dei tamponamenti sulla rigidezza dei telai

In zona sismica è da evitare il cosiddetto piano pilotis, in cui sono assenti tamponamenti e tramezzature.



Questo perchè il tamponamento, oltre ad avere una funzionalità estetica, ha anche una funzionalità strutturale. Esso contrasta gli spostamenti del telaio e irrigidisce il sistema anche in maniera forte. Per certi versi, per sicurezza, si evita di considerare nel calcolo il contributo di rigidezza apportato dai tamponamenti, ma ci sono casi in cui il telaio è immerso in un complesso e bisogna tenerne conto (esempio edifici alti altrimenti risulterebbero troppo flessibili).



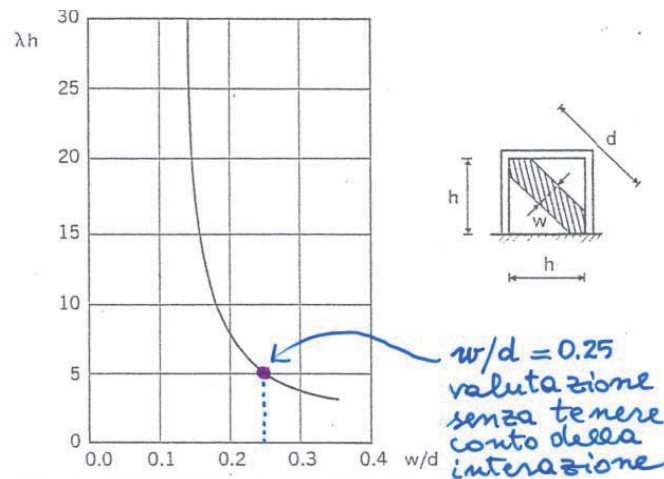
λh è un parametro adimensionale che rappresenta la radice 4° del rapporto tra due rigidezze: quella del pannello e quella delle travi che costituiscono il telaio (supposte uniformi):

$$(\lambda h) = \sqrt[4]{\frac{E_p t h^3}{4EI}}$$

La striscia attiva (ovvero la larghezza reale del tamponamento corrispondente alla biella) di tamponamento è funzione di λh .

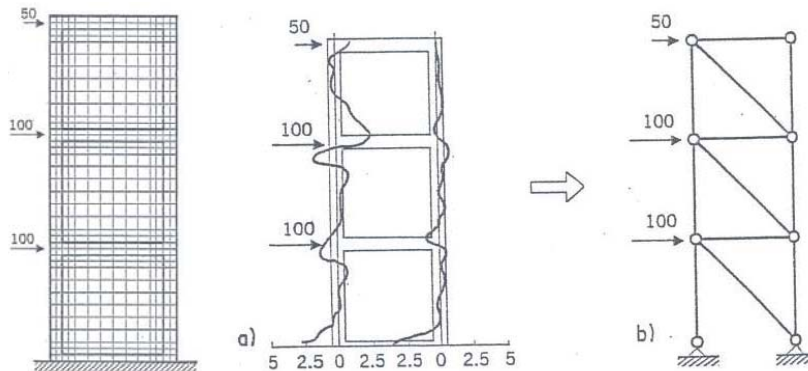
La larghezza del pendolo equivalente varia nel range:

$$0.15 d \leq w \leq 0.25 d \quad (d = \text{diagonale})$$



(striscia abbastanza stretta. è più stretta quando λh è grande)

Facendo un calcolo agli elementi finiti su un telaio a 3 piani e una campata con maglie quadrate, soggetto a carichi laterali, Stafford-Smith dimostrò che i momenti flettenti che ci sono sui pilastri rispetto ai momenti flettenti senza il tamponamento sono molto più piccoli (è come se si eliminasse dai pilastri la sollecitazione flessionale ma rimane solo quella a sforzo normale).



10. NUCLEI IRRIGIDENTI A SEZIONE SOTTILE APERTA: TEORIA DI VLASOV

10.1 Nuclei irrigidenti a sezione sottile aperta

La teoria di Vlasov, completa la teoria di Saint-Venant.

In che cosa si discosta la teoria di Vlasov dalla teoria di Saint-Venant?

Nella teoria della torsione di Saint-Venant, una delle ipotesi che si fa è quella di applicare 2 momenti torcenti uguali e opposti alle basi (non c'è una distribuzione di momenti torcenti lungo la trave), nella teoria di Vlasov questa ipotesi viene rimossa: l'ipotesi di momento costante sulla luce. In travi lunghe, anche snelle, fare l'ipotesi che ci sia una distribuzione di rotazioni che aumenti linearmente (ovvero l'angolo unitario di torsione $\theta' =$ caratteristica deformativa (angolo di torsione per unità di lunghezza)) non è reale.

(quando si parla di momento torcente distribuito agente in una struttura è il più delle volte riferito in sostanza a dei momenti di inerzia dovuti all'inerzia, quindi nella dinamica)

Saint-Venant	Vlasov
GI_t	$EI_{\omega\omega}$
ϑ'	ϑ'''

Per Saint-Venant avevamo una rigidità a torsione per le sezioni sottili aperte molto piccola, perchè una volta calcolato G (modulo elastico tangenziale) e I_t momento di inerzia polare generalizzato (fattore di rigidità torsionale), la rigidità torsionale GI_t è un fattore molto basso, di ordini di grandezza inferiori (circa 2 ordini) rispetto a quella calcolata per una sezione sottile chiusa (avente la stessa forma). Dunque di per se è la rigidità torsionale GI_t è trascurabile per sezioni sottili aperte.

Vedremo invece adesso che, quando si applica un momento torcente ad una sezione sottile aperta, c'è una ripartizione di momento torcente tra una parte classica (GI_t) e una parte proporzionale invece alla nuova rigidità $EI_{\omega\omega}$ (modulo elastico normale del materiale \cdot momento di inerzia che ha dimensioni l^6) introdotta dalla teoria di Vlasov.

Alla fine della trattazione arriveremo a dire che: applicando un momento torcente distribuito dall'esterno, una parte (piccola) si ripartisce attraverso la rigidità classica GI_t e una parte (grande) attraverso la rigidità $EI_{\omega\omega}$.

Altra differenza: mentre il momento per Saint-Venant (momento primario) è proporzionale all'angolo unitario di torsione θ' (deformazione duale del momento torcente), il momento per Vlasov (momento secondario) è proporzionale a θ''' .

con Saint-Venant facendo la derivata di ϑ' si ottiene zero per l'ipotesi fatte (del solido caricato solo sulle basi a torsione), mentre con la teoria di Vlasov non facciamo questa semplificazione e quindi $\vartheta'' \neq 0$!

Per capire subito di cosa stiamo parlando consideriamo l'esempio di una sezione sottile a doppio T:

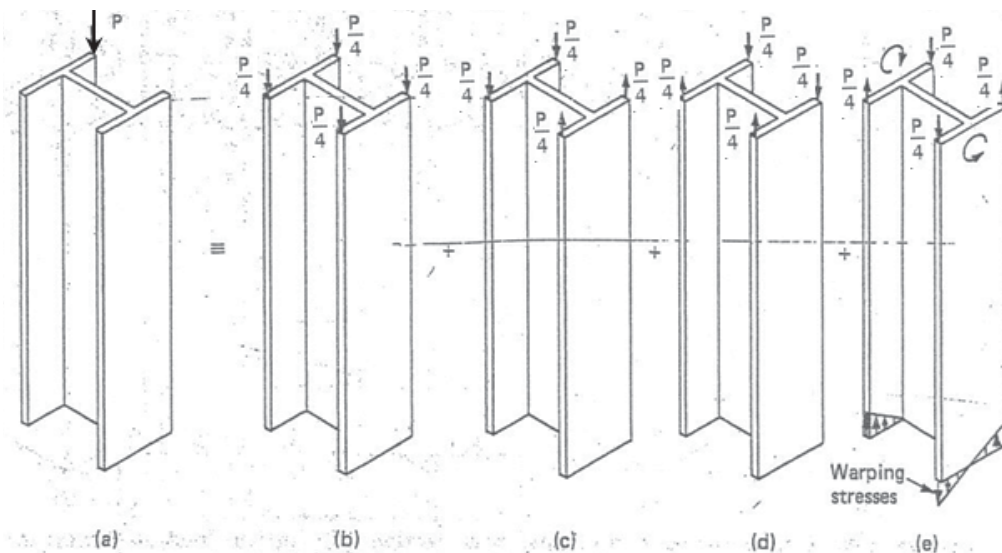


Figure 10.44 I-shaped cantilever column. (a) Vertical load at corner; (b) symmetrical axial loads; (c) bending about x axis; (d) bending about y axis; (e) self-equilibrating bimoment load. Note: Flanges bend in opposite directions producing significant warping stresses.

il bimomento è una sollecitazione equivalente a 0

Per essere coerenti bisogna introdurre una ulteriore caratteristica statica, cioè oltre allo sforzo normale e ai due momenti flettenti ci sarà una 4° caratteristica: bimomento = come se fosse un momento di coppie (coppia per un braccio (dimensione $[F][L]^2$). Come viene fuori in maniera elementare e intuitiva il bimomento?

Consideriamo una sezione sottile con una forza eccentrica P applicata in uno dei 4 vertici. Questo sistema (a) è equivalente alla somma di 4 schemi (b)+(c)+(d)+(e):

- (b) schema con 4 forze equiverse $P/4$ ai 4 vertici (quindi in realtà sarebbe uno sforzo normale centrato)
- (c) schema con 2 forze equiverse da una parte e 2 forze equiverse ma opposte all'altra (corrisponde a un momento flettente)
- (d) schema con 2 forze equiverse da una parte e 2 forze equiverse ma opposte all'altra (corrisponde a un momento flettente)
- (e) per avere l'equivalenza non bastano gli schemi (b) (c) e (d) ma ne dobbiamo aggiungere un 4°. Le ultime forze che aggiungiamo (ovvero quello dello schema (e)) sono un sistema equivalente a zero: sulle 2 ali abbiamo 2 momenti flettenti opposti, ovvero un sistema equivalente a zero che nell'ambito della teoria di

10.2 La teoria di Vlasov

Nella trattazione della teoria di Vlasov si parte da una sezione sottile aperta. Questa teoria è valida solo per sezioni sottili aperte, mentre non si applica per sezioni sottili chiuse o compatte (N.B. l'ingobbamento nelle sezioni sottili chiuse o compatte non è che non esiste, è presente, ma è piccolo, e quindi trascurabile).

La teoria di Vlasov vale per un sistema di riferimento generico (in generale non è né baricentrico né centrato sul centro di taglio (che poi coincide col centro di torsione)).

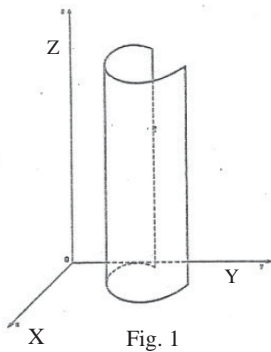


Fig. 1

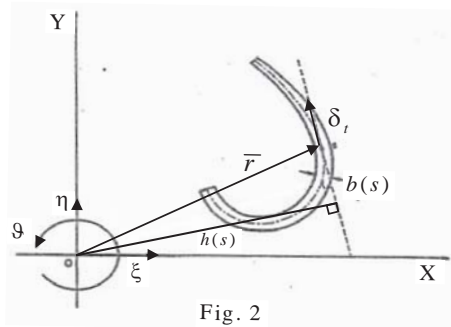


Fig. 2

Partiamo dalla cinematica.

L'ipotesi di base (che si fa anche nella teoria della torsione elementare) è quella di moto rigido della sezione, ovvero l'ipotesi di indeformabilità trasversale:

$$\begin{aligned} u &= \xi(z) - \vartheta(z)y \\ v &= \eta(z) + \vartheta(z)x \end{aligned}$$

(queste 2 formule sono le formule di rototraslazione piana rigida)

- u = spostamento x di un punto generico
- v = spostamento y di un punto generico
- ξ e η = spostamenti dell'origine del sistema di riferimento secondo x e y
(se l'origine fosse sul centro di taglio essi risulterebbero nulli in quanto il centro di taglio non ha spostamenti)
- $\vartheta(z)$ = è una rotazione attorno all'asse Z (deve essere sufficientemente piccolo altrimenti non vale la formula, perchè è una cinematica di piccoli spostamenti. ϑ è il 3° spostamento generalizzato)

Si definisce δ_t la componente dello spostamento secondo la tangente all'asse curvilineo s della sezione (componente tangenziale alla linea media della sezione sottile) (c'è presente pure la componente normale, ma non la consideriamo).

$$\delta_t = \bar{\delta} \times \bar{u}_t = u \frac{dx}{ds} + v \frac{dy}{ds}, \quad \text{coseni direttori}$$

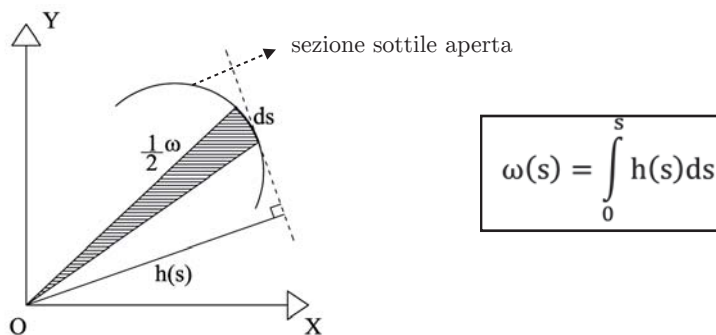
dove: $\zeta(z)$ è una costante di integrazione, è uno spostamento assiale uniforme della sezione (dipendente solo da z coordinata longitudinale), è un termine non essenziale che poi in qualche modo sparisce nella trattazione finale. ϑ' è l'angolo unitario di torsione, ω è solo funzione di s ed è definibile per integrazione della seguente espressione a meno di una costante arbitraria:

$$d\omega = h(s)ds,$$

{il punto di differenza con Saint-Venant sta nel fatto che in Saint-Venant ϑ' è costante quindi se derivato ulteriormente si annulla e sparisce, quindi l'ingobbamento nella teoria di Saint-Venant c'è, ma è un ingobbamento uniforme (se derivo l'ingobbamento alla Saint-Venant mi viene zero perchè è un ingobbamento che si ripete sempre uguale). Mentre per Vlasov l'ulteriore derivazione non comporta un annullamento!}

{in una sezione terminale, quando diciamo ingobbamento impedito cosa si intende? Se incastriamo una trave di sezione sottile aperta, vuol dire che impediamo l'ingobbamento $\omega = 0$, per ottenerlo si deve annullare ϑ' }

La funzione ingobbamento $d\omega$ rappresenta il doppio dell'area spazzata dal raggio vettore, cioè l'area del triangolo infinitesimo che ha per base il tratto ds e per altezza $h(s)$:



L'area settoriale è quella ombreggiata in figura (area spazzata dal raggio vettore), è la metà dell'ingobbamento. Perché? ds è la base di un triangolino infinitesimo, l'altezza invece del triangolino è $h(s)$, quindi l'area del triangolino è $1/2 h(s)ds$. L'ingobbamento dunque è 2 volte l'area spazzata. L'ingobbamento ha dimensione $[L]^2$.

Quindi abbiamo messo in relazione il concetto cinematico (meccanico) di ingobbamento al concetto geometrico di area spazzata.

Veniamo adesso al problema fondamentale: dobbiamo definire i 4 spostamenti $\zeta, \xi, \eta, \vartheta$ (zita non è fondamentale, perchè si farà poi l'ipotesi di considerare anche indeformabile assialmente gli elementi, le altre sono gli spostamenti nel piano).

C. Lezione 10 - Nuclei irrigidenti a sezione sottile aperta: Teoria di Vlasov

derivata di uno spostamento assiale che moltiplicata per che ci da la deformazione assiale dovuta allo sforzo normale

$$N = \int_A \sigma_z dA = E(A\zeta' - S_y\xi'' - S_x\eta'' - S_\omega\vartheta''),$$

$$M_y = \int_A \sigma_z x dA = E(S_y\zeta' - I_{yy}\xi'' - I_{yx}\eta'' - I_{y\omega}\vartheta''),$$

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA = E(S_x\zeta' - I_{xy}\xi'' - I_{xx}\eta'' - I_{x\omega}\vartheta''),$$

come se fosse un momento di 2 coppie

$$B = \int_A \sigma_z \omega dA = E(S_\omega\zeta' - I_{\omega y}\xi'' - I_{\omega x}\eta'' - I_{\omega\omega}\vartheta'').$$

scrivere in forma matriciale per ricordare

il braccio diventa un area in questo caso, ovvero 2 volte l'area spazzata (omega)

Il bimomento ($[F][L]^2$) è una caratteristica che genera la σ_ω aggiuntiva, è inoltre proporzionale a ϑ'' (caratteristica duale del bimomento).

Quando $\vartheta''=0$ (ipotesi di Saint-Venant) allora il bimomento è nullo.

Quando facciamo l'integrale vado a definire le caratteristiche geometriche della sezione: momenti statici + momenti di inerzia. Quando facciamo l'ultimo integrale, andremo a definire nuove proprietà: momento statico settoriale S_ω , e i momenti di inerzia settoriali misti $I_{\omega y}$ e $I_{\omega x}$ e anche quello che abbiamo già visto prima $I_{\omega\omega}$.

Quindi, detta A l'area della sezione trasversale della trave, si indicano con S i momenti del primo ordine, e con I i momenti del secondo ordine:

$S_y = \int_A x dA,$	$S_x = \int_A y dA,$	$S_\omega = \int_A \omega dA,$	coordinate settoriale
$I_{yy} = \int_A x^2 dA,$	$I_{xx} = \int_A y^2 dA,$	$I_{\omega\omega} = \int_A \omega^2 dA,$ [L] ⁶	
$I_{xy} = \int_A xy dA,$	$I_{x\omega} = \int_A y\omega dA,$ [L] ⁵	$I_{y\omega} = \int_A x\omega dA.$ [L] ⁵	

OSSERVAZIONI SEMPLIFICATIVE:

— Nel caso in cui scegliessi come origine, non un punto qualsiasi, ma il baricentro ordinario (geometrico) G della sezione, si ha:

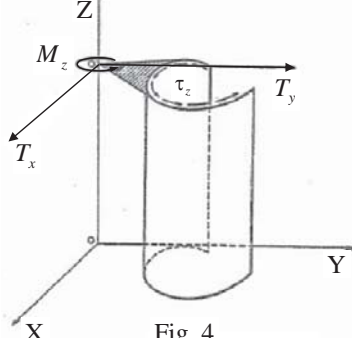
$$S_x = S_y = 0$$

— Nel caso in cui scegliessi come origine, non un punto qualsiasi, ma il baricentro settoriale della sezione (punto in cui indico la coordinata $s=0$), si ha:

$$S_\omega = 0$$

Adesso ci poniamo il quesito: che ne è delle altre caratteristiche? Queste sono caratteristiche che mi danno non le σ_z ma le τ_{zs} . Stavolta, attraverso lo spessore non abbiamo più la farfalla che mi dava il momento di Saint-Venant, ma abbiamo un andamento costante lungo lo spessore. Dunque avremo delle τ_{zs} costanti lungo lo spessore.

Nelle condizioni più generali di carico, sono presenti anche le tensioni tangenziali, che si suppongo uniformi lungo lo spessore b della parete. Le 3 azioni interne generatrici di tensioni tangenziali sono (h è sempre la distanza orientata vista prima):



coseno direttore

$T_x = \int_A \tau_z \frac{dx}{ds} dA$	<p>(τ_z sarebbe τ_{zs})</p> <p>(note da Scienza I)</p> <p>novità <u>momento torcente di Vlasov</u> o detto anche <u>momento torcente secondario</u> (momento torcente prodotto anche dai tagli)</p>
$T_y = \int_A \tau_z \frac{dy}{ds} dA$	
$M_z^{VL} = \int_A \tau_z h dA$	

Dunque non solo i tagli, ma anche la stessa M di Vlasov ci produce delle tau costanti sullo spessore.

Ricavando $h(s)$ dalla relazione $d\omega = h(s)ds$ e utilizzando la relazione (equivalenza): $dA = bds$ e integrando per parti (carico con la derivata la tau mentre scarico la coordinata) si ottiene:

$T_x = \int_c \tau_z b \frac{dx}{ds} ds = - \int_c \frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} x ds$	(A)
$T_y = \int_c \tau_z b \frac{dy}{ds} ds = - \int_c \frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} y ds$	
$M_z^{VL} = \int_c \tau_z b \frac{d\omega}{ds} ds = - \int_c \frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} \omega ds$	

↓
 $h(s)$

Queste relazioni non contengono i termini finiti in conseguenza dell'ipotesi di annullamento della tensione tangenziale τ_{zs} nei punti estremi della sezione (alle estremità queste caratteristiche hanno valori nulli e quindi il termine noto non c'è) per il principio di reciprocità (riguarda la teoria di Saint-Venant).

Dopo aver applicato l'integrazione per parti, procediamo imponendo l'equilibrio.

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{dM_y}{dz} = E(S_y \zeta'' - I_{yy} \xi''' - I_{yx} \eta''' - I_{y\omega} \vartheta'''), \\ T_y &= \frac{dM_x}{dz} = E(S_x \zeta'' - I_{xy} \xi''' - I_{xx} \eta''' - I_{x\omega} \vartheta'''), \\ M_z^{VL} &= \frac{dB}{dz} = E(S_\omega \zeta'' - I_{\omega y} \xi''' - I_{\omega x} \eta''' - I_{\omega\omega} \vartheta'''), \end{aligned}$$

forma generale del momento secondario

(come si nota i coefficienti sono gli stessi, quello che varia andando avanti con la trattazione di Vlasov sono le derivate degli spostamenti $\xi \eta \vartheta$ che aumentano (da " a '''))

Riconducendoci al centro di taglio (origine coincidente con centro di taglio) si diagonalizzano le relazioni sopra riportate, ottenendo infine:

viene messa in relazione una caratteristica deformativa con una caratteristica statica tramite la rigidità di Vlasov

Legge costitutiva

$$\vartheta'''' = - \frac{M_z^{VL}}{EI_{\omega\omega}}$$

3° legge costitutiva: caratteristica statica M_z^{VL} / caratteristica elastica E / caratteristica geometrica $I_{\omega\omega}$

Derivando ancora le relazioni in alto, si ottengono le espressioni dei carichi distribuiti esterni (azioni esterne):

$$\begin{aligned} p_x &= - \frac{dT_x}{dz} = E(-S_y \zeta'''' + I_{yy} \xi'''' + I_{yx} \eta'''' + I_{y\omega} \vartheta''''), \\ p_y &= - \frac{dT_y}{dz} = E(-S_x \zeta'''' + I_{xy} \xi'''' + I_{xx} \eta'''' + I_{x\omega} \vartheta''''), \\ m_z &= - \frac{dM_z^{VL}}{dz} = E(-S_\omega \zeta'''' + I_{\omega y} \xi'''' + I_{\omega x} \eta'''' + I_{\omega\omega} \vartheta''''). \end{aligned}$$

carichi trasversali
(come al solito)

momento distribuito
(che rappresenta spesso momenti dinamici (momenti dovuti alle forze di inerzia))

EQUAZIONI INDEFINITE DI EQUILIBRIO IN FORMA GENERALIZZATA

(in forma generalizzata nel senso che non c'è solo 1 spostamento, ma ci sono 3 spostamenti generalizzati per ogni sezione della trave)

Mettendoci nel centro di taglio come origine del S.R. (diagonalizzazione) si ottiene:

EQUAZIONE DELLA
TORSIONE DI VLASOV
(equazione del 4° ordine)

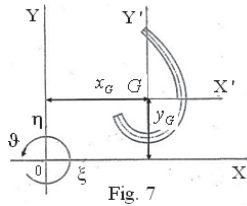
Legge costitutiva

$$\vartheta'''' = \frac{m_z}{EI_{\omega\omega}}$$

analogamente a quanto visto per la trave dove avevamo: derivata 4° dello spostamento trasversale $v'''' = q/EI$ (equazione della linea elastica)

CONCLUSIONE: abbiamo visto che in sostanza c'è una rigidezza in più $EI_{\omega\omega}$ (con $I_{\omega\omega}$ momento di inerzia settoriale) che emerge per le sezioni sottili aperte (non invece in quelle chiuse o compatte). Questa rigidezza non può essere confrontata in maniera diretta con l'altra rigidezza (GI_t) perchè hanno due dimensioni fisiche diverse (dimensione fisica non omogenea) perchè come si vede nell'ultima equazione moltiplicano uno ϑ'''' e l'altro ϑ'' .

L'ultima relazione l'abbiamo potuta scrivere utilizzando le leggi di trasformazione di Huygens:



$$\begin{aligned} J_{yy} &= I_{yy} - Ax_G^2, \\ J_{xx} &= I_{xx} - Ay_G^2, \\ J_{yx} &= I_{yx} - Ax_G y_G. \end{aligned}$$

J sono dei momenti di inerzia però riferiti al sistema baricentrico parallelo

e utilizzando le seguenti uguaglianze fra caratteristiche settoriali della sezione:

$$\begin{aligned} J_{\omega\omega} &= I_{\omega\omega} - A\omega_0^2, \\ J_{x\omega} &= I_{x\omega} - Ay_G\omega_0, \\ J_{y\omega} &= I_{y\omega} - Ax_G\omega_0. \end{aligned}$$

si annullano quando sto nel baricentro, ma anche quando omega0 è 0: ovvero se prendo l'origine il baricentro settoriale

Queste indicano il cambiamento dell'origine della coordinata s sulla sezione, affinché il momento statico settoriale corrispondente sia nullo. In questo modo $J_{\omega\omega}$, $J_{x\omega}$ e $J_{y\omega}$ rappresentano le caratteristiche settoriali principali.

Sostituendo poi sempre

$$\zeta' = x_G \xi'' + y_G \eta'' + \omega_0 \vartheta'',$$

in

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{dM_y}{dz} = E(S_y \zeta'' - I_{yy} \xi''' - I_{yx} \eta''' - I_{y\omega} \vartheta'''), \\ T_y &= \frac{dM_x}{dz} = E(S_x \zeta'' - I_{xy} \xi''' - I_{xx} \eta''' - I_{x\omega} \vartheta'''), \\ M_z^{VL} &= \frac{dB}{dz} = E(S_\omega \zeta'' - I_{\omega y} \xi''' - I_{\omega x} \eta''' - I_{\omega\omega} \vartheta'''). \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} T_x &= -E(J_{yy} \xi''' + J_{yx} \eta''' + J_{y\omega} \vartheta'''), \\ T_y &= -E(J_{xy} \xi''' + J_{xx} \eta''' + J_{x\omega} \vartheta'''), \\ M_z^{VL} &= -E(J_{\omega y} \xi''' + J_{\omega x} \eta''' + J_{\omega\omega} \vartheta'''), \end{aligned} \quad (B)$$

allo stesso modo:

$$\begin{aligned} p_x &= -\frac{dT_x}{dz} = E(-S_y \zeta''' + I_{yy} \xi'''' + I_{yx} \eta'''' + I_{y\omega} \vartheta''''), \\ p_y &= -\frac{dT_y}{dz} = E(-S_x \zeta''' + I_{xy} \xi'''' + I_{xx} \eta'''' + I_{x\omega} \vartheta''''), \\ m_z &= -\frac{dM_z^{VL}}{dz} = E(-S_\omega \zeta''' + I_{\omega y} \xi'''' + I_{\omega x} \eta'''' + I_{\omega\omega} \vartheta''''). \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} p_x &= E(J_{yy} \xi'''' + J_{yx} \eta'''' + J_{y\omega} \vartheta''''), \\ p_y &= E(J_{xy} \xi'''' + J_{xx} \eta'''' + J_{x\omega} \vartheta''''), \\ m_z &= E(J_{\omega y} \xi'''' + J_{\omega x} \eta'''' + J_{\omega\omega} \vartheta''''). \end{aligned} \quad (C)$$

carichi esterni

alla fine della fiera ho riscritto tutto togliendomi di mezzo la 1° colonna, e mettendo tutto in funzione di J **N.B.** anche se abbiamo riscritto in funzione di J (baricentrico) il sistema degli spostamenti è rimasto comunque sempre lo stesso (quello generico)

Per ricavare invece la componente di movimento longitudinale ζ , dobbiamo integrare la formula imponendo la condizione di spostamento longitudinale nell'incastro (per $z=0$).

$$\zeta' = x_G \xi'' + y_G \eta'' + \omega_0 \vartheta'',$$

$$\zeta(0) = 0, \quad \text{condizione al contorno}$$

Si arriva perciò alla relazione:

$$\zeta = x_G \xi' + y_G \eta' + \omega_0 \vartheta'.$$

Adesso sono note tutte le 4 componenti globali di spostamento $\zeta, \xi, \eta, \vartheta$ (questi sono gli spostamenti dell'origine) le componenti di spostamento puntuale u, v, w (di un punto generico) possono essere ottenute tramite le relazioni:

$$\begin{aligned} u &= \xi(z) - \vartheta(z)y \\ v &= \eta(z) + \vartheta(z)x \\ \hline w &= \zeta(z) - \xi'x - \eta'y - \vartheta'\omega, \end{aligned}$$

Possiamo anche ora ricavare le tensioni:

$$\sigma_z = E(\zeta' - \xi''x - \eta''y - \vartheta''\omega),$$

Utilizzando l'equazione indefinita di equilibrio (capitolo precedente equilibrio rettangolino) possiamo ritrovare le τ :

$$\frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} + \frac{\partial(\sigma_z b)}{\partial x} = 0.$$

$$\sigma_z = E(\zeta' - \xi''x - \eta''y - \vartheta''\omega),$$

sostituendo: $\sigma_z = \sigma_z(\text{St. Venant}) + \sigma_\omega$,

$$\text{con } \sigma_\omega = -E\vartheta''\omega.$$

si ottiene:

$$\frac{\partial(\tau_z b)}{\partial s} + E b (\zeta''' - \xi'''x - \eta'''y - \vartheta''' \omega) = 0.$$

Poiché la τ_z deve annullarsi ai lembi estremi della sezione, l'integrazione dell'equazione appena scritta (rispetto s) porge la relazione:

$$\tau_z = -\frac{E}{b} [\zeta''' A(s) - \xi''' S_y(s) - \eta''' S_x(s) - \vartheta''' S_\omega(s)],$$

tau di Jourasky viene fuori una tau uniforme sulla corda

Per la generica mensola i-esima avremo:

$$\{F_i\} = E[J_i]\{\delta''''\},$$

spostamento
di piano (senza pedice)

$[J_i]$: matrice dei momenti di inerzia della sezione della mensola i-esima;

$\{F_i\}$: vettore delle forze assorbite dalla mensola i-esima, riferito al sistema di riferimento globale XY.

Se si fa l'equilibrio (equivalenza) (come si era fatto nelle scorse lezioni) si ottiene:

$$\{F\} = \sum_{i=1}^{N_{TOT}} \{F_i\},$$

sostituendo la formula di prima:

$$\{F\} = E \sum_{i=1}^{N_{TOT}} [J_i] \{\delta''''\}.$$

Il complesso delle mensole si comporta pertanto come un'unica mensola avente come matrice dei momenti del secondo ordine ($[J]$ totale del sistema):

$$[J] = \sum_{i=1}^{N_{TOT}} [J_i].$$

la matrice di inerzia totale
è la somma di quelle dei singoli elementi
noto questo posso risolvere il problema globale
avendo le forze esterne

Se $[J]$ non è singolare possiamo ricavare dalle relazioni precedenti:

$$\{\delta''''\} = \frac{1}{E} [J]^{-1} \{F\}.$$

è un modo di risolvere il
problema globale
(il problema cinematico è risolto
da questa equazione)

N.B. il complesso di queste torri (di questi elementi verticali) si comporta come un unico complesso verticale! Quindi un sistema di torri in parallelo si comporta come un unico grande sistema

al solito mi darà tensioni e spostamenti applicando l'algoritmo (come nel caso precedente)

OSSERVAZIONE: sostituire $\{\delta''''\} = \frac{1}{E} [J]^{-1} \{F\}$. in $\{F_i\} = E[J_i]\{\delta''''\}$.
porta a:

$$\{F_i\} = [J_i] [J]^{-1} \{F\},$$

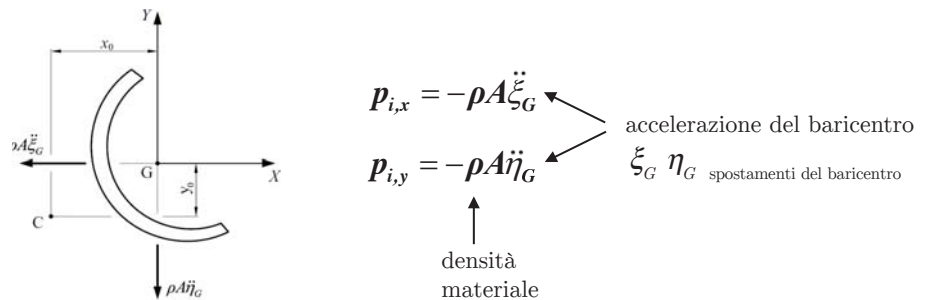
rigidezza locale per l'inverso
della rigidezza totale

Questa relazione esprime la condizione di ripartizione delle azioni trasversali tra le

12. DINAMICA E STABILITA' NEGLI EDIFICI DI GRANDE ALTEZZA

12.1 Dinamica negli edifici di grande altezza

Consideriamo una sezione sottile aperta con S.R. centrale. Per la dinamica si considerano 2 forze concentrate $p_{i,x}$ $p_{i,y}$:



Si esprimono poi gli spostamenti del baricentro in spostamenti del centro di taglio, e inoltre esprimerò pure $p_{i,x}$ $p_{i,y}$ in funzione degli spostamenti.

Dunque esprimo le accelerazioni del baricentro in funzione degli spostamenti dell'origine ξ, η, ϑ (che in questo caso coincide col centro di taglio):

$$\ddot{\xi}_G = \frac{d^2}{dt^2}(\xi - \vartheta y_0) \quad \ddot{\eta}_G = \frac{d^2}{dt^2}(\eta + \vartheta x_0)$$

Il momento dato dalle forze di inerzia si esprime come somma di: primi due addendi sono i momenti di $p_{i,x}$ $p_{i,y}$, il terzo compare J_p (momento di inerzia polare) ed è il momento dovuto alle forze di inerzia (per questo c'è il meno):

$$m_{i,x} = \left[\rho A \frac{d^2}{dt^2}(\xi - \vartheta y_0) \right] y_0 - \left[\rho A \frac{d^2}{dt^2}(\eta + \vartheta x_0) \right] x_0 - \rho J_p \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$$

accelerazione angolare

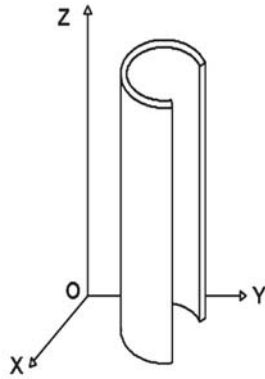
si ottiene:

$$EI_{yy} \frac{\partial^4 \xi}{\partial z^4} + \rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\xi - y_0 \vartheta) = 0$$

$$EI_{\omega\omega} \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4} - GI_t \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \rho I_0 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \rho A y_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \rho A x_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0$$

per risolvere il sistema è possibile separare il problema spaziale da quello temporale (separazione delle variabili)

12.2 Stabilità negli edifici di grande altezza (estensione teoria di Vlasov: instabilità delle travi in parete sottile)



Sovrapposizione del problema di Eulero generale (trave caricata con carico si punta + carico trasversale : trattazione dell'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine) con il problema di Prandtl.

La trave è vincolata alle due estremità mediante cerniere cilindriche.

Proiezione della trave sul piano [yz]

Proiezione della trave sul piano [xz]

AZIONI
 N, \bar{M}_x, \bar{M}_y : carichi concentrati agenti alle estremità della trave;
 p_x, p_y, m_z : carichi distribuiti agenti lungo l'asse della trave

IPOTESI
 1) La forma della sezione rimane inalterata a deformazione avvenuta;
 2) L'elemento è deformabile soltanto a flessione;
 3) È valida la Teoria di Vlasov

L'energia di deformazione si può scrivere come:

$$\Phi = \frac{1}{2} \int_L [M_y \xi'' + M_x \eta'' + B \vartheta'' + M_z \vartheta'] dz$$

(N.B. Stavolta N non è nullo come in fatto in Vlasov, dunque non si diagonalizza)

Si ottiene l'equazione che governa il problema:

$$[K]\{\delta^{IV}\} + [F]\{\delta''\} = \{p\}$$

questa è formalmente simile all'equazione della linea elastica con effetti del secondo ordine, valutata per le travi a sezione compatta.

La matrice di rigidezza $[K]$ è formata da due termini: il primo rappresenta la matrice di rigidezza elastica, mentre il secondo dipende dallo sforzo normale e dalla geometria della sezione.

$$[K] = [EI] - [K_g]$$