NUMERO: 2316A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Campana Simone

MATERIA: Fisica I - Esercizi - Prof. Trigiante

EX 1: LA VELOCITÀ DI UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE LUNGO L'ASSE x SEGUE LA SEGUENTE LEGGE ORARIA:
$v(t) = v_0 + at$ CON $v_0 = 2\,m/s$ E $a = 9{,}81\,m/s^2$; ALL'ISTANTE $t=0$ LA PARTICELLA SI TROVA ALLA POSIZIONE $x = 2m$.

DETERMINARE: a) DOVE SI TROVA LA PARTICELLA ALL'ISTANTE $t = 1s$;
b) QUANDO LA PARTICELLA RAGGIUNGE LA POSIZIONE $x = 4m$;

SAPPIAMO LA POSIZIONE INIZIALE DELLA PARTICELLA; LA VELOCITÀ NON È COSTANTE, DUNQUE NELLA SCRITTURA DELLA LEGGE ORARIA DOVREMO INTEGRARE ANCHE LA VELOCITÀ:

$$\Rightarrow \Delta x = x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt;$$

$$\Rightarrow x(t=1s) = x(t=0) + \int_{t_0}^{t} (v_0 + at)\,dt = x(t=0) + v_0(t - \cancel{t_0}^{\,0}) + \frac{a}{2}(t^2 - \cancel{t_0^2}^{\,0}) =$$

$$= 2 + 2\cdot 1 + \frac{9{,}81}{2}\cdot 1^2 = \boxed{8{,}91\,m};$$

RIPRENDENDO LA LEGGE ORARIA APPENA SCRITTA:

$$x(t) = x(t_0) + v_0 t + \frac{a}{2}t^2 \Rightarrow 4 = 2 + 2\cdot t + \frac{9{,}81}{2}t^2 \Rightarrow 9{,}81t^2 + 4t - 4 = 0;$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 + 4\cdot 9{,}81}}{9{,}81} \quad \begin{cases} t_1 = 0{,}47\,s \\ t_2 = -0{,}87\,s \text{ (NON HA SENSO FISICO)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{t = 0{,}47\,s}.$$

EX 2: UN AUTOMOBILE, INIZIALMENTE FERMA, SI METTE IN MOTO E ACCELERA. L'ANDAMENTO DELLA VELOCITÀ NEL TEMPO È DESCRITTO DALLA SEGUENTE LEGGE: $v(t) = b\cdot t^2$ CON b UNA COSTANTE. DOPO $t = 3s$ L'AUTO HA PERCORSO 20 m.

DETERMINARE: a) L'UNITÀ DI MISURA DELLA COSTANTE b;
b) IL VALORE DELLA COSTANTE b;
c) IL TEMPO AFFINCHÉ L'AUTO RAGGIUNGA LA VELOCITÀ DI 100 km/h;

$$v(t) = b\cdot t^2 \Rightarrow b = \frac{v(t)}{t^2} = \left[\frac{m}{s}\,\frac{1}{s^2}\right] = \boxed{\left[\frac{m}{s^3}\right]};$$

LA LEGGE ORARIA È DATA DA:

$$\Rightarrow x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')\,dt' \Rightarrow x(t=3) = x(t=0) + \int_{t_0}^{t} bt^2\,dt =$$

$$= x(t=0) + b\left(\frac{t^3}{3} - \frac{\cancel{t_0^3}^{\,0}}{3}\right) \Rightarrow 20 = 0 + b\,\frac{3^3}{3} \Rightarrow \boxed{b = 2{,}22\,m/s^3};$$

QUANDO IL SASSO IMPATTA AL SUOLO RAGGIUNGE QUOTA $z(t)=0$ QUINDI:

$$\Rightarrow z(t) = h_0 + v_0 t - \frac{g}{2}t^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t - h_0 = 0 \Rightarrow 4{,}90t^2 - 10t - 2 = 0;$$

$t_1 = 2{,}22\,s$
$t_2 = -0{,}183\,s$ (NON HA SENSO FISICO) $\Rightarrow t = 2{,}22\,s$;

SAPENDO IL TEMPO DI RICADUTA AL SUOLO SOSTITUIAMO NELLA (1):

$$\Rightarrow v(t=2{,}22\,s) = v(t_0) - g\cdot t \Rightarrow v = 10 - 9{,}81\cdot(2{,}22) = \boxed{-11{,}8\,m/s};$$

GIUSTAMENTE LA VELOCITÀ È NEGATIVA IN QUANTO IL MOTO È OPPOSTO ALLA DIREZIONE SCELTA PER L'ASSE z.

L'ENERGIA POTENZIALE E_p È DATA DA:

$$\Rightarrow E_p(t) = mgz(t) = mg\left(h_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right);$$

L'ENERGIA CINETICA E_k È DATA DA:

$$\Rightarrow E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m(v_0 - gt)^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - 2v_0 gt + g^2t^2\right);$$

L'ENERGIA MECCANICA E È DATA DA:

$$\Rightarrow E = E_p(t) + E_k(t) = mgh_0 + \cancel{mgv_0 t} - \frac{1}{2}\cancel{mg^2t^2} + \frac{1}{2}mv_0^2 - \cancel{mgv_0 t} + \frac{1}{2}\cancel{mg^2t^2} =$$

$$= mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2;$$ DUNQUE L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA NEL TEMPO.

EX 4: UNA PARTICELLA SI MUOVE LUNGO L'ASSE x CON LA SEGUENTE LEGGE ORARIA:

$$x(t) = x_0 + \alpha t^2 - bt^3;$$

DETERMINARE: a) LE UNITÀ DI MISURA DELLE COSTANTI α E b;

SUPPONENDO CHE $x_0 = 1\,m$ $\alpha = 1\,m/s^2$ $b = 1/3\,m/s^3$:

DETERMINARE: b) VELOCITÀ E ACCELERAZIONE DELLA PARTICELLA ALL'ISTANTE $t = 2\,s$;

c) LA MASSIMA VELOCITÀ NELL'INTERVALLO TEMPORALE $t \in [0;4]$;

d) DETERMINARE GLI SPOSTAMENTI MASSIMI $x_d > 0$ (VERSO DESTRA) E $x_s < 0$ (VERSO SINISTRA) DELLA PARTICELLA RISPETTO L'ORIGINE NELL'INTERVALLO $t \in [0;4]$;

I FATTORI αt^2 E bt^3 DEVONO AVERE LE DIMENSIONI DI UNA LUNGHEZZA:

$$\Rightarrow m = \alpha t^2 = \alpha\cdot s^2 \Rightarrow \alpha = \left[\frac{m}{s^2}\right]; \quad m = b\cdot s^3 = b\cdot t^3 \Rightarrow b = \left[\frac{m}{s^3}\right];$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 160

· $x(t=2s) = x_0 + 1\cdot 2^2 - \frac{1}{3} 2^3 = 1 + 4 - \frac{4}{3} = \frac{7}{3} = 2,33\,m$;

ADESSO CALCOLIAMO LA POSIZIONE AGLI ESTREMI DELL'INTERVALLO DATO:

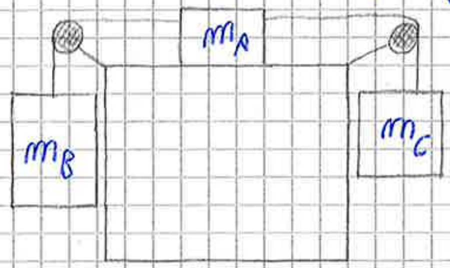
· $x(t=0s) = 1m$; $x(t=4s) = x_0 + 1\cdot 4^2 - \frac{1}{3} 4^3 = 1 + 16 - \frac{64}{3} = -4,33\,m$;

ADESSO RAGIONIAMO: ALL'ISTANTE $t=0$ LA POSIZIONE RAGGIUNTA È $x=1m$ (VERSO DESTRA); ALL'ISTANTE $t=2s$ LA POSIZIONE RAGGIUNTA È $x=2,33\,m$ (VERSO DESTRA); DOPO $t=4s$ LA POSIZIONE RAGGIUNTA È $x=-4,33\,m$. DUNQUE:

· MASSIMO SCOSTAMENTO VERSO DESTRA: $\boxed{x=2,33\,m}$;

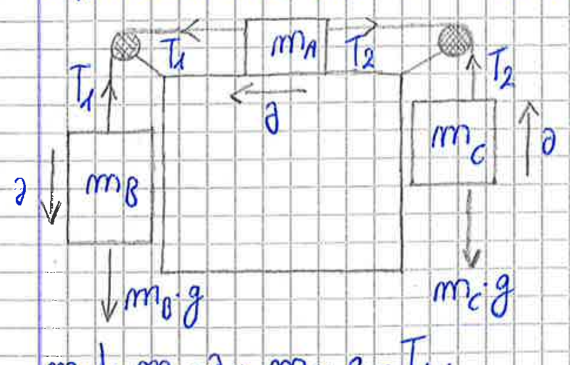
· MASSIMO SCOSTAMENTO VERSO SINISTRA: $\boxed{x=-4,33\,m}$.

EX 5: UN CORPO DI MASSA $m_A = 2\,Kg$ È POSTO SU UN PIANO ORIZZONTALE LISCIO; ESSO È COLLEGATO TRAMITE DUE FILI A DUE CORPI DI MASSE $m_B = 4\,Kg$ E $m_C = 1\,Kg$;



DETERMINARE: a) L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA DELLE 3 MASSE;
b) LA TENSIONE DEI DUE FILI;

SUPPONIAMO CHE I FILI SIANO INESTENSIBILI, OVVERO APPLICANDO DUE TENSIONI AI SUOI ESTREMI IL FILO NON CAMBIA LUNGHEZZA (LE DUE TENSIONI SI COMPENSANO); SE LA TENSIONE È LA STESSA OVUNQUE ANCHE L'ACCELERAZIONE SARÀ LA STESSA SU OGNI PUNTO DEL FILO. SICCOME LE MASSE NON SONO UGUALI SERVIRÀ UNA CERTA TENSIONE PER SORREGGERE LA MASSA m_B E UNA CERTA TENSIONE PER SORREGGERE LA MASSA m_C (LA MASSA m_A È SORRETTA DALLA REAZIONE VINCOLARE. FACCIAMO UN DIAGRAMMA DELLE FORZE:



PER SCRIVERE LE EQUAZIONI DI NEWTON OCCORRE SEMPRE FISSARE UN VERSO DI RIFERIMENTO; SICCOME LA MASSA m_B È PIÙ PESANTE, ALLORA È LOGICO PENSARE CHE SARÀ QUESTA A IMPORRE IL VERSO DELL'ACCELERAZIONE.

$m_B)$: $m_B \cdot a = m_B \cdot g - T_1$;

$m_A)$: $m_A \cdot a = T_1 - T_2$;

L'accelerazione angolare si compone di due contributi, ovvero l'accelerazione tangenziale a_T (legata alla variazione della velocità in modulo) e l'accelerazione centripeta (legata alla variazione della velocità in direzione):

$$\Rightarrow a = a_T + a_C = R\frac{d\omega}{dt}\hat{u}_T - R\omega^2\hat{u}_C\,;$$

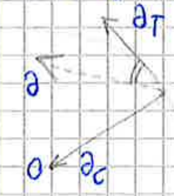
$$\cdot\ a_T = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha(t) = Rct\,; \quad \cdot\ a_C = -R\omega^2(t) = -R\left(\omega_0 + \frac{c}{2}t^2\right)^2;$$

$$\Rightarrow a_T = 14\cdot 10^{-2}\cdot 0{,}2\cdot 8 = 0{,}224\ m/s^2;$$

$$\Rightarrow a_C = -14\cdot 10^{-2}\cdot 6{,}8^2 = -6{,}474\ m/s^2;$$

$\Rightarrow a = 0{,}224\,\hat{u}_T - 6{,}474\,\hat{u}_C\,;$ questo è il vettore accelerazione nelle sue componenti, il modulo sarà dato da:

$\Rightarrow |a| = \sqrt{(0{,}224)^2 + (6{,}474)^2} = \boxed{6{,}48\ m/s^2}$ all'istante $t = 8s$;



$$\cdot\ tg\,\phi(t = 8s) = \frac{|a_C|}{|a_T|} = \frac{6{,}474}{0{,}224} = 28{,}901;$$

$$\Rightarrow arctg(28{,}901) = \phi(t = 8s) = \boxed{88{,}01°};$$

Osserviamo che l'angolo è quasi retto, questo è dettato dalla pochissima accelerazione tangenziale presente, quindi l'accelerazione è quasi tutta centripeta.

EX 7: Un auto viaggia alla velocità $V_A = 180\ Km/h$ passando per un punto di appostamento di una volante della polizia; la volante, dopo un tempo di 5 s, procede all'inseguimento partendo con un'accelerazione di $3\ m/s^2$. I passeggeri dell'auto detengono delle sostanze stupefacenti in polvere; dopo 2 minuti dall'istante in cui la polizia è partita, si accorgono di essere seguiti e decidono di disfarsi degli stupefacenti disperdendo la polvere dal finestrino. Per fare questa operazione servono 10 s, inoltre la massima velocità a cui può arrivare la macchina della volante è di 200 Km/h.

Determinare: I passeggeri si sono completamente disfatti degli stupefacenti quando saranno affiancati dalla volante della polizia?

Iniziamo a convertire le velocità: $V_A = 180\dfrac{1000}{3600} = 50\ m/s$; $V_{Max} = 200\dfrac{1000}{3600} = 55{,}56\ m/s$;

VETTURA: RIASSUMIAMO LE LEGGI ORARIE PER I DUE VEICOLI:

$\cdot\ x_A(t) = 50(t+5) \qquad \cdot\ x_P(t) = \begin{cases} 1/2\, a t^2 & \text{PER } 0 \le t \le \bar{t} \\ 514{,}48 + 55{,}56(t - 18{,}52) & \text{PER } t \ge \bar{t} \end{cases}$

A REGIME LA VELOCITÀ MASSIMA RAGGIUNTA DALLA VOLANTE È MAGGIORE DI QUELLA DELLA VETTURA, QUINDI SICURAMENTE LA VOLANTE AFFIANCHERÀ LA VETTURA. QUANDO QUESTO ACCADE LE COORDINATE X DELLA VOLANTE E DELLA VETTURA COINCIDERANNO; PER $0 \le t \le \bar{t}$ NON C'È ISTANTE IN CUI QUESTO ACCADE, QUINDI SICURAMENTE DOVREMO RICERCARE QUESTA CONDIZIONE NELL'INTERVALLO $t \ge \bar{t}$:

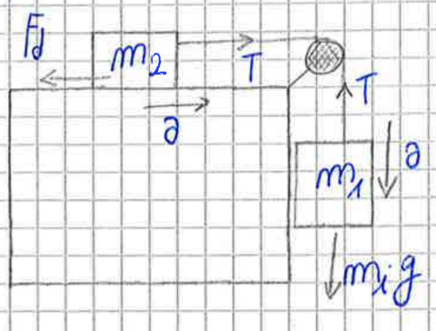
$$\Rightarrow x_A(t) = x_P(t) \Rightarrow 50(t'+5) = 514{,}48 + 55{,}56(t' - 18{,}52) \Rightarrow t' = \underline{137{,}6\ s};$$

A QUESTO ISTANTE LA VOLANTE AFFIANCA LA VETTURA; QUEST'ULTIMA NON SI LIBERA SUBITO DELLA POLVERE, MA DOPO 2 MINUTI, OVVERO 120 s, L'OPERAZIONE RICHIEDE 10 s QUINDI GLI STUPEFACENTI SARANNO SPARITI DOPO UN TEMPO t_R:

$\Rightarrow t_R = 120 + 10 = \underline{130\ s}$; DUNQUE $t_R < t'$ OVVERO I PASSEGGERI NON SARANNO COLTI DALLA VOLANTE CON GLI STUPEFACENTI.

EX 8: ABBIAMO DUE MASSE m_1 E m_2 DISPOSTE COME IN FIGURA; IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO TRA IL PIANO E m_2 VALE $\mu_D = 0{,}2$, QUELLO DI ATTRITO STATICO VALE $\mu_S = 0{,}4$;

DETERMINARE:
a) L'ACCELERAZIONE a DEL SISTEMA DELLE DUE MASSE E LA TENSIONE T DEL FILO;
b) COMPORTAMENTO DELL'ACCELERAZIONE E DELLA TENSIONE NEL CASO $m_1 \gg m_2$;
c) CALCOLARE I VALORI DI a E T NEL CASO $m_1 = 1\ kg$ $m_2 = 3\ kg$;
d) SE LA TENSIONE MASSIMA CHE IL FILO PUÒ SOPPORTARE È $T_{MAX} = 20\ N$, QUANTO VALE LA MASSA m_{MAX} CHE SI PUÒ COLLEGARE ALLA CARRUCOLA SENZA CHE IL FILO SI SPEZZI? ($m_2 = 3\ kg$);
e) LE DUE MASSE SI MUOVONO IN OGNI CASO? SE LA RISPOSTA È NEGATIVA DETERMINARE LA CONDIZIONE X CUI LE DUE MASSE NON SI MUOVONO;

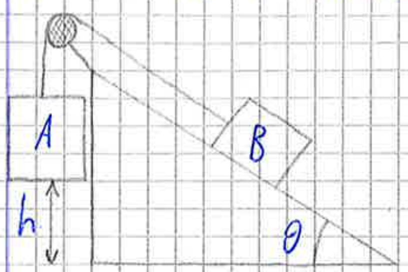


IMMAGINANDO DI AVERE UN FILO INESTENSIBILE L'ACCELERAZIONE È LA STESSA IN TUTTE LE PARTI DEL SISTEMA. SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI NEWTON PER LE DUE MASSE: (VEDERE EX. 5)

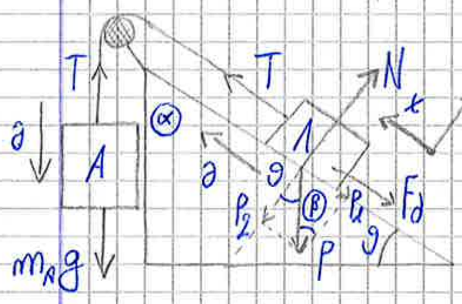
$m_1): m_1 a = m_1 g - T$ (1)

$m_2): m_2 a = T - \underbrace{\mu_D N}_{F_d} = T - \mu_D m_2 g$ (2)

EX 9: DUE MASSE UGUALI, COLLEGATE DA UN FILO, SONO DISPOSTE COME IN FIGURA. L'ANGOLO $\theta = 30°$, L'ALTEZZA $h = 1\,m$, IL COEFFICIENTE DI ATTRITO MASSA-PIANO VALE $\mu = 0,4$. ALL'ISTANTE $t = 0$ IL SISTEMA È LASCIATO LIBERO DI MUOVERSI E LA MASSA SOSPESA SCENDE.



DETERMINARE: a) L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA FINO A CHE LA MASSA SOSPESA TOCCA IL SUOLO;
b) IL TEMPO IMPIEGATO DALLA MASSA SOSPESA X GIUNGERE AL SUOLO;
c) LA DISTANZA d PERCORSA IN SALITA DALLA MASSA B (FARE ATTENZIONE CHE ANCHE QUANDO LA MASSA A TOCCA IL SUOLO, IL MOTO DI B PROSEGUE ANCORA X UN TRATTO);



LA FORZA PESO P SI SCOMPONE IN 2 COMPONENTI, UNA CHE BILANCIA LA REAZIONE VINCOLARE, L'ALTRA CHE BILANCIA PARZIALMENTE LA TENSIONE T DEL FILO. RICORDARSI DI FISSARE UN RIFERIMENTO X LA SCRITTURA DELLE EQUAZIONI; PER EVITARE DUBBI SI OSSERVI CHE IL TRIANGOLINO (β) HA DUE ANGOLI IN COMUNE CON IL TRIANGOLO (α), QUINDI IL 3° ANGOLO, OVVERO θ, È LO STESSO PER ENTRAMBI. P SI SCOMPONE IN:

$$P \begin{cases} P_1 = -m_B g \sin\theta \\ P_2 = -m_B g \cos\theta \end{cases}$$

ADESSO SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI NEWTON LUNGO LE DUE DIREZIONI x E y:

$$m_B): N = P_2 = +m_B g \cos\theta \Rightarrow F_d = \mu_D N = +\mu_D m_B g \cos\theta; \text{ (LUNGO } y)$$

$$m_B \cdot a = T - m_B g \sin\theta - \mu_D m_B g \cos\theta;$$

$$m_A): m_A a = m_A g - T;$$

SAPPIAMO CHE LE DUE MASSE SONO UGUALI, OVVERO $m_A = m_B = m$:

$$\begin{cases} m \cdot a = T - m g \sin\theta - \mu_D m g \cos\theta & (1) \\ m \cdot a = m \cdot g - T & (2) \end{cases}$$

SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI:

$$\Rightarrow 2\cancel{m} a = \cancel{T} - \cancel{m} g \sin\theta - \mu_D \cancel{m} g \cos\theta + \cancel{m} g - \cancel{T} \Rightarrow 2a = g - g\sin\theta - g\mu_D \cos\theta;$$

CHE VOGLIAMO CALCOLARE:

$$\cdot\ W = \int_{\Delta x} \bar{F} \cdot dx = \int_{\Delta x} \left(-m_B g \sin\theta - \mu_D m_B g \cos\theta\right) dx = -mg\left(\sin\theta + \mu_D \cos\theta\right)\Delta x;$$

ADESSO UGUAGLIANDO LE DUE ESPRESSIONI:

$$\Rightarrow +\frac{1}{2}\cancel{m} V_0^2 = +\cancel{m}g\left(\sin\theta + \mu_D \cos\theta\right)\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g\left(\sin\theta + \mu_D \cos\theta\right)} =$$

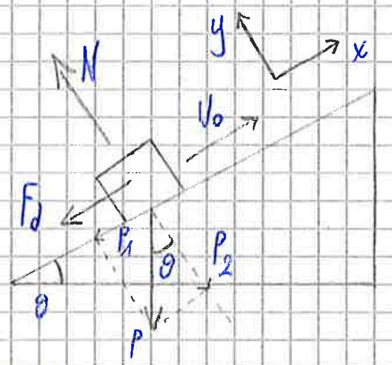
$$= \frac{1}{2}\frac{1{,}22^2}{9{,}81\left(\sin 30 + 0{,}4 \sin 30\right)} = 0{,}09\ m \Rightarrow d = h + \Delta x = 1 + 0{,}09 = \boxed{1{,}09\ m}$$

EX 10: UN CORPO SALE LUNGO UN PIANO INCLINATO ($\theta = 18°$) SCABRO ($\mu_S = 0{,}35$ $\mu_D = 0{,}25$), PARTENDO DALLA BASE CON VELOCITÀ $V_0 = 10\ m/s$ DIRETTA PARALLELAMENTE AL PIANO INCLINATO.

DETERMINARE: a) CALCOLARE DOVE E QUANDO SI FERMA;

b) STABILIRE SE, UNA VOLTA CHE SI FERMA, TORNA INDIETRO O RESTA FERMO;

c) SE TORNA INDIETRO CALCOLARE IL TEMPO NECESSARIO X TORNARE ALLA POSIZIONE INIZIALE;



LA FORZA PESO P SI SCOMPONE IN:

$$\cdot\ P \begin{cases} P_1 = -mg \sin\theta \\ P_2 = -mg \cos\theta \end{cases}$$

ADESSO SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI NEWTON LUNGO LE DUE DIREZIONI;

PICCOLA OSSERVAZIONE: QUANDO SI SCRIVONO LE FORZE SE NE PUÒ PRIMA SCRIVERE IL MODULO E POI METTERE IL SEGNO GIUSTO.

$$N - P_2 = 0 \Rightarrow N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta;$$

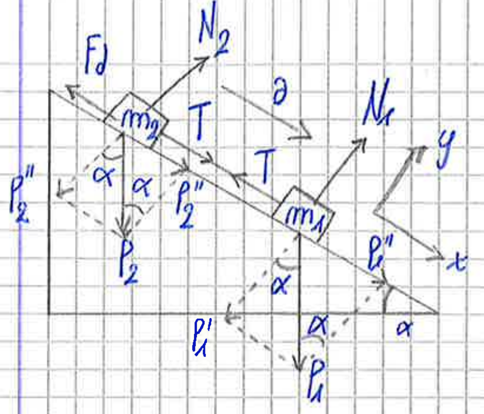
$$\cancel{m} \cdot a = -F_d - P_1 = -\mu_D N - P_1 = -\mu_D \cancel{m} g \cos\theta - \cancel{m} g \sin\theta;$$

$$\Rightarrow a = -\mu_D g \cos\theta - g \sin\theta = -g\left(\mu_D \cos\theta + \sin\theta\right);$$

SI OSSERVA CHE L'ACCELERAZIONE È COSTANTE, QUINDI È UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO; A QUESTO PROPOSITO USIAMO QUESTA FORMULA X RICAVARE LA DISTANZA PERCORSA:

$$\Rightarrow 2a(x - x_0) = V^2 - V_0^2 \Rightarrow (x - x_0) = \Delta x = \frac{V^2 - V_0^2}{2a};$$ ALLA FINE IL CORPO SI FERMA, DUNQUE $V = 0$;

$$\cdot\ a = -9{,}81\left(0{,}25 \cdot \cos 18 + \sin 18\right) = -5{,}36\ m/s^2;$$



SI FISSA IL SISTEMA DI RIFERIMENTO xy; IN MODULO LE FORZE CHE AGISCONO SULLA MASSA m_1 SONO: (LUNGO xy)

- FORZA PESO P_1 CHE SI SCOMPONE IN DUE COMPONENTI P_1' E P_1'' CHE IN MODULO VALGONO $P_1' = m_1 g \cos\theta$ E $P_1'' = m_1 g \sin\theta$;
- REAZIONE VINCOLARE $N_1 = P_1' = m_1 g \cos\theta$;

LE FORZE SULLA MASSA m_2 INVECE SONO:

- FORZA PESO P_2 CHE SI SCOMPONE IN DUE COMPONENTI P_2' E P_2'' CHE IN MODULO VALGONO $P_2' = m_2 g \cos\theta$ E $P_2'' = m_2 g \sin\theta$;
- REAZIONE VINCOLARE $N_2 = P_2' = m_2 g \cos\theta$;
- FORZA DI ATTRITO $F_d = \mu_D N_2 = \mu_D m_2 g \cos\theta$;

IL FILO È INESTENSIBILE, QUINDI L'ACCELERAZIONE DEL FILO È LO STESSO IN TUTTE LE PARTI. SCRIVIAMO ADESSO LE EQUAZIONI DI NEWTON PER LE DUE MASSE:

$$m_1): P_1'' - T = m_1 g \Rightarrow m_1 g \sin\theta - T = m_1 a;$$

$$m_2): T - F_d + P_2'' = m_2 a \Rightarrow T - \mu_D m_2 g \cos\theta + m_2 g \sin\theta = m_2 a;$$

SOMMIAMO LE DUE EQUAZIONI:

$$\Rightarrow m_1 a + m_2 a = a(m_1 + m_2) = m_1 g \sin\theta - \cancel{T} + \cancel{T} - \mu_D m_2 g \cos\theta + m_2 g \sin\theta;$$

$$\Rightarrow a(m_1 + m_2) = g(m_1 \sin\theta - \mu_D m_2 \cos\theta + m_2 \sin\theta);$$

$$\Rightarrow a = \frac{g(m_1 \sin\theta - \mu_D m_2 \cos\theta + m_2 \sin\theta)}{m_1 + m_2} = \frac{9{,}81(0{,}48 \sin 15 - 0{,}4 \cdot 0{,}76 \sin 15 + 0{,}76 \sin 15)}{0{,}76 + 0{,}48} =$$

$$= \boxed{0{,}13\ m/s^2};$$

$$\Rightarrow m_1 g \sin\theta - T = m_1 a \Rightarrow T = m_1 g \sin\theta - m_1 a = m_1(g \sin\theta - a) =$$

$$= 0{,}48(9{,}81 \sin 15 - 0{,}13) = \boxed{1{,}12\ N}$$

AFFINCHÉ IL MOTO SIA UNIFORME OCCORRE IMPORRE CHE L'ACCELERAZIONE a SIA NULLA:

$$\Rightarrow a(m_1 + m_2) = 0 = g(m_1 \sin\theta - \mu_D m_2 \cos\theta + m_2 \sin\theta);$$

$$\Rightarrow 0 = 9{,}81(0{,}48 \sin 15 - \mu_D 0{,}76 \cos 15 + 0{,}76 \sin 15) = 9{,}81(0{,}32 - \mu_D 0{,}76 \cos 15);$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 160

EX 13: UN PUNTO MATERIALE PARTE ALL'ISTANTE $t = 0$ CON VELOCITÀ v_0 DALL'ORIGINE LUNGO IL VERSO POSITIVO DELL'ASSE x ED È SOGGETTO AD ACCELERAZIONE COSTANTE $-a$. UN SECONDO PUNTO MATERIALE PARTE CON VELOCITÀ INIZIALE NULLA A $t = 0$ DALLA POSIZIONE $x_0 > 0$ E ACCELERA CON ACCELERAZIONE COSTANTE a.

DETERMINARE: a) LE CONDIZIONI x CUI IL PRIMO PUNTO PUÒ RAGGIUNGERE IL SECONDO;

b) SE E QUANDO AVVIENE L'IMPATTO NEL CASO IN CUI $x_0 = 4,5\,m$ $v_0 = 6\,m/s$ E $a = 2\,m/s$;

SCRIVIAMO LE LEGGI ORARIE PER I DUE PUNTI:

$$\cdot\ x_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad \cdot\ x_2(t) = x_0 + \frac{1}{2} a t^2;$$

PERCHÈ I DUE PUNTI SI INCONTRINO LE LORO COORDINATE x DEVONO COINCIDERE:

$$\cdot\ x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = x_0 + \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow a t^2 + x_0 - v_0 t = 0;$$

QUESTA EQUAZIONE DI 2° GRADO HA SOLUZIONI:

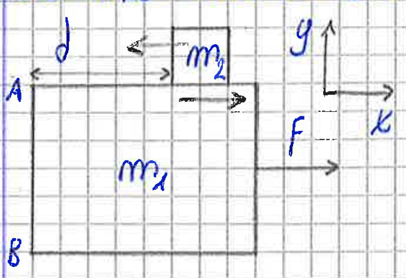
$$\Rightarrow t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 x_0 a}}{2a}$$; LE SOLUZIONI REALI SI HANNO SE IL DETERMINANTE È POSITIVO:

$\Rightarrow v_0^2 - 4 x_0 a \geq 0 \Rightarrow 6^2 - 4 \cdot 4,5 \cdot 2 = 0$ LA CONDIZIONE È RISPETTATA; IN QUESTO CASO, ESSENDO NULLO IL DETERMINANTE, ABBIAMO DUE SOLUZIONI REALI COINCIDENTI. SE NON FOSSE STATO COSÌ AVREMMO AVUTO DUE SOLUZIONI, QUELLA COL "−" È L'ISTANTE IN CUI I DUE PUNTI SI INCONTRANO PER LA PRIMA VOLTA, QUELLA CON IL "+" PUÒ ESSERE L'ISTANTE IN CUI SI INCONTRANO AL SUOLO. IN QUESTO CASO:

$$\Rightarrow t_{1,2} = t = \frac{6 - 0}{2 \cdot 2} = \boxed{1,5\,s}.$$

EX 14: SOPRA UN PIANO ORIZZONTALE È POGGIATO UN CUBO DI MASSA $m_1 = 50\,kg$ CHE SCORRE SENZA ATTRITO. SOPRA IL CUBO È APPOGGIATO UN CUBETTO DI MASSA $m_2 = 10\,kg$ A DISTANZA d DALLA FACCIA AB DEL CUBO PIÙ GRANDE. ALL'ISTANTE INIZIALE, QUANDO TUTTO È FERMO, AL CUBO È APPLICATA UNA FORZA COSTANTE $F = 100\,N$ CHE LO METTE IN MOTO. DOPO $t = 2\,s$ IL CUBETTO CADE. INOLTRE VALE CHE $d = 0,50\,m$.

DETERMINARE: IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO μ_D TRA I DUE CUBI;



RAGIONANDO A COSA SUCCEDEREBBE NELLA REALTÀ, SE IL CUBO m_1 AVESSE UNA SUPERFICIE PERFETTAMENTE LISCIA RENDENDO TRASCURABILE L'ATTRITO, NON CI SAREBBE NESSUNA FORZA APPLICATA A m_2 LUNGO x, QUINDI m_2, SE INIZIALMENTE ERA FERMO, RESTA FERMO. ESSENDO INVECE

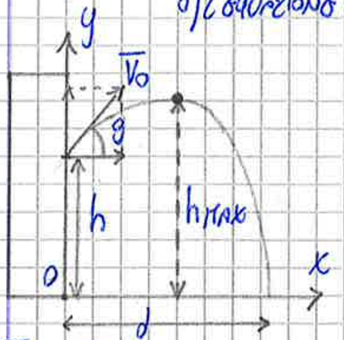
DI 8 m DAL SUOLO.

DETERMINARE: a) L'ALTEZZA MASSIMA h_{max} A CUI GIUNGE L'OGGETTO;

b) QUANTO TEMPO IMPIEGA A CADERE AL SUOLO;

c) A QUALE DISTANZA d L'OGGETTO CADE RISPETTO ALLA POSIZIONE ORIZZONTALE DEL PUNTO DI LANCIO;

d) L'EQUAZIONE CARTESIANA $y(x)$ DELLA TRAIETTORIA;



IL MOTO SI SVOLGE SU UN PIANO, DUNQUE DOVREMO SCOMPORLO NELLE DUE COMPONENTI LUNGO x E y. LUNGO x, TRASCURANDO L'ATTRITO DELL'ARIA, NON CI SONO FORZE CHE AGISCONO SULL'OGGETTO, DUNQUE IL MOTO SARÀ RETTILINEO UNIFORME; LUNGO y INVECE IL CORPO SENTE LA FORZA DI GRAVITÀ QUINDI L'UNICA ACCELERAZIONE PRESENTE È QUELLA GRAVITAZIONALE g. ANCHE LA VELOCITÀ $\overline{V}_0$ AVRÀ DUE COMPONENTI, LUNGO x E LUNGO y, OVVERO:

• LUNGO x: $V_{0x} = V_0 \cos\theta$ • LUNGO y: $V_{0y} = V_0 \sin\theta$;

LE LEGGI ORARIE DUNQUE SARANNO:

• LUNGO x: $x(t) = V_{0x}\, t$ • LUNGO y: $y(t) = h + V_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$;

RAGGIUNTA L'ALTEZZA MASSIMA IL CORPO ISTANTANEAMENTE SI FERMA, DERIVANDO LA $x(t)$ RISPETTO AL TEMPO OSSERVIAMO CHE LUNGO x LA VELOCITÀ NON SI ANNULLA MAI. LUNGO y INVECE POSSIAMO TROVARE UN ISTANTE IN CUI LA VELOCITÀ SI ANNULLA:

$$\Rightarrow V_y(t) = \frac{dy}{dt} = V_{0y} - g t' = 0 \Rightarrow t' = \frac{V_{0y}}{g};$$ LA y CORRISPONDENTE SARÀ:

$$\Rightarrow y(t') = h_{max} = h + V_{0y}\frac{V_{0y}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{V_{0y}}{g}\right)^2 = h + \frac{V_{0y}^2}{g} - \frac{1}{2}\frac{V_{0y}^2}{g} =$$

$$= h + \frac{1}{2}\frac{V_{0y}^2}{g} = h + \frac{1}{2}\frac{(V_0 \sin\theta)^2}{g} = 8 + \frac{1}{2}\frac{(15 \cdot \sin 60)^2}{9,81} = \boxed{16,6\,m};$$

QUANDO ARRIVA AL SUOLO LA $y(t)$ SI ANNULLA:

$$\Rightarrow y(t) = 0 = h + V_{0y} t'' - \frac{1}{2} g t''^2 \Rightarrow \frac{1}{2} g t''^2 - V_{0y} t'' - h = 0;$$

LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE DI 2° GRADO SONO:

$$\Rightarrow 4,90\, t''^2 - 12,99\, t'' - 8 = 0 \quad \begin{cases} t''_1 = 3,16\,s \\ t''_2 = -0,51\,s \end{cases} \Rightarrow \boxed{t''_1 = 3,16\,s};$$

LA SOLUZIONE NEGATIVA NON LA CONSIDERIAMO PERCHÉ NON CI INTERESSA QUELLO CHE SUCCEDE PRIMA DEL LANCIO, MA COSA SUCCEDE DOPO IL LANCIO. AVENDO TROVATO L'ISTANTE t'' IN CUI LA $y(t)$ SI ANNULLA, POSSIAMO

CARRUCOLA ALL'EQUILIBRIO:

$$\Rightarrow \bar{N} + T\bar{u}_x + T\bar{u}_y - P_2\bar{u}_y = 0 \Rightarrow \bar{N} = P_2\bar{u}_y - T\bar{u}_x - T\bar{u}_y = Mg\bar{u}_y - mg\bar{u}_x - mg\bar{u}_y =$$
$$= g(M-m)\bar{u}_y - mg\bar{u}_x;$$

IL PERIODO DELLE OSCILLAZIONI DELLA MASSA m SI PUÒ RICAVARE DALLA SEGUENTE FORMULA:

$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$ CON ω CHE SI PUÒ RICAVARE DALLA EQUAZIONE DEL MOTO; PRENDENDO LA POSIZIONE DI EQUILIBRIO DI m COME ORIGINE DEGLI ASSI SCRIVIAMO L'EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}K(y-x_0)^2 + mgy = 0 \text{ (A } t=0 \text{ TUTTO È FERMO)};$$

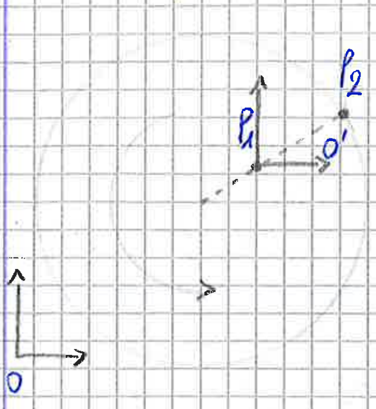
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{MR^2}{2}\right)\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}K\left(y - \frac{mg}{K}\right)^2 + mgy = 0;$$ DERIVANDO RISPETTO AL TEMPO:

$$\Rightarrow \left(\frac{M}{2} + m\right)\ddot{y} = -Ky \Rightarrow \ddot{y} + \frac{K}{\underbrace{\left(\frac{M}{2}+m\right)}}y = 0 \text{ (OSCILLATORE ARMONICO)};$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{\left(\frac{M}{2}+m\right)}} \Rightarrow T = 2\pi/\omega = \boxed{2\pi\Big/\sqrt{\frac{K}{\left(\frac{M}{2}+m\right)}}}$$

EX 17: UN DISCO DI RAGGIO R RUOTA CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE ω RISPETTO AD UN ASSE VERTICALE PASSANTE X IL CENTRO. UN PUNTO P_1, DISTANTE $r_1 < R$ DAL CENTRO, RUOTA INSIEME AL DISCO; UN SECONDO PUNTO P_2 SI TROVA LUNGO LO STESSO RAGGIO DI P_1, MA È SITUATO SUL BORDO DEL DISCO.

DETERMINARE: a) LE VELOCITÀ $\bar{v}_1$ E $\bar{v}_2$ DEI DUE PUNTI E LA LORO VELOCITÀ RELATIVA;
b) LE ACCELERAZIONI $\bar{a}_1$ E $\bar{a}_2$ DEI DUE PUNTI E LORO ACCELERAZIONE RELATIVA;



IL PUNTO P_1 PERCORRE UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO r_1, MENTRE IL PUNTO P_2 PERCORRE UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO R. LA VELOCITÀ $\bar{v}$ È PER DEFINIZIONE TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA E HA MODULO ωr CON r IL RAGGIO DELLA CIRCONFERENZA PERCORSA:

$$\Rightarrow \bar{v}_1 = \boxed{r_1\omega\bar{u}_\theta} \quad \bar{v}_2 = \boxed{R\omega\bar{u}_\theta};$$

NEL RIFERIMENTO DEL LABORATORIO VALE CHE LA VELOCITÀ DEL PUNTO P_2 È LA SOMMA DELLA VELOCITÀ RELATIVA DI P_2 RISPETTO P_1 CON LA VELOCITÀ

$\Rightarrow x(\tau) = \frac{1}{2} a \tau^2 = \frac{1}{2} 15 \cdot (2{,}47)^2 = \boxed{45{,}88\ m}$;

LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ SI OTTENGONO DERIVANDO $x(t)$ E $y(t)$ NEL TEMPO:

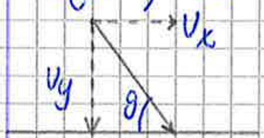
• $v_x(t) = \frac{dx}{dt} = at$ • $v_y(t) = \frac{dy}{dt} = -gt$;

$\Rightarrow v(t) = v_x \bar{u}_x + v_y \bar{u}_y = at\,\bar{u}_x - gt\,\bar{u}_y$; IL MODULO DI $v(t)$ SARÀ:

$\Rightarrow |v(t)| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2} = \sqrt{(at)^2 + (gt)^2} = \sqrt{a^2t^2 + g^2t^2} = \boxed{t\sqrt{a^2+g^2}}$;

L'ANGOLO θ DI INCIDENZA AL SUOLO SI PUÒ RICAVARE CALCOLANDO LE COMPONENTI DI $v(t)$ ALL'ISTANTE $t = \tau$:

• $v_x(t=\tau) = a\tau$ • $v_y(t=\tau) = -g\tau$;



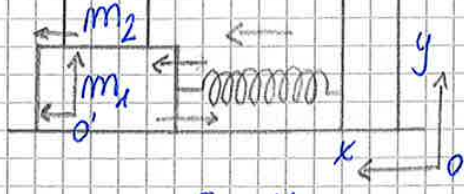
$\Rightarrow tg\,\theta = \frac{|v_y(\tau)|}{|v_x(\tau)|} = \frac{g\cancel{\tau}}{a\cancel{\tau}} = \frac{9{,}81}{15} = 0{,}654$;

$\Rightarrow \theta = tg^{-1}(0{,}654) = \boxed{33{,}18°}$;

PER DETERMINARE $y(x)$ DOBBIAMO ELIMINARE IL TEMPO:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = 2x/a \\ y(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y(x) = h - \frac{1}{\cancel{2}}g\frac{\cancel{2}x}{a} = \boxed{h - \frac{g}{a}x} \end{cases}$$

EX 19: UN CORPO DI MASSA $m_1 = 3\,Kg$ È ATTACCATO AD UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA $K = 25\,N/m$. SOPRA m_1 È POGGIATO UN SECONDO CORPO $m_2 = 1\,Kg$; IL COEFFICIENTE DI ATTRITO STATICO $\mu_s = 0{,}4$ TRA I DUE; DETERMINARE: LA MASSIMA ELONGAZIONE RISPETTO ALLA POSIZIONE DI RIPOSO CHE PUÒ AVERE IL SISTEMA SE SI VUOLE CHE m_2 NON SI MUOVA RISPETTO m_1.



m_1 VORREBBE MUOVERSI VERSO SINISTRA, MA SENTE LA FORZA DI ATTRITO APPLICATA DA m_2; E IL 3° PRINCIPIO DELLA DINAMICA m_1 REAGISCE APPLICANDO UNA FORZA UGUALE E CONTRARIA VERSO SINISTRA CHE TRASCINA CON SÉ m_2:

$m_1)$: $m_1 a_1 = -F_{as} + K|\Delta x|$;

$m_2)$: $m_2 a_2 = F_{as}$;

DIRE CHE m_2 NON SI MUOVE RISPETTO m_1 VUOL DIRE CHE CHE NEL RIFERIMENTO O' m_2 APPARE FERMO, QUINDI SECONDO IL TEOREMA DELLA COSTRUZIONE DELLE ACCELERAZIONI:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 160

$\Rightarrow \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t \Rightarrow \omega(t=t_B) = \alpha \cdot t_B = 2 \cdot 2{,}17 = 4{,}34\ s^{-1}$;

$\Rightarrow a_r(t_B) = -50 \cdot 10^{-2} \cdot (4{,}34)^2 = \boxed{-9{,}42\ m/s^2}$;

E' UN QUALSIASI MOTO CIRCOLARE VALE PER DEFINIZIONE CHE L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE VALE:

$\Rightarrow a_\theta(t) = R\alpha'(t)$; DOBBIAMO TROVARE $\alpha(t)$ NEL TRATTO $B \to A$, IN QUESTO TRATTO LA VELOCITÀ CAMBIA ANCHE IN MODULO, IN QUESTO CASO LA PARTICELLA DECELERA, QUINDI $\alpha(t)$ SARÀ NEGATIVA NEL TRATTO $B \to A$ LA LEGGE DEL MOTO È DIVERSA E CHE L'ISTANTE INIZIALE È $t = t_B$ A CUI $\theta(t_B) = 3\pi/2$ E $\omega(t_B) = 4{,}34\ s^{-1}$; QUINDI LA LEGGE ORARIA, SAPENDO CHE C'È UNA ACCELERAZIONE NEGATIVA $-\alpha'$:

$\Rightarrow \theta(t) = \theta_B + \omega_B t^* - \frac{1}{2}\alpha(t - t_B)^2$; $(t_B \le t \le t_f)$ CON $t^* = t - t_B$;

AD UN CERTO ISTANTE t_f LA PARTICELLA RAGGIUNGE DI NUOVO IL PUNTO A CON UN ANGOLO $\theta(t_f) = 2\pi$:

$\Rightarrow \theta(t_f) = 2\pi = \frac{3}{2}\pi + 4{,}34\, t_f^* - \frac{1}{2}\alpha'(t_f - 2{,}17)^2$; CON $t^* = t_f - t_B$;

SAPPIAMO INOLTRE CHE IN A LA PARTICELLA SI FERMA, QUINDI DERIVIAMO $\theta(t)$ NEL TEMPO:

$\Rightarrow \omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \omega_B - \alpha'(t - t_B) \Rightarrow 0 = \omega_B - \alpha'(t_f - t_B)$;

$\Rightarrow t_f - 2{,}17 = \frac{\omega_B}{\alpha'} \Rightarrow t_f = 2{,}17 + \frac{4{,}34}{\alpha'}$; ADESSO SOSTITUENDO SI OTTIENE:

$\Rightarrow 2\pi = \frac{3}{2}\pi + 4{,}34\left(\cancel{2{,}17} + \frac{4{,}34}{\alpha'}\right) - \frac{1}{2}\alpha'\left(\frac{\omega_B}{\alpha'}\right)^2$;

$\Rightarrow 2\pi = \frac{3}{2}\pi + 9{,}41 + \frac{(4{,}34)^2}{\alpha'} - \frac{1}{2}\frac{(4{,}34)^2}{\alpha'} \Rightarrow +7{,}84 = \frac{1}{2}\frac{18{,}83}{\alpha'}$;

$\Rightarrow +15{,}68 = \frac{18{,}83}{\alpha'} \Rightarrow \alpha' = 6\ s^{-2} \Rightarrow a_\theta = -R \cdot \alpha' = -50 \cdot 10^{-2} \cdot 6 = \boxed{-3\ m/s^2}$.

EX 21: AD UNA MASSA $m = 3\ Kg$ POSTA SU UN PIANO ORIZZONTALE SCABRO, È COLLEGATA UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA $K = 640\ N/m$ E MASSA TRASCURABILE, ALL'ESTREMO DELLA QUALE AGISCE PARALLELAMENTE AL PIANO UNA FORZA ESTERNA $F = 16\ N$. SI OSSERVA CHE IL SISTEMA È IN QUIETE.

DETERMINARE: a) DI QUANTO SI È ALLUNGATA LA MOLLA?

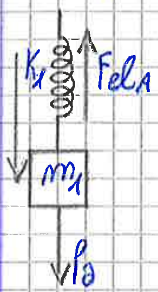
b) QUANTO VALE LA FORZA DI ATTRITO STATICO TRA LA MASSA E IL PIANO?

c) COSA SI PUÒ DEDURRE SUL μ_s TRA MASSA E PIANO?

SUPPONIAMO ADESSO DI OSSERVARE CHE LA MASSA m SI MUOVA E CHE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO $\mu_D = 0{,}5$. DETERMINARE: d) ACCELERAZIONE; e) L'ALLUNGAMENTO DELLA MOLLA;

COME AL SOLITO SI FISSA IL VERSO CONVENZIONALE POSITIVO PER LE FORZE. L'IDEA È QUELLA DI SOMMARE TRA LORO GLI ALLUNGAMENTI DELLA MOLLA AB E DELLA MOLLA CD CON $B \equiv C$; GLI ALLUNGAMENTI PROPOSTI VENGONO MISURATI UNA VOLTA CHE IL SISTEMA SI È PORTATO IN EQUILIBRIO. STUDIAMO I 3 CASI:

· CASO a):



$$\Rightarrow P_a - Fel_A = 0 \Rightarrow m_1 g - K_1 \Delta l_1 = 0 \Rightarrow m_1 g = K_1 \Delta l_1;$$

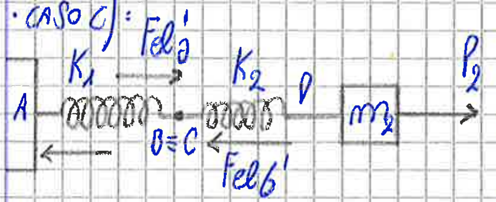
L'UNICA INCOGNITA IN QUESTA EQUAZIONE È LA COSTANTE ELASTICA K_1, QUINDI:

$$\Rightarrow K_1 = \frac{m_1 g}{\Delta l_1};$$

· CASO b): LA SITUAZIONE È ANALOGA ALLA PRECEDENTE, QUINDI:

$$\Rightarrow P_b - Fel_b = 0 \Rightarrow m_1 g - K_2 \Delta l_2 = 0 \Rightarrow m_1 g = K_2 \Delta l_2 \Rightarrow K_2 = \frac{m_1 g}{\Delta l_2};$$

· CASO c):



ABBIAMO DUE MOLLE GIUNTE IN $B \equiv C$, LE QUALI SI SCAMBIANO DUE FORZE UGUALI E OPPOSTE, LA MASSA m_2 TIRA IN BASSO, LA MOLLA CD RISPONDE CON LA FORZA ELASTICA DI RICHIAMO VERSO L'ALTO, LA MOLLA AB REAGISCE CON UNA FORZA UGUALE E OPPOSTA. IL PUNTO $B \equiv C$ È IN QUIETE, QUINDI LA SOMMA DELLE FORZE SU DI ESSO SI ANNULLA, QUINDI:

$$\Rightarrow Fel'_a = Fel'_b \Rightarrow K_1 \Delta l'_1 = \Delta l'_2 K_2 \quad (1);$$

E LA MASSA m_2 INVECE:

$$\Rightarrow P_2 = Fel'_b \Rightarrow m_2 g = K_2 \Delta l'_2$$ (GLI ALLUNGAMENTI NON SONO GLI STESSI OVVIAMENTE);

$$\Rightarrow \Delta l'_2 = \frac{m_2 g}{K_2}$$ SOSTITUENDO IN (1) OTTENIAMO:

$$\Rightarrow K_1 \Delta l'_1 = \frac{m_2 g}{\cancel{K_2}} \cancel{K_2} \Rightarrow \Delta l'_1 = \frac{m_2 g}{K_1};$$

$$\Rightarrow \Delta l_{TOT} = \Delta l'_1 + \Delta l'_2 = \frac{m_2 g}{K_1} + \frac{m_2 g}{K_2} = m_2 g \left(\frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right) =$$

$$= 0,45 \cdot 9,81 \left(\frac{\Delta l_1}{m_1 g} + \frac{\Delta l_2}{m_1 g} \right) = 4,41 \left(\frac{67 \cdot 10^{-3}}{1,25 \cdot 9,81} + \frac{19 \cdot 10^{-2}}{1,25 \cdot 9,81} \right) = \boxed{0,093\,m};$$

DUNQUE IN UNA COMBINAZIONE IN SERIE DI PIÙ MOLLE SI OSSERVA CHE È LA MOLLA CON COSTANTE ELASTICA PIÙ PICCOLA (LA MOLLA PIÙ MORBIDA) A COMANDARE L'ALLUNGAMENTO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 160

CASO IL VETTORE VELOCITÀ AL QUADRATO CORRISPONDE AL QUADRATO DEL MODULO, QUINDI:

$$\cdot E_K = \frac{1}{2}m(\bar{v}(t))^2 = \frac{1}{2}m|\bar{v}|^2 = \frac{1}{2}m\left(v_x(t)^2 + v_z(t)^2\right)$$ CON $v_x(t)$ E $v_z(t)$ DATI DA:

$$\cdot v_x(t) = \frac{dx}{dt} = v_0\cos\varphi \qquad \cdot v_z(t) = \frac{dz}{dt} = v_0\sin\varphi - gt;$$

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2}m\left[(v_0\cos\varphi)^2 + (v_0\sin\varphi - gt)^2\right] = \frac{1}{2}m\left[v_0^2\cos^2\varphi + v_0^2\sin^2\varphi - 2v_0\sin\varphi gt + g^2t^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}m\left[v_0^2(\underbrace{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}_{1}) - 2v_0\sin\varphi gt + g^2t^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2 - mv_0\sin\varphi gt;$$ A $t = 0$ VALE $E_K(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2$;

L'ENERGIA POTENZIALE INVECE È DATA DA:

$$\cdot E_P = mgz(t) = mg\left(h + v_0\sin\varphi t - \frac{1}{2}gt^2\right) = mgh + mgv_0\sin\varphi t - \frac{1}{2}mg^2t^2;$$

ALL'ISTANTE $t = 0$ VALE $E_P(t=0) = mgh$;

L'ENERGIA MECCANICA È DATA DA:

$$\cdot E = E_K + E_P = \frac{1}{2}mv_0^2 + \cancel{\frac{1}{2}mg^2t^2} - \cancel{mv_0\sin\varphi gt} + mgh + \cancel{mgv_0\sin\varphi t} - \cancel{\frac{1}{2}mg^2t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh;$$ COME SI OSSERVA L'ENERGIA MECCANICA È UNA COSTANTE, QUINDI SI CONSERVA.

SICCOME L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA, ALLORA L'ENERGIA MECCANICA A $t = 0$ È UGUALE ALL'ISTANTE t' IN CUI IL SASSO RAGGIUNGE L'ALTEZZA MASSIMA; A QUESTO ISTANTE t' LA VELOCITÀ ORIZZONTALE RESTA COSTANTE, SI PUÒ ANNULLARE QUELLA VERTICALE, QUINDI:

$$\cdot E_K(t = t') = \frac{1}{2}m\left(v_x(t)^2 + 0^2\right) = \frac{1}{2}m(v_0\cos\varphi)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2\varphi;$$

L'ENERGIA POTENZIALE INVECE:

$$\cdot E_P(t = t') = mgh_{max};$$ QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$$\Rightarrow E(t=0) = E(t=t') \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2\cos^2\varphi + \cancel{m}gh_{max};$$

$$\Rightarrow h_{max} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\cos^2\varphi = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \Rightarrow h_{max} = h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}(1 - \cos^2\varphi) =$$

$$= h + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\varphi = 20 + \frac{1}{2}\frac{(12)^2}{9{,}81}(\sin 60)^2 = \boxed{25{,}5\,m};$$

ADESSO CONSIDERIAMO IL CASO IN CUI ENTRA IN GIOCO ANCHE L'ATTRITO DELL'ARIA. DI NUOVO SFRUTTIAMO LE LEGGI

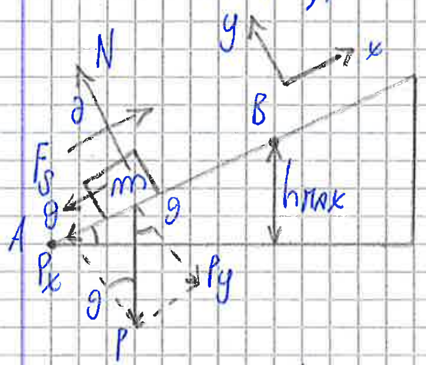
UNA VOLTA CALCOLATE LE COMPONENTI DEL MOTO SI CALCOLANO L'ENERGIA CINETICA E L'ENERGIA POTENZIALE E L'ENERGIA MECCANICA SI CALCOLANO COME PRIMA, I CALCOLI SONO ABBASTANZA LUNGHI E COMPLICATI QUINDI NON LI FACCIO.

EX 24: UN CORPO DI MASSA $m = 1,5\ Kg$ SALE LUNGO UN PIANO INCLINATO $(\theta = 30°)$ SCABRO $(\mu_D = 0,25)$, PARTENDO DALLA BASE (PUNTO A) CON VELOCITÀ $v_0 = 10\ m/s$ PARALLELAMENTE AL PIANO INCLINATO. DOPO AVER RAGGIUNTO UN'ALTEZZA MASSIMA h_{MAX} (PUNTO B), IL CORPO RIDISCENDE INDIETRO E TORNA IN A.

DETERMINARE: a) LE FORZE CHE AGISCONO SUL TRATTO, SIA NEL TRATTO $A \to B$ SIA NEL TRATTO $B \to A$;

b) CALCOLARE IL LAVORO COMPIUTO SUL CORPO DALLA FORZA PESO, DALLA FORZA DI ATTRITO, DALLA REAZIONE VINCOLARE DEL PIANO; (LUNGO IL PERCORSO CHIUSO $A \to B \to A$)

c) LA DIFFERENZA TRA L'ENERGIA CINETICA INIZIALE (IN A IN PARTENZA) E QUELLA FINALE (IN A AL RITORNO);



IN ENTRAMBI I TRATTI LA MASSA m SENTE LA FORZA PESO P CHE SI SCOMPONE IN $P_x = mg\sin\theta$ E $P_y = mg\cos\theta$, LA REAZIONE VINCOLARE N E LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO F_D. SOLO LA COMPONENTE P_x DELLA FORZA PESO FA LAVORO PERCHÉ P_y È $\perp$ ALLO SPOSTAMENTO.

$$\Rightarrow W_P = \int_A^B \bar{P}_x\, d\bar{s} = -\int_A^B mg\sin\theta\, d\bar{s};$$

CHIAMANDO $A = x_0 = 0$ E $B = d$;

$$\Rightarrow W_P^{A\to B} = -mg\sin\theta\int_0^d d\bar{x} = -mg\underbrace{\sin\theta\cdot d} = -mgh_{MAX} < 0;$$

NEL TRATTO $B \to A$ INVECE IL LAVORO FATTO DALLA FORZA PESO È:

$$\Rightarrow W_P = \int_d^0 \bar{P}_x\, d\bar{x} = -mg\sin\theta\int_d^0 d\bar{x} = mg\sin\theta\cdot d = mgh_{MAX} > 0;$$

IL LAVORO TOTALE FATTO DALLA FORZA PESO NEL TRATTO $A \to B \to A$:

$$\Rightarrow W_P^{TOT} = W_P^{A\to B} + W_P^{B\to A} = -mgh_{MAX} + mgh_{MAX} = 0;$$

ADESSO USIAMO LA FORZA DI ATTRITO PRIMA NEL TRATTO $A \to B$:

$$\Rightarrow W_S = \int_0^d \bar{F}_S\, d\bar{s} = \int_0^d -\mu_D N\, d\bar{s} \quad \text{CON } N = P_y = mg\cos\theta \Rightarrow W_S = \int_0^d -\mu_D mg\cos\theta\, d\bar{s} =$$

$$= -\mu_D mg\cos\theta\, d = -\mu_D mg\cos\theta\frac{h_{MAX}}{\sin\theta} = -\mu_D mg\frac{h_{MAX}}{tg\,\theta};$$

ADESSO NEL TRATTO $B \to A$:

$$\Rightarrow W_S = \int_d^0 \bar{F}_S\, d\bar{s} = \int_d^0 +\mu_D mg\cos\theta\, d\bar{s}$$ FARE ATTENZIONE PERCHÉ NEL TRATTO IN DISCESA LA FORZA

QUANDO IL FILO VIENE TAGLIATO LA MASSA m NON SENTE PIÙ LA TENSIONE DEL FILO, MA SENTE LA FORZA PESO VERSO IL BASSO E LA FORZA ELASTICA DI RICHIAMO VERSO L'ALTO. SAPPIAMO CHE UN CORPO PORTATO AD ALTEZZA h POSSIEDE UNA CERTA ENERGIA POTENZIALE GRAVITAZIONALE, PERÒ NON È LA SOLA FORMA DI ENERGIA POTENZIALE; PER ESEMPIO SE COMPRIMERE UNA MOLLA (O ALLUNGARLA) SI DEVE COMPIERE UN LAVORO CHE È IMMAGAZZINATO IN FORMA DI ENERGIA POTENZIALE ELASTICA. DUNQUE L'ENERGIA MECCANICA È DATA DA:

$$\cdot\ E = E_K + E_P + E_L = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}K(z-l_0)^2;$$ LE FORZE IN GIOCO SONO CONSERVATIVE QUINDI L'ENERGIA MECCANICA È COSTANTE E SI CONSERVA (LA FORZA ELASTICA È CONSERVATIVA IN QUANTO SEMPRE RIVOLTA VERSO LA LUNGHEZZA DELLA MOLLA A RIPOSO). TROVARE LA MASSIMA DISTANZA PERCORSA VUOL DIRE TROVARE DI QUANTO SI COMPRIME LA MOLLA RISPETTO LA LUNGHEZZA A RIPOSO; ALL'ISTANTE INIZIALE $\delta = 0$ LA MOLLA SI TROVA IN $z = l_0$ E TUTTO È FERMO $(v=0)$:

$$\Rightarrow E(\delta=0) = \frac{1}{2}\cancel{m}\overset{0}{v}{}^2 + mgl_0 + \frac{1}{2}K(\overset{0}{l_0 - l_0})^2 = mgl_0$$ (CIOÈ SOLO LA MASSA SOSPESA);

AD UN CERTO ISTANTE LA MOLLA SI COMPRIME DI UNA CERTA QUANTITÀ E LA MASSA SI FERMA, QUINDI:

$$\Rightarrow E(\delta=\delta') = \frac{1}{2}\cancel{m}\overset{0}{v}{}'^2 + mgz' + \frac{1}{2}K(z'-l_0)^2 = mgz' + \frac{1}{2}K(z'-l_0)^2;$$

ADESSO SFRUTTIAMO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$$\Rightarrow E(\delta=0) = E(\delta=\delta') \Rightarrow mgl_0 = mgz' + \frac{1}{2}K(z'-l_0)^2;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}K(z'-l_0)^2 + mgz' - mgl_0 = 0 \Rightarrow (z'-l_0)\left[\frac{1}{2}K(z'-l_0) + mg\right] = 0;$$

QUESTA EQUAZIONE HA 2 SOLUZIONI:

- $z' - l_0 = 0 \Rightarrow z' = l_0$ (ISTANTE INIZIALE IN CUI L'ENERGIA ELASTICA È NULLA)
- $\frac{1}{2}K(z'-l_0) + mg = 0 \Rightarrow K(z'-l_0) = -2mg \Rightarrow z' - l_0 = -\frac{2mg}{K};$

$$\Rightarrow z' = l_0 - \frac{2mg}{K}$$ OSSERVARE CHE $z' - l_0 < 0$ PERCHÉ SE L'ORIGINE DEL RIFERIMENTO È NELL'ESTREMO SUPERIORE DELLA MOLLA, COMPRIMENDOLA SI SPOSTA VERSO IL BASSO QUINDI:

$$\Rightarrow z' - l_0 = -\frac{2 \cdot 0{,}49 \cdot 9{,}81}{40} = \boxed{-0{,}14\,m}$$ (LA MOLLA SI STA COMPRIMENDO);

ADESSO SFRUTTIAMO SEMPRE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA PER AVERE INFORMAZIONI SUL MOTO:

$$\Rightarrow mgl_0 = \frac{1}{2}mv^2 + mgz + \frac{1}{2}K(z-l_0)^2$$ IN QUESTO CASO NON SIAMO ALLA FINE, MA LA VELOCITÀ MASSIMA SI RAGGIUNGE IN UN ISTANTE COMPRESO TRA $\delta = 0$ E $\delta = \delta'$. QUINDI LA VELOCITÀ È DATA DA:

NON C'È FORZA DI ATTRITO, LA MASSA SENTE SOLO LA FORZA ELASTICA; RICAVIAMO LA LEGGE DEL MOTO DALLE LEGGI DELLA DINAMICA:

$$\cdot\ ma = F_{el} = -K(x-l_0) \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -K(x-l_0) \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x-l_0);$$

LA DERIVATA SECONDA A PRIMO MEMBRO POSSIAMO RISCRIVERLA COSÌ:

$$\cdot\ \frac{d^2(x-l_0)}{dt^2} = -\frac{K}{m}(x-l_0) \Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{K}{m}x'$$

QUESTA È PROPRIO LA FORMA DELL'EQUAZIONE DIFFERENZIALE PER IL MOTO ARMONICO IN CUI LA PULSAZIONE ω^2 È DATA DA K/m, QUINDI:

$$\Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} = -\omega^2 x'$$

LE SOLUZIONI LE CONOSCIAMO E SONO: $x'(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$;

QUINDI RICORDANDOCI CHE $x' = x - l_0$ LA SOLUZIONE GENERALE È:

$$\Rightarrow x(t) = x'(t) + l_0 = l_0 + A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t);$$

LE COSTANTI A E B SI RICAVANO DALLE CONDIZIONI INIZIALI, OVVERO ALL'ISTANTE INIZIALE $t=0$ VALE CHE $x(t=0) = l_0$ E $v(t=0) = V_0$. INIZIAMO A RICAVARE LA VELOCITÀ:

$$\Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t) + B\omega\cos(\omega t), \text{ QUINDI:}$$

$$\cdot\ x(t=0) = \cancel{l_0} + A\cos(0) + B\overset{0}{\cancel{\sin}}(0) = \cancel{l_0} \Rightarrow A = 0;$$

$$\cdot\ v(t=0) = -A\omega\overset{0}{\cancel{\sin}}(0) + B\omega\cos(0) = V_0 \Rightarrow B\omega = V_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega};$$

ADESSO POSSIAMO SCRIVERE ESPLICITAMENTE LE LEGGI DEL MOTO:

$$\cdot\ x(t) = l_0 + \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t) \qquad \cdot\ v(t) = V_0\cos(\omega t);$$

ADESSO TUTTO È PIÙ SEMPLICE. L'ENERGIA CINETICA È DATA DA:

$$\cdot\ E_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(V_0\cos\omega t\right)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2\cos^2\omega t;$$

L'ENERGIA POTENZIALE È DATA DA:

$$\cdot\ E_P = \frac{1}{2}K(x-l_0)^2 = \frac{1}{2}K\left(\cancel{l_0} + \frac{V_0}{\omega}\sin\omega t - \cancel{l_0}\right)^2 = \frac{1}{2}K\frac{V_0^2}{\omega^2}\sin^2\omega t =$$

$$= \frac{1}{2}\cancel{K}\frac{m}{\cancel{K}}V_0^2\sin^2\omega t = \frac{1}{2}mV_0^2\sin^2\omega t;$$

ATTENZIONE CHE IN QUESTO CASO L'ENERGIA POTENZIALE È SOLO ELASTICA, NON C'È QUELLA GRAVITAZIONALE ~~ANCHE~~ LA MASSA m È A QUOTA $h=0$ (A LIVELLO DEL SUOLO). L'ENERGIA MECCANICA È DATA DA:

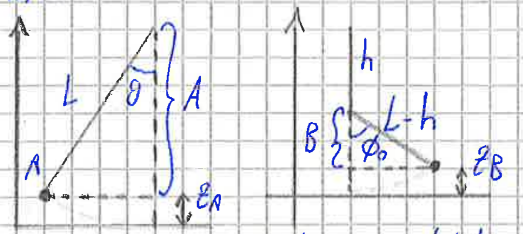
RAGIONAMENTO: SIA NEL PUNTO A CHE NEL PUNTO B IL PENDOLO SI FERMA, QUINDI $\Delta E_K^{A \to B} = 0$; LA FORZA PESO È UNA FORZA CONSERVATIVA, QUINDI LA POSSIAMO SCRIVERE COME DIFFERENZA DI POTENZIALE TRA IL PUNTO A E IL PUNTO B:

$$\cdot\ W_P^{A \to B} = -\Delta E_P = -(mgz_B - mgz_A) = mgz_A - mgz_B;$$

IL PENDOLO SI SPOSTA IN DIREZIONE TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA, DUNQUE LA TENSIONE, ESSENDO $\perp$ ALLO SPOSTAMENTO ISTANTE X ISTANTE, NON COMPIE LAVORO $(W_T^{A \to B} = 0)$. ADESSO METTENDO TUTTO INSIEME:

$$\Rightarrow 0 = mgz_A - mgz_B \Rightarrow mgz_A = mgz_B \Rightarrow \boxed{z_A = z_B};$$

PER TROVARE L'ANGOLO ϕ POSSIAMO SFRUTTARE LA RELAZIONE CHE ABBIAMO APPENA TROVATO E POSSIAMO ESPLICITARE I TERMINI:



$$A = L\cos\vartheta_0 \Rightarrow z_A = L - L\cos\vartheta_0;$$

$$B = (L-h)\cos\phi_0 \Rightarrow z_B = L - h - (L-h)\cos\phi_0;$$

SAPENDO CHE $z_A = z_B$ UGUAGLIAMO LE DUE ESPRESSIONI:

$$\Rightarrow z_A = z_B \Rightarrow \cancel{L} - L\cos\vartheta_0 = \cancel{L} - h - (L-h)\cos\phi_0 \Rightarrow h - L\cos\vartheta_0 = -(L-h)\cos\phi_0;$$

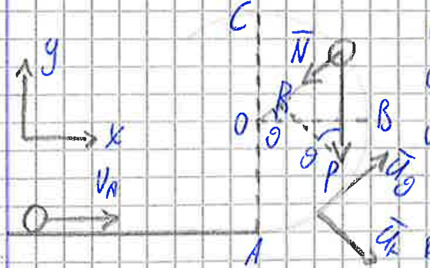
$$\Rightarrow \cos\phi_0 (L-h) = L\cos\vartheta_0 - h \Rightarrow \underline{\cos\phi_0 = \frac{L\cos\vartheta_0 - h}{L-h}}.$$

EX 28: UN CORPO DI MASSA $m = 200\ kg$ ENTRA CON VELOCITÀ $v_A = 20\ m/s$ IN UNA GUIDA VERTICALE CIRCOLARE LISCIA DI RAGGIO $R = 5\ m$;

DETERMINARE: a) LA VELOCITÀ NEI PUNTI A, B E C;

b) LA REAZIONE VINCOLARE DELLA GUIDA NEI PUNTI A, B E C;

c) IL VALORE MINIMO DI v_A AFFINCHÈ IL CORPO ARRIVI NEL PUNTO C MANTENENDO IL CONTATTO CON LA GUIDA;



RAGIONAMENTO: LA MASSA m, TROVANDOSI SULLA GUIDA, SENTE UNA REAZIONE VINCOLARE $\bar{N}$ DIRETTA VERSO IL CENTRO O, QUINDI, INTRODUCENDO UN VERSORE RADIALE $\bar{u}_r$, POSSIAMO SCRIVERE IL VETTORE VINCOLO COME:

$\cdot\ \bar{N} = -N\bar{u}_r$; INOLTRE LA MASSA SENTE SEMPRE LA FORZA PESO P RIVOLTA VERSO IL BASSO. LA FORZA PESO È CONSERVATIVA, IL VINCOLO NON COMPIE LAVORO, QUINDI L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA (LA REAZIONE VINCOLARE NON IMMAGAZZINA ENERGIA); LA MASSA HA UNA CERTA VELOCITÀ, QUINDI UNA CERTA E_K, E INOLTRE DAL MOMENTO CHE SULLA GUIDA TENDERÀ A ELEVARSI IN QUOTA, AVRÀ UNA CERTA E_P GRAVITAZIONALE:

• PUNTO A: $N^A = m\left(\frac{v_A^2}{R} - g\sin\vartheta_A\right) = 200\left(\frac{20^2}{5} - 9{,}81\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \boxed{17962\,N}$;

• PUNTO B: $N^B = m\left(\frac{v_B^2}{R} - g\sin\vartheta_B\right) = 200\left(\frac{17{,}4^2}{5} - 9{,}81\sin 0\right) = \boxed{12076\,N}$;

• PUNTO C: $N^C = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\sin\vartheta_C\right) = 200\left(\frac{14{,}3^2}{5} - 9{,}81\sin\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{6190\,N}$

x rispondere all'ultimo quesito possiamo imporre la condizione che la massa m, arrivata in C, veda sparire il vincolo, quindi il vincolo deve essere attivo fino al punto C, quindi:

$\Rightarrow N = m\frac{v^2}{R} - mg\sin\vartheta \Rightarrow N^C = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\sin\vartheta_C\right) = m\left(\frac{v_C^2}{R} - g\right) = 0$;

$\Rightarrow \frac{v_C^2}{R} - g = 0 \Rightarrow v_C^2 = gR \Rightarrow v_C = \sqrt{gR}$; adesso questa condizione la sostituiamo nella conservazione dell'energia meccanica nel tratto $A \to C$:

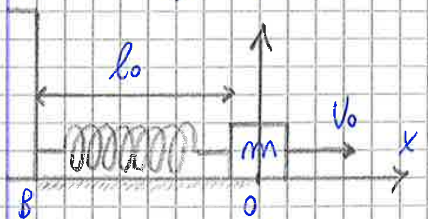
$\Rightarrow v_C^2 = v_A^2 - 4gR \Rightarrow gR = v_A^2 - 4gR \Rightarrow v_A = \sqrt{5gR} = \sqrt{5 \cdot 9{,}81 \cdot 5} = \boxed{15{,}7\,m/s}$.

EX 28: Un corpo di massa $m = 0{,}5\,kg$ è agganciato ad un supporto fisso tramite una molla di costante elastica $K = 2\,N/m$; il corpo è in quiete nel punto O di un piano orizzontale che è liscio a destra di O e scabro a sinistra di O. Viene impressa una velocità $v_0 = 0{,}16\,m/s$ verso destra.

Determinare: a) di quanto si è allungata la molla nell'istante in cui il corpo si ferma;

il corpo ripassa per O con velocità $-v_0$ e si ferma dopo aver percorso una distanza di 5 cm alla sinistra di O;

determinare: b) il coefficiente di attrito dinamico μ_D; $(\Delta x_B = -5 \cdot 10^{-2}\,m)$



Se la molla si allunga, la massa m si sposta verso destra dove non c'è attrito, quindi in questo tratto agisce solo la forza elastica che è conservativa, quindi possiamo usare la conservazione dell'energia meccanica tra la posizione iniziale in O e la posizione finale in cui la massa, raggiunto il massimo allungamento, si ferma istantaneamente:

$\Rightarrow E(t=0) = E(t=t') \Rightarrow E_K(t=0) + E_P(t=0) = E_K(t=t') + E_P(t=t')$;

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} K (\cancel{l_0 - l_0})^2 = 0 + \frac{1}{2} K \Delta x_{max}^2 \Rightarrow m v_0^2 = K \Delta x_{max}^2$;

$\Rightarrow \Delta x_{max} = v_0 \sqrt{\frac{m}{K}} = 0{,}16 \sqrt{\frac{0{,}5}{2}} = \boxed{0{,}08\,m}$;

O→A: IN QUESTO TRATTO LA MASSA m SENTE SOLO LA FORZA PESO CHE È UNA FORZA CONSERVATIVA, QUINDI POSSIAMO APPLICARE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA, OVVERO $E^O = E^A$. ESPLICITANDO I DUE TERMINI:

$\cdot E^O = \frac{1}{2} m \cancel{v_0^2} + mg z_0 = mgh$ (PARTE DA FERMO E HA SOLO POTENZIALE GRAVITAZIONALE);

$\cdot E^A = \frac{1}{2} m v_A^2 + \cancel{mg z_A} = \frac{1}{2} m v_A^2$ (ARRIVA A QUOTA NULLA CON VELOCITÀ FINITA); QUINDI:

$\Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m} v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2gh}$;

NEL TRATTO A→B LA MASSA m È SOGGETTA ALLA FORZA PESO CHE SI COMPENSA CON LA REAZIONE VINCOLARE, ALLA FORZA DI ATTRITO E ALLA FORZA ELASTICA (ALMENO K UN TRATTO). LA PRESENZA DELLA FORZA DI ATTRITO FA IN MODO CHE L'ENERGIA MECCANICA NON SI CONSERVI, POSSIAMO APPLICARE IL TEOREMA DELLA VARIAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA:

$\Rightarrow \Delta E^{A\to B} = W_{ATTRITO}$; IN QUESTO TRATTO LA MASSA m POSSIEDE ENERGIA CINETICA E ENERGIA POTENZIALE ELASTICA ALMENO K UN TRATTO (NON POSSIEDE POTENZIALE GRAVITAZIONALE), QUINDI:

$\cdot \Delta E^{A\to B} = E_B - E_A = \left(\frac{1}{2} m \cancel{v_B^2} + \frac{1}{2} K \Delta l_B^2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} K \cancel{\Delta l_A^2}\right)$; ALL'ISTANTE IN CUI IL CORPO SI TROVA IN POSIZIONE A LA MASSA NON SENTE POTENZIALE ELASTICO, QUINDI VALE CHE $\Delta l_A = 0$. SICCOME IL PROBLEMA CHIEDE DI DETERMINARE L'ALTEZZA MINIMA, ALLORA SI TRATTA DI STIMARE QUELLA ALTEZZA K CUI LA MASSA, UNA VOLTA TOCCATA LA PARETE B, SI FERMA ISTANTANEAMENTE, QUINDI ARRIVA IN B A VELOCITÀ NULLA E NON FINITA ($v_B = 0$):

$\Rightarrow \Delta E^{A\to B} = \frac{1}{2} K \Delta l_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$; ADESSO STIMIAMO IL LAVORO DELLA FORZA DI ATTRITO:

$\cdot \vec{F}_{ATTRITO} = -\mu_D m g \vec{u}_x \Rightarrow W_{ATTRITO} = \int_0^d (-\mu_D m g)\, ds = -\mu_D m g \cdot d$;

$\Rightarrow \frac{1}{2} K \Delta l_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\mu_D m g d$ SE LA MOLLA È TOTALMENTE COMPRESSA, ALLORA $\Delta l_B = l_0$;

$\Rightarrow \frac{1}{2} K l_0^2 - \frac{1}{\cancel{2}} m \cdot \cancel{2} g h = -\mu_D m g d \Rightarrow mgh = \mu_D m g d + \frac{1}{2} K l_0^2$;

$\Rightarrow h = \mu_D d + \frac{1}{2} \frac{K}{mg} l_0^2 = 0{,}1 \cdot 40 \cdot 10^{-2} + \frac{1}{2} \frac{2}{20 \cdot 10^{-3} \cdot 9{,}81} \cdot (10^{-2})^2 = \boxed{0{,}09\ m}$

ES 30: UN PUNTO MATERIALE SOGGETTO ALL'AZIONE DI UN CAMPO DI FORZE:

$\Rightarrow \vec{F}(x,y) = a x y \vec{u}_x + \frac{a}{2} x^2 \vec{u}_y$ CON $a = 1\ N/m^2$; IL PUNTO SI MUOVE SUL PIANO (x,y) LUNGO UNA TRAIETTORIA CHIUSA ABC. IL SEGMENTO AB SI TROVA LUNGO LA RETTA DI EQUAZIONE $y = 2x$ E LA COORDINATA x DEL PUNTO B È $x_B = 1m$;

$$\Rightarrow W^{C\to D} = \int_C^D \left(\partial x y + \frac{\partial}{2} x^2 \bar{u}_y\right)\left(dx\, u_x\right) = \left(\bar{u}_y \cdot \bar{u}_x = 0\right) = \int_C^D \partial x y \, dx = (y = 0) = 0;$$

$\Rightarrow W_{TOT} = \partial x_B^3 - \partial x_B^3 + 0 = 0$; IL FATTO CHE IL LAVORO SIA NULLO NON GARANTISCE CHE IL CAMPO DI FORZE $\bar{F}$ SIA CONSERVATIVO, DATO CHE AFFINCHÉ VALGA QUESTO IL LAVORO DEVE ESSERE NULLO LUNGO QUALUNQUE PERCORSO CHIUSO. PER VEDERE SE LA FORZA È CONSERVATIVA BISOGNA VERIFICARE SE ESISTE UN POTENZIALE SCALARE $U(x,y)$ DI CUI È IL GRADIENTE, SAPPIAMO CHE VALGONO LE SEGUENTI RELAZIONI:

$$\begin{cases} F_x = \partial x y = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\[2mm] F_y = \dfrac{\partial}{2} x^2 = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \end{cases}$$

DETERMINIAMO IL POTENZIALE INTEGRANDO F_x RISPETTO A x:

$$\Rightarrow U(x,y) = \int (-\partial x y)\, dx = -\partial y \frac{x^2}{2} + c(y);$$

ADESSO DERIVIAMO QUESTA ESPRESSIONE RISPETTO y E UGUAGLIAMO A F_y:

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial y} = -\partial \frac{x^2}{2} + c'(y) \Longrightarrow -\frac{\partial U}{\partial y} = +\partial \cancel{\frac{x^2}{2}} - c'(y) = F_y = \partial \cancel{\frac{x^2}{2}} \Longrightarrow c'(y) = 0;$$

SE VALE $c'(y) = 0$, ALLORA VUOL DIRE CHE $c(y) =$ COSTANTE, DUNQUE LA FUNZIONE POTENZIALE $U(x,y)$ DEFINITA A MENO DI UNA COSTANTE, ESISTE E VALE:

$\Rightarrow U(x,y) = -\dfrac{\partial}{2} x^2 y +$ COSTANTE; LA FORZA $\bar{F}$ DUNQUE È CONSERVATIVA.

ORA CONSIDERIAMO IL SECONDO CAMPO DI FORZE:

$$A\to B)\quad W^{A\to B} = \int_0^{x_B} \left(\partial x^2 \bar{u}_y\right)\left(\bar{u}_x + 2\bar{u}_y\right) dx = \left(\bar{u}_y \cdot \bar{u}_x = 0\right) = \int_0^{x_B} 2\partial x^2 dx = \frac{2}{3}\partial x_B^3;$$

$$B\to C)\quad W^{B\to C} = \int_B^C \left(\partial x^2 \bar{u}_y\right)\left(dy\, \bar{u}_y\right) = \int_{2x_B}^{0} \partial x^2 dy = -2\partial x_B^3;$$

$$C\to D)\quad W^{C\to D} = \int_C^D \left(\partial x^2 \bar{u}_y\right)\left(dx\, \bar{u}_x\right) = \left(\bar{u}_y \cdot \bar{u}_x = 0\right) = 0;$$

$$\Rightarrow W_{TOT} = \frac{2}{3}\partial x_B^3 - 2\partial x_B^3 = -\frac{4}{3}\partial x_B^3 = -\frac{4}{3} 3 \cdot 1^3 = \boxed{-4J};$$

ABBIAMO TROVATO UN PERCORSO LUNGO IL QUALE QUESTO CAMPO DI FORZA GENERA LAVORO NON NULLO, QUINDI LA FORZA NON È CONSERVATIVA.

EX 31: UNA GUIDA SEMICIRCOLARE LISCIA VERTICALE DI RAGGIO $R = 40$ cm È VINCOLATA AD UNA PIATTAFORMA ORIZZONTALE CHE SI MUOVE CON ACCELERAZIONE COSTANTE $a_0 = 2\, m/s^2$ LUNGO LA DIREZIONE ORIZZONTALE. UN PUNTO MATERIALE, INIZIALMENTE FERMO SULLA GUIDA ALL'ESTREMO DEL DIAMETRO ORIZZONTALE, VIENE LASCIATO SCIVOLARE. CALCOLARE LA VELOCITÀ V_0 RISPETTO ALLA GUIDA QUANDO IL CORPO GIUNGE NEL PUNTO PIÙ

QUINDI IN GENERALE L'ENERGIA POTENZIALE ESISTE ED È DATA DA:

$\Rightarrow U(x,z) = mgz + m a_g x$; ALL'ISTANTE INIZIALE LA PALLINA POSSIEDE SOLO POTENZIALE GRAVITAZIONALE, INFATTI PARTE DA QUOTA $z = R$, DUNQUE mgR EFFETTIVAMENTE È UNA COSTANTE. OPPURE POSSIAMO DEFINIRE COSTANTE PERÒ CHE RISPETTO IL RIFERIMENTO DELLA PIATTAFORMA IL PUNTO HA UN POTENZIALE GRAVITAZIONALE E UN "POTENZIALE APPARENTE". DUNQUE AMMETTENDO CHE LA FORZA $\vec{F}_{app}$ È CONSERVATIVA, APPLICHIAMO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA (LA FORZA APPARENTE NON È DISSIPATIVA):

$$\cdot\ E^A = E^B \Rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + m g z_A + m a_g x_A = \frac{1}{2} m v_B^2 + m g z_B + m a_g x_B;$$

IL PUNTO PARTE DA FERMO ($v_A = 0$) AD ALTEZZA $z_A = R$ E $x_A = 0$, CI INTERESSA LA VELOCITÀ $v_B = v_0$ CON CUI ARRIVA A QUOTA $z_B = 0$ E $x_B = R$:

$$\Rightarrow \cancel{m} g R = \frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} a_g R \Rightarrow v_0^2 = 2gR - 2a_g R = 2R(g - a_g);$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2R(g-a_g)} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 10^{-2}(9{,}81 - 2)} = \boxed{2{,}5\ m/s};$$

SICCOME LA GUIDA È VINCOLATA ALLA PIATTAFORMA, ALLORA SE È FERMA LA PIATTAFORMA È FERMA ANCHE LA GUIDA, OVVERO $a_g = 0$:

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{2Rg} = \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 10^{-2} \cdot 9{,}81} = \boxed{2{,}80\ m/s}$$

EX32: UN CANNONE DI MASSA $M = 2500\ kg$ SPARA UN PROIETTILE DI MASSA $m = 5\ kg$ CON VELOCITÀ $v = 300\ m/s$.

DETERMINARE:
a) LA VELOCITÀ DEL RINCULO DEL CANNONE;
b) L'ENERGIA CINETICA DEL CANNONE;
c) LA COSTANTE ELASTICA DI UNA MOLLA CHE POSSA ARRESTARE LA CORSA DEL CANNONE IN 50 cm;

AL MOMENTO DELLO SPARO IL SISTEMA SI CONSIDERA ISOLATO IN QUANTO NON AGISCONO FORZE ESTERNE, MA LE SOLE FORZE INTERNE TRA PROIETTILE E CANNONE, QUINDI LA QUANTITÀ DI MOTO SI CONSERVA TRA PRIMA E DOPO LO SPARO. PRIMA DELLO SPARO TUTTO È FERMO: LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE COMPRENDE QUELLA DEL CANNONE E DEL PROIETTILE:

$$\Rightarrow P_{PRIMA} = P_{DOPO} \text{ (UNA SOLA DIREZIONE)} \Rightarrow M v_{C0} + m v_{P0} = M v_C + m v_P;$$

$$\Rightarrow M v_C + m v_P = 0 \Rightarrow M v_C = -m v_P \Rightarrow v_C = -\frac{m}{M} v_P = -\frac{5}{2500} \cdot 300 = \boxed{-0{,}6\ m/s}$$

VELOCITÀ NEGATIVA VUOL DIRE CHE IL CANNONE SI MUOVE NELLA DIREZIONE OPPOSTA.

ALL'ISTANTE $t=t'$ LA MASSA È IN POSIZIONE $x=x_0$, QUINDI LA FORZA ELASTICA SPARISCE. PRIMA L'URTO m_2 È FERMO E m_1 SI MUOVE CON VELOCITÀ v'; DOPO L'URTO, ESSENDO COMPLETAMENTE ANELASTICO, I DUE CORPI m_1 E m_2 SI MUOVONO INSIEME CON v_f:

$$\Rightarrow P(t=t') = P(t=t_f') \Rightarrow m_1 v' + 0 = (m_1+m_2)v_f \Rightarrow v_f = \frac{m_1}{m_1+m_2}v' =$$

$$= \frac{m_1}{m_1+m_2}\Delta l\sqrt{\frac{K_e}{m_1}};$$

DOPO L'URTO LA MOLLA SI ALLUNGA VERSO DESTRA, QUINDI IL SISTEMA m_1+m_2 SENTE LA FORZA ELASTICA (CONSERVATIVA), QUINDI NUOVAMENTE APPLICHIAMO LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA TRA L'ISTANTE $t=t_f'$ E L'ISTANTE $t=t_f$:

$$\Rightarrow E(t=t_f') = E(t=t_f) \Rightarrow E_K(t=t_f') + \cancel{E_P}(t=t_f') = \cancel{E_K}(t=t_f) + E_P(t=t_f);$$

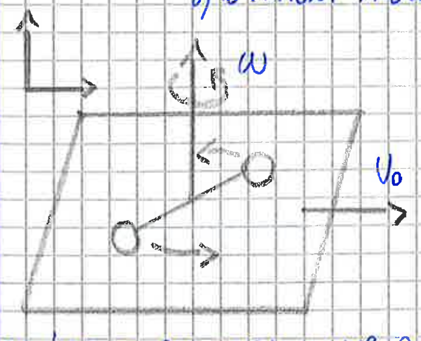
A $t=t_f$ IL SISTEMA m_1+m_2 SI FERMA, A $t=t_f'$ C'È SOLO ENERGIA CINETICA:

$$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}}(m_1+m_2)v_f^2 = \frac{1}{\cancel{2}}K_e(\Delta l_{MAX})^2 \Rightarrow \cancel{(m_1+m_2)}\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^{\cancel{2}}}\Delta l^2\frac{\cancel{K_e}}{\cancel{m_1}} = \cancel{K_e}(\Delta l_{MAX})^2$$

$$\Rightarrow (\Delta l_{MAX})^2 = \Delta l^2\frac{m_1}{m_1+m_2} \Rightarrow \Delta l_{MAX} = \Delta l\sqrt{\frac{m_1}{m_1+m_2}} = 0{,}12\sqrt{\frac{0{,}15}{0{,}15+0{,}37}} = \boxed{6{,}4\cdot 10^{-2}\,m}.$$

EX 34: DUE PUNTI MATERIALI DI UGUALE MASSA $m=0{,}5\,Kg$ SONO POSTI AGLI ESTREMI DI UNA SOTTILE ASTA RIGIDA DI MASSA TRASCURABILE E LUNGHEZZA $2R=40\,cm$, E RUOTANO IN UN PIANO ORIZZONTALE CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE $\omega=10\,s^{-1}$ RISPETTO AL CENTRO DELL'ASTA. IL SISTEMA È MONTATO SU UNA PIATTAFORMA CHE SI MUOVE CON VELOCITÀ $V_0=0{,}8\,m/s$ LUNGO UN PIANO ORIZZONTALE.

DETERMINARE: a) L'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA DEI DUE PUNTI;
b) IL MOMENTO ANGOLARE RELATIVO AL CENTRO DI MASSA;



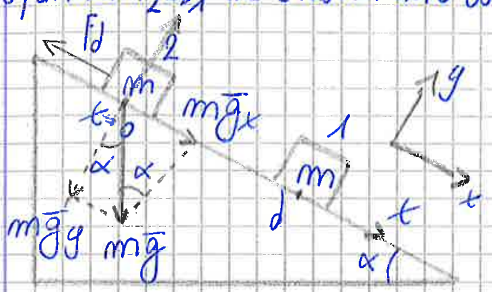
QUANDO SI CONSIDERA UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI, L'ENERGIA CINETICA TOTALE RISPETTO AL RIFERIMENTO DEL LABORATORIO, È DATA DAL TEOREMA DI KONIG, OVVERO LA SOMMA TRA L'ENERGIA CINETICA DEL CENTRO DI MASSA E L'ENERGIA CINETICA CALCOLATA RISPETTO AL CENTRO DI MASSA. IL CENTRO DI MASSA DEL SISTEMA ASTA-PUNTI MATERIALI È AL CENTRO DELL'ASTA CHE SI MUOVE IN MANIERA SOLIDALE CON LA PIATTAFORMA CON VELOCITÀ V_0; QUINDI L'ENERGIA CINETICA DEL CENTRO DI MASSA È DATA DA:

$$\cdot E_K^{CM} = \frac{1}{2}(m+m)V_{CM}^2 = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}m\cdot V_0^2 = m\cdot V_0^2;$$

LA MASSA TOTALE DEL SISTEMA COMPRENDE I DUE SOLI PUNTI MATERIALI IN QUANTO L'ASTA HA MASSA TRASCURABILE. L'ENERGIA CINETICA RISPETTO AL

c) LA VELOCITÀ DEL SISTEMA IMMEDIATAMENTE DOPO IL CONTATTO;

d) LA FORZA $F_{2\to 1}$ CHE IL CUBO A MONTE ESERCITA SU QUELLO A VALLE;



FACCIAMO DELLE CONSIDERAZIONI SULLA DINAMICA DEL SISTEMA. LA 2° LEGGE DI NEWTON PUÒ ESSERE ESPRESSA ANCHE COSÌ: LA SOMMA DELLE FORZE AGENTI SU UN CORPO È UGUALE ALLA VARIAZIONE DELLA SUA QUANTITÀ DI MOTO IN UN INTERVALLO DI TEMPO INFINITESIMO. LE FORZE COMPRENDONO SIA QUELLE INTERNE CHE QUELLE ESTERNE, MA IN UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DIPENDE SOLO DALLE FORZE ESTERNE. LE FORZE CHE AGISCONO SULLE DUE MASSE SONO:

① FORZA PESO: $\bar{g}_x = +mg\,\mathrm{sen}\alpha\,\bar{u}_x$ FORZA DI ATTRITO: $\bar{F}_d = -\mu_1 mg\cos\alpha\,\bar{u}_x$;

$\bar{g}_y = -mg\cos\alpha\,\bar{u}_y$ FORZA INTERNA: $F_{2\to 1}$;

② FORZA PESO: $\bar{g}_x = +mg\,\mathrm{sen}\alpha\,\bar{u}_x$ FORZA DI ATTRITO: $F_d = -\mu_2 mg\cos\alpha\,\bar{u}_x$;

$\bar{g}_y = -mg\cos\alpha\,\bar{u}_y$ FORZA INTERNA: $F_{1\to 2}$;

LE EQUAZIONI DI MOTO LUNGO IL PIANO SONO:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = F_{2\to 1} + mg\,\mathrm{sen}\alpha - \mu_1 mg\cos\alpha \\ \dfrac{dP_2}{dt} = F_{1\to 2} + mg\,\mathrm{sen}\alpha - \mu_2 mg\cos\alpha \end{cases} \qquad (\text{CON } F_{2\to 1} = -F_{1\to 2})$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = 2mg\,\mathrm{sen}\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha = \sum F_{ext};$$

L'INTEGRAZIONE DI QUESTA EQUAZIONE È MOLTO SEMPLICE:

$$\Rightarrow P(t) = \cancel{P(t=0)}^{0} + \left[2mg\,\mathrm{sen}\alpha - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\alpha\right]t = 2mg\left(\mathrm{sen}\alpha - \frac{\mu_1+\mu_2}{2}\cos\alpha\right)t;$$

COME SI OSSERVA LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE NON È COSTANTE, MA VARIA NEL TEMPO, QUINDI IL SISTEMA NON È ISOLATO; TUTTAVIA NEL PICCOLO INTERVALLO DI TEMPO IN CUI AVVIENE L'URTO LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE PUÒ ESSERE CONSIDERATA COSTANTE TRA PRIMA E DOPO. DALLE LEGGI DI NEWTON POSSIAMO RICAVARE IL MOTO:

$$\begin{cases} \cancel{m}a_1 = \cancel{m}g\,\mathrm{sen}\alpha - \mu_1\cancel{m}g\cos\alpha \\ \cancel{m}a_2 = \cancel{m}g\,\mathrm{sen}\alpha - \mu_2\cancel{m}g\cos\alpha \end{cases}$$

PRIMA DELL'URTO LE FORZE INTERNE NON AGISCONO, QUINDI $F_{2\to 1} = F_{1\to 2} = 0$;

• $a_1 = g\,\mathrm{sen}\alpha - \mu_1 g\cos\alpha = g(\mathrm{sen}\alpha - \mu_1\cos\alpha)$;

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 160

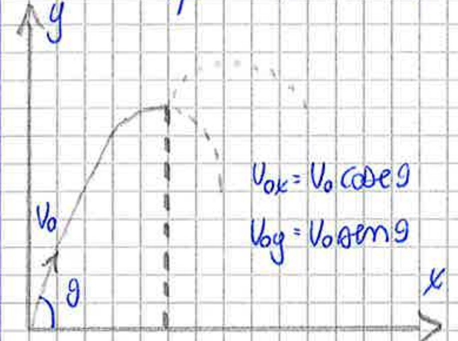
$$= m\left(a_{CM} - g\,\text{sen}\,\alpha + \mu_k\, g \cos\alpha\right) = 2\left(2{,}36 - 9{,}81 \cdot \text{sen}\,30 + 0{,}4 \cdot 9{,}81 \cos 30\right) = \boxed{1{,}70\,N}$$

EX 36: UN PROIETTILE DI MASSA M VIENE SPARATO DA TERRA ALL'ISTANTE $t=0$ CON VELOCITÀ INIZIALE DI MODULO $V_0 = 12\,m/s$ AD UN ANGOLO $\theta = 60°$ CON L'ORIZZONTALE. ARRIVATO ALLA SOMMITÀ DELLA SUA TRAIETTORIA IL PROIETTILE ESPLODE IN DUE FRAMMENTI DI MASSA PARI A $m_1 = 900\,g$ E $m_2 = 600\,g$. I DUE FRAMMENTI ARRIVANO AL SUOLO CONTEMPORANEAMENTE E LA DISTANZA DI m_2 DAL PUNTO DI LANCIO È $x_{2,cad} = 15\,m$;

DETERMINARE: a) LA POSIZIONE DI CADUTA $x_{1,cad}$ DEL FRAMMENTO m_1;

b) L'ENERGIA CINETICA $E_{k,CM}$ DEL CENTRO DI MASSA SUBITO PRIMA DELL'URTO;

c) LE VELOCITÀ DEI DUE FRAMMENTI SUBITO DOPO L'ESPLOSIONE;



$V_{0x} = V_0 \cos\theta$

$V_{0y} = V_0\,\text{sen}\,\theta$

PRIMA DELL'ESPLOSIONE I DUE FRAMMENTI SONO UNITI IN UN UNICO CORPO DI MASSA PARI A $m_1 + m_2$ CHE SI MUOVE CON VELOCITÀ PARI ALLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL MOTO RELATIVAMENTE AL CENTRO DI MASSA.

$$\Rightarrow \frac{d\bar{P}_{TOT}}{dt} = \sum \bar{F}_{ext} \Rightarrow (m_1 + m_2)\frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \sum \bar{F}_{ext};$$

L'UNICA FORZA A CUI È SOGGETTO IL PROIETTILE È LA FORZA PESO VERSO IL BASSO, LE FORZE DI COESIONE SONO FORZE INTERNE E NON CONTANO NELLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE. INOLTRE:

$$\cdot\ \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{\cancel{(m_1+m_2)}\,\bar{g}}{\cancel{(m_1+m_2)}} \Rightarrow \frac{dv^x_{CM}}{dt}\bar{u}_x + \frac{dv^y_{CM}}{dt}\bar{u}_y = -g\bar{u}_y$$ PROIETTANDO LUNGO I DUE ASSI:

LUNGO x): $\frac{dv^x_{CM}}{dt} = 0$ LUNGO y): $\frac{dv^y_{CM}}{dt} = -g$; INTEGRANDO SI OTTIENE:

LUNGO x): $v^x_{CM}(t) = v^x_{0,CM} = V_0 \cos\theta$; LUNGO y): $v^y_{CM} = v^y_{0,CM} - gt = V_0\,\text{sen}\,\theta - gt$, *

DI NUOVO INTEGRANDO SAPENDO CHE A $t=0$ IL PROIETTILE PARTE A $x^0_{CM} = y^0_{CM} = 0$ SI OTTIENE:

$$\Rightarrow x_{CM}(t) = V_0 \cos\theta \cdot t \qquad y_{CM}(t) = V_0\,\text{sen}\,\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2;$$

ISTANTE X ISTANTE IL CENTRO DI MASSA È DEFINITO COSÌ:

$$\cdot\ x_{CM}(t) = \frac{x_1(t)m_1 + x_2(t)m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow x_{CM,cad} = \frac{x_{1,cad} \cdot m_1 + x_{2,cad} \cdot m_2}{m_1 + m_2};$$

L'UNICA INCOGNITA È $x_{CM,cad}$ CHE POSSIAMO RICAVARE DALLE EQUAZIONI DEL MOTO SAPENDO CHE LA y_{CM} VALE ZERO ALLA CADUTA:

$$\Rightarrow y_{CM}(t_{cad}) = 0 = V_0\,\text{sen}\,\theta\, t_{cad} - \frac{1}{2}g t_{cad}^2 = t_{cad}\left(V_0\,\text{sen}\,\theta - \frac{1}{2}g t_{cad}\right);$$

DUE SOLUZIONI, LA PRIMA È $t_{cad} = 0$ (QUANDO IL PROIETTILE È ALL'ORIGINE), LA SECONDA È DATA DA:

POCO DOPO L'ESPLOSIONE LA COMPONENTE y DELLE VELOCITÀ DEI DUE FRAMMENTI CONTINUA ESSERE ZERO. X QUANTO RIGUARDA LE COMPONENTI LUNGO x POSSIAMO SCRIVERE LA LEGGE ORARIA DOPO L'ESPLOSIONE RICORDANDOCI CHE L'ESPLOSIONE IMPONE UNA VELOCITÀ INIZIALE PARI A QUELLA POCO DOPO L'ESPLOSIONE:

(FRAMMENTO 2): $x_2(t) = x_{20}(t=t_{exp}) + v_{2,x,dopo}(t-t_{exp})$ SAPENDO CHE:

· $x_{20}(t=t_{exp}) = v^x_{0,CM} \cdot t_{exp}$ CON t_{exp} CHE SI RICAVA DA x SAPENDO CHE $v^y_{CM}(t=t_{exp}) = 0$:

· $v^y_{CM}(t=t_{exp}) = 0 = v_0 \sin\theta - g t_{exp} \Rightarrow t_{exp} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$;

$\Rightarrow x_{20}(t=t_{exp}) = v^x_{0,CM} \cdot \frac{v_0 \sin\theta}{g}$; QUINDI:

$$\Rightarrow x_2(t) = v^x_{0,CM}\frac{v_0\sin\theta}{g} + v_{2,x,dopo}(t-t_{exp}); \text{ A } t=t_{cad} \to x_2(t=t_{cad}) = 15\,m:$$

$$\Rightarrow x_2(t_{cad}) = v^x_{0,CM}\frac{v_0\sin\theta}{g} + v_{2,x,dopo}\left(t_{cad} - \frac{v_0\sin\theta}{g}\right) =$$

$$= v^x_{0,CM}\frac{v_0\sin\theta}{g} + v_{2,x,dopo}\left(\frac{2v_0\sin\theta}{g} - \frac{v_0\sin\theta}{g}\right) =$$

$$= v^x_{0,CM}\frac{v_0\sin\theta}{g} + v_{2,x,dopo}\left(\frac{v_0\sin\theta}{g}\right) = \frac{v_0\sin\theta}{g}\left(v^x_{0,CM} + v_{2,x,dopo}\right)$$

$$\Rightarrow x_2(t_{cad})\frac{g}{v_0\sin\theta} - v^x_{0,CM} = v_{2,x,dopo} = 15\frac{9,81}{12\cdot\sin 60°} - 12\cdot\sin 60° = \boxed{8,16\,m/s};$$

PER IL FRAMMENTO 1:

$$\Rightarrow (m_1+m_2)\cdot v_0\cos 60° = m_1 v_{1,x,dopo} + m_2 v_{2,x,dopo};$$

$$\Rightarrow v_{1,x,dopo} = \frac{1}{m_1}\left[(m_1+m_2)v_0\cos 60° - m_2 v_{2,x,dopo}\right] =$$

$$= \frac{1}{0,9}\left[(0,9+0,6)\cdot 12\cdot\cos 60° - 0,6\cdot 8,16\right] = \boxed{4,56\,m/s}.$$

EX 37: UN PONTE LEVATOIO È COSTITUITO DA UNA TAVOLA AB DI MASSA $m = 600\,kg$ LUNGA $l = 4\,m$. QUESTA TAVOLA È INCERNIERATA SUL LATO A E PUÒ ESSERE ALZATA AGENDO SUL LATO B CON UNA FUNE, TIRATA DAL PUNTO C, POSTO SULLA VERTICALE PASSANTE PER A E DISTANTE l DA A.

DETERMINARE: a) IL VALORE DELLA TENSIONE DELLA FUNE QUANDO IL PONTE È IN EQUILIBRIO AD UN ANGO=

$\Rightarrow R_x = T\cos 30° = 2943 \cdot \cos 30° = \boxed{2549\,N}$;

$\Rightarrow R_y = 600 \cdot 9,81 - 2943 \cdot \sin 30° = \boxed{4414\,N}$;

L'ANGOLO CHE FORMA LA REAZIONE VINCOLARE CON L'ORIZZONTALE È:

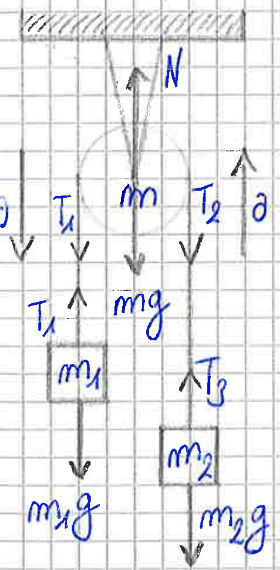
$$\Rightarrow \phi = tg^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = tg^{-1}\left(\frac{4414}{2549}\right) = 60°$$

EX 38: AD UNA CARRUCOLA DI RAGGIO R E MASSA m SONO SOSPESE DUE MASSE m_1 E m_2 CON $m_1 > m_2$. IL MOMENTO DI INERZIA DELLA CARRUCOLA RISPETTO ALL'ASSE PASSANTE X IL SUO CENTRO E ORTOGONALE AL PIANO VERTICALE IN CUI GIACE, VALE I. IL FILO NON SLITTA E NON C'È ATTRITO SULL'ASSE.

DETERMINARE: a) L'ACCELERAZIONE DELLE DUE MASSE;

b) LE TENSIONI DEL FILO;

c) LA REAZIONE SULL'ASSE DELLA CARRUCOLA;

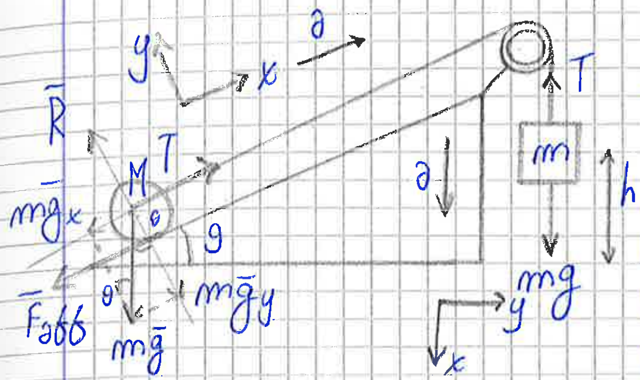


SI DICE CHE $m_1 > m_2$, QUINDI COME VERSO CONVENZIONALE DEL MOTO POSSIAMO SCEGLIERE QUELLO IN FIGURA. STAVOLTA LA CARRUCOLA HA UNA MASSA NON TRASCURABILE E QUINDI SI DOVRÀ DESCRIVERNE LA DINAMICA CON DELLE EQUAZIONI. m_1 E m_2 SONO APPROSSIMABILI CON DEI PUNTI MATERIALI, QUINDI LA RISULTANTE DELLE FORZE CHE AGISCONO SU DI ESSO SI CONFONDE CON LA FORZA AGENTE SUL PUNTO MATERIALE CHE LO RAPPRESENTA. LA CARRUCOLA INVECE È UN CORPO ESTESO E QUINDI SIAMO INTERESSATI ANCHE ALLA SUA ROTAZIONE. LE EQUAZIONI PER m_1 E m_2 SONO:

$$m_1): m_1 g - T_1 = m_1 a; \quad m_2): -m_2 g + T_2 = m_2 a;$$

SUPPONENDO CHE IL FILO HA MASSA TRASCURABILE, A DESTRA E A SINISTRA LE TENSIONI SONO UGUALI A COPPIE. ADESSO VEDIAMO LA CARRUCOLA X CUI DOBBIAMO SCRIVERE DUE EQUAZIONI: UNA X IL MOTO TRASLATORIO DEL CENTRO DI MASSA (CHE IN QUESTO CASO È FERMO) E L'ALTRA X IL MOTO ROTATORIO ATTORNO AL CENTRO DI MASSA. QUINDI:

- MOTO TRASLATORIO DEL C.M: $N - T_1 - T_2 - mg = m a_{CM} = 0 \Rightarrow N = T_1 + T_2 + mg$;
- MOTO ROTATORIO ATTORNO AL C.M: $\overline{M} = \frac{d\overline{L}}{dt}$ CON $\overline{L}$ IL MOMENTO ANGOLARE E $\overline{M}$ IL MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO, OVVERO IL CENTRO DEL DISCO. LA SECONDA EQUAZIONE CARDINALE HA LA STESSA FORMA DELLA PRIMA, SOLO CHE AL POSTO DELLE FORZE ABBIAMO IL MOMENTO DELLE FORZE, AL POSTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO ABBIAMO IL MOMENTO ANGOLARE COME PRODOTTO TRA VELOCITÀ ANGOLARE E MOMENTO DI INERZIA. INDI:



CONSIDERAZIONI: IL MOTO DI m E M SONO LEGATI, INFATTI ESSENDO IL FILO INESTENSIBILE, QUANDO LA MASSA m PERCORRE UNA DISTANZA d IN VERTICALE ANCHE M PERCORRE LA STESSA DISTANZA d LUNGO IL PIANO. QUINDI LA VELOCITÀ DI m ISTANTE PER ISTANTE È UGUALE IN MODULO DELLA VELOCITÀ DEL CENTRO DI MASSA DI M (CORPO RIGIDO). UNA VOLTA CHE m HA TOCCATO IL SUOLO IL FILO NON ESERCITA TENSIONE SUL DISCO, QUESTO DUNQUE PROCEDE ANCORA PER UN TRATTO SVINCOLATO DA m. SU m AGISCONO:

- LA TENSIONE $\bar T$ DEL FILO: $\bar T = -T\bar u_x$ · LA FORZA PESO $m\bar g$: $m\bar g = mg\bar u_x$;

ASSUMENDO m COME UN PUNTO MATERIALE POSSIAMO SCRIVERE LA SUA EQUAZIONE:

$$\Rightarrow \bar T + m\bar g = m\bar a \Rightarrow -T\bar u_x + mg\bar u_x = ma\bar u_x \Rightarrow mg - T = ma;$$

IL FILO È INESTENSIBILE, QUINDI TUTTI I PUNTI DEL FILO HANNO STESSA ACCELERAZIONE. IL DISCO SENTE:

- LA TENSIONE $\bar T$ DEL FILO: $\bar T = +T\bar u_x$;
- LA FORZA PESO DEL DISCO: $m\bar g = -Mg\sin\theta\,\bar u_x - Mg\cos\theta\,\bar u_y$;
- LA REAZIONE $\bar R$ DEL PIANO: $\bar R = R\bar u_y$;
- LA FORZA DI ATTRITO $\bar F_{att} = -F_{att}\bar u_x$; ATTENZIONE CHE NEL CASO DI UN CORPO RIGIDO CHE SI MUOVE CON MOTO DI PURO ROTOLAMENTO, IL PUNTO A CONTATTO CON IL PIANO È IN QUIETE, QUINDI NON È UNA FORZA DI ATTRITO DINAMICO, MA STATICO CHE DUNQUE È UN'INCOGNITA. INOLTRE LA FORZA DI ATTRITO È SFASATA RISPETTO IL CENTRO DI MASSA, DUNQUE CREA UN MOMENTO CHE PRODUCE ROTAZIONE; SE NON CI FOSSE ATTRITO IL DISCO NON RUOTEREBBE.

IL DISCO È UN CORPO RIGIDO QUINDI ABBIAMO BISOGNO DI DUE EQUAZIONI:

- MOTO TRASLATORIO: $\sum F_{est}(\text{lungo } x) = m a_{CM}\bar u_x = Ma\bar u_x$;

$$\Rightarrow T - Mg\sin\theta - F_{att} = Ma \ (\text{lungo } x)$$

$$\Rightarrow R - Mg\cos\theta = 0 \Rightarrow R = Mg\cos\theta; \ (\text{lungo } y)$$

PER UN CORPO RIGIDO BISOGNA PENSARE CHE LE FORZE LUNGO IL PIANO SONO APPLICATE AD UNA PARTICELLA DI MASSA PARI ALLA MASSA M CONCENTRATA NEL C.M.; IL C.M DEL DISCO SI MUOVE SOLO LUNGO x E NON LUNGO y.

- MOTO ROTATORIO: NELL'ESERCIZIO DEL PONTE LEVATOIO PER CALCOLARE I MOMENTI CI ERAVAMO MESSI NEL RIFERIMENTO DEL LABORATORIO, ADESSO PERÒ È PIÙ CONVENIENTE METTERSI NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA E USARE IL CENTRO DI MASSA COME POLO: TUTTE LE DISTANZE E LE VELOCITÀ SONO RIFERITE AL C.M E NON

$$\begin{cases} -Mg\sin\theta - F_{att} = M a_2 \ (\text{MOTO TRASLATORIO}) \\ \frac{I}{R^2} a_2 = F_{att} \ (\text{MOTO ROTATORIO}) \end{cases} \Rightarrow -Mg\sin\theta - \frac{I}{R^2} a_2 = M a_2 \Rightarrow a_2\left(M + \frac{I}{R^2}\right) = -Mg\sin\theta;$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{Mg\sin\theta}{M + \frac{I}{R^2}} = \left(I = \frac{1}{2}MR^2\right) = -\frac{2}{3} g \sin\theta;$$

SICCOME IL DISCO SI MUOVE DI MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO POSSIAMO USARE QUESTA FORMULA:

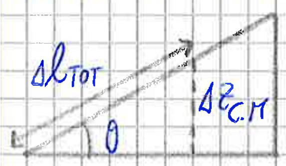
$$\Rightarrow \Delta l = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2a_2};$$ IL DISCO ALLA FINE SI FERMA, QUINDI $V_2 = 0$, INOLTRE LA VELOCITÀ V_1 È QUELLA CHE HA LA MASSA ARRIVATO AL SUOLO, QUINDI:

$$\Rightarrow \Delta l = -\frac{V_1^2}{2a_2} = +\frac{2ah \cdot 3}{2 \cdot 4 g\sin\theta} = \frac{3a}{2g\sin\theta} h;$$

IL PERCORSO TOTALE PERCORSO DAL CENTRO DI MASSA DEL DISCO È DUNQUE:

$$\Rightarrow \Delta l_{TOT} = h + \Delta l = h + \frac{3a}{2g\sin\theta} h = h\left(1 + \frac{3a}{2g\sin\theta}\right);$$

QUESTA DISTANZA LONGITUDINALE CORRISPONDE AD UNA QUOTA DEL CENTRO DI MASSA PARI A:



$$\Rightarrow \Delta z_{CM} = \Delta l_{TOT} \cdot \sin\theta = h\sin\theta\left(1 + \frac{3a}{2g\sin\theta}\right) = h\left(\sin\theta + \frac{3a}{2g}\right) = 1{,}5\left(\sin 30 + \frac{3 \cdot 1{,}09}{2 \cdot 9{,}81}\right) = \boxed{1m}$$

EX 40: UN DOPPIO PIANO È COSTITUITO DA DUE RAMPE CONTRAPPOSTE, DI MATERIALI DIVERSI, INCLINATE CIASCUNA DI UN ANGOLO θ RISPETTO ALL'ORIZZONTALE. SULLA RAMPA DI DESTRA, CHE HA COEFFICIENTI DI ATTRITO STATICO E DINAMICO $\mu_{1,s}$ E $\mu_{1,d}$, SI TROVA UN BLOCCO DI MASSA m_1 E DIMENSIONI TRASCURABILI CHE PUÒ ESSERE MODELLIZZATO COME UN PUNTO MATERIALE. SULLA RAMPA DI SINISTRA, CON COEFFICIENTI $\mu_{2,s}$ E $\mu_{2,d}$, SI TROVA UN DISCO DI MASSA m_2 E RAGGIO R. I DUE OGGETTI SONO COLLEGATI DA UN FILO INESTENSIBILE, E SI OSSERVA CHE IL DISCO SCENDE CON MOTO DI PURO ROTOLAMENTO, IL BLOCCO INVECE SALE STRISCIANDO.

DETERMINARE:
a) LA FORZA DI ATTRITO CHE AGISCE SUL BLOCCO m_1;
b) LA FORZA DI ATTRITO CHE AGISCE SUL DISCO m_2;
c) LEGGE DEL MOTO X m_1;
d) LEGGE DEL MOTO X IL C.M DEL DISCO;
e) MOTO ROTATORIO DEL DISCO ATTORNO AL SUO C.M;
d) DETERMINARE LA F_{att} SUL DISCO NEL CASO IN CUI $m_1 = 2Kg$ $m_2 = 5{,}5Kg$;
e) DETERMINARE L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA; $\theta = \pi/5$ $\mu_{1,d} = 0{,}1$

VERSO CONVENZIONALE SCELTO). INVECE IL MOMENTO ANGOLARE $\bar{L}'$ RISPETTO L'ASSE PRINCIPALE È:

$$\cdot \bar{L}' = I_{DISCO} \cdot \bar{\omega} = I_{DISCO}\,\omega\,\bar{u}_z \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(I_{DISCO}\,\omega\,\bar{u}_z\right) = F_{att} R \Rightarrow I_{DISCO}\frac{d\omega}{dt} = I_{DISCO}\,\alpha = F_{att}\cdot R;$$

LA CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO IMPONE LA RELAZIONE:

$$\Rightarrow \alpha = \frac{a}{R} \Rightarrow \underline{I_{DISCO}\frac{a}{R} = F_{att}\cdot R} \text{ (MOTO ROTATORIO)};$$ METTIAMO INSIEME LE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} T = m_1 a + m_1 g \sin\theta + \mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta \quad (1) \\ -T + m_2 g \sin\theta - F_{att} = m_2 a \quad (2) \\ F_{att} = I_{DISCO}\dfrac{a}{R^2} \quad (3) \end{cases}$$

SOSTITUIAMO LA (1) E (3) NELLA (2):

$$\Rightarrow -m_1 a - m_1 g \sin\theta - \mu_{1,D}\, m_1 g\cos\theta + m_2 g \sin\theta - I_{DISCO}\frac{a}{R^2} = m_2 a;$$

$$\Rightarrow a\left(m_1 + m_2 + \frac{I_{DISCO}}{R^2}\right) = g\left[\sin\theta\left(m_2 - m_1\right) - \mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta\right];$$

$$\Rightarrow \left(I_{DISCO} = \frac{1}{2} m_2 R^2\right) \Rightarrow a = g\,\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D}\, m_1 g\cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2} m^2};$$

$$\Rightarrow F_{att} = \frac{1}{2} m_2 \cancel{R^2}\frac{a}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2} m^2 g\,\frac{\sin\theta(m_2 - m_1) - \mu_{1,D}\, m_1 g \cos\theta}{m_1 + \frac{3}{2} m_2} =$$

$$= \frac{1}{2}\, 3{,}5\cdot 9{,}81\,\frac{\sin\pi/5\,(3{,}5 - 2) - 0{,}1\cdot 2\cdot 9{,}81\cdot \cos\pi/5}{2 + (3/2)\cdot 3{,}5} = \boxed{1{,}70\,N};$$

SE ALL'ISTANTE $t = 0$ IL C.M DEL DISCO HA UNA VELOCITÀ INIZIALE $V_{CM} = 3\,m/s$, QUANTO VALE L'ENERGIA CINETICA INIZIALE DEL DISCO? IL TEOREMA DI KONIG SCOMPONE L'ENERGIA CINETICA NEL CONTRIBUTO TRASLATORIO DEL CENTRO DI MASSA E DI QUELLO ROTAZIONALE:

$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} m_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{DISCO}\,\omega^2$$ MOTO DI PURO ROTOLAMENTO VALE DIRE $\omega = \frac{V_{CM}}{R}$ QUINDI:

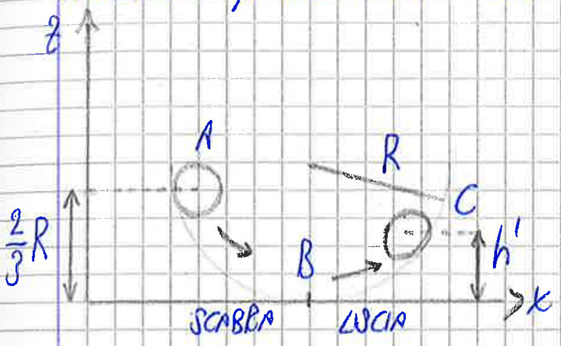
$$\Rightarrow E_K = \frac{1}{2} m_2 V_{CM}^2 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} m_2 \cancel{R^2}\cdot\frac{V_{CM}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2} V_{CM}^2\left(m_2 + \frac{1}{2} m_2\right) = \frac{1}{2} V_{CM}^2 \cdot \frac{3}{2} m_2 =$$

$$= \frac{3}{4} V_{CM}^2\, m_2 = \frac{3}{4}\cdot(3)^2\cdot 3{,}5 = \boxed{24{,}6\,J}.$$

EX 42: UNA GUIDA A SEZIONE SEMICIRCOLARE DI RAGGIO R È COMPOSTA DA DUE PARTI: LA METÀ A SINISTRA È SCABRA, MENTRE LA METÀ A DESTRA È PERFETTAMENTE LISCIA E PRIVA DI ATTRITO. ALL'ISTANTE $t=0$ UNA SFERA PIENA DI RAGGIO $R/4$ E MASSA m È POSTA SULLA PARTE SINISTRA DELLA GUIDA E IL SUO BARICENTRO SI TROVA AD UN'ALTEZZA $h=(2/3)R$ RISPETTO AL FONDO DELLA GUIDA. LA SFERA È LASCIATA CADERE CON VELOCITÀ NULLA E ROTOLA SENZA STRISCIARE SOTTO L'AZIONE DELLA FORZA PESO.

DETERMINARE: a) LA VELOCITÀ DEL C.M DELLA SFERA QUANDO ESSA RAGGIUNGE IL PUNTO PIÙ BASSO DELLA GUIDA; DOPO AVER SUPERATO IL PUNTO PIÙ BASSO DELLA GUIDA LA SFERA PROSEGUE NELLA PARTE DESTRA LISCIA.

DETERMINARE: b) L'ALTEZZA MASSIMA h' CHE IL C.M DELLA SFERA RAGGIUNGE NELLA PARTE DESTRA.



NEL TRATTO $A \to B$ LA SFERA ROTOLA IN VIRTÙ DELLA FORZA DI ATTRITO. POSSIAMO DIRE CHE L'ENERGIA MECCANICA SI CONSERVA IN QUESTO TRATTO PERCHÉ SICCOME IL PUNTO DI CONTATTO È IN QUIETE LA FORZA DI ATTRITO NON FA LAVORO. INOLTRE ANCHE LA FORZA PESO E LA REAZIONE VINCOLARE NON FANNO LAVORO, QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$\Rightarrow E_m^A = E_m^B$; IN A IL CORPO È FERMO AD UNA CERTA ALTEZZA, QUINDI ABBIAMO SOLO ENERGIA POTENZIALE:

$\cdot E_m^A = E_p^A = mgh = mg\frac{2}{3}R$; IN B LA SFERA ARRIVA CON UNA CERTA ENERGIA CINETICA TRASLATORIA E ROTATORIA, SICCOME SIAMO A QUOTA ZERO NON ABBIAMO POTENZIALE GRAVITAZIONALE:

$\cdot E_m^B = \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{2}I\omega_B^2$ LA CONDIZIONE DI PURO ROTOLAMENTO IMPONE $\omega_B = \frac{v_{CM,B}}{R/4}$:

$$\Rightarrow E_m^B = \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{2}I\left(\frac{4v_{CM,B}}{R}\right)^2 = \left(I_{sfera} = \frac{2}{5}m\left(\frac{R}{4}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{5}m\frac{\cancel{R^2}}{\cancel{16}}\cdot\frac{\cancel{16}\,v_{CM,B}^2}{\cancel{R^2}} = \frac{1}{2}mv_{CM,B}^2 + \frac{1}{5}mv_{CM,B}^2 = \frac{7}{10}mv_{CM,B}^2;$$

ATTENZIONE PERÒ CHE IL C.M NON È A QUOTA ZERO IN B, MA A QUOTA $R/4$ DA CUI SI VEDONO LE DIFFERENZE CON I PUNTI MATERIALI:

$$\Rightarrow E_m^B = \frac{7}{10}mv_{CM,B}^2 + mg\frac{R}{4} \Rightarrow mg\frac{2}{3}R = \frac{7}{10}mv_{CM,B}^2 + mg\frac{R}{4};$$

$$\Rightarrow mgR\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \cancel{m}gR\frac{5}{12} = \cancel{m}v_{CM,B}^2\frac{7}{10} \Rightarrow v_{CM,B}^2 = \frac{\cancel{50}\,25}{42\,\cancel{84}}gR = \frac{25}{42}gR;$$

$$\Rightarrow v_{CM,B} = \sqrt{\frac{25}{42}gR};$$ ADESSO VEDIAMO IL 2° TRATTO IN CUI IL PIANO È LISCIO, NON C'È ATTRITO E QUINDI L'ENERGIA

DUNQUE È SOLO LA COMPONENTE LUNGO x CHE NON SI CONSERVA NEL TEMPO, LE COMPONENTI LUNGO y E z DEL MOMENTO ANGOLARE INVECE SI CONSERVANO. POSSIAMO USARE IL FATTO CHE L_z SI CONSERVA PRIMA E DOPO L'URTO; PRIMA DELL'URTO L'UNICO CONTRIBUTO LO DA IL DISCO LUNGO z (LA PALLINA NO XCHÈ DA CONTRIBUTO LUNGO x), DOPO L'URTO SIA IL DISCO CHE IL PUNTO RUOTANO INTORNO ALL'ASSE z DANDO CONTRIBUTO A L_z:

$$* \Rightarrow L_z^{PRIMA} = L_z^{DOPO} \Rightarrow I_{DISCO}\,\omega \text{ (SOLO DISCO)} = I_{DISCO}\,\omega' + md^2\omega' = \omega'(I_{DISCO} + md^2);$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{I_{DISCO}}{I_{DISCO} + md^2} = \frac{1\cdot\omega}{1 + \frac{md^2}{I_{DISCO}}} = \left(I_{DISCO} = \frac{1}{2}MR^2\right) = \underline{\frac{1\cdot\omega}{1 + md^2\frac{2}{MR^2}}};$$

LA QUANTITÀ DI MOTO NON SI CONSERVA, QUINDI:

$\cdot\ \Delta\bar{P} = \bar{P}_{DOPO} - \bar{P}_{PRIMA}$; QUESTA VARIAZIONE È DOVUTA AL FATTO CHE AL MOMENTO DELL'URTO RENDE INATTIVA LA FORZA PESO. LA QUANTITÀ DI MOTO È ASSOCIATA AL MOTO TRASLATORIO, QUINDI IL DISCO NON HA QUANTITÀ DI MOTO NÈ PRIMA NÈ DOPO L'URTO (IL SUO C.M È FERMO), QUINDI È LA SOLA PALLINA A DARE CONTRIBUTO IN PARTICOLARE PRIMA DELL'URTO LA QUANTITÀ DI MOTO È LUNGO z IN VERSO OPPOSTO:

$\cdot\ \bar{P}_{PRIMA} = -m v_p \bar{u}_z$; DOPO INVECE LA PALLINA RESTA ATTACCATA E INIZIA A RUOTARE, QUINDI LA SUA VELOCITÀ È TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA DESCRITTA IN PARTICOLARE APPENA DOPO L'URTO È DIRETTA LUNGO x, MA IN VERSO OPPOSTO:

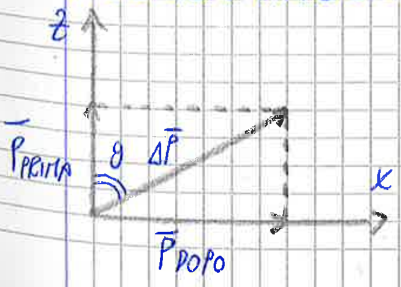
$\cdot\ \bar{P}_{DOPO} = -m v_p' \bar{u}_x = (v_p' = \omega' d) = -m\omega' d\,\bar{u}_x$; QUINDI:

$\Rightarrow \underline{\Delta\bar{P} = -m\omega' d\,\bar{u}_x + m v_p \bar{u}_z}$; POSSIAMO RICAVARE v_p DALLA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA NEL TRATTO VERTICALE:

$\cdot\ E_m^A = E_m^B \Rightarrow \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v_p^2 \Rightarrow v_p = \sqrt{2gh}$; IL MODULO DI $\Delta\bar{P}$ È DATO DA:

$$\Rightarrow |\Delta\bar{P}| = \sqrt{|\bar{P}_{DOPO}|^2 + |\bar{P}_{PRIMA}|^2} = \sqrt{(m\omega' d)^2 + (m\sqrt{2gh})^2} = \sqrt{\left(md\frac{\omega}{1 + md^2\frac{2}{MR^2}}\right)^2 + 2m^2gh};$$

L'ANGOLO CHE IL VETTORE $\Delta\bar{P}$ FORMA CON LA VERTICALE È DATO DA:



$$\bar{P}_{PRIMA} = \Delta\bar{P}\cos\theta; \quad \bar{P}_{DOPO} = \Delta\bar{P}\sin\theta;$$

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{|\bar{P}_{DOPO}|}{|\bar{P}_{PRIMA}|} = \frac{\cancel{m}\omega' d}{\cancel{m}v_p} = \frac{\omega' d}{v_p} =$$

$$= \frac{\omega d}{\left(1 + md^2\frac{2}{MR^2}\right)\sqrt{2gh}};$$

L'URTO. IL MODULO DEL MOMENTO ANGOLARE PUÒ ESSERE SCRITTO COME IL PRODOTTO TRA QUANTITÀ DI MOTO E IL BRACCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO. PRIMA DELL'URTO SOLO LA PALLINA HA MOMENTO ANGOLARE, DOPO LA PALLINA RIMBALZA E L'ASTA RUOTA:

$$\cdot\ \bar{L}_{PRIMA} = \bar{L}_{DOPO} \Rightarrow \frac{l}{2} m\bar{v} = -\frac{l}{2} m\bar{v}' + I\bar{\omega} \Rightarrow \frac{l}{2} m v\bar{u}_x = -\frac{l}{2} m\bar{v}'\bar{u}_x + I\omega\bar{u}_z$$

L'ASTA RUOTA ATTORNO ALL'ASSE Z CON VERSORE USCENTE (ROTAZIONE ANTIORARIA); ANCHE IL MOMENTO ANGOLARE DELLA PALLINA È RIVOLTO LUNGO Z. IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA SBARRA È $\frac{1}{12}Ml^2$, QUINDI:

$$\Rightarrow \frac{\cancel{l}}{2} mv = -\frac{\cancel{l}}{2} mv' + \frac{1}{12} Ml^{\cancel{2}}\omega \Rightarrow mv + mv' = \frac{1}{6} Ml\omega;$$

$$\Rightarrow m(v+v') = \frac{1}{6} Ml\omega \Rightarrow \omega = 6\frac{m(v+v')}{Ml} = 6\frac{1\cdot(2+0{,}5)}{12\cdot 1} = \boxed{1{,}25\ s^{-1}};$$

L'IMPULSO $\bar{J}$ X DEFINIZIONE È DATO DA:

$\cdot\ \bar{J} = \bar{P}_{DOPO} - \bar{P}_{PRIMA}$; PRIMA DELL'URTO C'È SOLO LA PALLINA CHE PORTA QUANTITÀ DI MOTO, DOPO L'URTO ABBIAMO LA PALLINA CHE PORTA QUANTITÀ DI MOTO, L'ASTA NO PERCHÉ QUESTA RUOTA, MA IL SUO C.M. È FERMO:

$$\Rightarrow \bar{P}_{PRIMA} = m\bar{v} = +mv\bar{u}_x; \quad \bar{P}_{DOPO} = m\bar{v}' = -mv'\bar{u}_x;$$

$$\Rightarrow \bar{J} = -mv'\bar{u}_x - mv\bar{u}_x = -m(v'+v)\bar{u}_x = -1\cdot(2+0{,}5)\cdot\bar{u}_x = \boxed{-2{,}5\,\bar{u}_x};$$

CONSIDERAZIONI: IN CASO DI URTO ELASTICO SI CONSERVANO LA QUANTITÀ DI MOTO E L'ENERGIA CINETICA DEL SISTEMA (ERRORE: NON LA QUANTITÀ DI MOTO); IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE CONTINUA A CONSERVARSI, QUINDI POSSIAMO INTRODURRE DUE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} \bar{L}_{PRIMA} = \bar{L}_{DOPO} \Rightarrow \frac{l}{2} mv\bar{u}_z = -\frac{l}{2} mv''\bar{u}_z + I\omega'\bar{u}_z \\ \bar{E}_k^{PRIMA} = \bar{E}_k^{DOPO} \Rightarrow \frac{1}{\cancel{2}} mv^2 = \frac{1}{\cancel{2}} mv''^2 + \frac{1}{\cancel{2}} I\omega'^2 \end{cases}$$

PRIMA IL TESTO CI DICEVA LA VELOCITÀ DOPO L'URTO, ADESSO IN CASO DI URTO ELASTICO AVREMO UNA NUOVA VELOCITÀ DOPO L'URTO E UNA NUOVA VELOCITÀ ANGOLARE. ADESSO RISOLVIAMO IL SISTEMA NELLE INCOGNITE ω' E v'':

$$\begin{cases} ① \ \frac{l}{2} mv = -\frac{l}{2} mv'' + I\omega' \Rightarrow \frac{l}{2} mv + \frac{l}{2} mv'' = \frac{l}{2} m(v+v'') = I\omega' \\ ② \ mv^2 = mv''^2 + I\omega'^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \omega' = \frac{(l/2)\,m(v+v'')}{I}; \text{ SOSTITUENDO IN ②:}$$

$$\Rightarrow v'' = \frac{I-(ml^2/4)}{I+(ml^2/4)} v = \left(I = \frac{1}{12} 12\cdot 1^2 = 1\ kg\cdot m^2\right) = \frac{1-(1\cdot 1^2/4)\cdot 2}{1+(1\cdot 1^2/4)} = 1{,}2\ m/s;$$

ERA QUELLO DI UN ASSE NON PASSANTE X IL C.M, QUINDI BISOGNAVA USARE IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER, E SI OTTENEVA LO STESSO RISULTATO. ALLA FINE ABBIAMO:

$$\Rightarrow \cancel{M}gl = \cancel{M}g\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\cancel{M}\omega_-^2\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}\cancel{M}l^2\omega_-^2;$$

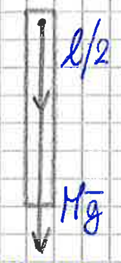
$$\Rightarrow \frac{1}{2}g\cancel{l} = \frac{1}{2}\omega_-^2\frac{l^{\cancel{2}}}{4} + \frac{1}{24}l^{\cancel{2}}\omega_-^2 \Rightarrow g = \frac{\omega_-^2}{4}l + \frac{1}{12}l\omega_-^2;$$

$$\Rightarrow g = \omega_-^2 l\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right) = \omega_-^2 l\frac{1}{3} \Rightarrow \omega_- = \sqrt{\frac{3g}{l}} = \sqrt{\frac{3\cdot 9{,}81}{1{,}2}} = \boxed{4{,}95\, s^{-1}};$$

LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA ASTA+PUNTO NON SI CONSERVA XCHÈ SULL'ASTA AGISCONO LA FORZA PESO E LA REAZIONE VINCOLARE. X LA QUANTITÀ ANGOLARE TOTALE INVECE POSSIAMO DIRE:

$$\cdot \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_{ext} = \cancel{\bar{M}_R}^{0} + \bar{M}_{peso} = +\frac{l}{2}Mg\bar{u}_z \text{ con } \bar{u}_z \text{ VERSORE ENTRANTE (ROTAZIONE ORARIA)};$$

QUINDI IN GENERALE ANCHE IL MOMENTO ANGOLARE TOTALE NON SI CONSERVA; PERÒ AL MOMENTO DELL'URTO:



AL MOMENTO DELL'URTO L'ASTA È VERTICALE, QUINDI IL VETTORE DISTANZA E LA FORZA PESO SONO // TRA DI LORO, QUINDI SOLO IN QUESTO ISTANTE ANCHE IL MOMENTO DELLA FORZA PESO SI ANNULLA. DUNQUE SOLO IN QUESTO ISTANTE IL MOMENTO ANGOLARE SI CONSERVA:

$\cdot \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \ (a\ t = t_{urto}) \Rightarrow \bar{L}_{poco\ prima} = \bar{L}_{poco\ dopo}$; FISSANDO IL POLO IN A OSSERVIAMO CHE:

$\cdot \bar{L}_{poco\ prima} = I_A\omega_-\bar{u}_z$ $\quad \cdot \bar{L}_{poco\ dopo} = mv_0 l\bar{u}_z$; I_A È IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO UN ASSE NON PASSANTE X IL C.M CHE SI CALCOLA CON IL TEOREMA DI HUYGENS-STEINER:

$$\cdot I_A = I_{CM} + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2;$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}Ml^{\cancel{2}}\omega_-\cancel{\bar{u}_z} = mv_0\cancel{l}\cancel{\bar{u}_z} \Rightarrow v_0 = \frac{1}{3}\frac{Ml}{m}\omega_- = \frac{1}{3}\frac{0{,}5\cdot 1{,}2}{0{,}25}\cdot 4{,}95 = \boxed{3{,}96\, m/s};$$

L'ENERGIA CINETICA DISSIPATA TRA PRIMA E DOPO L'URTO È:

$$\cdot \Delta E_k = E_k^{poco\ dopo} - E_k^{poco\ prima} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I_A\omega_-^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega_-^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(mv_0^2 - \frac{1}{3}Ml^2\omega_-^2\right) = \frac{1}{2}\left(0{,}25\cdot 3{,}96^2 - \frac{1}{3}0{,}5\cdot 1{,}2^2\cdot 4{,}95^2\right) = \boxed{-0{,}98\, J};$$

L'IMPULSO INVECE È DATO DA:

$\Rightarrow \bar{J} = \bar{P}_{dopo} - \bar{P}_{prima}$; POCO PRIMA DELL'URTO ABBIAMO IL CENTRO DI MASSA CHE FORNISCE QUANTITÀ DI MOTO,

$$\Rightarrow -ma_G = ma_t' + I\frac{a_t'}{R^2} = a_t'\left(m+\frac{I}{R^2}\right) \Rightarrow a_t' = -\frac{ma_G}{m+\frac{I}{R^2}} = -\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}a_G;$$

L'ACCELERAZIONE a RISPETTO AL SUOLO, QUINDI È DATO DA:

$$\Rightarrow a = a_G + a_t' = a_G - \frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}a_G = a_G\left(1-\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}\right) = \frac{I/mR^2}{1+\frac{I}{mR^2}}a_G;$$

LA FORZA DI ATTRITO È:

$$\cdot\ F_{att} = -I\frac{a_t'}{R^2} = +\frac{I}{R^2}\frac{1}{1+\frac{I}{mR^2}}a_G = \frac{I}{\cancel{R^2}}\frac{m\cancel{R^2}}{I+mR^2}a_G = \frac{Im}{I+mR^2}a_G;$$

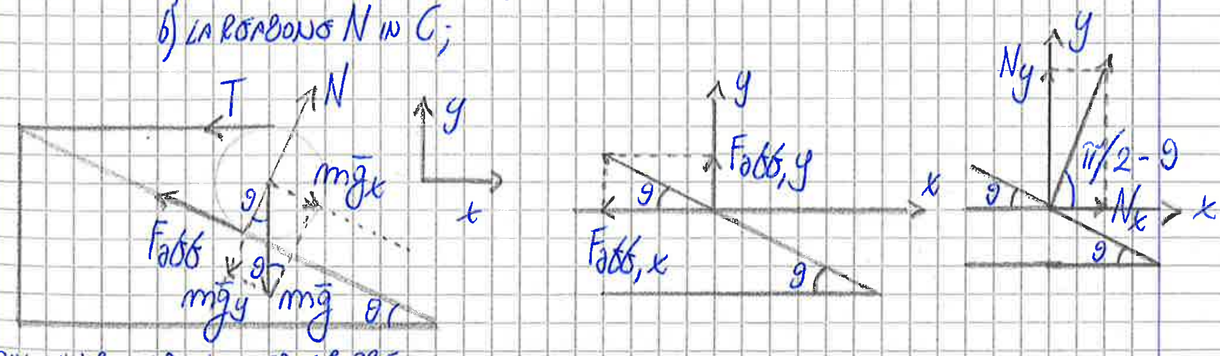
AFFINCHÉ L'ATTRITO RIMANGA STATICO E IL CILINDRO NON STRISCI DEVE VALERE:

$$\Rightarrow |F_{att}| \le F_{att\,max} \Rightarrow \frac{I\cancel{m}}{I+mR^2}a_G \le \mu_s \cancel{m}g \quad \text{con } I = \frac{1}{2}mR^2:$$

$$\Rightarrow \frac{1/2\,\cancel{mR^2}}{1/2\,\cancel{mR^2}+\cancel{mR^2}} = \mu_s g \Rightarrow \mu_s g = \frac{1}{3} \Rightarrow \mu_s = \frac{1}{3\cdot g} = \boxed{0{,}033}$$

EX 47: UN CILINDRO DI RAGGIO $R = 20\ cm$ E MASSA $m = 150\ kg$ È APPOGGIATO SU UN PIANO INCLINATO DI UN ANGOLO $\theta = 30°$ ED È TENUTO FERMO DA UNA CORDA TESA ORIZZONTALMENTE; L'ATTRITO STATICO TRA IL CILINDRO E IL PIANO NEL PUNTO DI CONTATTO C È SUFFICIENTE A IMPEDIRE LO SLITTAMENTO.

DETERMINARE: a) LA TENSIONE T DELLA CORDA;
b) LA REAZIONE N IN C;



SUL CILINDRO AGISCONO QUESTE FORZE:

$\cdot$ FORZA PESO: $m\bar{g} = -mg\bar{u}_y$; $\cdot$ TENSIONE DEL FILO: $\bar{T} = -T\bar{u}_x$;

$\cdot$ REAZIONE VINCOLARE: $\bar{N} = N\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\bar{u}_x + N\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\bar{u}_y = N\sin\theta\,\bar{u}_x + N\cos\theta\,\bar{u}_y$;

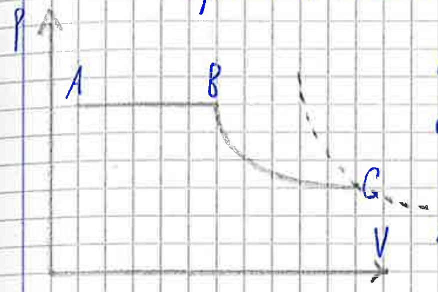
$\cdot$ FORZA DI ATTRITO: $\bar{F}_{att} = -F_{att}\cos\theta\,\bar{u}_x + F_{att}\sin\theta\,\bar{u}_y$;

LA FORZA DI ATTRITO È DI TIPO STATICO IN QUANTO IL MOTO È DI PURO ROTOLAMENTO, QUINDI È UNA INCOGNITA.

EX 48: UN GAS IDEALE ($m = 0,45$ mol) PASSA CON UNA ISOBARA REVERSIBILE DALLO STATO A ($p_A = 2$ bar) ALLO STATO B, COMPIENDO UN LAVORO $W_{A\to B} = 640$ J. SUCCESSIVAMENTE IL GAS PASSA DALLO STATO B ALLO STATO C ($T_C = 459,7$ K) CON UNA ISOTERMA REVERSIBILE, COMPIENDO UN LAVORO $W_{B\to C} = 454$ J.

DETERMINARE: a) I VOLUMI V_A, V_B, V_C;

b) SI PUÒ TORNARE DA C A A CON UNA ADIABATICA REVERSIBILE;



INNANZITUTTO CONVERTIAMO LA PRESSIONE IN PASCAL (SISTEMA INTERNAZIONALE): $p_A = 2$ bar $= 2\cdot 10^5$ Pa;

SAPPIAMO CHE NEL TRATTO B→C LA TEMPERATURA È COSTANTE IN QUANTO LA TRASFORMAZIONE È ISOTERMA, QUINDI:

$\cdot\ T_B = T_C = 459,7$ K; APPLICANDO LA LEGGE DI STATO DEI GAS IDEALI:

$$\Rightarrow p_B V_B = mRT_B$$ SAPENDO CHE $p_A = p_B$ XCHÈ NEL TRATTO A→B LA TRASFORMAZIONE È ISOBARA:

$$\Rightarrow V_B = \frac{1}{p_A} mRT_C = \frac{1}{2\cdot 10^5}\, 0,45\cdot 8,314\cdot 459,7 = \boxed{8,60\cdot 10^{-3}\ m^3};$$

FACCIAMO UNA VERIFICA DELLE UNITÀ DI MISURA:

$$\cdot[V_B] = \frac{1}{Pa}\cdot \cancel{mol}\cdot\frac{J}{\cancel{mol}\cdot\cancel{K}}\cdot\cancel{K} = \frac{J}{Pa} = \frac{N\cdot m}{N/m^2} = [m^3];$$

IL TRATTO A→B È ISOBARO, QUINDI USIAMO L'ESPRESSIONE DEL LAVORO X UNA TRASFORMAZIONE ISOBARA:

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = p_A\int_{V_A}^{V_B} dV = p_A(V_B - V_A) = p_A V_B - p_A V_A \Rightarrow p_A V_A = p_A V_B - W_{A\to B};$$

$$\Rightarrow V_A = V_B - \frac{W_{A\to B}}{V_A} = 8,60\cdot 10^{-3} - \frac{640}{2\cdot 10^5} = \boxed{5,40\cdot 10^{-3}\ m^3};$$

ADESSO VEDIAMO IL TRATTO B→C IN CUI ABBIAMO UNA ISOTERMA:

$$\Rightarrow W_{B\to C} = \int_{V_B}^{V_C} p\,dV = \left(p = \frac{mRT_C}{V}\right) = \int_{V_B}^{V_C}\frac{mRT_C}{V}dV = mRT_C\int_{V_B}^{V_C}\frac{1}{V}dV = mRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right);$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = \frac{W_{B\to C}}{mRT_C} \Rightarrow V_C = V_B\cdot \exp\left\{\frac{W_{B\to C}}{mRT_C}\right\} = 8,60\cdot 10^{-3}\cdot \exp\left\{\frac{454}{0,45\cdot 8,314\cdot 459,7}\right\} =$$

$$= \boxed{11,20\cdot 10^{-3}\ m^3}$$

LE CURVE DELLA ADIABATICA HANNO UNA PENDENZA MAGGIORE RISPETTO ALLE CURVE ISOTERME, QUINDI MUOVENDOCI DA C VERSO A IL VOLUME DIMINUISCE, E QUINDI LA TEMPERATURA AUMENTA CON UNA CURVA DI PENDENZA MAGGIORE RISPETTO LA CURVA B→C. QUINDI NON SI PUÒ TORNARE VERSO A CON UNA ADIABATICA REVERSIBILE.

ESERCITA UNA FORZA SUL GAS STESSO ED È DATA DAL SEGUENTE LAVORO:

$\cdot\ W'_{A\to B} = -p_{atm}(V_B - V_A) = \frac{N}{m^2}\cdot m^3 = [N\cdot m]$ IN CUI IL SEGNO "−" INDICA CHE È UNA FORZA ESERCITATA DALL'ESTERNO CHE SI OPPONE ALL'ESPANSIONE DEL GAS. LA FORZA CHE IL GAS ESERCITA CONTRO L'ATMOSF.= FORZA ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE SARÀ UGUALE, MA CONTRARIA X IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE. RICORDANDO CHE IL 1° PRINCIPIO $\Delta U = Q - W$ DICE CHE LA VARIAZIONE DI ENERGIA INTERNA È PARI ALLA VARIAZIONE TRA IL CALORE ASSORBITO E IL LAVORO COMPIUTO DAL GAS DURANTE LA TRASFORMAZIONE:

$$\Rightarrow W_{A\to B} = -W'_{A\to B} = p_{atm}(V_B - V_A) \Rightarrow p_{atm}(V_B - V_A) = \frac{1}{\gamma-1}(p_A V_A - p_B V_B);$$

$$\Rightarrow p_{atm} V_B - p_{atm} V_A = \frac{1}{\gamma-1} p_A V_A - \frac{1}{\gamma-1} p_B V_B = \frac{1}{\gamma-1} p_A V_A - \frac{1}{\gamma-1} p_{atm} V_B;$$

$$\Rightarrow V_B \cdot p_{atm}\left(1 + \frac{1}{\gamma-1}\right) = V_A\left(p_{atm} + p_A \frac{1}{\gamma-1}\right);$$

$$\Rightarrow V_B \cdot p_{atm}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) = V_A\left(\frac{p_A + p_{atm}(\gamma-1)}{\gamma-1}\right) \Rightarrow \underline{V_B = V_A\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right)\frac{1}{\gamma}};$$

X CALCOLARE T_B USIAMO LA LEGGE DEI GAS PERFETTI:

$\cdot$ STATO A: $p_A V_A = mRT_A \Rightarrow mR = \frac{1}{T_A} p_A V_A$ ① (NON CONOSCIAMO LA MASSA m);

$\cdot$ STATO B: $p_B V_B = mRT_B = \frac{T_B}{T_A} p_A V_A \Rightarrow p_B \cancel{V_A}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right)\frac{1}{\gamma} = \frac{T_B}{T_A} p_A \cancel{V_A}$ $(p_B = p_{atm})$

$$\Rightarrow \underline{T_B} = T_A \frac{p_{atm}}{p_A}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right) = \underline{T_A\left(1 + (\gamma-1)\frac{p_{atm}}{p_A}\right)};$$ ADESSO CALCOLIAMO $W_{A\to B}$:

$$\Rightarrow \underline{W_{A\to B}} = p_{atm}(V_B - V_A) = p_{atm}\left[V_A\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right)\frac{1}{\gamma} - V_A\right] =$$

$$= p_{atm} V_A\left(\frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right) - 1\right) = p_{atm} V_A\left[\frac{1}{\gamma}\frac{p_A}{p_{atm}} + \cancel{1} - \frac{1}{\gamma} - \cancel{1}\right] =$$

$$= p_{atm} V_A \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} - 1\right) = \cancel{p_{atm}} V_A \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_A - p_{atm}}{\cancel{p_{atm}}}\right) = \underline{\frac{V_A}{\gamma}(p_A - p_{atm})};$$

X L'ESPANSIONE ISOTERMA, SAPENDO CHE $T_B = T_A$:

$$\Rightarrow p_B V_B = mRT_B = mRT_A = p_A V_A \Rightarrow \underline{V_B = \frac{p_A}{p_{atm}} V_A};$$ INVECE IL LAVORO $W_{A\to B}$:

$$\Rightarrow \underline{W_{A\to B}} = p_{atm}(V_B - V_A) = p_{atm}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} V_A - V_A\right) = \underline{V_A(p_A - p_{atm})}.$$

$\Rightarrow \Delta U_{GAS} = Q_{GAS} - W_{GAS} \Rightarrow U_f - U_i = Q_{GAS} - W_{GAS}$; ESPLICITANDO I VARI TERMINI:

$\cdot\ \Delta U_{GAS} = mc_V(T_f - T_e)$; IL CALORE SCAMBIATO DAL GAS, DAL MOMENTO CHE IL SISTEMA È ADIABATICO, È:

$\cdot\ Q_{GAS} = -Q_{CORPO} = -mc(T_f - T_e)$ (ALLA FINE SI RAGGIUNGE L'EQUILIBRIO TERMICO);

L'ATMOSFERA ESERCITA UNA FORZA SUL PISTONE, IL GAS REAGISCE CON UNA FORZA UGUALE E OPPOSTA. IL LAVORO NON PUÒ ESSERE CALCOLATO CON L'INTEGRALE E SOSTITUENDO A $P = mRT/V$ PERCHÉ GLI STATI INTERMEDI NON SONO DI EQUILIBRIO, LA PRESSIONE NON HA UN VALORE DEFINITO. L'AMBIENTE INVECE CON BUONA APPROSSIMAZIONE MANTIENE COMUNQUE LA PRESSIONE P_{atm}, QUINDI LA FORZA F_{AMB} È DATA DA:

$$\cdot\ F_{AMB} = -P_{atm}\cdot S \Rightarrow W_{AMB} = \int F_{AMB}\, dx = \int_{V_f}^{V_i}(-P_{atm}\cdot S\cdot dx) = \int_{V_f}^{V_i}(-P_{atm}\, dV) =$$

$= -P_{atm}(V_f - V_i)$; IL LAVORO FATTO DAL GAS È UGUALE E OPPOSTO A QUELLO FATTO DALL'AMBIENTE, QUINDI:

$\Rightarrow mc_V(T_f - T_e) = -mc(T_f - T_e) - P_{atm}(V_f - V_i)$; LO STATO FINALE È BEN DEFINITO, QUINDI:

$\cdot\ P_f V_f = mRT_f \Rightarrow (P_f = P_{atm}) \Rightarrow P_{atm} V_f = mRT_f$; QUINDI:

$$\Rightarrow (mc_V + mc)(T_f - T_e) = -P_{atm}V_f + P_{atm}V_i = P_{atm}V_i - mRT_f;$$

$\Rightarrow (mc_V + mc + mR)T_f = P_{atm}V_i + (mc_V + mc)T_e$ ESPLICITANDO RISPETTO T_f:

$$\Rightarrow T_f = \frac{P_{atm}V_i + (mc_V + mc)T_e}{mc + m(c_V + R)} = \left(c_V = \frac{5}{2}R\right) = \frac{P_{atm}V_i + \left(\frac{5}{2}mR + mc\right)T_e}{\frac{7}{2}mR + mc} =$$

$$= \frac{1{,}013\cdot 10^5\cdot 10^{-2} + (5/2\cdot 2{,}5\cdot 8{,}314 + 0{,}8\cdot 130)\cdot 470}{7/2\cdot 2{,}5\cdot 8{,}314 + 0{,}8\cdot 130} = \boxed{420\,K}$$; IL VOLUME V_f INFINE:

$$\Rightarrow V_f = \frac{1}{P_{atm}}mRT_f = \frac{1}{1{,}013\cdot 10^5}\cdot 2{,}5\cdot 8{,}314\cdot 420 = \boxed{8{,}7\cdot 10^{-2}\, m^3}.$$

EX 51: UN GAS IDEALE BIATOMICO PASSA DALLO STATO A ($V_A = 5{,}1\cdot 10^{-2}\, m^3$, $P_A = 0{,}6\, bar$, $T_A = 476\, K$) ALLO STATO B ($V_B = 3{,}0\cdot 10^{-2}\, m^3$) CON UNA COMPRESSIONE ISOBARA REVERSIBILE. IL GAS VIENE POI POSTO A CONTATTO TERMICO CON UNA SORGENTE ALLA TEMPERATURA T_C E SI ESPANDE FINO AL VOLUME $V_C = 3{,}6\cdot 10^{-2}\, m^3$, COMPIENDO IL LAVORO $W_{B\to C} = 2\, KJ$. DALLO STATO C IL GAS TORNA INFINE NELLO STATO A CON UNA ESPANSIONE ADIABATICA REVERSIBILE.

DETERMINARE: a) IL RENDIMENTO DEL CICLO;

b) IL LAVORO NEI TRATTI $A\to B$ E $C\to A$;

· $W_{C\to A}$) APPLICHIAMO IL 1° PRINCIPIO ALLA TRASFORMAZIONE ADIABATICA:

$$\Rightarrow \Delta U = U(A) - U(C) = \cancel{Q_{C\to A}}^{\,0} - W_{C\to A} \Rightarrow W_{C\to A} = -\Delta U_{C\to A} = U(C) - U(A) =$$

$$= m c_V (T_C - T_A) = 0{,}773 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8{,}314 (560 - 476) = \boxed{1347\,J};$$

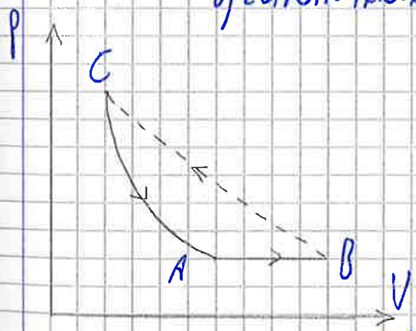
· $W_{A\to B}$) CON UNA TRASFORMAZIONE ISOBARA:

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = p_A (V_B - V_A) = 0{,}6\cdot 10^5 (3{,}0 - 5{,}1)\, 10^{-2} = \boxed{-1260\,J}.$$

ES 52: UN GAS IDEALE MONOATOMICO PASSA DALLO STATO A ($V_A = 3{,}8\cdot 10^{-2}\,m^3$, $p_A = 0{,}6$ bar, $T_A = 286\,K$) ALLO STATO B ($V_B = 6{,}0\cdot 10^{-2}\,m^3$) CON UNA ESPANSIONE ISOBARA REVERSIBILE. POI IL GAS È POSTO A CONTATTO CON UNA SORGENTE ALLA TEMPERATURA T_C E SI COMPRIME FINO AL VOLUME $V_C = 3{,}1\cdot 10^{-2}\,m^3$, ASSORBENDO DALL'AMBIENTE UN LAVORO $|W_{B\to C}| = 6\,kJ$. DALLO STATO C IL GAS TORNA ALLO STATO A CON UNA ESPANSIONE ADIABATICA REVERSIBILE.

DETERMINARE: a) CALCOLARE IL LAVORO IN OGNI TRASFORMAZIONE DEL CICLO;

b) L'EFFETTO FRIGORIFERO $\varepsilon = Q_{ass}/|W|$;



CALCOLIAMO LE MOLI PARTENDO DALLO STATO A:

$$\cdot\ p_A V_A = m R T_A \Rightarrow m = \frac{p_A V_A}{R T_A} = \frac{0{,}6\cdot 10^5 \cdot 3{,}8\cdot 10^{-2}}{8{,}314 \cdot 286} = 0{,}959\ mol;$$

CALCOLIAMO LE GRANDEZZE TERMODINAMICHE RICHIESTE:

· STATO B (ESPANSIONE ISOBARA): $p_A = p_B = 0{,}6\cdot 10^5\,Pa$;

$$\Rightarrow p_B V_B = m R T_B \Rightarrow T_B = \frac{p_B V_B}{mR} = \frac{0{,}6\cdot 10^5 \cdot 6{,}0 \cdot 10^{-2}}{0{,}959 \cdot 8{,}314} = 452\,K;$$

· STATO C: LA TRASFORMAZIONE C→A È ADIABATICA, QUINDI USIAMO QUESTE RELAZIONI:

$$\Rightarrow p_A V_A^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma} \quad \text{CON } \gamma = \frac{c_p}{c_V} \text{ E UN GAS MONOATOMICO } c_p = \frac{5}{2}R \text{ E } c_V = \frac{3}{2}R:$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{5}{2}R \Big/ \frac{3}{2}R = \frac{5}{3} \Rightarrow p_C = p_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma} = 0{,}6\cdot 10^5 \left(\frac{3{,}8\cdot 10^{-2}}{3{,}1\cdot 10^{-2}}\right)^{5/3} = 0{,}84\cdot 10^5\,Pa;$$

E CALCOLO T_C:

$$\Rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_A V_A^{\gamma-1} \Rightarrow T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1} = 286 \left(\frac{3{,}8\cdot 10^{-2}}{3{,}1\cdot 10^{-2}}\right)^{5/3-1} = 328\,K;$$

NEL TRATTO C→A LA TRASFORMAZIONE È ADIABATICA, QUINDI $Q_{C\to A} = 0$; NEL TRATTO A→B ABBIAMO UNA

• STATO A: $p_A V_A = mRT_A \Rightarrow T_A = \frac{p_A V_A}{mR} = \frac{1\cdot 10^5 \cdot 10^{-2}}{0{,}42\cdot 8{,}314} = \boxed{286\,K}$;

• STATO B: LA TRASFORMAZIONE A→B È ISOTERMA, QUINDI $T_B = T_A = 286\,K$:

$$\Rightarrow p_B V_B = mRT_B = mRT_A \Rightarrow p_B = \frac{mRT_A}{V_B} = \frac{0{,}42\cdot 8{,}314\cdot 286}{2\cdot 10^{-3}} = \boxed{5\cdot 10^5\,Pa};$$

• STATO C: LA TRASFORMAZIONE B→C È ISOCORA, QUINDI $V_B = V_C = 2\cdot 10^{-3}\,m^3$:

$$\Rightarrow p_C V_C = mRT_C \Rightarrow T_C = \frac{p_C V_B}{mR} = \frac{10\cdot 10^5 \cdot 2\cdot 10^{-3}}{0{,}42\cdot 8{,}314} = \boxed{573\,K};$$

• STATO D: LA TRASFORMAZIONE C→D È ADIABATICA, INOLTRE VALE $V_D = V_A$:

$$\Rightarrow p_C V_C^{\gamma} = p_D V_D^{\gamma} \text{ CON } \gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{2}R\Big/\frac{5}{2}R = \frac{7}{5} \Rightarrow p_D = p_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma} = 10\cdot 10^5\left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{10^{-2}}\right)^{7/5} =$$

$= \boxed{1{,}05\cdot 10^5\,Pa}$; ADESSO CALCOLIAMO T_D:

$$\Rightarrow T_C V_C^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1} \Rightarrow T_D = T_C\left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} = 573\left(\frac{2\cdot 10^{-3}}{10^{-2}}\right)^{7/5-1} = \boxed{301\,K};$$

ADESSO CALCOLIAMO I CALORI E I LAVORI SCAMBIATI:

• TRASFORMAZIONE A→B (ISOTERMA):

$$\Rightarrow W_{A\to B} = \int_{V_A}^{V_B} p\,dV = \left(p = \frac{mRT}{V}\right) = \int_{V_A}^{V_B} \frac{mRT_A}{V}\,dV = mRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) =$$

$$= 0{,}42\cdot 8{,}314\cdot 286\,\ln\left(2\cdot 10^{-3}/10^{-2}\right) = \boxed{-1{,}61\,KJ} \text{ (LAVORO SUBITO)};$$

X IL CALORE USIAMO IL 1° PRINCIPIO:

$$\Rightarrow Q_{A\to B} - W_{A\to B} = \Delta U = mc_v(T_B - T_A) = 0(T_B - T_A) \Rightarrow Q_{A\to B} = W_{A\to B} = \boxed{-1{,}61\,KJ};$$

• TRASFORMAZIONE B→C (ISOCORA):

$\Rightarrow W_{B\to C} = 0$ (PER UNA ISOCORA LA VARIAZIONE DI VOLUME È NULLA, QUINDI IL LAVORO È NULLO);

DAL 1° PRINCIPIO ABBIAMO CHE:

$$\Rightarrow Q_{B\to C} - \cancelto{0}{W_{B\to C}} = \Delta U \Rightarrow Q_{B\to C} = mc_v(T_C - T_B) = 0{,}42\cdot\frac{5}{2}R(573-286) = \boxed{2{,}5\,KJ};$$

• TRASFORMAZIONE C→D (ADIABATICA):

$\Rightarrow Q_{C\to D} = 0$ (IN UN'ADIABATICA IL CALORE SCAMBIATO È NULLO); USANDO IL 1° PRINCIPIO:

$$\Rightarrow \cancelto{0}{Q_{C\to D}} - W_{C\to D} = \Delta U = U(D) - U(C) \Rightarrow W_{C\to D} = U(C) - U(D) = mc_v(T_C - T_D) =$$

$$= 0{,}42\cdot\frac{5}{2}\cdot 8{,}314(573-301) = \boxed{2{,}37\,KJ};$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 160

$$\cdot\ pV = mRT \Rightarrow \Delta U = \frac{p_B V_B - p_A V_A}{\gamma - 1} = (p_B = p_{atm}) = \frac{p_{atm} V_B - p_A V_A}{\gamma - 1};$$

CONSIDERAZIONI: GLI STATI A E B SONO STATI DI EQUILIBRIO, MA ESSENDO L'ESPANSIONE LIBERA LA TRASFORMAZIONE A → B NON PUÒ ESSERE REVERSIBILE E QUINDI GLI STATI LIBERI INTERMEDI NON SONO DI EQUILIBRIO. IL LAVORO $W_{A\to B}$ NON SI PUÒ SCRIVERE DUNQUE COME UN INTEGRALE. SICCOME L'ATMOSFERA È COME UN ENORME GAS ALL'EQUILIBRIO LA PRESSIONE È DEFINITA OVUNQUE ED È SEMPRE LA STESSA, OVVERO p_{atm}; QUINDI IL LAVORO CHE L'ATMOSFERA COMPIE SUL SISTEMA È UN LAVORO NEGATIVO DATO DA:

$\Rightarrow W'_{A\to B} = -p_{atm}(V_B - V_A)$ (IL SEGNO "−" SIGNIFICA CHE LA FORZA SI OPPONE ALL'ESPANSIONE DEL GAS);

SICCOME NEL RECIPIENTE LA PRESSIONE NON È UNIFORME, ALLORA IL LAVORO $W'_{A\to B}$ È UGUALE AL LAVORO CHE IL GAS COMPIE SULL'AMBIENTE ALLA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE DOVE LA PRESSIONE È SENSIBILMENTE PIÙ BASSA È CIRCA UGUALE A QUELLA ATMOSFERICA ALL'INIZIO DELL'ESPANSIONE (VEDERE ESERCIZIO PRECEDENTE). QUINDI:

$\Rightarrow W_{A\to B} = -W'_{A\to B} = p_{atm}(V_B - V_A)$; ADESSO SFRUTTIAMO IL 1° PRINCIPIO E L'ADIABATICA:

$\cdot\ \cancel{Q_{A\to B}}^{\,0} - W_{A\to B} = \Delta U$ (CALORE SCAMBIATO NULLO); ABBIAMO LE ESPRESSIONI RICAVATE PRIMA, QUINDI:

$$\Rightarrow W_{A\to B} = -\Delta U \Rightarrow p_{atm}(V_B - V_A) = \frac{p_A V_A - p_{atm} V_B}{\gamma - 1}$$ L'UNICA INCOGNITA È V_B, QUINDI:

$$\Rightarrow p_{atm} V_B - p_{atm} V_A = \frac{p_A V_A}{\gamma - 1} - \frac{p_{atm} V_B}{\gamma - 1} \Rightarrow V_A\left(\frac{p_A}{\gamma - 1} + p_{atm}\right) = V_B\, p_{atm}\left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right);$$

$$\Rightarrow V_A\left(\frac{p_A + p_{atm}(\gamma - 1)}{\cancel{\gamma - 1}}\right) = V_B\, p_{atm}\left(\frac{\gamma}{\cancel{\gamma - 1}}\right) \Rightarrow \boxed{V_B = V_A \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right)};$$

SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI STATO PER A E B:

$\cdot\ p_A V_A = mRT_A$ (STATO A) $\Rightarrow mR = p_A V_A / T_A$;

$$\cdot\ p_B V_B = mRT_B \text{ (STATO B)} \Rightarrow p_B V_B = \frac{p_A V_A}{T_A} T_B \ (p_B = p_{atm}) \Rightarrow T_B = T_A \frac{p_{atm} V_B}{p_A \cdot V_A} =$$

$$= T_A \frac{p_{atm}}{p_A \cancel{V_A}} \cancel{V_A} \frac{1}{\gamma}\left(\frac{p_A}{p_{atm}} + \gamma - 1\right) \Rightarrow \boxed{T_B = T_A \frac{1}{\gamma}\left(1 + (\gamma - 1)\frac{p_{atm}}{p_A}\right)}.$$

EX 55: UN GAS IDEALE BIATOMICO SI TROVA IN EQUILIBRIO NELLO STATO A ($p_A = 1\,bar$, $V_A = 20 \cdot 10^{-3}\,m^3$, $T_A = 288\,K$). CON UNA COMPRESSIONE ISOTERMA REVERSIBILE IL VOLUME VIENE RIDOTTO A $V_B = 5 \cdot 10^{-3}\,m^3$; DALLO STATO B IL GAS PASSA POI ALLO STATO C E INFINE RITORNA ALLO STATO A CON UNA ESPANSIONE ADIABATICA REVERSIBILE. NELLA TRASFORMAZIONE B → C IL GAS ASSORBE UN CALORE $Q_{B\to C} = 4{,}50\,KJ$; LA VARIAZIONE

X STABILIRE SE LA TRASFORMAZIONE B→C È REVERSIBILE O NO OCCORRE VERIFICARE CHE L'UNIVERSO NON ABBIA SUBITO VARIAZIONI DI ENTROPIA; SE GLI STATI INTERMEDI NON SONO DI EQUILIBRIO L'UNIVERSO, CHE È UN SISTEMA ISOLATO, VEDE AUMENTARE LA SUA ENTROPIA. UN SISTEMA FISICO ISOLATO SOGGETTO A TRASFORMAZIONI SPONTANEE TENDE VERSO IL SUO STATO DI MASSIMO DISORDINE; LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO LUNGO B→C SI PUÒ SCRIVERE COSÌ:

$$\cdot\ \Delta S^{universo}_{B\to C} = \underset{(noto)}{\Delta S^{amb}_{B\to C}} + \underset{(incognito)}{\Delta S^{gas}_{B\to C}};$$ LA VARIAZIONE TOTALE DI ENTROPIA POSSIAMO SCRIVERLA COME:

$$\Rightarrow \Delta S^{gas}_{ciclo} = (\text{L'ENTROPIA È UNA FUNZIONE DI STATO}) = \Delta S_{A\to B} + \Delta S^{gas}_{B\to C} + \overset{0}{\cancel{\Delta S^{gas}_{C\to A}}};$$

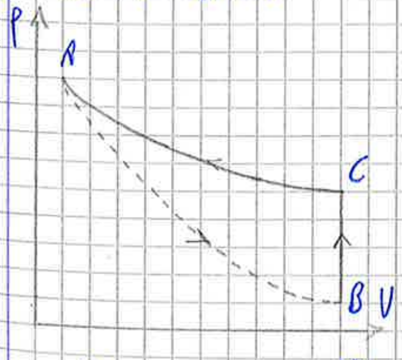
OSSERVARE CHE $\Delta S^{gas}_{C\to A} = 0$ IN QUANTO IN UNA TRASFORMAZIONE ADIABATICA REVERSIBILE LA VARIAZIONE DI ENTROPIA È NULLA; SI PUÒ RITORNARE DA C VERSO A RIPORTANDO L'UNIVERSO NELLE CONDIZIONI INIZIALI. INOLTRE $\Delta S^{gas}_{ciclo} = 0$ XCHÈ L'ENTROPIA È UNA FUNZIONE DI STATO. QUINDI:

$$\Rightarrow \Delta S^{gas}_{A\to B} = +\Delta S^{gas}_{B\to C} = -\left(S_{gas}(B) - S_{gas}(A)\right) = -\left(n c_v \overset{0}{\cancel{\ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)}} + nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)\right);$$ QUESTA EQUAZIONE VALE X UN QUALSIASI PERCORSO REVERSIBILE DA UNO STATO A AD UNO STATO B. IL PRIMO TERMINE SI ANNULLA XCHÈ $T_B = T_A$. QUINDI OTTENGO CHE:

$$\Rightarrow \Delta S^{gas}_{B\to C} = -nR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -0{,}835\cdot 8{,}314\ \ln\left(\frac{5\cdot10^{-3}}{20\cdot10^{-3}}\right) = 9{,}63\ J/K;$$ QUINDI RISULTA:

$$\Rightarrow \Delta S^{universo}_{B\to C} = -9{,}63 + 9{,}63 = 0;$$ QUINDI LA TRASFORMAZIONE B→C È REVERSIBILE.

EX 56: 0,2 MOLI DI GAS BIATOMICO SONO CHIUSE DENTRO UN CONTENITORE DI VOLUME V_A ALLA PRESSIONE $p_A = 1{,}013\ bar$ E ALLA TEMPERATURA $T_A = 293{,}2\ K$. IL VOLUME VIENE RAPIDAMENTE PORTATO AL VALORE $V_B = 3V_A$ ADIABATICAMENTE. RAGGIUNTO L'EQUILIBRIO TERMICO IL GAS SI RIPORTA, A VOLUME COSTANTE, ALLA TEMPERATURA AMBIENTE T_A, ASSORBENDO DALL'AMBIENTE UN CALORE $Q_{B\to C} = 355{,}9\ J$. INFINE IL GAS TORNA ALLO STATO INIZIALE CON UNA ISOTERMA REVERSIBILE A TEMPERATURA AMBIENTE.



DETERMINARE: a) LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DEL GAS LUNGO A→B;
b) IL LAVORO COMPLESSIVO SCAMBIATO DAL GAS;
c) LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO A FINE CICLO;

PER PRIMA COSA CALCOLIAMO LE VARIABILI TERMODINAMICHE X QUANTO POSSIBILE:

$$\cdot\ p_A V_A = nRT_A \Rightarrow n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = \frac{1{,}013\cdot10^5\cdot V_A}{8{,}314\cdot 293{,}2} = 0{,}2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_A = 4{,}81\cdot10^{-3}\ m^3;$$

QUINDI $V_B = 3V_A = 3\cdot 4{,}81\cdot10^{-3} = 0{,}0144\ m^3$;

LA TRASFORMAZIONE B→C È ISOCORA, QUINDI VALE $V_C = V_B = 0{,}0144\ m^3$; APPLICANDO IL 1° PRINCIPIO:

$\Rightarrow \Delta S_{TOT}^{UNI} = \Delta S_{TOT}^{GAS} + \Delta S_{TOT}^{AMB.}$; CON $\Delta S_{TOT}^{GAS} = 0$ PERCHÈ IL GAS COMPIE UN CICLO, ALLA FINE DEL CICLO SONO RIPRISTINATE TUTTE LE CONDIZIONI INIZIALI. ΔS_{TOT}^{AMB} POSSIAMO SCRIVERLA COME:

$\cdot \Delta S_{TOT}^{AMB} = \Delta S_{A\to B}^{AMB.} + \Delta S_{B\to C}^{AMB.} + \Delta S_{C\to A}^{AMB.}$; INNANZITUTTO $\Delta S_{A\to B}^{AMB.} = 0$ PERCHÈ LUNGO $A \to B$ L'AMBIENTE È SEPARATO TERMICAMENTE DAL SISTEMA IN QUANTO LA TRASFORMAZIONE È ADIABATICA. LUNGO $B \to C$ VIENE SCAMBIATO DEL CALORE CON L'AMBIENTE, SOLO CHE L'AMBIENTE È COME SE FOSSE UN CORPO CON CAPACITÀ TERMICA INFINITA, QUINDI LA SUA TEMPERATURA RESTA COSTANTE. DURANTE $B \to C$ L'AMBIENTE CEDE UN CALORE $Q_{B\to C}$ RESTANDO A TEMPERATURA AMBIENTE T_A (CALORE NEGATIVO):

$$\cdot \Delta S_{B\to C}^{AMB.} = \frac{-Q_{B\to C}}{T_A} = -\frac{355,9}{293,2} = -1,213\ J/K;$$

PER OGNI TRATTO DEL CICLO POSSIAMO SCRIVERE UNA RELAZIONE COME QUELLA SOPRA, QUINDI X IL TRATTO $C \to A$:

$\Rightarrow \Delta S_{C\to A}^{UNI} = \Delta S_{C\to A}^{GAS} + \Delta S_{C\to A}^{SISTEMA\ AMB.} = 0$ ($\Delta S_{C\to A}^{UNI} = 0$ PERCHÈ IN UNA TRASFORMAZIONE REVERSIBILE LA VARIAZIONE DI ENTROPIA DELL'UNIVERSO È NULLA), QUINDI:

$$\Rightarrow \Delta S_{C\to A}^{AMB} = -\Delta S_{C\to A}^{GAS} = -\left(S_A^{GAS} + S_C^{GAS}\right) = mc_v \ln\left(\frac{T_A}{T_C}\right) + mR\ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) =$$

$$= 0,2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 8,314 \cdot \overset{0}{\ln}\left(\frac{293,2}{293,2}\right) + 0,2 \cdot 8,314 \cdot \ln\left(\frac{4,81\cdot 10^{-3}}{0,0144}\right) = +1,823\ J/K;$$

$$\Rightarrow \Delta S_{TOT}^{UNI} = \Delta S_{TOT}^{AMB} = 0 + 1,823 - 1,213 = \boxed{0,61\ J/K}.$$

EX 57: UN DISCO DI RAGGIO $R = 1\ m$ LIBERO DI RUOTARE IN UN PIANO ORIZZONTALE ATTORNO AL PROPRIO CENTRO O È MANTENUTO IN MOTO CON VELOCITÀ ANGOLARE COSTANTE $\omega = 1\ s^{-1}$ DA UN MOTORE. LUNGO UN DIAMETRO DEL DISCO È SALDATO UN BINARIO; ALL'INTERNO DEL BINARIO SCORRE SENZA ATTRITO UN CARRELLO DI MASSA $m = 2\,Kg$, CONNESSO AD UN BORDO DEL DISCO MEDIANTE UNA MOLLA IDEALE DI COSTANTE ELASTICA $K = 5\ N/m$ E LUNGHEZZA A RIPOSO R. INIZIALMENTE IL CARRELLO NEL SISTEMA DI RIFERIMENTO SOLIDALE CON IL DISCO SI TROVA FERMO A DISTANZA $R/2$ DAL CENTRO DEL DISCO.

DETERMINARE:
a) L'EQUAZIONE DI MOTO DEL CARRELLO NEL S.R SOLIDALE CON IL DISCO;
b) LA LEGGE ORARIA DEL MOTO DEL CARRELLO NEL S.R SOLIDALE COL DISCO;
c) LA COMPONENTE ORIZZONTALE E VERTICALE N_x, N_y DELLA REAZIONE VINCOLARE DEL BINARIO;
d) LE POSIZIONI DEL CARRELLO IN CUI IL MODULO DELLA REAZIONE VINCOLARE È MASSIMO;
e) LA COPPIA τ (MOMENTO DELLA FORZA) EROGATA DAL MOTORE;
f) LA POTENZA P EROGATA DAL MOTORE E LE POSIZIONI DEL CARRELLO IN CUI TALE POTENZA È NULLA;

ORARIA, QUINDI SI SCEGLIE L'ASSE z CON VERSORE $\bar{u}_z$ ENTRANTE); IL VETTORE $\bar{u}_z \wedge \bar{u}_r$ È RIVOLTO IN DIREZIONE TANGENZIALE ALLA CIRCONFERENZA DESCRITTA E SICCOME IL RIFERIMENTO xy RUOTA RISULTA CHE ISTANTE PER ISTANTE LA REAZIONE N_y È RIVOLTA LUNGO y (IN DIREZIONE OPPOSTA):

$$\Rightarrow \bar{N}_y = +2m\omega\dot{x}\bar{u}_y = -2m\omega\frac{R}{2}\Omega\sin\Omega t\,\bar{u}_y = \underline{-m\omega R\Omega\sin\Omega t\,\bar{u}_y};$$

IL DISCO APPLICA LA COMPONENTE N_y PER TENERE IL CARRELLO ANCORATO AL BINARIO OPPONENDOSI IN QUESTO MODO ALLA FORZA DI CORIOLIS. IL DISCO È SU UN PIANO ORIZZONTALE QUINDI LA COMPONENTE N_z COMPENSA LA FORZA PESO:

$$\Rightarrow N_z - mg = 0 \Rightarrow \bar{N}_z = -mg\bar{u}_z \quad (N_z \text{ È USCENTE, OPPOSTO AL VERSO CONVENZIONALE});$$

LA REAZIONE VINCOLARE N_y È MASSIMA QUANDO IL SENO ASSUME VALORE MASSIMO, OVVERO QUANDO $\sin\Omega t = 1$ E QUESTO ACCADE QUANDO $\Omega t = \pi/2$; SOSTITUENDO $\pi/2$ NELLA LEGGE ORARIA:

$$\Rightarrow x(t) = \frac{R}{2}\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$ QUINDI QUANDO IL CARRELLO PASSA PER L'ORIGINE. PER MANTENERE IN MOTO IL DISCO BISOGNA VINCERE LA REAZIONE VINCOLARE N_y CHE TENDE A FAR RUOTARE IL DISCO IN SENSO OPPOSTO; TRA L'ALTRO N_y È L'UNICA FORZA FISICA CHE CREA MOMENTO RISPETTO IL POLO O (LA FORZA ELASTICA HA BRACCIO NULLO):

$$\Rightarrow \bar{\tau} = \bar{r} \wedge \bar{N}_y = x\bar{u}_r \wedge N_y\bar{u}_y = x\cdot N_y\bar{u}_z = \frac{R}{2}\cos\Omega t\cdot(-m\omega R\Omega\sin\Omega t)\,\bar{u}_z =$$
$$= -m\omega R^2\frac{1}{2}\cos\Omega t\cdot\sin\Omega t\,\bar{u}_z = \underline{-m\omega\frac{R^2}{4}\sin 2\Omega t\,\bar{u}_z} \quad (\text{ROTAZIONE ORARIA});$$

LA POTENZA P NECESSARIA PER MANTENERE IL DISCO IN ROTAZIONE È DATA DA:

$$\Rightarrow P = \bar{\tau}\cdot\bar{\omega} = \left(-m\omega\frac{R^2}{4}\sin 2\Omega t\,\bar{u}_z\right)\cdot(\omega\bar{u}_z) = \underline{-m\omega^2\frac{R^2}{4}\sin 2\Omega t}.$$

EX 58: UN'ASTA SOTTILE OMOGENEA DI MASSA $M = 1\,kg$ E LUNGA $L = 30\,cm$ PUÒ RUOTARE LIBERAMENTE IN UN PIANO VERTICALE ATTORNO ALL'ESTREMO A. INIZIALMENTE È FERMA IN POSIZIONE VERTICALE, SUCCESSIVAMENTE È LASCIATA CADERE.

DETERMINARE: a) LA VELOCITÀ ANGOLARE QUANDO PASSA PER LA POSIZIONE VERTICALE;

b) L'ACCELERAZIONE ANGOLARE NELL'ISTANTE IN CUI FORMA UN ANGOLO θ CON LA DIREZIONE INIZIALE;

QUANDO L'ASTA PASSA PER LA POSIZIONE VERTICALE UN BLOCCO DI PLASTILINA DI MASSA $m = 200\,g$ E VELOCITÀ V_0, IN MOTO IN DIREZIONE ORIZZONTALE, URTA CONTRO L'ASTA ALL'ESTREMITÀ OPPOSTA AD A E VI RIMANE APPICCICATO.

DETERMINARE: c) QUALI QUANTITÀ DINAMICHE SONO CONSERVATE NELL'URTO?

d) LA VELOCITÀ INIZIALE V_0 DEL BLOCCO, SAPENDO CHE DOPO L'URTO L'ASTA PROSEGUE IL SUO MOTO NELLA STESSA DIREZIONE CON VELOCITÀ ANGOLARE $\omega_f = 5/2\,rad/s$;

IL MOMENTO DI INERZIA DI UNA BARRA RISPETTO UN ASSE $\perp$ ALLA STESSA E PASSANTE PER IL SUO C.M È $I_{CM} = \frac{1}{12}ML^2$;

$$\omega_f = \frac{5}{2}\,rad/s = \frac{5/2}{2\pi} = 0{,}4\,s^{-1};$$

ANTIORARIA, PRIMA E DOPO L'URTO L'ASTA SI MUOVE SEMPRE IN SENSO ORARIO, DA QUI IL SENSO DEI SEGNI. QUINDI:

$$\Rightarrow m v_0 L = I_P \dot{\vartheta}_* - I_P \omega_f - m L^2 \omega_f = \frac{1}{3} M L^2 (\dot{\vartheta}_* - \omega_f) - m L^2 \omega_f ;$$

$$\Rightarrow V_0 = \frac{1/3\, ML(\dot{\vartheta}_* - \omega_f) - mL\omega_f}{m} = \frac{1/3 \cdot 1 \cdot 30 \cdot 10^{-2}(10 - 0,4) - 0,2 \cdot 30 \cdot 10^{-2} \cdot 0,4}{0,2} = \boxed{4,6\, m/s}.$$

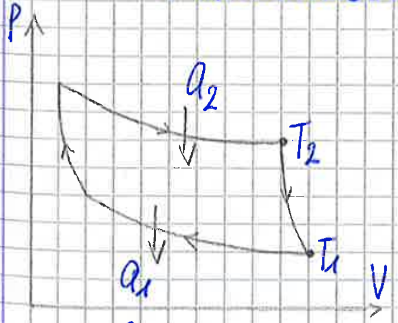
EX 59: UNA MACCHINA TERMICA REVERSIBILE LAVORA TRA DUE SORGENTI TERMICHE, UNA COSTITUITA DALL'AMBIENTE A $T_1 = -93°C$ E L'ALTRA DA UNA GRANDE MASSA DI STAGNO FUSO ALLA TEMPERATURA $T_2 = 267°C$ (CHE È LA SUA TEMPERATURA DI FUSIONE). AD OGNI CICLO DELLA MACCHINA TERMICA SOLIDIFICANO 5 g DI STAGNO, VIENE PRODOTTO IL LAVORO W, VIENE SCAMBIATO IL CALORE Q_1 CON LA SORGENTE T_1 E VIENE SCAMBIATO IL CALORE Q_2 CON LA SORGENTE A T_2. SAPENDO CHE IL CALORE LATENTE DI SOLIDIFICAZIONE DELLO STAGNO È $\lambda_f = 6 \cdot 10^4 J/Kg$ E APPROSSIMANDO A $0°C = 273K$, CALCOLARE:

DETERMINARE: a) IL RENDIMENTO DELLA MACCHINA TERMICA;

b) LE QUANTITÀ DI CALORE Q_1 E Q_2 SCAMBIATE DALLA MACCHINA TERMICA IN UN CICLO CON LE DUE SORGENTI TERMICHE;

c) IL LAVORO CHE VERREBBE PRODOTTO IN UN CICLO DA UNA MACCHINA REALE (IRREVERSIBILE) CHE LAVORA TRA LE STESSE SORGENTI SCAMBIANDO LO STESSO CALORE Q_2 CON LA SORGENTE A T_2, MA IL CUI RENDIMENTO È IL 30% DI QUELLO DELLA MACCHINA REVERSIBILE;

d) LA VARIAZIONE DI ENTROPIA SUBITA DAL SISTEMA TERMODINAMICO FORMATO DALL'INSIEME DELLA MACCHINA TERMICA E DALLE DUE SORGENTI TERMICHE DURANTE UN CICLO, SIA PER IL CASO DELLA MACCHINA REVERSIBILE CHE PER QUELLA IRREVERSIBILE.



QUESTO È LO SCHEMA DI UNA MACCHINA REVERSIBILE CHE SI PUÒ PERCORRERE ANCHE IN SENSO OPPOSTO. PER UN CONSIDERARE IL RENDIMENTO DELLA MACCHINA TERMICA DIPENDE SOLO DALLE TEMPERATURE DELLE DUE SORGENTI:

$$\cdot\ \eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{-93+273}{267+273} = \boxed{0,66};$$

IL CALORE Q_2 SI PUÒ CALCOLARE FACILMENTE; AD OGNI CICLO IL CALORE ESTRATTO DA T_2 SOLIDIFICA 5 g DI STAGNO, QUINDI X SOLIDIFICARE 5 g DI STAGNO OCCORRE ASSORBIRE UN CALORE:

$$\Rightarrow Q_2 = \lambda_f \cdot m = 6 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg} \cdot 5 \cdot 10^{-3} Kg = \boxed{300\, J};$$

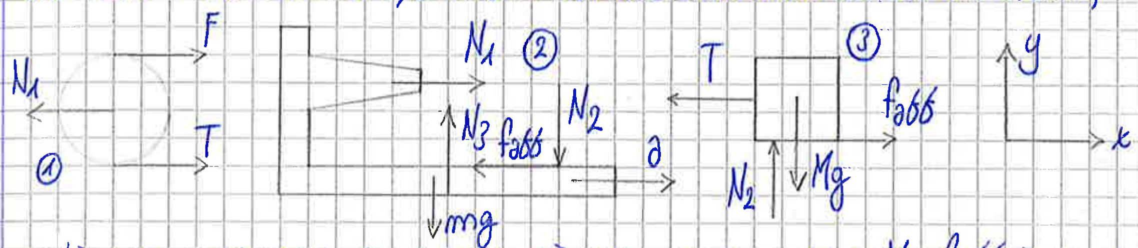
X CALCOLARE Q_1 POSSIAMO USARE IL TEOREMA DI CARNOT: DUE MACCHINE REVERSIBILI CHE LAVORANO TRA LE STESSE

d) IL VALORE MASSIMO CHE PUÒ RAGGIUNGERE LA FORZA DI ATTRITO STATICO SENZA CHE IL BLOCCO INIZI A SCORRERE SUL SUPPORTO;

e) LA FORZA MASSIMA $F = F_{MAX}$ CHE PUÒ ESSERE APPLICATA SENZA CHE IL BLOCCO SCORRA SUL SUPPORTO;

ANALIZZIAMO LE FORZE CHE AGISCONO SU OGNI CORPO:

- SUL BLOCCO M AGISCONO LA FORZA PESO, LA FORZA DI ATTRITO STATICO E LA REAZIONE VINCOLARE DEL SUPPORTO, INFINE LA TENSIONE DEL FILO;
- SUL SUPPORTO AGISCONO LA FORZA PESO, LA FORZA DI ATTRITO STATICO DI REAZIONE, LA REAZIONE VINCOLARE DI REAZIONE CHE PREME SU DI ESSO, LA REAZIONE VINCOLARE DEL SUOLO E LO STRATTONE DELLA PULEGGIA CHE QUESTA ESERCITA PER REGGERLA AL PERNO;
- SULLA PULEGGIA AGISCONO LA FORZA F, LA TENSIONE DEL FILO E LA REAZIONE DELLA PULEGGIA AL PERNO;



NON C'È UNA REGOLA PER POSIZIONARE GLI ATTRITI, PERÒ POSSIAMO DIRE CHE SUL BLOCCO M LA f_{a66} È QUELLA CHE CONSENTE AL BLOCCO DI ESSERE TRASCINATO DAL SUPPORTO, SUL SUPPORTO LA f_{a66} DI REAZIONE È ESERCITATA DAL BLOCCO PER TRATTENERLO. ADESSO SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DEL MOTO TENENDO PRESENTE CHE 2 E 3 SI MUOVONO IN MODO SOLIDALE; RICORDARSI INOLTRE CHE LE FORZE INTERNE NON ENTRANO NELL'EQUAZIONE DEL MOTO:

ASSE x): $N_1 - f_{a66} - T + \cancel{f_{a66}} = (m+M)a$; N_1 LO RICAVIAMO DALLA EQUAZIONE DELLA PULEGGIA:

- $F + T - N_1 = 0 \Rightarrow N_1 = F + T$; SOSTITUENDO SI OTTIENE:

$$\Rightarrow F + \cancel{T} - \cancel{T} = (m+M)a \Rightarrow F = (m+M)a \Rightarrow a = \frac{F}{m+M} = \frac{F}{6+9} \Rightarrow \boxed{a = F/15 \ m/s^2};$$

X RICAVARE LA f_{a66} IMPOSTIAMO LE EQUAZIONI DEL MOTO X I SINGOLI CORPI:

- BLOCCO M): $x: f_{a66} - T = Ma$ (1)
  $y: N_2 - Mg = 0 \Rightarrow N_2 = Mg$ (2)
- PULEGGIA) $F \cdot R - T \cdot R = 0 \Rightarrow T = F$;

ASSUNZIONI: LA PULEGGIA NON RUOTA PERCHÉ IL BLOCCO M NON SI MUOVE, INOLTRE NON AVENDO INERZIA PER FARLA RUOTARE NON BISOGNA INTRODURRE FORZE.

- SUPPORTO m): $x: -f_{a66} + N_1 = ma$ (3)
  $y: N_3 - N_2 - mg = 0$ (4)

(2) $N_2 = Mg \Rightarrow$ (4) $N_3 - Mg - mg = 0 \Rightarrow N_3 = (M+m)g = (9+6) \cdot 9,81 = \boxed{150 N}$ (SUOLO-SUPPORTO)

- $N_2 = 9 \cdot 9,81 = \boxed{90 N}$ (SUPPORTO-BLOCCO); PER LA FORZA DI ATTRITO:

$$\Rightarrow \cancel{m}g(h+R) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gR \Rightarrow gh + \cancel{gR} = \frac{1}{2}v_1^2 + \cancel{gR} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}8} = \boxed{6\,m/s};$$

PRIMA DELL'URTO SI CONSERVA L'ENERGIA MECCANICA; INOLTRE, POICHÉ FORZA PESO E REAZIONE VINCOLARE DELLA GUIDA NON DANNO MOMENTO, SI CONSERVA ANCHE IL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO AL C.M. DURANTE L'URTO L'ANELLO IMPATTA CONTRO IL CHIODO; NON SI CONSERVA LA QUANTITÀ DI MOTO PERCHÈ LA REAZIONE VINCOLARE È UNA FORZA ESTERNA, PERÒ SICCOME FORZA PESO E REAZIONE VINCOLARE NON HANNO BRACCIO, SI CONSERVA IL MOMENTO ANGOLARE ANCHE RISPETTO IL PUNTO B. IL CHIODO ESERCITA UNA TENSIONE SUL PUNTO B, QUESTA HA BRACCIO NON NULLO RISPETTO IL C.M QUINDI NON SI CONSERVA NE L'ENERGIA MECCANICA NE IL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO IL C.M. APPLICHIAMO LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE L_B RISPETTO B:

· $L_B^{POCO\ PRIMA} = L_B^{POCO\ DOPO}$; POCO PRIMA DELL'URTO LA VELOCITÀ v_1 HA BRACCIO R RISPETTO B; POCO DOPO L'URTO C'È UN PUNTO CHE ISTANTANEAMENTE È FERMO, QUINDI IL MOTO PER UN ATTIMO DIVENTA DI PURO ROTOLAMENTO (IL PUNTO B È FERMO):

$\Rightarrow RMv_1 = I_P\,\omega_2$ CON $I_P = I_{C.M} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$ (CON MR^2 IL MOMENTO D'INERZIA DI UN ANELLO RISPETTO UN ASSE PASSANTE X IL C.M.). SICCOME IL MOTO È ISTANTANEAMENTE DI PURO ROTOLAMENTO VALE:

$$\Rightarrow \omega_2 = \frac{RMv_1}{I_P} = \frac{RMv_1}{2MR^2} = \frac{v_1}{2R} = \frac{6}{2 \cdot 1{,}0} = \boxed{3\,s^{-1}};$$ INOLTRE VALE:

· $v_2 = \omega_2 R = 3 \cdot 1{,}0 = 3\,m/s$; SUBITO DOPO L'URTO POSSIAMO UTILIZZARE NUOVAMENTE LA CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA MISURANDO h_* A PARTIRE DALLA QUOTA DEL CENTRO DI MASSA; PER COME ABBIAMO POSIZIONATO L'ASSE Z VALE:

$$\Rightarrow E_m(B) = E_m(P) \Rightarrow \frac{1}{2}Mv_2^2 + \cancel{Mg}R = 0 + Mg(h_* + R) = Mgh_* + \cancel{Mg}R;$$ (IN P SI FERMA)

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{M}v_2^2 = \cancel{M}gh_* \Rightarrow v_2^2 = 2gh_* \Rightarrow h_* = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{3^2}{2 \cdot 9{,}81} = \boxed{0{,}45\,m};$$

L'IMPULSO È LA DIFFERENZA DI QUANTITÀ DI MOTO TRA PRIMA E DOPO L'URTO:

$$\Rightarrow \Delta P = P_{DOPO} - P_{PRIMA} = Mv_2 - Mv_1 = M(v_2 - v_1) = 1 \cdot (3-6) = \boxed{-3\,Kg\,\frac{m}{s}};$$ DOPO L'URTO NON CI SONO FORZE CHE DIANO MOMENTO, QUINDI NON VIENE ALTERATA LA VELOCITÀ ANGOLARE. NELLA CONSERVAZIONE DELLA ENERGIA MECCANICA IL CONTRIBUTO ROTARIO INFATTI NON COMPARE PERCHÈ SI ELIDE. RICORDARSI ANCHE CHE SI CONSERVA IL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO C.M:

$$\Rightarrow E_k^* = \frac{1}{2}I_{C.M} \cdot \omega_2^2 = \frac{1}{2}MR^2\omega_2^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1{,}0)^2 \cdot 3^2 = \boxed{4{,}5\,J}.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 160