NUMERO: 2315A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Campana Simone

MATERIA: Fisica I - Teoria - Prof. Trigiante

FISICA: STUDIO DEI FENOMENI NATURALI CON VARIE SUDDIVISIONI:
- ACUSTICA (SUONO); - OTTICA (LUCE); - MECCANICA (MOTO DEGLI OGGETTI); - TERMODINAMICA (VARIAZIONE DI UN SISTEMA IN SEGUITO A SCAMBI DI CALORE); - ELETTROMAGNETISMO (INTERAZIONI ELETTRICHE).

N.B. L'OTTICA È CONSIDERATA UN SOTTOINSIEME DELL'ELETTROMAGNETISMO IN QUANTO LA LUCE È VISTA COME UN INSIEME DI ONDE MAGNETICHE CHE SI PROPAGANO VELOCEMENTE.

IL XX È IL SECOLO DEL PROGRESSO SCIENTIFICO; LE PROPRIETÀ DELLA MATERIA VENGONO SPIEGATE IN TERMINI DI UN NUMERO ENORME DI PARTICELLE E LE LORO INTERAZIONI CHE UNISCONO NELLA MATERIA; LE LEGGI DI NEWTON NON HANNO PIÙ VALORE PER FENOMENI INFINITAMENTE PICCOLI: NASCE LA MECCANICA QUANTISTICA E LE LEGGI DELLA MECCANICA CLASSICA VENGONO GENERALIZZATE DA NEWTON.

I MATTONI COSTITUENTI LA MATERIA SONO ELETTRONI (e^-) CON MASSA 10^{-30} kg CON CARICA NEGATIVA; I PROTONI CHE SONO 2000 PIÙ PESANTI DEGLI ELETTRONI CON CARICA UGUALE E OPPOSTA A e^-; I NEUTRONI CHE SONO NEUTRI E POCO PIÙ GRANDI DEL PROTONE.

ATOMO: HA UN NUCLEO CENTRALE CON UN NUMERO Z DI PROTONI (= n° DI ELETTRONI) E UN NUMERO PIÙ O MENO UGUALE DI NEUTRONI; LA CARICA DEL PROTONE SI PUÒ SCRIVERE CON Ze. ESISTE ANCHE UN NUMERO A OVVERO IL NUMERO DI PROTONI + NEUTRONI. IL NUCLEO È IMMERSO IN UNA DISTRIBUZIONE DI ELETTRONI CHE SI MUOVONO INTORNO E SONO UGUALI AL NUMERO DEI PROTONI (SISTEMA NEUTRO), QUINDI LA MATERIA È NEUTRA. IL NUCLEO HA DIMENSIONE 10^{-15} m, MENTRE L'ATOMO 10^{-10} METRO; QUINDI TRA NUCLEO E ATOMO CI SONO 5 ORDINI DI GRANDEZZA. POICHÉ LA MASSA DEGLI ELETTRONI È TRASCURABILE LA MASSA ATOMICA È $A \cdot m$(PROTONE). GLI ATOMI FORMANO MOLECOLE, LE MOLECOLE FORMANO LA MATERIA NEI SUOI 3 STATI SOLIDO, LIQUIDO E GASSOSO. INOLTRE A LIVELLO MACROSCOPICO LA MATERIA APPARE CONTINUA, OVVERO DISTRIBUITA CON CONTINUITÀ. INFINE SI PUÒ DIRE CHE ESISTONO SISTEMI CON ORDINI DI LUNGHEZZE DIVERSE, COME IL SISTEMA SOLARE (10^{10} km) OPPURE LE STELLE CHE FORMANO LE GALASSIE (10^{18} km), MA TUTTI HANNO IN COMUNE DI ESSERE DEI CORPI LEGATI INSIEME.

INTERAZIONE: È LA FORZA CHE UN CORPO ESERCITA SU UN ALTRO CORPO (LA FORZA È RECIPROCA, SE IL PRIMO CORPO ESERCITA UN'INTERAZIONE SUL SECONDO, ANCHE IL SECONDO LO ESERCITA SUL PRIMO). LE FORZE SONO DI DUE TIPI:

a) A DISTANZA: È LA FORZA CHE ESERCITA UN CERTO CORPO AD UNA CERTA DISTANZA DA UN ALTRO (UN CORPO CHE CADE È ATTIRATO DALLA TERRA, NON È A CONTATTO CON ESSA);

b) A CONTATTO: QUANDO SI DA UN CALCIO AD UN PALLONE (IL PALLONE SENTE UNA FORZA SOLO SE IL PIEDE È A CONTATTO CON LUI); IN REALTÀ SE ANALIZZASSIMO IL MOMENTO DEL TIRO CON UN MICROSCOPIO POTENTE VEDREMO CHE I DUE OGGETTI NON SI TOCCANO, MA LE MOLECOLE DELL'UNO SONO MOLTO VICINE ALLE MOLECOLE DELL'ALTRO E TRA DI ESSE SI SVILUPPA UNA FORZA ELETTROSTATICA REPULSIVA INTENSA CHE ALLONTANA IL PALLONE. QUINDI SI PUÒ DIRE CHE IN GENERALE LE FORZE

c) LO SCIENZIATO FA PREVISIONI SU FENOMENI NON ANCORA OSSERVATI FACENDO UN ESPERIMENTO IN CONDIZIONI DI LABORATORIO CONTROLLATO, QUINDI SI POSSONO VARIARE GLI EFFETTI IN MODO CONTROLLATO;

d) L'ESPERIMENTO PUÒ CONFUTARE LE PREVISIONI (IN QUESTO CASO SI DEVE TORNARE INDIETRO E RIVEDERE LE IPOTESI) OPPURE CONFERMARLE E QUINDI SI VA AVANTI.

QUINDI CI SONO DUE MOMENTI: UNO TEORICO (IPOTESI E PREVISIONE) E UNO PRATICO (ESPERIMENTO). PER AVERE VALORE OGGETTIVO, LE PREVISIONI E I RISULTATI DEVONO AVERE CARATTERE QUANTITATIVO, OVVERO OGNI GRANDEZZA È DESCRITTA IN TERMINI MATEMATICI TRAMITE UN'UNITÀ DI MISURA. QUINDI DIRE CHE FA CALDO NON È OGGETTIVO, MA SI INDICA LA TEMPERATURA, AD ESEMPIO 20°C CON LA SUA UNITÀ DI MISURA. TUTTAVIA CI SONO FENOMENI, COME LA VELOCITÀ CHE NON SI ESPRIMONO SOLO CON UN NUMERO, MA SERVONO PIÙ DATI: NUMERO, VERSO E DIREZIONE CHE SI ESPRIMONO IN VETTORI. QUINDI UNA LEGGE FISICA È UNA RELAZIONE MATEMATICA TRA GRANDEZZE FISICHE COME POTREBBE ESSERE LA LEGGE: $F = ma$, CON F UN VETTORE CHE DESCRIVE L'AZIONE DI UN CORPO SU UN ALTRO, m È LA RESISTENZA DI UN CORPO A MODIFICARE IL PROPRIO STATO DI MOTO, a È UN ALTRO VETTORE CHE ESPRIME LA VARIAZIONE DELLO STATO DI MOTO.

LE GRANDEZZE FISICHE SI DIVIDONO IN: a) FONDAMENTALI: OVVERO QUELLE CHE VENGONO MISURATE DIRETTAMENTE MEDIANTE UN CONFRONTO CON UNA GRANDEZZA STANDARD; b) DERIVATE: SONO QUELLE CHE VENGONO DEFINITE TRAMITE LA LORO RELAZIONE CON LE GRANDEZZE FONDAMENTALI COME LA VELOCITÀ CHE È IL RAPPORTO SPAZIO SU TEMPO.
AFFINCHÉ UN CAMPIONE SIA UNA BUONA UNITÀ DI MISURA DEVE ESSERE DETERMINABILE CON LA MASSIMA PRECISIONE, DEVE ESSERE FACILMENTE RIPRODUCIBILE E NON DEVE VARIARE NEL TEMPO. QUINDI IN MECCANICA LE GRANDEZZE FONDAMENTALI SONO LUNGHEZZA, TEMPO E MASSA; IN TERMODINAMICA SONO LA TEMPERATURA, LA LUNGHEZZA, IL TEMPO E LA MASSA; IN ELETTROMAGNETISMO È L'INTENSITÀ DI CORRENTE. INOLTRE OGNI GRANDEZZA HA UNA SUA "DIMENSIONE" FISICA; LA DIMENSIONE È LA POTENZA CON LE QUALI LE GRANDEZZE FONDAMENTALI ENTRANO NELLA LORO DEFINIZIONE E SI INDICA COSÌ $[\text{GRANDEZZA}] = [L^{\alpha} \cdot T^{\beta} \cdot M^{\delta} \cdot I^{\gamma} \ldots]$ QUINDI PER ESEMPIO $[L] = [L^1 T^0 M^0 I^0]$ E COSÌ VIA. DA QUI SI POSSONO DEFINIRE LE UNITÀ DI MISURA. ESISTONO ANCHE GRANDEZZE ADIMENSIONALI CHE NON HANNO DIMENSIONE, OPPURE È IL RAPPORTO TRA DUE STESSE DIMENSIONI, COME AD ESEMPIO L'ANGOLO $\theta = S(\text{ARCO}) / R(\text{RAGGIO})$ CHE È IL RAPPORTO TRA DUE LUNGHEZZE. CONSIDERIAMO ANCORA FUNZIONI COME $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, $\log x$ IN SERIE DI TAYLOR: $\operatorname{sen} x = x - x^3/6$ ECC. x NON DEVE AVERE DIMENSIONI PERCHÉ SE FOSSE UN TEMPO IO SOMMEREI UN TEMPO E IL CUBO DI UN TEMPO E SONO DIVERSE DIMENSIONALMENTE. QUINDI $\operatorname{sen}(t)$ NON SI PUÒ FARE PERCHÉ IL SENO DI UN TEMPO NON ESISTE; PER RENDERLO ADIMENSIONALE SI INTRODUCE IL TERMINE $\omega = 1/T$ OTTENENDO COSÌ IL RAPPORTO TRA DUE TEMPI $\Rightarrow \operatorname{sen}(\omega t)$ QUINDI $[\omega] = [T^{-1}]$.
PER DEFINIRE LE UNITÀ DI MISURA CI SI RICONDUCE ALLE UNITÀ ATOMICHE IN QUANTO LE PROPRIETÀ ATOMICHE NON VARIANO NEL TEMPO E QUINDI SONO OTTIMALI. QUINDI PER IL METRO, ABBIAMO CHE $1m = 1650763,73\lambda$ OVVERO $1m$ È

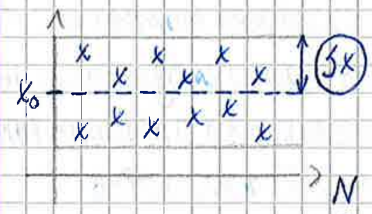
FORMA DI INCERTEZZA È LA NATURA PRONTEZZA DI RIFLESSI, OVVERO L'INTERAZIONE TRA L'UOMO E LO STRUMENTO. QUINDI SI POSSONO RICONOSCERE VARI TIPI DI ERRORI:

a) ERRORI CASUALI ACCIDENTALI: DOVUTI A ERRORI NELL'INTERAZIONE UOMO STRUMENTO, IN QUESTO CASO I MIEI RISULTATI SI DISTRIBUISCONO SU UN INTERVALLO;

b) ERRORI SISTEMATICI: LEGATI AL PROCESSO DI MISURAZIONE E CHE SI POSSONO EVITARE COME UNA NON PERFETTA TARATURA DELLO STRUMENTO, QUINDI INFLUISCE SULLA MISURAZIONE IN UNA SOLA DIREZIONE;

c) SENSIBILITÀ DELLO STRUMENTO.

ORA SUPPONIAMO DI MISURARE UNA GRANDEZZA E CHE IL VALORE REALE DELLA MISURA È x_0 CONSIDERANDO DI AVERE SOLO ERRORI ACCIDENTALI. QUINDI RIPETIAMO LA MISURAZIONE UN CERTO NUMERO $N >> 1$ VOLTE:



LE MISURE SI DISTRIBUISCONO CASUALMENTE E PER UN NUMERO MOLTO GRANDE DI MISURE LA PROBABILITÀ CHE x CADA SOPRA O SOTTO x_0 È LO STESSO. SE INDICHIAMO CON δx LA GRANDEZZA LEGATA ALLA MIA INCERTEZZA ALLA LA MISURA È DATA DA: $\underline{x_i \pm \delta x}$ NEL CASO DI ERRORI SOLO ACCIDENTALI; SE INVECE GLI ERRORI SONO DI VARIO TIPO ALLORA $\delta x = \max(\varepsilon, \text{ERRORI CASUALI}, \text{ERRORI SISTEMATICI})$. LA MIGLIORE STIMA DELLA MISURA CHE POSSO DARE È UN VALORE MEDIO CHE È DATO DA:

$\Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + x_3 \dots + x_N)$; INOLTRE SE N È MOLTO GRANDE, SUPPONENDO SOLO ERRORI CASUALI, ALLORA LE DIFFERENZE TRA LE MISURE E IL VALORE REALE DELLA MISURA TENDONO A CANCELLARSI: $\boxed{x_i - x_0}$ QUESTA QUANTITÀ SI DEFINISCE SCARTO ED È TANTO PIÙ PICCOLO QUANTO PIÙ PRECISA È LA MISURAZIONE. SI PUÒ ANCHE DIRE CHE IL VALORE MEDIO È MENO AFFETTO DA ERRORI, MA ANCH'ESSO HA UNA SUA INCERTEZZA IN QUANTO LA CANCELLAZIONE NON SARÀ MAI COMPLETA, PERÒ ANDANDO ALL'INFINITO LA CANCELLAZIONE È PERFETTA: $\bar{x} \longrightarrow x_0$ PER $N \rightarrow +\infty$.

TUTTAVIA LA MIGLIORE STIMA DELL'INCERTEZZA SU OGNI MISURA È DATA DALLO SCARTO QUADRATICO MEDIO:

$$\Rightarrow \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

CON $(x_i - \bar{x})$ È LO SCARTO QUADRATICO. QUINDI AD OGNI MISURA ASSOCIO L'INTERVALLO $\underline{x_i \pm \sigma_x}$; COME ABBIAMO DETTO ANCHE IL VALORE MEDIO HA UNA SUA INCERTEZZA $\boxed{\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}}$ CHE CORRISPONDE AD UN INTERVALLO PIÙ PICCOLO PERCHÉ IL VALORE MEDIO È MENO AFFETTO DA ERRORE. IN QUESTO CASO VALE CHE $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / \sqrt{N}$ E VALE LA STESSA COSA, OVVERO PER UN NUMERO DI MISURE CHE VA VERSO L'INFINITO $\sigma_{\bar{x}} \rightarrow 0$ E QUINDI $\bar{x} \rightarrow x_0$ E SUPPONENDO SOLO ERRORI ACCIDENTALI IL NOSTRO INTERVALLO È $\bar{x} \pm \sigma_{\bar{x}}$, MENTRE CON ERRORI DI VARIO TIPO L'INCERTEZZA È IL $\max(\varepsilon, \sigma_{\bar{x}}, \text{ERRORI SISTEMATICI})$.

- TEORIA DELLA PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI: LE GRANDEZZE DERIVATE NON SI MISURANO DIRETTAMENTE, MA TRAMITE LE GRANDEZZE FONDAMENTALI DA CUI DIPENDONO. PER COMPRENDERE LA TEORIA USIAMO UNA FUNZIONE $F(x)$ CON F (GRANDEZZA DERIVATA) IN FUNZIONE DELLA GRANDEZZA FONDAMENTALE x E DATO CHE x HA UNA SUA INCERTEZZA, ALLORA ANCHE

$F(x, y, z...)$ QUINDI OGNI GRANDEZZA FONDAMENTALE SI PUÒ ESPRIMERE COSÌ: $\bar{x} \pm \delta x$; $\bar{y} \pm \delta y$; $\bar{z} \pm \delta z$; E CONSEGUENZA LA MIGLIORE STIMA DI F È LEGATA ALLE GRANDEZZE FONDAMENTALI DA CUI DIPENDE, QUINDI: $\bar{F} = F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)$. SUPPONIAMO ADESSO DI FAR VARIARE SOLO LA x E TENERE INVARIATE LE ALTRE VARIABILI:

$$\left.\begin{array}{l} x: \bar{x} \to \bar{x} + \delta x \\ y = \bar{y} \\ z = \bar{z} \end{array}\right\}$$

SE RISPETTIAMO LA LEGGE DI PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI ALLORA:

$$\Rightarrow \frac{F(\bar{x}+\delta x, \bar{y}, \bar{z}...) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)}{\delta x} = \frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}...)$$

QUESTO FATTORE MI DICE QUANTO RAPIDAMENTE VARIERÀ LA FUNZIONE ALLA VARIAZIONE DELLA SOLA VARIABILE x; IL SIMBOLO FINALE INDICA LA DERIVATA PARZIALE DELLA FUNZIONE RISPETTO $\bar{x}, \bar{y}$ E COSÌ VIA. QUINDI PASSANDO AL LIMITE SI OTTIENE CHE LA DERIVATA PARZIALE È IL VALORE LIMITE CHE RAGGIUNGE LA FUNZIONE QUANDO LA SOLA INCERTEZZA LEGATA ALLA VARIABILE x DIVENTA MOLTO PICCOLA. STESSA COSA SE FACCIO VARIARE LA SOLA y:

$$\lim_{\delta y \to 0} \frac{F(\bar{x}, \bar{y}+\delta y, \bar{z}...) - F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)}{\delta y} = \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}...)$$

QUINDI PER OGNI VARIABILE DEFINISCO LA DERIVATA PARZIALE RISPETTO QUESTA VARIABILE.

QUINDI POSSO GENERALIZZARE LA FORMULA DI PRIMA CONSIDERANDO I DUE CASI POSSIBILI:

a) IN GENERALE: $\delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)\right|\delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)\right|\delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}...)\right|\delta z ...$;

b) SE GLI ERRORI SULLE VARIABILI SONO DOVUTI A SOLI ERRORI CASUALI ALLORA L'INTERVALLO SARÀ PIÙ PICCOLO E LA STIMA MIGLIORE:

$$\Rightarrow \delta F = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y}...)\right)^2 \delta x^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}...)\right)^2 \delta y^2 ...};$$

ADESSO POSSIAMO RISOLVERE IL PROBLEMA DI PRIMA IN TUTTI E DUE I CASI:

a) $\frac{\partial V}{\partial l_1} = \lim_{\delta l_1 \to 0} \frac{(\bar{l}_1 + \delta l_1)\cdot \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3 - \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3}{\delta l_1} = \frac{\delta l_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3}{\delta l_1} = \bar{l}_2 \bar{l}_3$; CON LE ALTRE VARIABILI INVECE:

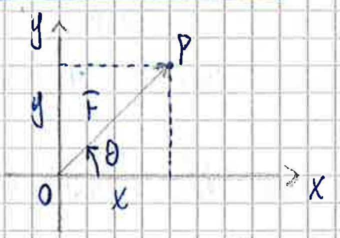
$$\frac{\partial V}{\partial l_2} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_3 \quad e \quad \frac{\partial V}{\partial l_3} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 \Rightarrow \delta V = \bar{l}_2 \bar{l}_3 \delta l_1 + \bar{l}_1 \bar{l}_3 \delta l_2 + \bar{l}_2 \bar{l}_1 \delta l_3 = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3 \pm \delta V;$$

L'ERRORE RELATIVO SARÀ DATO DA: $\frac{\delta V}{\bar{V}} = \frac{1}{\bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3}\left(\bar{l}_2 \bar{l}_3 \delta l_1 + \bar{l}_1 \bar{l}_3 \delta l_2 + \bar{l}_2 \bar{l}_1 \delta l_3\right) = \frac{\delta l_1}{\bar{l}_1} + \frac{\delta l_2}{\bar{l}_2} + \frac{\delta l_3}{\bar{l}_3}$,

QUINDI LA PRECISIONE È DATO DALLA SOMMA DEGLI ERRORI RELATIVI ASSOCIATI ALLA MISURA DI CIASCUN SPIGOLO; IN QUESTO CASO ABBIAMO ERRORI CHE POSSONO ESSERE DI VARIO TIPO;

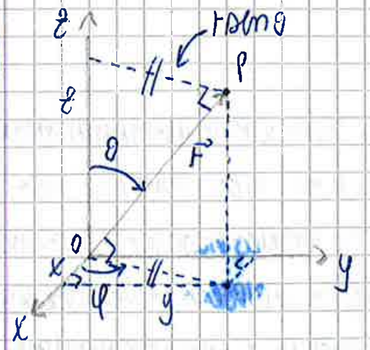
$$\frac{\delta g}{g} = \sqrt{1\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$ con $\alpha^2 = 1 \cdot 1$ e $\beta^2 = (-2)^2 = 4$, quindi la stessa formula di prima.

SISTEMI DI COORDINATE

1) 

- COORDINATE POLARI PIANE: (r, θ) definiscono univocamente il punto P nel piano; r si dice vettore posizione con $|\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$; quindi possiamo scrivere $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ per la trigonometria. Adesso proviamo a tenere θ fisso e variare di poco r in lunghezza di una quantità infinitesima dr, quindi il vettore finale individuerà un nuovo punto di coordinate $(r+dr, \theta)$ allora si dice che il punto si sposta in posizione radiale uscente e indicando con dl_r il vettore spostamento, ovvero il vettorino differenziale, allora possiamo definire un asso $\vec{u_r}$ che ha stessa direzione e verso di $\vec{r}$; da qui deriva che il vettore posizione così può scriversi $\vec{r} = r\vec{u_r}$; mentre il vettore spostamento dl_r lo si potrà scrivere $\vec{dl_r} = dr\,\vec{u_r}$;

Se invece adesso tengo fisso r e faccio variare θ di un angolo infinitesimo $d\theta$, allora avremo che il punto si sta muovendo lungo una circonferenza; il nuovo punto si indicherà con le coordinate $(r, \theta + d\theta)$ e da qui potremo scrivere $\vec{dl_\theta} = dl_\theta \cdot \vec{u_\theta}$ in quanto per spostamenti infinitesimi l'arco di circonferenza percorsa si confonde con la corda sottesa dall'angolo allora vale anche $\vec{dl_\theta} = r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$; in questo modo abbiamo individuato anche un altro versore $\vec{u_\theta}$ in direzione di θ crescenti. In generale se sia r che θ variano allora diremo che lo spostamento avrà due componenti, una in direzione radiale e una legata alla variazione dell'angolo, quindi il nuovo punto sarà $P'(r+dr, \theta+d\theta)$ e il vettore spostamento sarà $\vec{dl} = \vec{dl_r} + \vec{dl_\theta} = dr\,\vec{u_r} + r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$.

2) 

- COORDINATE POLARI SFERICHE: (r, θ, φ) definiscono univocamente il punto P nello spazio; se $\theta = 0$ siamo nel semiasse positivo mentre se $\theta = \pi$ siamo nel semiasse z negativo. φ invece è un angolo diedro che deriva dall'intersezione di due piani, ovvero il piano xz e il piano passante per $\vec{r}$ e può variare tra 0 e 2π. Adesso proviamo a tenere fissi φ e r e faccio variare solo θ, vediamo che il punto P descrive un meridiano, una semicirconferenza; se invece tengo fissi r e θ e vario φ il punto si muove lungo un parallelo, ovvero descrive un cerchio perpendicolare a z. Allora le coordinate polari sferiche si potranno definire così:

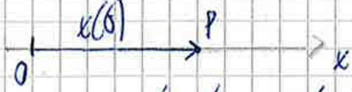
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\cos\varphi \\ z = r\sin\theta\sin\varphi \end{cases}$$

z, x, y

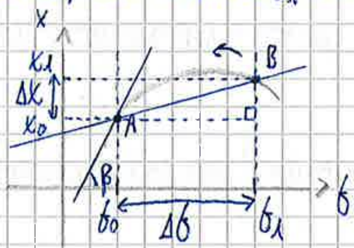
Calcolando il modulo infatti: $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}} = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$. Inoltre potremo

IN CUI IL MOTO INTORNO È DESCRIVIBILE E QUESTI SONO PUNTI.

① **CINEMATICA**: CONSIDERIAMO IL MOTO UNIDIMENSIONALE DI UN PUNTO:



LA POSIZIONE DEL PUNTO P ALL'ISTANTE t SI ESPRIME CON UNA COORDINATA E QUINDI UNA SOLA FUNZIONE $x(t)$. SE IL PUNTO SI MUOVE DA UN ISTANTE INIZIALE t_0 FINO UN ISTANTE $t_1 > t_0$ CON $\Delta t = t_1 - t_0 > 0$ E $t_1 = t_0 + \Delta t$ E CHE $x_0 = x(t_0)$ È LA POSIZIONE DEL PUNTO ALL'ISTANTE INIZIALE, ALLORA ALL'ISTANTE t_1 IL CORPO SARÀ IN UN'ALTRA POSIZIONE $x(t_1)$.



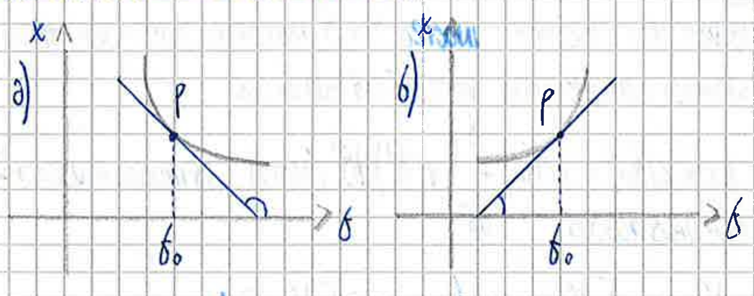
LA VELOCITÀ MEDIA CON CUI È AVVENUTO LO SPOSTAMENTO È DEFINITA COME:

$$V_{media} = \bar{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(x_1 - x_0)}{(t_1 - t_0)} = \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t};$$

GRAFICAMENTE LA VELOCITÀ MEDIA È LA TANGENTE, OVVERO LA PENDENZA DELLA SECANTE PER A E B; SE FACCIAMO TENDERE $\Delta t \to 0$ QUINDI MOLTO PICCOLO, VEDIAMO CHE IL PUNTO B SI AVVICINA AL PUNTO A FINO QUASI A COINCIDERE CON ESSO E QUINDI LA SECANTE SI APPROSSIMA ALLA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO A; QUINDI PER Δt MOLTO PICCOLO IL RAPPORTO INCREMENTALE RAGGIUNGE UN VALORE LIMITE:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}(t_0)$$

QUINDI EQUIVALE A TROVARE LA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO DESIDERATO; QUESTO VALORE LIMITE È DETTA <u>VELOCITÀ ISTANTANEA</u>, OVVERO LA VELOCITÀ CALCOLATA IN UN ISTANTE MOLTO PICCOLO. LA VELOCITÀ INOLTRE È UNA GRANDEZZA DOTATA DI SEGNO; SE $V_{media} > 0$ ALL'AUMENTARE DI $\Delta t > 0$, ALLORA Δx È POSITIVO, OVVERO IL CORPO SI STA MUOVENDO NELLO STESSO VERSO FISSATO DALL'ASSE, MENTRE SE $V_{media} < 0$ CON $\Delta t > 0$, ALLORA IL CORPO SI STA MUOVENDO ALL'INDIETRO, NEL VERSO OPPOSTO. ORA INDICHIAMO CON dt UN INCREMENTO INFINITESIMO DI TEMPO E CON dx LA CORRISPONDENTE VARIAZIONE INFINITESIMA DI SPAZIO; IN QUESTO MODO DIAMO UN SENSO ALLA DERIVATA INTERPRETANDOLA COME RAPPORTO TRA GRANDEZZE INFINITESIME, QUINDI POSSIAMO APPROSSIMARE $\Delta x = V_{media}\, \Delta t$, MA CON $\Delta t \to 0 \Rightarrow \underline{dx = v(t_0)\, dt}$ CON $v(t_0)$ LA VELOCITÀ ISTANTANEA NELL'ISTANTE t_0.



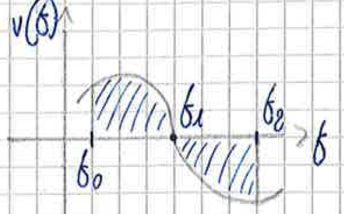
a) <u>CURVA DECRESCENTE</u>: L'ANGOLO È OTTUSO QUINDI LA TANGENTE È NEGATIVA, QUINDI LA VELOCITÀ ISTANTANEA $v(t_0) > 0$;

b) <u>CURVA CRESCENTE</u>: L'ANGOLO È ACUTO CON TANGENTE POSITIVA, QUINDI $v(t_0) > 0$.

QUINDI NEL PRIMO CASO IL CORPO SI STA MUOVENDO ALL'INDIETRO, NEL VERSO OPPOSTO, MENTRE NEL SECONDO CASO IL CORPO SI MUOVE IN AVANTI NELLO STESSO VERSO DELL'ASSE.

- CONSIDERIAMO L'EQUAZIONE $x(t) = At + B$ CON $[B] = [L]$ E $[A] = [L \cdot T^{-1}]$ IN MODO CHE $[At] = [L]$;

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 174



STUDIAMO QUESTO GRAFICO NEI DUE INTERVALLI DI TEMPO: NELL'INTERVALLO DI TEMPO $t_0 \le t \le t_1$ L'AREA SOTTESA DALLA CURVA È POSITIVA PERCHÉ STA SOPRA, MENTRE IN $t_1 \le t \le t_2$ L'AREA È NEGATIVA PERCHÉ STA SOTTO. SICCOME IL TEMPO È POSITIVO L'UNICA COSA CHE PUÒ ESSERE NEGATIVA È LA VELOCITÀ, QUINDI DA QUESTO GRAFICO RICAVIAMO CHE DA t_0 A t_1 IL PUNTO PROCEDE A VELOCITÀ POSITIVA NELLO STESSO VERSO DELL'ASSE; INVECE IN t_1 POI SI RESETTA E FINO A t_2 PROCEDE A VELOCITÀ NEGATIVA QUINDI IN VERSO OPPOSTO. PRIMA VA AVANTI, POI SI RESETTA E TORNA INDIETRO.

EX: UNA MACCHINA SI MUOVE DA UN $t_0 = 0$ SEC A $t_1 = 10$ SEC CON VELOCITÀ COSTANTE DA UN PUNTO $x_0 = 0\,m$ AD UN PUNTO $x_1(t_1) = 1\,km = 1000\,m$; POI LA MACCHINA FA UN'INVERSIONE ISTANTANEA E PROCEDE A VELOCITÀ COSTANTE (NON LA STESSA) FINO AD UN PUNTO $x_2(t_2) = 700\,m$ CON $t_2 = 16$ SEC; DETERMINARE LA VELOCITÀ NEI DUE INTERVALLI E POI LA VELOCITÀ TRA t_0 E t_2;

$t = 0 \to t_1$ $v_1 = cost$ QUINDI $x(t) = x(0) + v_1(t-0) = x(0) + v_1 t \Rightarrow v_1 = \frac{x_1 - x_0}{t_1} = \frac{x_1}{t_1} = \frac{1000m}{10sec} = \underline{100\,m/s}$;

$t_1 = 10 \to t_2$ $v_2 = cost$ QUINDI $x(t) = x(t_1) + v_2(t - t_1)$;

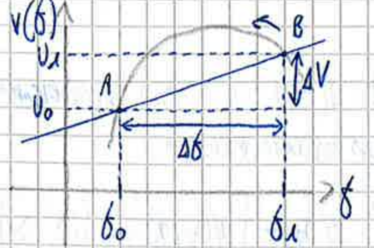
L'UNICA CONSIDERAZIONE DA FARE È CHE NEL 2° INTERVALLO L'ISTANTE INIZIALE È L'ISTANTE FINALE DEL 1° INTERVALLO:

$x_2 = x(t_2) = x_1 + v_2(t_2 - t_1) \Rightarrow v_2 = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{700-1000}{16-10} = \underline{-50\,m/s}$ (INFATTI TORNA INDIETRO);

QUINDI $v_{media} = \frac{700-0}{16-0} = \underline{43,75\,m/s}$ TRA $t = 0$ E $t_2 = 16$ SEC.

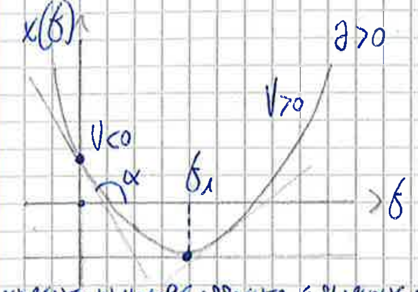
SE INVECE LA VELOCITÀ ADESSO CAMBIA? CONSIDERIAMO DI NUOVO UN PUNTO CHE SI MUOVE DA UN ISTANTE $t_0 \to t_1$ CON $t_1 > t_0$; SIAMO NEL CASO IN PARTICOLARE DOVE LA NOSTRA MACCHINA NEL SUO PERCORSO PUÒ ACCELERARE O DECELERARE.

$v_0 = v(t_0) \to v_1 = v(t_1) = v(t_0 + \Delta t)$ QUINDI INTRODUCIAMO IL CONCETTO DI ACCELERAZIONE MEDIA:



$a_{media} = \bar{a} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}$; GRAFICAMENTE L'ACCELERAZIONE RAPPRESENTA LA PENDENZA DELLA SECANTE PASSANTE PER A E B, QUINDI LA TANGENTE. SE SI RIDUCE Δt A MOLTO PICCOLO, IL PUNTO B SI AVVICINA AL PUNTO FINO A COINCIDERE CON IL PUNTO A, QUINDI LA SECANTE SI APPROSSIMA ALLA TANGENTE ALLA CURVA NEL PUNTO A CHE CORRISPONDE ALL'ISTANTE INIZIALE. QUINDI PER $\Delta t \to 0$ IL RAPPORTO INCREMENTALE RAGGIUNGE UN VALORE LIMITE, OVVERO L'ACCELERAZIONE ISTANTANEA, L'ACCELERAZIONE IN UN ISTANTE MOLTO PICCOLO:

$\to \lim_{\Delta t \to 0} a_{media} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t_0 + \Delta t) - v(t_0)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}(t_0) = a(t_0)$ DI NUOVO SIAMO PASSATI A INCREMENTI INFINITESIMI PER DARE UN SENSO ALLA DERIVATA;



LA PARABOLA HA CONCAVITÀ RIVOLTA VERSO L'ALTO, QUINDI LA DERIVATA SECONDA, OVVERO L'ACCELERAZIONE È POSITIVA; SE FOSSE STATA RIVOLTA VERSO IL BASSO, L'ACCELERAZIONE ERA NEGATIVA. GRAFICAMENTE ANDANDO AVANTI PIÙ LA TANGENTE DIMINUISCE, QUINDI IL PUNTO DECELERA E IN t_1 LA TANGENTE È ORIZZONTALE, QUINDI LA VELOCITÀ SI ANNULLA E IL PUNTO SI FERMA. NEGLI ISTANTI DOPO LA TANGENTE AUMENTA IN VALORE ASSOLUTO E SI MUOVE NEL VERSO DELL'ASSE ACCELERANDO. QUESTO VUOL DIRE CHE DOVE LA TANGENTE ERA NEGATIVA LA VELOCITÀ ERA NEGATIVA, QUINDI IL PUNTO SI MUOVEVA IN VERSO OPPOSTO, POI IL PUNTO SI È FERMATO E HA CAMBIATO VERSO ACCELERANDO. QUINDI QUESTO CI PERMETTE DI INTRODURRE DUE TIPI DI MOTO:

a) MOTO ACCELERATO: $|V|$ AUMENTA NEL TEMPO DA UN TEMPO $t \to t+dt$; DI CONSEGUENZA SE $V>0$ ALLORA ANCHE $dV = d|V| > 0 \Rightarrow a = \frac{dV^{\oplus}}{dt_{\oplus}} > 0$; SE $V<0$ ALLORA $dV = -d|V| < 0 \Rightarrow a = \frac{dV^{\ominus}}{dt_{\oplus}} < 0$; TUTTAVIA QUELLO CHE CONTA È CHE NEL PRIMO CASO $(V>0)$: $\boxed{a\cdot V>0}$ NEL SECONDO (CON $V<0$): $\boxed{a\cdot V>0}$ OVVERO IN ENTRAMBI I CASI IL CORPO STA ACCELERANDO PERCHÉ ACCELERAZIONE E VELOCITÀ HANNO LO STESSO SEGNO;

b) MOTO DECELERATO: $|V|$ DIMINUISCE NEL TEMPO DA UN TEMPO $t \to t+dt$; DI CONSEGUENZA SE $V>0$ ALLORA VALE CHE $dV = d|V| < 0$ QUINDI L'ACCELERAZIONE È NEGATIVA; SE $V<0$ INVECE VALE $dV = -d|V| > 0$ PERCHÉ LA VELOCITÀ DIMINUISCE IN MODULO, MA CON IL "−" AUMENTA; QUINDI IN ENTRAMBI I CASI VALE CHE $\boxed{aV<0}$ OVVERO ACCELERAZIONE E VELOCITÀ HANNO SEGNO OPPOSTO, QUINDI IL CORPO DECELERA.

- VELOCITÀ IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE: CONSIDERIAMO UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO CON a = COSTANTE:

$$\begin{cases} v(t) = v(t_0) + a(t-t_0) \\ x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2 \end{cases}$$

$v(x) = ?$

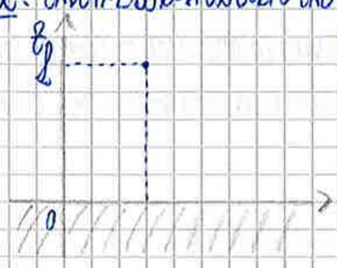
$\Rightarrow$ DALLA PRIMA SI RICAVA $(t-t_0) = \frac{\Delta V}{a} = \frac{V(t)-V_0}{a}$ E COSÌ SOSTITUISCO NELLA SECONDA EQUAZIONE ELIMINANDO IN QUESTO MODO IL TEMPO:

$$x(t) = x_0 + V_0\left(\frac{V-V_0}{a}\right) + \frac{\cancel{a}}{2}(V-V_0)^2\frac{1}{a^{\cancel{2}}} =$$

$$= x_0 + \cancel{\frac{V_0 V}{a}} - \frac{V_0^2}{a} + \frac{1}{2a}\left(V^2 + V_0^2 - \cancel{2V_0 V}\right) = x_0 + \frac{V^2}{2a} - \frac{V_0^2}{2a}$$ E DA QUI SI RICAVA LA RELAZIONE:

$$\Rightarrow \boxed{V^2 - V_0^2 = 2a(x-x_0)}$$ (SOLO CON MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO).

ES: CADUTA LIBERA DI UN CORPO CHE PARTE DA FERMO: $h = 4\,m$ E g (ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ) $= 9{,}8\,m/s^2$.



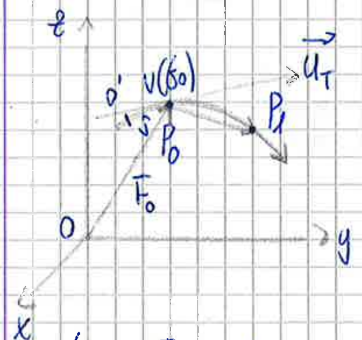
VOGLIAMO RICAVARE IL MOTO $z(t)$ SAPENDO CHE PARTE AD UNA CERTA ALTEZZA h DA FERMO, QUINDI $z(0) = h$ E $v(0) = 0$ E INOLTRE SI SA CHE TUTTI I CORPI IN CADUTA LIBERA SONO SOGGETTI ALLA STESSA ACCELERAZIONE DI GRAVITÀ; $a = \ominus 9{,}8\,m/s^2$:

$$\Rightarrow \underline{\underline{z(t)}} = z(0) + v(0)t + \frac{a}{2}t^2 = \underbrace{h - \frac{g t^2}{2}}$$ (ATTRITO TRASCURABILE).

$$v(t_0) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0+\Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} ; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0+\Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} ; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t_0+\Delta t) - z(t_0)}{\Delta t} \right);$$

E SICCOME SONO RAPPORTI TRA GRANDEZZE INFINITESIME: $v(t_0) = \left(\frac{dx}{dt}(t_0) ; \frac{dy}{dt}(t_0) ; \frac{dz}{dt}(t_0) \right)$ QUINDI LA VELOCITÀ ISTANTANEA È UN VETTORE LIMITE LE CUI COMPONENTI SONO LE DERIVATE DELLE COORDINATE RISPETTO AL TEMPO.

$v_x(t) = \frac{dx}{dt}(t)$; $v_y(t) = \frac{dy}{dt}(t)$; $v_z(t) = \frac{dz}{dt}(t)$ OVVERO LE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ NEL TEMPO.



COME AL SOLITO FISSATO UN ORIGINE SUL PERCORSO CURVILINEO È DEFINITA LA POSIZIONE DEL PUNTO TRAMITE ASCISSA CURVILINEA $s(t)$. SE PRENDIAMO DEI PUNTI P_0 E P_1 MOLTO VICINI TRA DI LORO E DEFINIAMO IL VETTORE POSIZIONE RELATIVA E FACCIAMO TENDERE $\Delta t \to 0$ ALLORA P_1 SI AVVICINA A P_0 E LA SECANTE SI APPROSSIMA ALL'ARCO $\widehat{P_0 P_1}$ PERCHÉ SE I DUE PUNTI SONO MOLTO VICINI LA CORDA SI CONFONDE CON L'ARCO. QUINDI $|\Delta \bar{r}| \approx |\Delta s|$ QUINDI SICURAMENTE IN GENERALE $\Delta \bar{r}$ E $\Delta \bar{s}$ NON SONO UGUALI, MA CON $\Delta t \to 0$ $\Delta \bar{r}$ SI CONFONDE CON $\Delta \bar{s}$, OVVERO CON L'ASCISSA CURVILINEA CHE INDICA LO SPOSTAMENTO DEL PUNTO.

$$|\bar{v}(t)| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta t} \right| = \lim_{\Delta t \to 0} \left| \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} \right| = \left| \frac{ds}{dt}(t) \right|$$

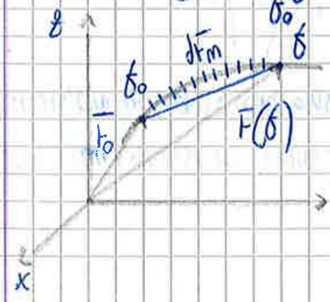
QUINDI IL MODULO DEL VETTORE VELOCITÀ ISTANTANEA È LA DERIVATA DELL'ASCISSA CURVILINEA NEL TEMPO. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE IL VETTORE VELOCITÀ IN OGNI ISTANTE COSÌ: $\overline{v(t)} = v(t)\,\vec{u}_T$ IN CUI $\vec{u}_T$ CI DICE CHE LA VELOCITÀ È DIRETTA SEMPRE NELLA DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA. LA COMPONENTE È POSITIVA SE MI MUOVO NEL VERSO FISSATO, SENNÒ È NEGATIVA. NEL PRIMO CASO IL VALORE ASSOLUTO SI PUÒ TOGLIERE CHE LA VELOCITÀ AUMENTA NEL TEMPO È CI STIAMO MUOVENDO NEL VERSO GIUSTO.

SAPENDO LA VELOCITÀ $\overrightarrow{v(t)}$ IN OGNI ISTANTE POSSO RICAVARE $\bar{r}(t)$ OVVERO LA POSIZIONE IN OGNI ISTANTE?

$t_0 \; t_1 \; t_2 \; \dots \; t_N$

CONSIDERANDO GLI INTERVALLINI INFINITESIMI dt_m RIESCO IN QUESTO MODO A CONSIDERARE COSTANTE IL VETTORE VELOCITÀ AL SUO INTERNO; $\bar{v}(t) \cong v(t_m) = \bar{v}_m$. QUINDI:

$\Delta t = t - t_0 = \sum dt_m = \int_{t_0}^{t} dt'$ CON $d\bar{r}_m = \bar{v}_m\, dt$ PER OGNI INCREMENTO INFINITESIMO DI TEMPO.



QUINDI IN OGNI ISTANTE LA PARTICELLA HA FATTO UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO DIRETTO ALLA TANGENTE ALLA CURVA IN OGNI PUNTO. QUINDI $\overrightarrow{\Delta r}$ CORRISPONDE ALLA SOMMA VETTORIALE DEGLI SPOSTAMENTI CON $\Delta \bar{r} = d\bar{r}_1 + d\bar{r}_2 + \dots + d\bar{r}_m$ INFATTI IL VETTORE SOMMA È IL VETTORE CHE CONGIUNGE L'ORIGINE DEL PRIMO CON LA PUNTA DELL'ULTIMO. QUINDI ANCORA POSSIAMO SCRIVERE IL VETTORE SOMMA COME UN INTEGRALE:

$$\bar{a}(t_0) = \left(\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_x}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_y}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta v_z}{\Delta t}\right) = \left(\frac{dv_x}{dt}(t_0); \frac{dy}{dt}(t_0); \frac{dz}{dt}(t_0)\right)$$ QUINDI

LE COMPONENTI DEL VETTORE ACCELERAZIONE ISTANTANEA SONO LE DERIVATE DELLE COMPONENTI DELLA VELOCITÀ.

$\bar{a}(t_0) = a_x(t)\bar{u}_x + a_y(t)\bar{u}_y + a_z(t)\bar{u}_z$ CON $a_x(t)\bar{u}_x = \frac{d^2x}{dt^2}(t)$ INFATTI $v_x = \frac{dx}{dt}$ E COSÌ VIA.

SAPENDO IL VETTORE ACCELERAZIONE IN OGNI ISTANTE, POSSIAMO RICAVARE IL MOTO? QUESTO COSTITUISCE IL <u>PROBLEMA INVERSO DELLA CINEMATICA NELLO SPAZIO</u>. COME AL SOLITO SUDDIVIDIAMO L'INTERVALLO DI TEMPO IN TANTI INTERVALLINI INFINITESIMI IN MODO DA CONSIDERARE COSTANTE AL LORO INTERNO IL VETTORE ACCELERAZIONE $\bar{a}(t)$.

$$\overline{\Delta v} = \bar{v}(t) - \bar{v}(t_0) = \sum d\bar{v}_i = \sum \bar{a}(t_i)\,dt_i = \int_{t_0}^{t}\bar{a}(t')\,dt' \Rightarrow \bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^{t}\bar{a}(t')\,dt';$$

RICORDIAMOCI CHE STIAMO SOMMANDO TANTI VETTORINI MOLTO CORTI; SCRIVIAMO L'ACCELERAZIONE IN COMPONENTI:

$$\int_{t_0}^{t}\bar{a}(t')\,dt' = \sum \bar{a}(t_i)\,dt_i = \left(\sum a_x(t_i)\,dt_i\right)\bar{u}_x + \left(\sum a_y(t_i)\,dt_i\right)\bar{u}_y + \left(\sum a_z(t_i)\,dt_i\right)\bar{u}_z =$$

$$= \left(\int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'\right)\bar{u}_x + \left(\int_{t_0}^{t} a_y(t')\,dt'\right)\bar{u}_y + \left(\int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt'\right)\bar{u}_z = \bar{v}(t) - \bar{v}(t_0) = \overline{\Delta v} =$$

$$= \left(v_x(t) - v_x(t_0)\right)\bar{u}_x + \left(v_y(t) - v_y(t_0)\right)\bar{u}_y + \left(v_z(t) - v_z(t)\right)\bar{u}_z.$$ DA QUI RICAVIAMO:

$$\begin{cases} v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_x(t')\,dt'; \\ v_y(t) = v_y(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_y(t')\,dt'; \\ v_z(t) = v_z(t_0) + \int_{t_0}^{t} a_z(t')\,dt' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x(t_0) + v_x(t_0)(t-t_0) + \frac{a}{2}x(t-t_0)^2; \\ y(t) = y(t_0) + v_y(t_0)(t-t_0) + \frac{a}{2}y(t-t_0)^2; \\ z(t) = z(t_0) + v_z(t_0)(t-t_0) + \frac{a}{2}z(t-t_0)^2. \end{cases}$$ <u>MOTO</u>

PER ARRIVARE ALL'EQUAZIONI DEL MOTO ABBIAMO CONSIDERATO LE EQUAZIONI DEL MOTO DI UNA PARTICELLA NELLO SPAZIO E SEGUITO LO STESSO PROCEDIMENTO CHE ABBIAMO FATTO PER RICAVARE IL MOTO DI UN PUNTO IN UNA DIMENSIONE, OVVERO ABBIAMO CONSIDERATO L'ACCELERAZIONE COSTANTE CON $\bar{a}(t) = \bar{a}$ = COSTANTE E QUINDI SARANNO COSTANTI ANCHE LE SUE COMPONENTI $\bar{a}_x, \bar{a}_y, \bar{a}_z$. POI ABBIAMO SVILUPPATO L'INTEGRALE $\int_{t_0}^{t}\left[v(t_0) + a(t'-t_0)\right]dt'$ SEGUENDO LA RISOLUZIONE E POI RICAVANDO LE EQUAZIONI DEL MOTO.

N.B: $v(t) = v(t_0) + a(t-t_0)$ E POI LA SOSTITUZIONE IN $\int_{t_0}^{t} v(t')\,dt'$.

IL CENTRO DELLA TERRA. L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE VIENE DATA DALLA LEGGE DI NEWTON:

$\vec F = -G\frac{M_T m}{r^2}\vec u_r = -G\frac{M_T m}{r^3}\vec r$ CON $|\vec F| = \frac{G M_T m}{r^2}$; SAPENDO INOLTRE CHE $\vec F = m\vec a$ ALLORA CI POSSIAMO RICAVARE L'ACCELERAZIONE: $\vec a = -G\frac{M_T \cancel{m}}{r^2}\vec u_r$ QUINDI L'ACCELERAZIONE DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE DELLA PARTICELLA E NON DALLA SUA MASSA CHE INFATTI SI CANCELLA; QUINDI OGNI PUNTO CHE SI TROVA ALLA STESSA DISTANZA DAL CENTRO DELLA TERRA RISENTANO DELLA STESSA ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE.

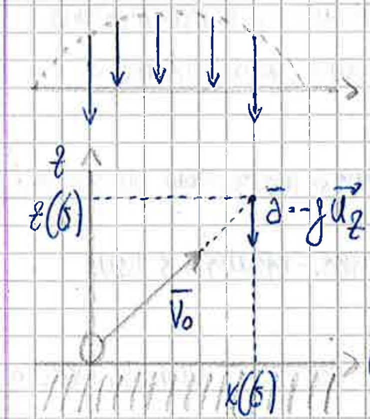
$[G] = [a\cdot L^2\cdot M^{-1}] = [L\cdot T^{-2}\cdot L^2\cdot M^{-1}] = [L^3\cdot T^{-2}\cdot M^{-1}] \Rightarrow \underline{G = 6{,}67\cdot 10^{-11}}\ \frac{m^3}{s^2}\,kg^{-1}$

QUANTO VALE L'ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE IN OGNI PUNTO SULLA SUPERFICIE DELLA TERRA?

$h \ll R_T$

SIAMO A DISTANZE DALLA TERRA MOLTO PICCOLE RISPETTO IL RAGGIO DELLA TERRA; QUINDI LE ALTEZZE LEGATE ALLE MONTAGNE E GLI ALTIPIANI SI POSSONO TRASCURARE RISPETTO IL RAGGIO TERRESTRE. ALLORA L'ACCELERAZIONE SARÀ DATA DA:

$|\vec a| = \frac{GM_T}{(R_T+h)} = \frac{GM_T}{(R_T)^2} = \underline{9{,}8\ m/s^2}$ SAPENDO CHE $\underline{R_T = 6000\ km}$. RITORNANDO QUINDI AL MOTO DEL PROIETTILE, DAL MOMENTO CHE LE DISTANZE DAL CENTRO DELLA TERRA SONO TRASCURABILI RISPETTO AL RAGGIO DELLA TERRA, ALLORA IL PROIETTILE NON SI ACCORGERÀ DELLA CURVATURA DELLA TERRA, QUINDI PER IL PROIETTILE LA SUPERFICIE È PIATTA.



IN QUESTO MODO LA DIREZIONE DELL'ACCELERAZIONE È SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA TERRA E COINCIDE CON LA VERTICALE ALLA SUPERFICIE TERRESTRE. IN QUESTO MODO L'ACCELERAZIONE $\vec a$ = COSTANTE.

RITORNANDO AL PROBLEMA BALISTICO SI CONSIDERA IL CANNONE ALL'ORIGINE CHE SPARA UNA PALLOTTOLA ALL'ISTANTE $t=0$; IN OGNI ISTANTE L'ACCELERAZIONE È $-g\vec u_z$. CONSIDERIAMO IL PIANO FORMATO DALLA VELOCITÀ INIZIALE $\vec V_0$ E DALLA VERTICALE $\vec a$; IN OGNI ISTANTE L'ACCELERAZIONE NON HA COMPONENTE $\perp$ AL PIANO E INOLTRE LA VELOCITÀ INIZIALE NON HA COMPONENTE $\perp$ AL PIANO; QUINDI IL MOTO SI SVOLGE SU UN PIANO; IN PARTICOLARE QUESTO MOTO LO SI PUÒ DECOMPORRE IN DUE COMPONENTI, UNO LUNGO L'ASSE X CHE È UN MOTO CHE NON TIENE CONTO DELL'ARIA, QUINDI LA VELOCITÀ CHE HA ALL'INIZIO LA TIENE INVARIATA FINO ALLA FINE, QUINDI È UN MOTO UNIFORME; LUNGO L'ASSE Z C'È UN'ACCELERAZIONE COSTANTE, QUINDI È UN MOTO UNIFORMEMENTE ACCELERATO.

LE CONDIZIONI INIZIALI SONO $\vec r(0) = 0 \iff x(0) = 0$ E $z(0) = 0$; IL MOTO SI PUÒ SCRIVERE COME:

$$\begin{cases} x(t) = x(0) + V_{0x}t \text{ (MOTO UNIFORME)} = V_{0x}\cdot t; \\ z(t) = z(0) + V_{0z}\cdot t - \frac{gt^2}{2} = V_{0z}\cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

SE VOGLIAMO RICAVARCI LA TRAIETTORIA, ALLORA DOVREMMO ELIMINARE IL TEMPO SOSTITUENDO DALLA 1ª EQUAZIONE $t = \frac{x}{V_{0x}}$ E METTERLO NELLA SECONDA:

$$\begin{cases} x(t+T) = R\cos(\omega t + \omega T) \\ y(t+T) = R\,\mathrm{sen}(\omega t + \omega T) \end{cases}$$

INOLTRE SE $T = 2\pi/\omega$ ABBIAMO CHE $\omega T = 2\pi$ QUESTO VUOL DIRE CHE L'ARGOMENTO DEL SENO E DEL COSENO SARÀ VARIATO DI 2π, OVVERO x E y RITORNANO ALLA LORO POSIZIONE INIZIALE; QUINDI È UN MOTO PERIODICO, OVVERO DOPO UN CERTO PERIODO DI TEMPO T LA x E LA y RITORNANO ALL'INIZIO. DIMENSIONALMENTE ωT È UN ANGOLO MISURATO IN RADIANTI. NOTIAMO INOLTRE CHE:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2\cos^2\omega t + R^2\mathrm{sen}^2\omega t = R^2(\cos^2\omega t + \mathrm{sen}^2\omega t) = R^2$$

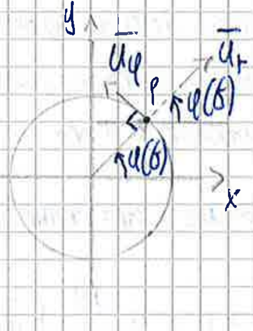
QUINDI x E y VARIANO LA LORO POSIZIONE NEL TEMPO, MA LA SOMMA DEI LORO QUADRATI È COSTANTE. QUINDI ABBIAMO UNA TRAIETTORIA COSTANTE CHE CORRISPONDE AD UN CERCHIO, QUINDI PER ORA STIAMO PARLANDO DI UN MOTO CIRCOLARE. ALL'INIZIO ABBIAMO FISSATO UN VERSO DI PERCORRENZA NELLA TRAIETTORIA E POI ORDINATO I PUNTI DELLA TRAIETTORIA MEDIANTE UN'ASCISSA CURVILINEA $s(t)$. IL TIPO DI COORDINATE CHE ABBIAMO FISSATO ALL'INIZIO ERANO CARTESIANE, ADESSO PASSIAMO A QUELLE POLARI MEDIANTE LA SOSTITUZIONE

$$s(t) = \varphi(t)\cdot R \Rightarrow \varphi(t) = \frac{s(t)\ (\text{arco})}{R\ (\text{raggio})} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = r(t)\cos(\varphi(t)) \\ y(t) = r(t)\,\mathrm{sen}(\varphi(t)) \end{cases} \text{ con } \begin{cases} r(t) = R \\ \varphi(t) = \omega t \end{cases}$$

IN PARTICOLARE ωt SI DEFINISCE POSIZIONE ANGOLARE, OVVERO LA POSIZIONE DEL PUNTO AL VARIARE DELL'ANGOLO; INFATTI IL RAGGIO È COSTANTE, CAMBIA SOLO L'ANGOLO. CON CHE RAPIDITÀ VARIA LA POSIZIONE ANGOLARE?

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

QUINDI BASTA FARE SOLO UNA DERIVATA E RICAVIAMO LA VELOCITÀ ANGOLARE, OVVERO LA VELOCITÀ CON CUI LA POSIZIONE ANGOLARE VARIA NEL TEMPO. SE ω = COSTANTE SI PARLA DI MOTO CIRCOLARE UNIFORME;



ADESSO ASSOCIAMO AD OGNI PUNTO DUE VERSORI: UNO RADIALE USCENTE E L'ALTRO TANGENTE LA TRAIETTORIA IN DIREZIONE DEI φ CRESCENTI E LO SI PUÒ CHIAMARE ANCHE $\overline{u_T}$, OVVERO IL VERSORE TANGENTE, INFATTI LA VELOCITÀ PUNTO PER PUNTO È TANGENTE LA TRAIETTORIA. QUESTI DUE VERSORI NEL TEMPO VARIANO A SECONDA DEL PUNTO. SI POSSONO SCRIVERE COSÌ:

$$\begin{cases} \overline{u_r} = \cos(\varphi(t))\,\overline{u_x} + \mathrm{sen}(\varphi(t))\,\overline{u_y}; \\ \overline{u_\varphi} = -\mathrm{sen}(\varphi(t))\,\overline{u_x} + \cos(\varphi(t))\,\overline{u_y}. \end{cases}$$

SE $\overline{r}(t) = R\cos(\omega t)\overline{u_x} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\overline{u_y} \Rightarrow \overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\cos(\omega t)\overline{u_x}) + \frac{d}{dt}(R\,\mathrm{sen}(\omega t)\overline{u_y}) =$

$$= \frac{d}{dt}(R\cos(\omega t))\overline{u_x} + \frac{d}{dt}(R\,\mathrm{sen}(\omega t))\overline{u_y} = -\omega R\,\underline{\mathrm{sen}(\omega t)\overline{u_x}} + \omega R\,\underline{\cos(\omega t)\overline{u_y}} =$$

$= \omega R\overline{u_\varphi} = \underline{\omega R\overline{u_T}}$; ABBIAMO DERIVATO IL VETTORE POSIZIONE PER RICAVARE IL VETTORE VELOCITÀ TENENDO CONTO DEL FATTO CHE I VERSORI LEGATI AGLI ASSI $\overline{u_x}$ E $\overline{u_y}$ RIMANGONO FISSI E QUINDI NON LI DERIVO; INFINE ABBIAMO VISTO CHE $-\mathrm{sen}(\omega t)\overline{u_x} + \cos(\omega t)\overline{u_y}$ È IL VERSORE $\overline{u_\varphi} = \overline{u_T}$; QUINDI IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE HA MODULO ωR È RIVOLTO VERSO LA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA PUNTO PER PUNTO. LA VELOCITÀ PUÒ ESSERE POSITIVA O NEGATIVA: NEL PRIMO CASO SE L'ANGOLO CRESCE NEL TEMPO, SECONDO CASO SE SI MUOVE IN SENSO ORARIO. QUINDI:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 174

DIPENDERÀ DAL TEMPO: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-R\omega\sin(\varphi(t))\right)\bar{u}_x + \frac{d}{dt}\left(R\omega\cos(\varphi(t))\right)\bar{u}_y$ PRIMA NEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME L'OMEGA NEL TERMINE ERA COSTANTE, ADESSO CAMBIA QUINDI DEVO DERIVARE ANCHE QUELLO:

$$\bar{a} = \left[-R\frac{d\omega}{dt}\sin(\varphi(t)) - R\omega^2\cos(\varphi(t))\right]\bar{u}_x + \left[R\frac{d\omega}{dt}\cos(\varphi(t)) - R\omega^2\sin(\varphi(t))\right]\bar{u}_y$$

DERIVATA DEL PRODOTTO, QUINDI:

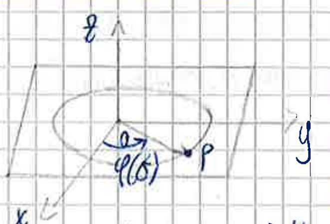
$$\bar{a}(t) = \left(R\frac{d\omega}{dt}\right)\overbrace{\left(-\sin(\varphi(t))\bar{u}_x + \cos(\varphi(t))\bar{u}_y\right)}^{\bar{u}_\varphi} - R\omega^2\overbrace{\left(\cos(\varphi(t))\bar{u}_x + \sin(\varphi(t))\bar{u}_y\right)}^{\bar{u}_r} =$$

$$= R\frac{d\omega}{dt}\bar{u}_\varphi + \left(-R\omega^2\bar{u}_r\right) = \bar{a}_T + \bar{a}_c$$

ECCO DUNQUE DIMOSTRATO CHE SE LA VELOCITÀ ANGOLARE VARIA ANCHE IN MODULO, ALLORA L'ACCELERAZIONE SI DECOMPONE IN DUE COMPONENTI: a_T (ACCELERAZIONE TANGENZIALE) LEGATA ALLA VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ IN MODULO E TANGENTE ALLA TRAIETTORIA E a_c (ACCELERAZIONE CENTRIPETA) LEGATA ALLA VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ IN DIREZIONE E VERSO.

$\frac{d\omega}{dt}$ È DETTA ACCELERAZIONE TANGENZIALE PERCHÉ LEGATA ALLA VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ IN MODULO. UNA CONSEGUENZA È CHE SE LA VELOCITÀ NON VARIA IN MODULO, L'ACCELERAZIONE NON HA MINIMAMENTE COMPONENTE TANGENZIALE.

- VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE: STUDIAMO UN PO' MEGLIO QUESTO VETTORE ω:



IL VETTORE VELOCITÀ ANGOLARE HA COME MODULO IL VALORE ASSOLUTO DELLA VELOCITÀ ANGOLARE, COME DIREZIONE LA DIREZIONE PERPENDICOLARE AL PIANO DEL MOTO E IL VERSO È LEGATO ALLA REGOLA DELLA MANO DESTRA: SI POSIZIONANO LE 4 DITA SU UN VETTORE, POI LE SI CHIUDONO VERSO IL SECONDO E IL VERSO È DATO DAL POLLICE, QUINDI $\bar{\omega} = \omega\bar{u}_z$ E SE $\omega > 0$ ALLORA IL VETTORE È // CONCORDE CON $\bar{u}_z$; SE INVECE $\omega < 0$ ALLORA IL VETTORE È // DISCORDE CON $\bar{u}_z$, QUINDI È RIVOLTO VERSO IL BASSO. QUESTO VETTORE CI PERMETTE DI SCRIVERE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE IN MODO CONVENIENTE:

SE $\bar{r} = (R\cos(\varphi(t)), R\sin(\varphi(t)))$ E $\bar{\omega} = (0,0,\omega)$ E CALCOLIAMO QUESTO DETERMINANTE:

$$\bar{\omega}\times\bar{r} = \det\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ 0 & 0 & \omega \\ R\cos(\varphi(t)) & R\sin(\varphi(t)) & 0 \end{vmatrix} = u_x\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ R\cos(\varphi(t)) & R\sin(\varphi(t)) \end{vmatrix} +$$

$$+\bar{u}_y\begin{vmatrix} 0 & \omega \\ R\cos(\varphi(t)) & 0 \end{vmatrix} + \bar{u}_z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R\cos(\varphi(t)) & R\sin(\varphi(t)) \end{vmatrix} = -R\omega\sin(\varphi(t))\bar{u}_x + R\omega\cos(\varphi(t))\bar{u}_y = \bar{v}$$

QUINDI $\bar{\omega}\times\bar{v} = (\omega\bar{u}_z)\times(v\bar{u}_\varphi) = -\omega v\bar{u}_r$ CON $v = \omega R \Rightarrow \bar{\omega}\times\bar{v} = -R\omega^2\bar{u}_r$; E ANCORA:

$\bar{\omega}\times\bar{r} = (\omega\bar{u}_z)\times(r\bar{u}_r) = R\omega\,\bar{u}_z\times\bar{u}_r = R\omega\bar{u}_\varphi = \bar{v}$. UN'ALTRA NOTAZIONE IMPORTANTE:

POICHÉ $v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$ DA QUI POSSIAMO SCRIVERE L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA COME: $\bar{a}_c = -\frac{v^2}{R}\bar{u}_r$.

$u_T(t+dt)$ QUA SI È SEMPLICEMENTE FATTO IN MODO CHE I DUE VERSORI $u_T(t)$ E $u_T(t+dt)$ COINCIDANO

du $u_T(t)$ NELLE ORIGINI E NOTIAMO CHE GLI ANGOLI COINCIDONO E QUINDI IL VERSORE HA COMPIUTO LO STESSO MOTO CIRCOLARE ISTANTANEO DEL PUNTO P CON LA STESSA VELOCITÀ ANGOLARE. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

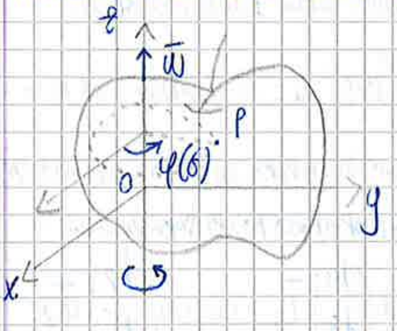
$\frac{du_T}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{u}_T$ QUESTO È UN VERSORE RADIALE RISPETTO IL CERCHIO OSCULATORE E PUNTA VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO E LO CHIAMIAMO $\bar{u}_m$ QUINDI SCRIVIAMO $\bar{\omega} \times \bar{u}_T = \omega \bar{u}_m$; PER L'ACCELERAZIONE INVECE SCRIVIAMO CHE:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{du_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v(\bar{\omega} \times \bar{u}_T) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\bar{u}_T} + \underbrace{(\bar{\omega} \times \bar{v})} = a_T + a_C;$$

QUINDI DI NUOVO RITROVIAMO LE DUE COMPONENTI DELL'ACCELERAZIONE, OVVERO L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE, DIRETTA VERSO LA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA PUNTO PER PUNTO, E L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA CHE PERMETTE AL VERSORE DI SEGUIRE LA TRAIETTORIA È DIRETTA VERSO IL CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE. QUINDI RIASSUMENDO:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{a}_T = \frac{d^2 s}{dt^2}\bar{u}_T \qquad \bar{a}_C = \ell\omega^2\bar{u}_m = -\ell\omega^2\bar{u}_r = -\frac{v^2}{\ell}\bar{u}_r}.$$

- CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI: È UN TIPO DI SISTEMA IN CUI CI SONO I SUOI PUNTI CHE SI MUOVONO NELLA CONDIZIONE CHE MANTENGANO COSTANTE E INVARIATA LA PROPRIA DISTANZA RECIPROCA, COME ACCADE NEI CORPI RIGIDI.

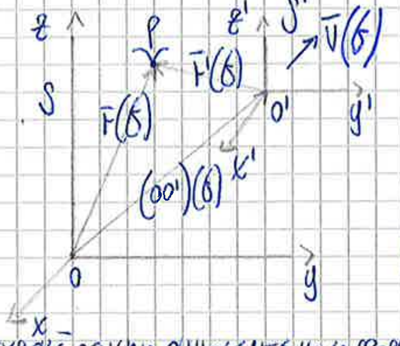


CONSIDERIAMO UNA MELA CHE COMPIE UN MOTO DI ROTAZIONE INTORNO AD UN ASSE FISSO CHE PASSA DENTRO LA MELA; TUTTI I PUNTI SI MUOVONO MANTENENDO INVARIATA LA PROPRIA DISTANZA DALL'ASSE FISSO COMPIENDO IN QUESTO MODO UN MOTO CIRCOLARE; OGNI PUNTO DELLA MELA DESCRIVE UN MOTO CIRCOLARE E OGNI PUNTO DEVE RUOTARE DELLO STESSO ANGOLO; SE NEL TEMPO RUOTASSERO ANGOLI DIVERSI CAMBIEREBBE LA DISTANZA DEI PUNTI NEL TEMPO, QUINDI OGNI PUNTO INDIVIDUA UN QUALSIASI ANGOLO CON L'ASSE FISSO, UN QUALSIASI ANGOLO $\varphi(t)$, MA IN UN INTERVALLO DI TEMPO Δt TUTTI I PUNTI RUOTANO DI $\Delta\varphi$ TUTTI QUANTI E QUINDI SI MUOVONO CON LA STESSA VELOCITÀ ANGOLARE. QUINDI:

$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ QUINDI POSSO FISSARE UN UNICO $\bar{\omega}$, POSITIVO SE I φ CRESCONO, NEGATIVO SE I φ DECRESCONO. INOLTRE POSSO INDICARE IL VETTORE POSIZIONE CON $\bar{r}(t) = r \cdot u_r(t)$ CON r CHE NON CAMBIA IL MODULO PER QUEL PUNTO, MA RUOTANDO VARIA SOLO IN DIREZIONE, QUINDI NON VARIA LA DISTANZA DA P A O. QUINDI LA VELOCITÀ SARÀ DATA DA:

$\bar{v} = \frac{d(r\bar{u}_r)}{dt} = \frac{r\,d\bar{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \cdot r \cdot \frac{d\bar{u}_r}{dt} = r \cdot (\bar{\omega} \times \bar{u}_r) = \bar{\omega} \times (r\bar{u}_r) = \bar{\omega} \times \bar{r}$. SE ANDASSIMO A CONSIDERARE UN ALTRO PUNTO O' SULL'ASSE FISSO, ALLORA POTREMMO SCRIVERE $\bar{r} = \bar{r}' + OO'$ COME SOMMA VETTORIALE; ADESSO

S' SI MUOVE DI MOTO TRASLATORIO E TUTTI I SUOI PUNTI SI MUOVONO CON LA STESSA VELOCITÀ. TUTTE LE RETTE CHE CONGIUN= GONO COPPIE DI PUNTI SI MUOVONO MANTENENDOSI PARALLELE A SÉ STESSE E TRA QUESTE RETTE CI SONO I TRE ASSI.



IL TRENO HA UNA CERTA VELOCITÀ $\bar V$ E TUTTI I SUOI PUNTI SI MUOVONO DI MOTO TRASLATORIO; LA VELOCITÀ DIPENDE DAL TEMPO PERCHÉ IL TRENO PUÒ ACCELERARE O DECELERARE. POICHÉ GLI ASSI SI MANTENGONO // A SÉ STESSI, STESSA COSA VALE PER I VERSORI. QUINDI $\bar u_x'$, $\bar u_y'$, $\bar u_z'$ SONO COSTANTI, NON VARIANO IN DIREZIONE E VERSO E QUINDI PER COMODITÀ LI PRENDIAMO UGUALI, QUINDI: $\bar u_x = \bar u_x'$ $\bar u_y = \bar u_y'$ $\bar u_z = \bar u_z'$; I TEMPI t E t' SONO DUE TEMPI DIVERSI PERCHÉ OGNUNO QUANTIFICATO HA LA PROPRIA MISURAZIONE; INOLTRE $\overline{OO'}$ DIPENDE DAL TEMPO PERCHÉ S' SI MUOVE. TUTTAVIA NELLA MECCANICA CLASSICA IL TEMPO E LO SPAZIO SONO ASSOLUTI QUINDI IL TEMPO SCORRE SEMPRE UGUALE; QUINDI POSSIAMO SCRIVERE $t = t'$. IN SEGUITO EINSTEIN ABBANDONA QUESTA TEORIA, INTRODUCENDO LA RELATIVITÀ.

$\Rightarrow \bar r(t) = \bar r'(t) + \overline{OO'}(t) = x(t)\bar u_x + y(t)\bar u_y + z(t)\bar u_z$ E $\bar r'(t) = x'(t)\bar u_x' + y'(t)\bar u_y' + z'(t)\bar u_z'$;

SUPPONIAMO PER ORA CHE IL SISTEMA S' STIA EFFETTUANDO UN MOTO DI PURA TRASLAZIONE; QUINDI LA VELOCITÀ È:

$\frac{d\overline{OO'}(t)}{dt} = \bar V(t)$ OVVERO LA VELOCITÀ DI $\overline{OO'}$; ADESSO DETERMINIAMO LE DUE VELOCITÀ IN S E S':

IN $\underline{S'}$: $\bar v' = \frac{d\bar r'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\bar u_x' + \frac{dy'}{dt}\bar u_y' + \frac{dz'}{dt}\bar u_z'$; IN $\underline{S}$: $\bar v = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar u_x + \frac{dy}{dt}\bar u_y + \frac{dz}{dt}\bar u_z$;

$\Rightarrow \underline{\underline{\bar v}} = \frac{d\bar r}{dt} = \frac{d\bar r'}{dt} + \frac{d}{dt}(\overline{OO'}) = \underline{\bar v' + \bar V}$ LA VELOCITÀ DI $\overline{OO'}$ È DETTA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO ED È QUELLA CHE INDICHIAMO CON $\bar V$ ED È LA VELOCITÀ CHE HANNO TUTTI I PUNTI SOLIDALI CON IL TRENO, QUINDI LA SUA VELOCITÀ. LA LEGGE TROVATA SI DICE LEGGE DI ADDIZIONE DELLE VELOCITÀ IN QUANTO LA VELOCITÀ DELL'UCCELLO NEL NOSTRO SISTEMA DI RIFERIMENTO È DATA DA QUELLA MISURATA IN S' PIÙ QUELLA DI S' RISPETTO A NOI. E LE ACCELERAZIONI?

IN $\underline{S'}$: $\bar a' = \frac{d\bar v'}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\bar u_x' + \frac{dv_y'}{dt}\bar u_y' + \frac{dv_z'}{dt}\bar u_z'$; IN $\underline{S}$: $\bar a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar u_x + \frac{dv_y}{dt}\bar u_y + \frac{dv_z}{dt}\bar u_z$;

$\Rightarrow \bar a_{O'} = \frac{d\vec V}{dt} = \frac{d^2\overline{OO'}}{dt}$ IL TRENO INFATTI PUÒ ACCELERARE O DECELERARE, QUINDI DI CONSEGUENZA TUTTI I SUOI PUNTI ACCELERANO O DECELERANO; $\Rightarrow \underline{\underline{\bar a}} = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d\bar v'}{dt} + \frac{d\bar V}{dt} = \underline{\bar a' + \bar a_{O'}}$; I DUE TERMINI $\bar V$ E $\bar a_{O'}$ NON DIPENDONO DAL MOTO DELL'OGGETTO, MA DAL MOTO RELATIVO DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO S' RISPETTO A S. ORA SE S' SI MUOVESSE SOLO DI MOTO RETTILINEO UNIFORME ALLORA IL TERMINE $\bar V$ SAREBBE UNA COSTANTE, QUINDI IL TRENO NÉ ACCELERA NÉ DECELERA, QUINDI NON C'È NEANCHE ACCELERAZIONE, QUINDI $\bar a_{O'} = 0$. SE ACCADE CIÒ ALLORA VALE CHE $\bar a(t) = \bar a'(t)$ QUINDI I DUE OSSERVATORI SARANNO D'ACCORDO SULL'ACCELERAZIONE. ORA FACCIAMO QUESTO RAGIONA=

IN S': PER L'OSSERVATORE SULLA PIATTAFORMA I VERSORI NON CAMBIANO PERCHÉ RUOTANDO INSIEME A LUI E LUI È FERMO.

$\overline{v}' = \frac{d\overline{r}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt}\right)\overline{u}_x' + \left(\frac{dy'}{dt}\right)\overline{u}_y' + \left(\frac{dz'}{dt}\right)\overline{u}_z'$ (RICORDIAMOCI CHE $\overline{r} = \overline{r}'$ I DUE VETTORI COINCIDONO).

IN S: PER L'OSSERVATORE FERMO INVECE TERRÀ CONTO DEL FATTO CHE I VERSORI RUOTANO E VARIANO NEL TEMPO:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\overline{u}_x' + \frac{dy'}{dt}\overline{u}_y' + \frac{dz'}{dt}\overline{u}_z' + x'\left(\frac{d\overline{u}_x'}{dt}\right) + y'\left(\frac{d\overline{u}_y'}{dt}\right) + z'\left(\frac{d\overline{u}_z'}{dt}\right) =$$

$$= \overline{v}' + x'(\overline{\omega}\times\overline{u}_x') + y'(\overline{\omega}\times\overline{u}_y') + z'(\overline{\omega}\times\overline{u}_z') = \overline{v}' + \overline{\omega}\times(x'\overline{u}_x' + y'\overline{u}_y' + z'\overline{u}_z') =$$

$(\overline{r}'=\overline{r})$ $= \overline{v}' + \underbrace{\overline{\omega}\times\overline{r}'} = \overline{v}' + \overline{v}_T$ IL SECONDO TERMINE È LA VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO, OVVERO LA VELOCITÀ DI OGNI PUNTO IN UN SISTEMA RIGIDO CHE RUOTA RISPETTO AD UN ASSE; QUINDI OGNI PUNTO SOLIDALE CON S' SI MUOVE CON QUELLA VELOCITÀ $\overline{\omega}\times\overline{r}$. E PER QUANTO RIGUARDA LE ACCELERAZIONI?

IN S': $\overline{a}' = \frac{d\overline{v}'}{dt} = \frac{dv_x'}{dt}\overline{u}_x' + \frac{dv_y'}{dt}\overline{u}_y' + \frac{dv_z'}{dt}\overline{u}_z'$; PER S INVECE VALE LO STESSO DISCORSO DI PRIMA:

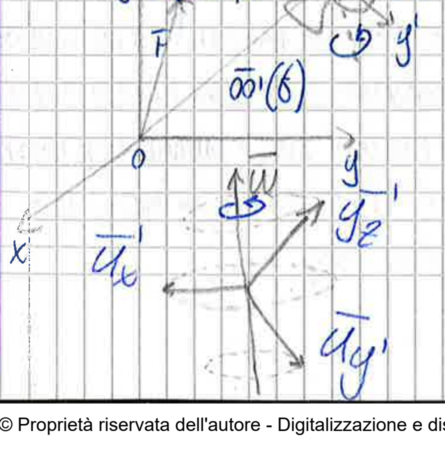
$$\text{IN } S:\ \overline{a} = \frac{d\overline{v}'}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x'\overline{u}_x' + v_y'\overline{u}_y' + v_z'\overline{u}_z') = \frac{dv_x'}{dt}\overline{u}_x' + \frac{dv_y'}{dt}\overline{u}_y' + \frac{dv_z'}{dt}\overline{u}_z' + v_x'(\overline{\omega}\times\overline{u}_x') +$$

$$+ v_y'(\overline{\omega}\times\overline{u}_y') + v_z'(\overline{\omega}\times\overline{u}_z') = \overline{a}' + \overline{\omega}\times\overline{v}'$$ ORA RICORDIAMOCI CHE $\overline{v} = \overline{v}' + \overline{\omega}\times\overline{r}$, QUINDI:

$$\overline{a} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \frac{d\overline{v}'}{dt} + \frac{d}{dt}(\overline{\omega}\times\overline{r}) = (\overline{a}' + \overline{\omega}\times\overline{v}') + \overbrace{\frac{d\overline{\omega}}{dt}}^{=\overline{\alpha}}\times\overline{r} + \overline{\omega}\times\overbrace{\frac{d\overline{r}}{dt}}^{=\overline{v}} = \overline{a}' + \overline{\omega}\times\overline{v}' + \overline{\alpha}\times\overline{r} +$$

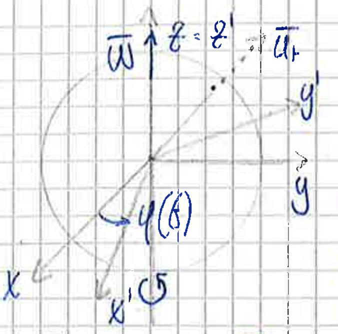
$$+ \overline{\omega}\times(\overline{v}' + \overline{\omega}\times\overline{r}) = \overline{a}' + 2\overline{\omega}\times\overline{v}' + \overline{\omega}\times(\overline{\omega}\times\overline{r}) + \overline{\alpha}\times\overline{r} = \overline{a}' + \overline{a}_{Co} + \overline{a}_T$$ QUINDI ABBIAMO TRE TERMINI: IL PRIMO È L'ACCELERAZIONE COSÌ COME LA CALCOLEREBBE LA PERSONA IN S', IL SECONDO TERMINE SI DICE ACCELERAZIONE DI CORIOLIS E DIPENDE QUINDI DAL MOTO DI S' RISPETTO A NOI E DALLA VELOCITÀ DEL CORPO RISPETTO S', IL TERZO TERMINE INFINE SI DICE ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO ED È LEGATO SOLO ALL'ACCELERAZIONE DI UN QUALSIASI PUNTO SOLIDALE CON S'. QUINDI QUESTA È L'ACCELERAZIONE COME LA CALCOLIAMO NOI.

- ADESSO CONSIDERIAMO UN MOTO GENERICO, PER ESEMPIO UN OSSERVATORE SU UN JET CHE FA DELLE ACROBAZIE, TRASLA E RUOTA.



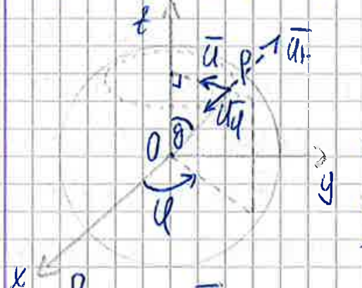
QUINDI IL JET ESEGUE SIA UN MOTO DI TRASLAZIONE SIA DI ROTAZIONE RISPETTO A NOI SULLA TERRA. QUINDI LA VELOCITÀ DI OGNI PUNTO SI PUÒ SCRIVERE COME SOMMA DI DUE COMPONENTI, UNO LEGATO ALLA VELOCITÀ DI O' RISPETTO A O E L'ALTRA LEGATO AL MOTO ROTATORIO RISPETTO A O. QUINDI NON SOLO SI MUOVE O', MA RUOTANO ANCHE I VERSORI. QUINDI SCRIVIAMO:

$\frac{d\overline{u}_x'}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{u}_x'$ $\frac{d\overline{u}_y'}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{u}_y'$ $\frac{d\overline{u}_z'}{dt} = \overline{\omega}\times\overline{u}_z'$;



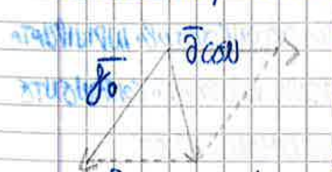
VOGLIAMO VERIFICARE L'EFFETTO DELLA ROTAZIONE DELLA TERRA SULLE VELOCITÀ E SULLE ACCELERAZIONI CHE OSSERVIAMO SULLA TERRA; INNANZITUTTO SAPPIAMO CHE SULLA SUPERFICIE DELLA TERRA OGNI SOGGETTO È SOGGETTO AD UNA ACCELERAZIONE $\bar{g}_0$ DATA DALLA LEGGE DI NEWTON. IN S ABBIAMO SOLO ATTRAZIONE, NON ROTAZIONE PERCHÉ GLI ASSI PUNTANO SU STELLE FISSE, QUINDI $g_0 = 9,8\ m/s^2$. IN S' AVREMMO UN'ALTRA ACCELERAZIONE $\bar{a}' = \bar{g}'$. QUANTO VALE g'?

$\bar{g}' = \bar{a}' = \bar{a} - 2\bar{\omega}\times\bar{v}' - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') = \bar{g}_0 - 2\bar{\omega}\times\bar{v}' - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')$; ADESSO NON TENIAMO CONTO DELL'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS; QUESTA C'È SE C'È LA VELOCITÀ RELATIVA RISPETTO A NOI, QUINDI L'OGGETTO È FERMO. IN PARTICOLARE PRENDIAMO UN PENDOLO FERMO, UN FILO A PIOMBO. LA DIREZIONE DEL FILO A PIOMBO INDIVIDUA LA VERTICALE, OVVERO LA DIREZIONE DI $\bar{g}'$.



QUINDI DOBBIAMO STUDIARE $\bar{g}' = \bar{g}_0 - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}')$; QUAL È LA DIREZIONE E VERSO DI QUESTO VETTORE? LA NOSTRA POSIZIONE È DATA DA θ E φ; SE NOI STIAMO FERMI θ È COSTANTE, VARIA SOLO φ PERCHÉ LA TERRA RUOTA. IL VETTORE POSIZIONE CHE CI INDIVIDUA, OVVERO $\bar{r}$ È UN VETTORE IL CUI MODULO È APPROSSIMABILE AL RAGGIO DELLA TERRA, QUINDI: $\bar{r} \approx R_T \bar{u}_r$ QUINDI $\bar{\omega}\times\bar{r}' = (\omega\bar{u}_z)\times(R_T\bar{u}_r) = \omega R_T \sin\theta\ \bar{u}_\varphi$ SVILUPPO DEL PRODOTTO VETTORIALE, IN CUI SI TIENE CONTO DI θ. ANDIAMO AVANTI NELLO STUDIO:

$\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}') = \bar{\omega}\times(\omega R_T \sin\theta\ \bar{u}_\varphi) = (\omega\bar{u}_z)\times(\omega R_T \sin\theta\ \bar{u}_\varphi) = \omega^2 R_T \sin\theta\ \bar{u}$ IN CUI $\bar{u} = \bar{u}_z \times \bar{u}_\varphi$ È UN VERSORE ENTRANTE E RADIALE RISPETTO ALL'ASSE, QUINDI IL VETTORE È PERPENDICOLARE ALL'ASSE DI ROTAZIONE TERRESTRE PASSANTE PER P, PERÒ CON IL MENO DAVANTI DIVENTA UN VETTORE RIVOLTO VERSO L'ESTERNO. QUINDI SENZA IL MENO ERA ACCELERAZIONE CENTRIPETA, CON IL MENO È ACCELERAZIONE CENTRIFUGA. QUESTO TIPO DI ACCELERAZIONE DIPENDE DAL $\sin\theta$ QUINDI HA VALORE MASSIMO ALL'EQUATORE IN CUI $\theta = \pi/2$ E SI ANNULLA INVECE AI POLI DOVE $\theta = 0$ E $\theta = \pi$. NOI SAPPIAMO CHE $\bar{g}_0$ È RIVOLTA VERSO IL CENTRO DELLA TERRA, QUINDI L'EFFETTO DI QUESTO VETTORE È CHE, SOMMANDOSI A $\bar{g}_0$ È QUELLO DI CAMBIARE LA DIREZIONE DELLA VERTICALE:



QUINDI LA DIREZIONE DELLA VERTICALE CHE NOI OSSERVIAMO SENZA CONSIDERARE L'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS, QUINDI CON L'OGGETTO FERMO, MA SOLO CON LA ROTAZIONE TERRESTRE. DI QUANTO È SPOSTATA LA VERTICALE? VALUTIAMOLO ALL'EQUATORE DOVE $\theta = \pi/2$:

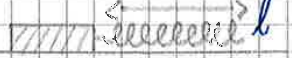
$\omega^2 R_T = 6000\ km\cdot(7,3\cdot10^{-5}) = 3,4\cdot10^{-2}\ m/s^2$ QUESTO VALORE RISPETTO A $9,8\ m/s^2$ È MOLTO PIÙ PICCOLO, QUINDI LO POSSIAMO TRASCURARE E DIRE CHE APPROSSIMATIVAMENTE OGNI PUNTO SULLA SUPERFICIE TERRESTRE RISENTE DELLA STESSA ACCELERAZIONE GRAVITAZIONALE.

ADESSO INVECE CONSIDERIAMO L'EFFETTO DELL'ACCELERAZIONE DI CORIOLIS, QUINDI SUPPONIAMO DI AVERE UNA PARTICELLA IN MOVIMENTO E VOGLIAMO STUDIARE L'EFFETTO DELLA FORZA DI CORIOLIS. QUESTA È UN VETTORE INNANZITUTTO:

SISTEMA, COME LA TERRA, L'ARIA E IL SUOLO. QUINDI SI TRATTA DI DETERMINARE L'EVOLUZIONE DEL SISTEMA. L'AZIONE DATA DALL'AMBIENTE SUL SISTEMA, QUINDI SI PARLERÀ DI FORZE COME LA FORZA GRAVITAZIONALE O LA RESISTENZA DELL'ARIA. LE RELAZIONI TRA IL SISTEMA E L'AMBIENTE SONO DATE DALLE LEGGI DELLA MECCANICA CLASSICA DI NEWTON CHE POI FURONO GENERALIZZATE DA EINSTEIN PER FENOMENI A VELOCITÀ PROSSIME A QUELLA DELLA LUCE. SI PENSAVA CHE IL MOTO FOSSE INFLUENZATO DALL'AZIONE DI UN ALTRO CORPO; GALILEO PERÒ MISE IN DISCUSSIONE QUESTO E FORMULÒ IL COSIDDETTO PRINCIPIO D'INERZIA. PER PRIMA COSA BISOGNA CAPIRE COME SI COMPORTA UN OGGETTO IN ASSENZA DI ALTRE FORZE, OVVERO UN SISTEMA ISOLATO. PERÒ UN SISTEMA DI QUESTO GENERE È DIFFICILE DA PENSARE PERCHÉ TUTTO È SEMPRE SOGGETTO ALL'AZIONE DI QUALCOS'ALTRO; NOI SIAMO SEMPRE SOGGETTI ALLA FORZA DI GRAVITÀ. QUINDI PER DEFINIRE UN SISTEMA ISOLATO BISOGNA RIFARSI AD UN CASO LIMITE, UNA IDEALIZZAZIONE: QUELLO SE L'INFLUENZA ESTERNA È RIDOTTA SEMPRE DI PIÙ. L'AZIONE DI UN CORPO SU UN ALTRO È DESCRITTA DAL CONCETTO DI FORZA; COME AGISCE SUL SISTEMA?

UN OGGETTO POSTO SU UN TAVOLO RISENTE DELL'ATTRAZIONE TERRESTRE, DELLA REAZIONE DEL TAVOLO CHE COMPENSA LA GRAVITÀ E FA SI CHE L'OGGETTO NON SI MUOVA E POI C'È LA FORZA DOVUTA AL CONTATTO CON IL TAVOLO E INFINE LA FORZA DOVUTA ALL'INTERAZIONE CON L'ARIA. FACCIAMO UN ESPERIMENTO: IGNORIAMO L'ARIA PRATICANDO IL VUOTO IN LABORATORIO. DOPO UNA SPINTA IL CORPO SI FERMA, MA SE LEVIGHIAMO IL TAVOLO L'OGGETTO CI METTE PIÙ TEMPO A FERMARSI, INFATTI ABBIAMO RIDOTTO L'ATTRITO CHE OSTACOLA IL MOTO. PENSIAMO UN DISCO A GHIACCIO SECCO: IL GHIACCIO SECCO È LA FORMA SOLIDA DELLA CO_2 E CONTIENE UN SERBATOIO DI GHIACCIO SECCO CHE SUBLIMA E IL GAS SI FRAPPONE TRA IL DISCO E LA SUPERFICIE. COSÌ NON C'È DIRETTO CONTATTO TRA DISCO E TERRENO, QUINDI L'ATTRITO È RIDOTTO AL MINIMO. DOPO UNA SPINTA IL DISCO PROCEDE A VELOCITÀ COSTANTE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME, FINCHÉ UNA FORZA ESTERNA NON MODIFICA IL MOTO. QUINDI UN SISTEMA ISOLATO NON È SOGGETTO A FORZE ESTERNE E O STA FERMO O SI MUOVE DI MOTO RETTILINEO UNIFORME SENZA MODIFICARE IL PROPRIO STATO DI MOTO. QUINDI IL MOTO NON È L'EFFETTO DI UN CORPO SU UN ALTRO PERCHÉ QUESTO VARIEREBBE LO STATO DI MOTO; L'EFFETTO DI UNA FORZA È LA VARIAZIONE DELLO STATO DI MOTO CHE È MISURATA DA UN'ACCELERAZIONE; L'ACCELERAZIONE È DOVUTA AD UNA FORZA. QUESTO È IL PRINCIPIO D'INERZIA O 1° LEGGE DI NEWTON. QUESTA LEGGE NON VALE PER TUTTI I SISTEMI DI RIFERIMENTO PERCHÉ ALCUNI SISTEMI VEDONO DELLE ACCELERAZIONI CHE NON SONO DOVUTE ALL'EFFETTO DI UN CORPO SU UN ALTRO. QUINDI I SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI CHE SONO UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DI UN SISTEMA ISOLATO, SONO QUELLI IN CUI VALE IL PRINCIPIO D'INERZIA.

QUINDI UNA FORZA SI PUÒ DEFINIRE IN RELAZIONE ALL'ACCELERAZIONE CHE ESSA PRODUCE; DETERMINA UNA VARIAZIONE DELLO STATO DI MOTO. NON DIPENDE DALLO STATO DI MOTO INIZIALE DEL CORPO SU CUI AGISCE. DUE FORZE SONO UGUALI SE AGENDO SULLO STESSO OGGETTO DANNO LA STESSA ACCELERAZIONE. STUDIAMO L'EFFETTO DI UNA FORZA SU UN OGGETTO: INNANZITUTTO LA FORZA È UN VETTORE. CONSIDERIAMO UNA MOLLA IDEALE CON ATTRITO MINIMO:



SE LA MOLLA NON VIENE ALLUNGATA ESSA HA UNA SUA LUNGHEZZA DETTA LUNGHEZZA

$$\bar{F} = m_A \bar{a}_A \quad \bar{F} = m_B \bar{a}_B \implies \frac{m_A}{m_B} = \frac{\bar{a}_B}{\bar{a}_A}$$

QUINDI SI VEDE CHE m SI PRESTA BENE A MISURARE L'INERZIA DI UN OGGETTO PERCHÈ A PARITÀ DI FORZA SE $m_A > m_B \implies a_A < a_B$. ADESSO PERÒ SUI DUE CORPI ESERCITIAMO UN'ALTRA FORZA PERÒ DIVERSA DETTA $\bar{F}'$. ALLORA VALE LO STESSO RAGIONAMENTO DI PRIMA:

$$\bar{F}' = m'_A a'_A \quad \bar{F}' = m'_B a'_B \implies \frac{m'_A}{m'_B} = \frac{a'_B}{a'_A} = \frac{a_B}{a_A} = \frac{m_A}{m_B}$$

QUINDI SI CAPISCE CHE m NON DIPENDE DALLA FORZA O DALLA ACCELERAZIONE, MA SOLO DAL CORPO SU CUI AGISCE LA FORZA. QUINDI m_A E m_B SONO CARATTERISTICHE DEI CORPI, OGNI CORPO HA UNA MASSA INERZIALE. DUE CORPI HANNO LA STESSA MASSA INERZIALE SE AD UNA STESSA FORZA PRODUCONO LA STESSA ACCELERAZIONE. SE PRENDIAMO UNA MASSA CAMPIONE u_m A CUI ASSEGNO MASSA UNITARIA E 1 kg, IN FUNZIONE DI QUESTA MISURO LA MASSA DI UN ALTRO OGGETTO: UNA STESSA FORZA PRODUCE SU u_m UN'ACCELERAZIONE a, SU UN ALTRO CORPO A UN'ACCELERAZIONE a_A, QUINDI SCRIVEREMO COSÌ:

$$\implies m_A = \left(\frac{a}{a_A}\right) u_m$$

QUINDI FACENDO IL RAPPORTO TRA LE DUE ACCELERAZIONI TROVO LA MIA MASSA IN UNITÀ DEFINITA DALLA MASSA DELL'OGGETTO CAMPIONE. INOLTRE $[F] = [m a] = [M \cdot L \cdot T^{-2}] =$ 1 NEWTON (N) $= 1\ kg\ m/s^2$. L'UNITÀ DI MISURA DELLA FORZA È IL NEWTON.

CONSIDERIAMO ADESSO REGIMI RELATIVISTICI IN CUI ABBIAMO VELOCITÀ PROSSIME A QUELLE DELLA LUCE E IN CUI LA MASSA STAVOLTA DIPENDE DALLA VELOCITÀ, QUINDI NON VALE LA MECCANICA CLASSICA:

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

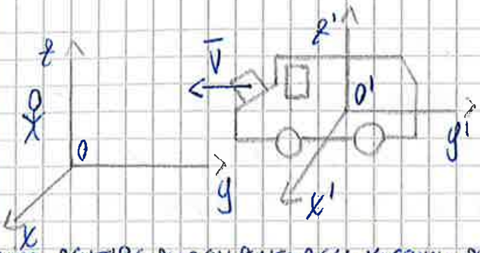
m_0 È LA MASSA A RIPOSO QUANDO NON È SOGGETTA A FORZE; NELLA MECCANICA CLASSICA $v \ll c$, QUINDI IL DENOMINATORE $\simeq 1 \implies m_0 \cong m(v)$. SE INVECE LA VELOCITÀ AUMENTA ALLORA C'È UNA DIPENDENZA DELLA MASSA DALLA VELOCITÀ; INFATTI SE ESPANDIAMO (v^2/c^2) IN SERIE DI TAYLOR $\implies m(v) = m_0 + o(v^2/c^2)$ E SE v^2/c^2 È MOLTO PICCOLO ALLORA SI TRASCURA. QUESTO VUOL DIRE CHE SE IL CORPO SI MUOVE AD UNA VELOCITÀ PROSSIMA A QUELLA DELLA LUCE, ALLORA SARÀ PIÙ DIFFICILE FARLE VARIARE LO STATO DI MOTO PERCHÈ LA VELOCITÀ DELLA LUCE NON SI PUÒ MAI SUPERARE. ORA SCRIVIAMO QUESTO:

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ ALLORA SE $\bar{F} = m\bar{a} = m \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \bar{v})$ POSSIAMO QUINDI DEFINIRE UNA QUANTITÀ $\bar{P} = m \cdot \bar{v}$ LEGATA AD UN OGGETTO PUNTIFORME CHE SI MUOVE. QUESTA QUANTITÀ SI DICE QUANTITÀ DI MOTO. QUINDI VALE QUESTO:

$$\bar{F} = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

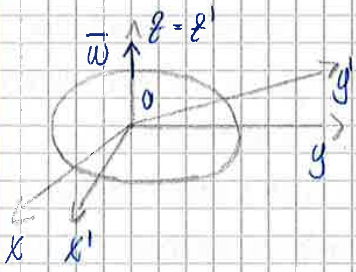
LA FORZA SI PUÒ ANCHE SCRIVERE COME LA DERIVATA DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO AL TEMPO; QUESTA È UNA LEGGE GENERALE PERCHÈ VALE ANCHE IN REGIME RELATIVISTICO E VIENE DETTA EQUAZIONE DEL MOTO, INVECE LA 2° LEGGE DI NEWTON $\bar{F} = m\bar{a}$ CESSA DI VALERE IN REGIME RELATIVISTICO.

- SISTEMI DI RIFERIMENTO INERZIALI: SONO QUELLI IN CUI VALE IL PRINCIPIO D'INERZIA. SI PUÒ DEFINIRE CON UNA BUONA APPROSSIMAZIONE UN SISTEMA INERZIALE SE GLI EFFETTI DELLE FORZE DI ESSO SONO TRASCURABILI. SE CONSIDERIAMO IL MOTO DI UN PENDOLO CI RENDIAMO CONTO CHE LA TERRA NON È UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE PERCHÈ RUOTA INSIEME A TUTTI GLI OGGETTI SULLA TERRA, QUINDI GLI OGGETTI HANNO UN'ACCELERAZIONE; IL LABORATORIO DUNQUE NON È UN SISTEMA INERZIALE. PERÒ L'EFFETTO DEL MOTO DELLA TERRA SUL NOSTRO SISTEMA LABORATORIO SI MANIFESTA SU TEMPI DELL'ORDINE



SU UNA MACCHINA È APPOGGIATA UNA BORSA; L'ATTRITO È TRASCURABILE E LA MACCHINA PROCEDE A VELOCITÀ $\bar{V}$, MA POI FRENA DI COLPO E LA BORSA CADE. L'OSSERVATORE IN S VEDE LA MACCHINA PROCEDERE A VELOCITÀ $\bar{V}$ (ANCHE LA BORSA), POI HA FRENATO E LA FORZA D'ATTRITO SI È FATTA SENTIRE SU OGNI PUNTO DELLA MACCHINA SUFFICIENTE A FRENARE LA MACCHINA E QUINDI LE HA DATO UN'ACCELERAZIONE IN VERSO OPPOSTO; PERÒ LA FORZA SULLA BORSA NON È SUFFICIENTE A DARLE LA STESSA ACCELERAZIONE E QUINDI LA BORSA CONTINUA NEL SUO MOTO INDISTURBATA COERENTEMENTE CON IL PRINCIPIO D'INERZIA. SULLA BORSA NON C'È FORZA. INVECE RISPETTO S' L'OSSERVATORE DENTRO LA MACCHINA VEDE LA VALIGIA INIZIALMENTE FERMA E POI OSSERVA UN'ACCELERAZIONE $\bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_{O'} = \ominus \bar{a}_{O'}$ PERCHÉ L'ACCELERAZIONE IN S $\bar{a}=0$. QUINDI S' VEDE UN'ACCELERAZIONE RIVOLTA IN AVANTI:

$m\bar{a}' = F(\text{INERZIALE}) = \underline{-m\bar{a}_{O'}}$ CHE È UNA FORZA INERZIALE RIVOLTA IN AVANTI E CHE SPINGE LA VALIGETTA.

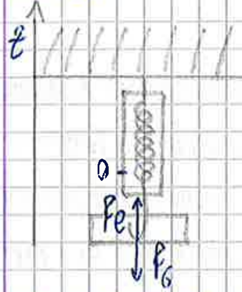


ADESSO VEDIAMO SE C'È UNA ROTAZIONE. LA PIATTAFORMA RUOTA E SU DI ESSO ABBIAMO UN OGGETTO CHE È FISSO RISPETTO ALLA PIATTAFORMA. PER S L'OGGETTO COMPIE UN MOTO CIRCOLARE CON $\bar{\omega}$ = COSTANTE, QUINDI MOTO CIRCOLARE UNIFORME. QUESTO MOTO COMPRENDE UN'ACCELERAZIONE RIVOLTA VERSO IL CENTRO DELLA TRAIETTORIA: $\bar{a} = \bar{a}_{CENTR} = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ E QUESTA ACCELERAZIONE SI SPIEGA IN TERMINI DI UNA FORZA DI ATTRITO CHE LA PIATTAFORMA IMPRIME SULL'OGGETTO PERMETTENDOGLI DI RUOTARE DANDOLE ACCELERAZIONE CENTRIPETA. QUINDI VALE: $m\bar{a} = F(\text{ATTRITO})$ OVVERO UNA FORZA DI ATTRITO STATICO CHE PRODUCE ACCELERAZIONE CENTRIPETA DETTA ANCHE FORZA CENTRIPETA. INVECE S' VEDE IL CORPO FERMO RISPETTO A LUI, QUINDI VALE QUESTO: SE $\bar{a}' = \bar{a} - \bar{a}_T - \bar{a}_{CO}$ ALLORA VALE CHE $\bar{a}_{CO} = 0$ (IL CORPO È FERMO), MA SVILUPPIAMO LA FORMULA: $\bar{a}' = \bar{a} - (\bar{a}_{O'} + \bar{\alpha}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}))$ DUNQUE $\bar{a}_{O'} = 0$ (PERCHÉ O' È FERMO); $\bar{\alpha}\times\bar{r} = 0$ (PERCHÉ ω È COSTANTE). PERÒ $\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})$ HA QUESTA COMPONENTE DI TRASCINAMENTO. PERÒ $\bar{a}$ È ACCELERAZIONE CENTRIPETA CHE ABBIAMO TROVATO PRIMA: $\bar{a}' = \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) - \bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = 0$ QUINDI LE DUE ACCELERAZIONI, QUELLA CENTRIPETA E QUELLA DI TRASCINAMENTO SI COMPENSANO PERFETTAMENTE. PER S' L'OGGETTO È FERMO, MA COME LA SPIEGA L'ACCELERAZIONE NULLA POICHÉ L'ATTRITO C'È?

$\Rightarrow m\bar{a}' = m\bar{a} - m\bar{\omega}\times(\bar{\omega}\times\bar{r}) = \bar{F}(\text{ATTRITO}) + F(\text{CENTRIFUGA}) = 0$ QUINDI IL VEDERE L'OGGETTO FERMO È INTERPRETATA DA S' COME COMPENSAZIONE DI DUE FORZE.

- L'AZIONE DI UNA FORZA NON È MAI UNILATERALE, QUINDI SE A ESERCITA UNA FORZA SU B ALLORA ANCHE B ESERCITA UNA FORZA UGUALE E OPPOSTA A QUELLA DI A. QUINDI AD UN'AZIONE DI A CORRISPONDE UNA REAZIONE DI B: QUESTO È IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE O <u>3ª LEGGE DI NEWTON</u>. È FONDAMENTALE RICORDARE CHE SE UNA FORZA AGISCE SU DUE PUNTI

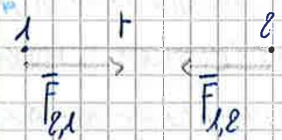
MASSA PER PRODURRE UN'ACCELERAZIONE. SE $m = 1\,kg$ ALLORA PRODUCO UN'ACCELERAZIONE $a = 1\,m/s^2$, ALLORA AVREMO UNA FORZA $\bar{F} = 1\,N$; OPPURE SE $a = 0{,}1\,m/s^2$, $0{,}2\,m/s^2$ E COSÌ VIA, ALLORA NOI POSSIAMO IN QUESTO MODO TARARE LO STRUMENTO. QUINDI DALLA POSIZIONE DEL PUNTATORE SO LA FORZA ESERCITATA LEGGENDOLA SULLA SCALA; QUINDI SO GIÀ L'INTENSITÀ DELLA FORZA ESERCITATA DAL DINAMOMETRO SULL'OGGETTO SENZA BISOGNO DI TENER CONTO DELL'OGGETTO.



ADESSO USIAMO IL DINAMOMETRO PER CREARE UNA SITUAZIONE DI EQUILIBRIO STATICO, OVVERO LO TENIAMO IL DINAMOMETRO IN VERTICALE. INOLTRE LA MOLLA DEVE AVERE MASSA TRASCURABILE PERCHÉ IN QUESTO MODO TENENDOLA IN VERTICALE NON VIENE DEFORMATA DAL SUO STESSO PESO. SE APPENDIAMO UNA MASSA LA MOLLA SI DEFORMA RISENTENDO DELLA FORZA ELASTICA E DELLA FORZA DI GRAVITÀ RIVOLTA VERSO IL BASSO. AD UN CERTO PUNTO IL CORPO RAGGIUNGE UNA POSIZIONE IN CUI IL SISTEMA RIMANE FERMO E SI CREA UN EQUILIBRIO STATICO. QUINDI $\bar{F}_e + \bar{F}_G = 0$ E IL PUNTATORE SARÀ POSIZIONATO IN UN CERTO PUNTO DELLA SCALA E SAPREMO DETERMINARE LA FORZA PESO; ESSA È LA FORZA CHE RISENTONO TUTTI GLI OGGETTI SULLA SUPERFICIE TERRESTRE PER EFFETTO DEL CAMPO GRAVITAZIONALE ED È DEFINITO IN QUESTO MODO:

$|F_G| = m \cdot g \Rightarrow \bar{F}_G = -mg\bar{u}_z$ QUINDI È PROPORZIONALE ALLA MASSA INERZIALE.

- LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE DI NEWTON: QUESTA FORZA NON DIPENDE DALL'ACCELERAZIONE CHE ESSA PRODUCE ED È PER QUESTO È UNA LEGGE UTILE PER STUDIARE IL MOTO DEI CORPI E DEI PIANETI SOGGETTI A RECIPROCA ATTRAZIONE.



$\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}$ CON $|\vec{F}_{1,2}| \propto 1/r^2$ QUESTA FORZA È PROPORZIONALE ALL'INVERSO DEL QUADRATO DELLA DISTANZA, QUINDI ALL'AUMENTARE DELLA DISTANZA, LA FORZA DIMINUISCE. È UNA FORZA DIRETTA VERSO LA CONGIUNGENTE ED È SEMPRE ATTRATTIVA. COME PER LA LEGGE DI NEWTON (2^a) SI PARLAVA DI MASSA INERZIALE, ALLO STESSO MODO PER LA GRAVITÀ SI PARLA DI MASSA GRAVITAZIONALE: AD OGNI CORPO È ASSOCIATA QUESTA QUANTITÀ, OVVERO LA CAPACITÀ DI UN CORPO DI ESERCITARE O SUBIRE FORZA GRAVITAZIONALE.

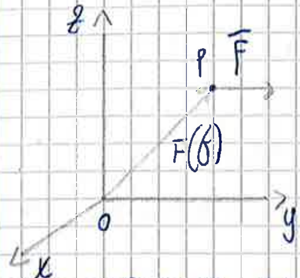
CON m_{1g} E $m_{2g} \Rightarrow |\bar{F}_{1,2}| \propto \frac{m_{1g} \cdot m_{2g}}{r^2}$ QUINDI C'È PROPORZIONALITÀ TRA IL PRODOTTO DELLE MASSE; ORA PER DEFINIRE LA FORZA GRAVITAZIONALE COME VETTORE CI VUOLE UN VERSORE E QUINDI INDICHIAMOLO CON $\bar{u}_{2,1} = -\bar{u}_{1,2}$:

$$\Rightarrow \boxed{\bar{F}_{1,2} = -G\frac{m_{1g} \cdot m_{2g}}{r^2}\bar{u}_{1,2}}$$

QUESTA È LA FORZA CHE VA DA 1 A 2, OVVERO LA FORZA ESERCITATA DAL CORPO 1 AL CORPO 2, INFATTI È ATTRATTIVA; LA FORZA È DIRETTA VERSO IL CORPO CHE LA ESERCITA. ADESSO SUPPONIAMO CHE LA m_1 (MASSA 1) È FERMO E CHE ESERCITA UNA FORZA SUL CORPO 2:

$\bar{F}_{1,2} = m_2\bar{a}_2 \Rightarrow m_2 a_2 = G\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \Rightarrow a_2 = G\frac{m_{1g}}{r^2}\left(\frac{m_{2g}}{m_2}\right)$ ORA SE NOI CAMBIAMO IL VALORE m_2 CON UNA MASSA DIVERSA E LA METTIAMO NELLO STESSO PUNTO L'ACCELERAZIONE PRODOTTA È SEMPRE LA STESSA, QUINDI NON DIPENDE DAL CORPO 2 E DI CON=

PARTICELLA, DELLA SUA VELOCITÀ E DEL TEMPO. QUINDI $\bar r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ E $\bar F(\bar r, \bar v, t)$:



$m\bar a = \bar F(\bar r, \bar v, t)$ QUESTO PER LA LEGGE DI NEWTON; SVILUPPIAMOLA:

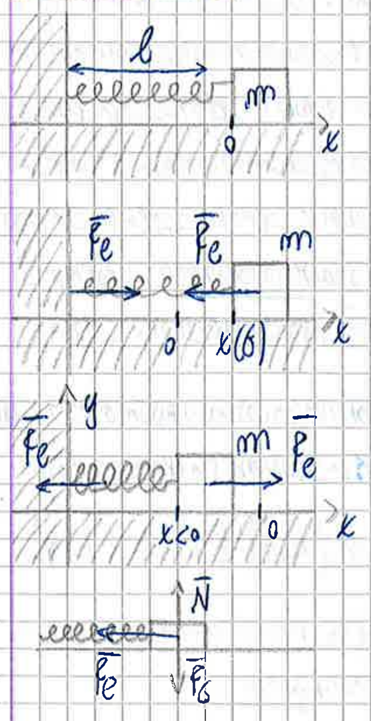
$$\begin{cases} m a_x = F_x(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t); \\ m a_y = F_y(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t); \\ m a_z = F_z(x, y, z, v_x, v_y, v_z, t); \end{cases}$$

QUINDI IL PROBLEMA PRINCIPALE È QUELLO DI, SAPENDO LA FORZA IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE, DELLA VELOCITÀ E DEL TEMPO, RICAVARE IL MOTO DELLA PARTICELLA, QUINDI $x(t), y(t), z(t)$, OVVERO LA POSIZIONE DELLE COORDINATE NEL TEMPO, QUINDI IL VETTORE $\bar r(t)$. QUELLE SCRITTE SOPRA SONO DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI PERCHÉ METTONO IN RELAZIONE UNA FUNZIONE CON LE SUE DERIVATE; INOLTRE SONO DEL SECONDO ORDINE PERCHÉ L'ACCELERAZIONE È UNA DERIVATA SECONDA. LE INCOGNITE SONO $x(t), y(t), z(t)$ E SE VENGONO FISSATE LE CONDIZIONI INIZIALI QUESTE EQUAZIONI HANNO SOLUZIONE UNICA; LE CONDIZIONI INIZIALI SONO $\bar r(t_0) = \bar r_0$, OVVERO LA POSIZIONE INIZIALE E $\bar v(t_0) = \bar v_0$, OVVERO LA VELOCITÀ INIZIALE. QUINDI QUELLO CHE IMPARIAMO È CHE:

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} m\bar a = \bar F(\bar r, \bar v, t) \\ \bar r(t_0) = \bar r_0 \\ \bar v(t_0) = \bar v_0 \end{cases}}$$

LA SOLUZIONE È UNICA, OVVERO $\bar r(t)$, QUINDI SI TRATTA DI DOVER RISOLVERE UN PROBLEMA DI CAUCHY.

- OSCILLATORE ARMONICO:



LA MASSA m SI MUOVE SENZA ATTRITO E VOGLIAMO STUDIARE IL MOTO DEL SISTEMA; SE LA MOLLA NON È COMPRESSA O ALLUNGATA ALLORA SIAMO IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO STATICO, QUINDI LA MASSA È FERMA. SE ALLUNGHIAMO LA MOLLA E LA LASCIAMO POI ANDARE, LA MASSA OSCILLA COMPIENDO UN MOTO UNIDIMENSIONALE. L'ORIGINE O È LA POSIZIONE DELLA MASSA QUANDO LA MOLLA È A RIPOSO. $x(t)$ INDICA DI QUANTO LA MOLLA SI È ALLUNGATA O SI È COMPRESSA E QUINDI LA POSIZIONE DELLA MASSA DOPO LA DEFORMAZIONE; SE LA MOLLA È DEFORMATA ALLORA VIENE PRODOTTA UNA FORZA ELASTICA CHE SI OPPONE ALL'ALLUNGAMENTO, QUINDI È SEMPRE DIRETTA VERSO IL PUNTO DI EQUILIBRIO. SE $x>0$ LA FORZA È DIRETTA VERSO L'INTERNO, SE $x<0$ È DIRETTA VERSO L'ESTERNO, QUINDI LA x INDICA L'ALLUNGAMENTO $\Rightarrow \bar F_e = K_e x \bar u_x$ E $|\bar F_e| = K_e|x|$; SULLA MASSA AGISCONO LA FORZA DI GRAVITÀ, LA REAZIONE VINCOLARE E LA FORZA ELASTICA.

ADESSO SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON:

$\Rightarrow m\bar a = \bar N + \bar F_G + \bar F_e$ ADESSO PROIETTIAMO LA FORZA IN x E y: PER PRIMO

$x(0) = x_0 = B$, ovvero l'allungamento iniziale; invece $v(0) = v_0 = A\omega_0$ da cui ricaviamo le costanti, ovvero:

$$\begin{cases} A = v_0/\omega_0 \\ B = x_0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t) + x_0\cos(\omega_0 t)$$

dopo un tempo $t \to t+T$ detto periodo il moto si ripete sempre uguale, quindi scriviamo l'equazione in funzione del periodo:

$$x(t+T) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \omega_0 T) + x_0\cos(\omega_0 t + \omega_0 T)$$

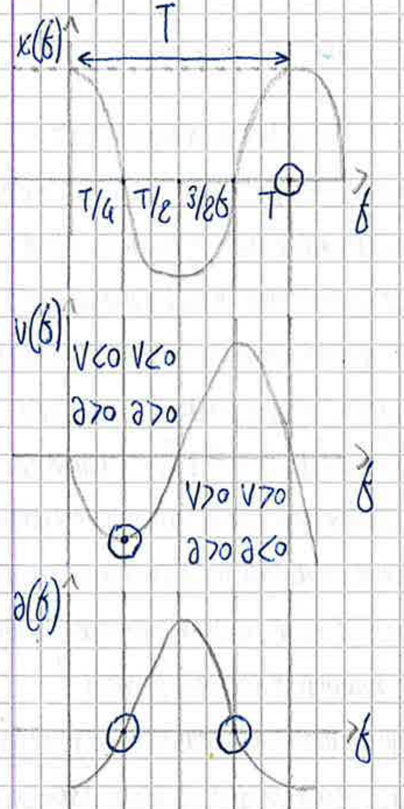
invece per la velocità avremo:

$$v(t+T) = v_0\cos(\omega_0 t + \omega_0 T) - \omega_0 x_0 \sin(\omega_0 t + \omega_0 T)$$

quindi avremo che:

$$\begin{cases} x(t+T) = x(t) \\ v(t+T) = v(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \omega_0 T = 2\pi \to T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_e}}$$

detto periodo del moto armonico. Inoltre se $v_0 = 0$ ovvero parte da fermo, la soluzione si semplifica $\Rightarrow x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$;



$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$ graficamente è una sinusoide; dopo il periodo T la curva si ripete con la stessa ampiezza. In $t = 0$ e $x = 0$ la tangente è orizzontale quindi la velocità vale zero, infatti il corpo parte da fermo; $v(t) = -x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$ e leggiamo che dopo un quarto di periodo la massa passa per il punto di equilibrio dove per definizione l'accelerazione è nulla e ci passa con velocità negativa, quindi si sta muovendo in verso opposto e prosegue comprimendo la molla. Nel grafico della velocità il punto cerchiato è il punto di compressione massima dove la tangente è orizzontale, quindi la velocità si annulla. Poi procede di nuovo a velocità e accelerazione positiva, quindi accelera fino al punto di equilibrio dove l'accelerazione è nulla e poi ci passa oltre fino a raggiungere il punto di partenza dove la velocità si annulla. Consideriamo l'accelerazione: $a(t) = -x_0\omega_0^2\cos(\omega_0 t)$ e possiamo definire una grandezza definita $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ e tramite questo otteniamo una nuova grandezza:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

la chiamiamo frequenza di oscillazioni, ovvero quante oscillazioni compie al secondo. Il moto inoltre si può scrivere anche così: $x(t) = C\cos(\omega_0 t + \phi)$ con C e ϕ costanti fissate dalle condizioni iniziali. Vediamo che relazione c'è tra la formula di partenza e questa che abbiamo definito adesso; sviluppiamo il coseno:

$$x(t) = C\cos(\phi)\cos(\omega_0 t) - C\sin(\phi)\sin(\omega_0 t)$$

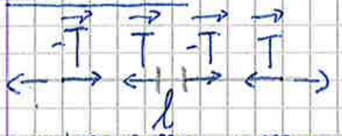
con $A = -C\sin\phi = v_0/\omega_0$ e $B = C\cos\phi = x_0$.

Se consideriamo il sistema formato dalle due costanti, proviamo a risolverlo in funzione di C e ϕ facendo il rapporto membro a membro e poi sommando i quadrati membro a membro per trovare C:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

CHE DEVE PER ESEMPIO IL SENO VALE 1 ALLORA IL COSENO VALE 1, QUINDI IL MOTO SI SVOLGE SU UN SEGMENTO DI RETTA.

- PENDOLO SEMPLICE: CONSISTE IN UN FILO INESTENSIBILE IDEALE, OVVERO SE VIENE TESO NON MODIFICA LA PROPRIA LUNGHEZZA.



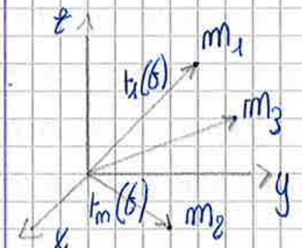
QUINDI ℓ RIMANE COSTANTE E SE ALLE ESTREMITÀ SI APPLICANO FORZE UGUALI E OPPOSTE CHE SI OPPONGONO. QUESTO FILO HA MASSA $m = 0$, QUINDI NON HA INERZIA IN PRATICA.

SE NOI PRENDESSIMO UN PEZZETTINO DI MASSA DI FILO Δm, ALLORA LA LEGGE DI NEWTON SI PUÒ SCRIVERE COSÌ:

$\Delta m \bar{a} = \bar{T}_1 + \bar{T}_2$ SU QUESTO FILO SI APPLICANO QUESTE TENSIONI, MA POICHÉ $m = 0$, ALLORA RISULTERÀ CHE:

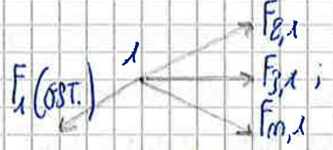
$m = 0 \to \Delta m = 0 \to \Delta m \bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \bar{T}_1 = -\bar{T}_2$ SONO QUINDI FORZE RIVOLTE VERSO L'ESTERNO.

- DINAMICA DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI: OVVERO CONSIDERIAMO PIÙ PUNTI CHE INTERAGISCONO TRA DI LORO.



OGNI PARTICELLA HA 3 COORDINATE, QUINDI OCCORRONO UN MINIMO NUMERO DI VARIABILI PER DESCRIVERE LA DINAMICA; LE TRE COORDINATE SONO DATE:

$$\begin{cases} x_1(t),\ y_1(t),\ z_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t),\ y_m(t),\ z_m(t) \end{cases}$$

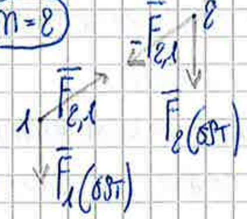


DAL DISEGNO A PIANO IMPARIAMO CHE OGNI PARTICELLA DEL SISTEMA È SOGGETTA A DUE FORZE PRINCIPALMENTE: FORZE INTERNE, OVVERO LE FORZE ESERCITATE TRA LE PARTICELLE INTERNE AL SISTEMA E LE FORZE ESTERNE CHE SONO LE FORZE DELL'AMBIENTE COME LA TERRA E L'ARIA. PER OGNI PARTICELLA DI MASSA m POSSIAMO SCRIVERE UNA RELAZIONE:

$$m_1: \frac{dP_1}{dt} = \vec{F}_1(\text{INTERNE}) + \vec{F}_1(\text{ESTERNE}) \quad \dots \quad m_m: \frac{d\vec{P}_m}{dt} = \vec{F}_m(\text{INTERNE}) + \vec{F}_m(\text{ESTERNE}).$$

ORA BISOGNA CONSIDERARE VARI CASI IN CUI VARIA IL NUMERO DELLE PARTICELLE ALL'INTERNO DEL SISTEMA.

$m = 2$



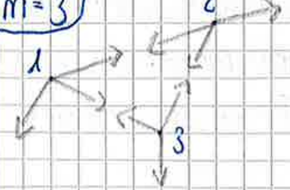
$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{P}_1}{dt} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_1(\text{EST}) = \vec{F}_1(\text{INTERNA}) + \vec{F}_1(\text{ESTERNA}); \\ \dfrac{d\vec{P}_2}{dt} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_2(\text{EST}) = \vec{F}_2(\text{INTERNA}) + \vec{F}_2(\text{ESTERNA}). \end{cases}$$

ADESSO INTRODUCIAMO LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA: $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2$; QUINDI VALE CHE:

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d\vec{P}_1}{dt} + \frac{d\vec{P}_2}{dt} = \left(\cancel{\bar{F}_{2,1}} + \bar{F}_1(\text{EST})\right) + \left(\cancel{\bar{F}_{1,2}} + \bar{F}_2(\text{EST})\right) = \bar{F}_1(\text{EST}) + \bar{F}_2(\text{EST}) = \bar{F}(\text{ESTERNE}).$$

INFATTI LE FORZE INTERNE TRA LE DUE PARTICELLE SONO UGUALI E OPPOSTE PER IL PRINCIPIO AZIONE E REAZIONE; QUINDI LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE È INFLUENZATA SOLO DALLE FORZE ESTERNE.

$m = 3$



$$\begin{cases} \dfrac{dP_1}{dt} = \left(\bar{F}_{2,1} + \bar{F}_{3,1}\right) + \bar{F}_1(\text{ESTERNA}); \\ \dfrac{dP_2}{dt} = \left(\bar{F}_{1,2} + \bar{F}_{3,2}\right) + \bar{F}_2(\text{ESTERNA}); \\ \dfrac{dP_3}{dt} = \left(\bar{F}_{1,3} + \bar{F}_{2,3}\right) + \bar{F}_3(\text{ESTERNA}). \end{cases}$$

CON $\bar{P} = \bar{P}_1 + \bar{P}_2 + \bar{P}_3$; E CON: $\dfrac{dP}{dt} = \dfrac{dP_1}{dt} + \dfrac{dP_2}{dt} + \dfrac{dP_3}{dt}$;

$m\bar{a} = \bar{N} + \bar{F}_G + \bar{F} + \bar{F}'$ con due forze che sono perpendicolari al tavolo, ovvero la forza di gravità e la reazione vincolare; e altre due che sono parallele al suolo, ovvero $\bar{F}$ e $\bar{F}'$ da cui vale la relazione:

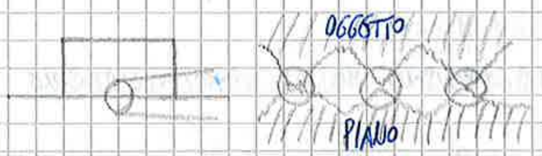
$\bar{F} + \bar{F}' = 0 \Rightarrow \bar{F} = -\bar{F}' \Rightarrow |\bar{F}| = |\bar{F}'|$ con $\bar{F}'$ detta forza di attrito radente statico perché si svolge in condizioni di equilibrio statico. Però se tiriamo l'oggetto sempre di più, allora l'oggetto inizia a muoversi; quindi se la forza che noi esercitiamo è superiore ad un certo valore critico di conseguenza l'attrito statico non è più sufficiente a compensarla. Inoltre se voglio mantenere l'oggetto in moto uniforme, allora devo ridurre l'allungamento, ovvero la forza massima per muoverlo. Da ciò deriva che se l'oggetto si muove allora non siamo più in regime statico.

$m\bar{a} = (\bar{F}_G + \bar{N}) + \bar{F}' + \bar{F}_d$ quindi la reazione vincolare e la forza di gravità si compensano, quindi avremo:

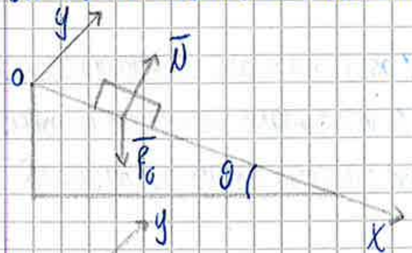
$\bar{F}_d = -\bar{F}'$ queste due forze in modulo sono uguali, ma sono due vettori opposti e quindi l'oggetto si mantiene in moto uniforme poiché la risultante delle due forze si annulla. Un'altra proprietà che questa nuova forza, detta forza di attrito dinamico, è meno intensa della forza di attrito statico perché abbiamo detto che per mantenerla in moto uniforme devo ridurre la forza. Come possibile versore di questo vettore usiamo quello della velocità:

$\bar{u} = \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} \Rightarrow \bar{F}_d = -F_d \bar{u}$; sia l'attrito statico che dinamico dipendono dalla reazione vincolare del tavolo perché infatti maggiore è $\bar{N}$ allora maggiormente l'oggetto preme sull'altro, quindi maggiore è l'attrito.

$\Rightarrow \begin{cases} F_d = \mu_d \cdot N \\ F_s = \mu_s \cdot N \end{cases}$ μ_d e μ_s sono i coefficienti di attrito statico e dinamico e inoltre c'è un rapporto di proporzionalità diretta tra la forza e N. Inoltre se $F_d < F_s \Rightarrow \mu_d < \mu_s$. Questi due coefficienti dipendono dalle superfici, ovvero da quanto sono ruvide.



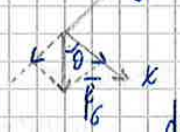
Inoltre la forza di attrito non dipende dall'area di contatto tra le due superfici perché osservando l'area di contatto al microscopio vediamo che i profili dei due oggetti a contatto sono molto frastagliati e quindi il contatto avviene solo lungo le prominenze. Facciamo un esempio concreto:



Note le forze che agiscono sull'oggetto voglio studiare il moto dell'oggetto prima escludendo l'attrito e poi considerandolo; con l'attrito nullo vale:

$m\bar{a} = \bar{F}_G + \bar{N}$ con $\bar{N} = N\bar{u}_y$ e $\bar{F}_G = mg\cos\theta\,\bar{u}_x - mg\sin\theta\,\bar{u}_y$

e $\bar{a} = a\bar{u}_x$ inoltre l'accelerazione è la derivata seconda della posizione.



lungo y: $\begin{cases} N - mg\sin\theta = 0 \Rightarrow N = mg\sin\theta \\ ma = mg\cos\theta \end{cases}$:lungo x

da queste equazioni deriva questo:

$a = g\cos\theta = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$; quindi se consideriamo un moto uniformemente accelerato:

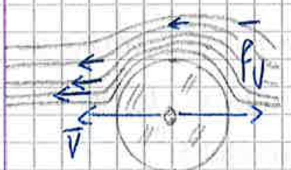
$\begin{cases} v(t) = v(0) + g\cos\theta \\ x(t) = \underline{\underline{x(0)}} + \underline{\underline{v(0)}}\,t + \frac{1}{2} g\cos\theta\, t^2 \end{cases}$

quindi dopo aver imposto le condizioni iniziali, abbiamo ottenuto un problema di Cauchy per ricavare il moto. Adesso invece

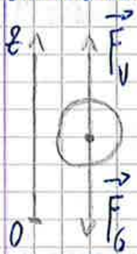
NEL CASO DI UN OGGETTO SFERICO DI RAGGIO R VALE LA LEGGE DI STOKES:

$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_V = -6\pi R \eta \cdot \vec{v}}$ CON $[\eta] = [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$; INVECE PER $|\vec{v}|$ PIÙ ELEVATE: $|\vec{F}_V| \propto v^2$.

ADESSO STUDIAMO MEGLIO LA VISCOSITÀ: NEI FLUIDI LE PARTICELLE NON SI MUOVONO INSIEME, MA C'È UN MOTO A STRATI LUNGO UNO STRATO RISPETTO ALL'ALTRO; QUINDI IL MOTO DI UN FLUIDO È DESCRITTO DA UN MOTO DI STRATI MOLTO SOTTILI CHE SCORRONO L'UNO SULL'ALTRO. QUESTO VALE SE LE VELOCITÀ NON SONO TROPPO ELEVATE E ALLORA SI DICE CHE SIAMO IN REGIME LAMINARE. QUESTI STRATI SI POSSONO MUOVERE A VELOCITÀ DIVERSA; LA FORZA DI ATTRITO SI OPPONE ALLO SCORRIMENTO DI UNO STRATO RISPETTO ALL'ALTRO E DUE STRATI ADIACENTI SVILUPPANO FORZE ELETTROSTATICHE, OVVERO SI SVILUPPA ATTRITO VISCOSO. QUESTA FORZA È ABBINATA AD UNA PARTICOLARE PROPRIETÀ DEL FLUIDO DETTA VISCOSITÀ, OVVERO LA CAPACITÀ DI SCORRIMENTO DEGLI STRATI ADIACENTI DI UN FLUIDO.



LO STRATO PIÙ VICINO ALL'OGGETTO SI MUOVE CON LA STESSA VELOCITÀ $\vec{v}$ DELL'OGGETTO; QUESTO STRATO TRASCINA QUELLO PIÙ ESTERNO, MA IMPRIME UNA VELOCITÀ MINORE. QUINDI QUESTO TRASCINAMENTO SI COMUNICA AGLI ALTRI STRATI CON VELOCITÀ SEMPRE PIÙ PICCOLE FINCHÉ AD UN CERTO PUNTO AD UN CERTO STRATO IL FLUIDO NON RISENTE DEL TRASCINAMENTO. TRA QUESTI STRATI SI SVILUPPA UNA FORZA SULL'OGGETTO CHE OSTACOLA IL SUO MOTO. CONSIDERIAMO UNA PALLA CHE CADE NELL'ARIA:



IL MOTO DELLA PALLA È DESCRITTO DA $z(t)$; SCRIVIAMO ADESSO LA LEGGE DI NEWTON:

$\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{F}_V = -mg\vec{u}_z - K\eta\vec{v}$ CON $\vec{v} = v\vec{u}_z$ E $\vec{a} = a\vec{u}_z$; ADESSO SI SCRIVE:

$a = \frac{dv}{dt} = -g - \frac{K\eta v}{m}$ ED È UNA EQUAZIONE DIFFERENZIALE DEL PRIMO ORDINE PERCHÉ ABBIAMO SOLO LA VELOCITÀ E LA SUA DERIVATA PRIMA; SE CONSIDERIAMO INTERVALLI DI TEMPO INFINITESIMI ALLORA POSSIAMO CERCARE DI RISOLVERE IL MOTO TRAMITE GRANDEZZE INFINITESIME, QUINDI INIZIAMO:

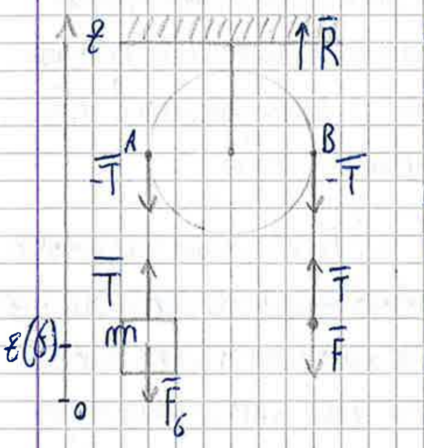
$dv = \frac{dv}{dt} \cdot dt = \left(-g - \frac{K\eta}{m}v\right)dt \Rightarrow \left(\frac{dv_i}{g + \frac{K\eta v_i}{m}}\right) = -dt_i$ SONO TANTI PICCOLI CONTRIBUTI PER OGNI INTERVALLINO INFINITESIMO. LI SOMMIAMO:

$\Rightarrow \sum \frac{dv_i}{\left(g + \frac{K\eta v_i}{m}\right)} = -\sum dt_i = -t$; EQUIVALE AD UN INTEGRALE: $\int_{v(0)}^{v(t)} \frac{dv}{g + \frac{K\eta v}{m}} = -t$; PER RISOLVERLO DOBBIAMO USARE IL CAMBIO DI VARIABILE E QUINDI DEFINISCO $y = g + \frac{K\eta v}{m}$; L'UNICA VARIABILE POSSIBILE È LA VELOCITÀ, QUINDI SE v VARIA DI UNA QUANTITÀ INFINITESIMA, ALLORA ANCHE LA y VARIA DI dy, DA CUI VIENE FUORI:

$dy = y(v+dv) - y(v) = \frac{dy}{dv}dv = \frac{K\eta}{m}dv \Rightarrow dv = \frac{m}{K\eta}dy$; QUINDI ABBIAMO DEFINITO UNA NUOVA VARIABILE DI INTEGRAZIONE CHE DA ADESSO ANDIAMO A SOSTITUIRE NELL'INTEGRALE DI PARTENZA:

$m \propto V\left(=\frac{4}{3}\pi R^3\right)$ QUINDI LA MASSA È PROPORZIONALE AL VOLUME E POICHÉ LA DENSITÀ È MASSA SU VOLUME, QUESTO VUOL DIRE CHE LA SFERA NON AVRÀ PARTI PIÙ DENSE E PARTI MENO DENSE AL SUO INTERNO. UNA SUA PROPRIETÀ È CHE A PARITÀ DI DENSITÀ, PIÙ PICCOLA È LA SFERA, QUINDI IL SUO RAGGIO, ALLORA PIÙ PICCOLA SARÀ LA SUA VELOCITÀ DI RAGGIUNTA E QUINDI PRIMA LA RAGGIUNGE. LE GOCCE DI PIOGGIA INFATTI QUANDO GIUNGONO A NOI HANNO GIÀ RAGGIUNTO LA VELOCITÀ DI REGIME E QUINDI CI GIUNGONO CON GIÀ VELOCITÀ UNIFORME. BASTA PRENDERE L'OGGETTO LEGGERO.

- <u>CARRUCOLE</u>: IN PARTICOLARE CARRUCOLE IDEALI, FORMATE DA UN DISCO ROTANTE, UN FILO CHE SI AVVOLGE E UN SUPPORTO CHE LO SOSTIENE AL SOFFITTO; È IMPORTANTE CHE LA CARRUCOLA ABBIA MASSA NULLA IN MODO CHE ALLE SUE ESTREMITÀ LE TENSIONI SUL FILO AGISCANO CON LA STESSA INTENSITÀ. SE LA CARRUCOLA AVESSE MASSA SERVIREBBE UNO SFORZO NON NULLO PER METTERLA IN ROTAZIONE. FACCIAMO UN ESEMPIO CONCRETO DI UN PROBLEMA DI QUESTO TIPO:



SUL TRATTO $\widehat{AB}$ AGISCONO DELLE FORZE CON STESSA INTENSITÀ, MA RIVOLTE VERSO IL BASSO E QUINDI CON IL SEGNO MENO. QUESTE FORZE SONO LE <u>TENSIONI DEL FILO</u>; IL FILO È UN FILO INESTENSIBILE E IDEALE, COSÌ LE DUE TENSIONI SONO UGUALI. NOI VOGLIAMO DETERMINARE $\bar F$, $\bar T$ E $\bar R$; $\bar F$ È UNA FORZA CHE NOI APPLICHIAMO SULLA ESTREMITÀ LIBERA MENTRE SULL'ALTRA ABBIAMO APPESO UNA MASSA. VOGLIO DETERMINARE QUESTI VETTORI NEI CASI IN CUI: a) m È FERMA; b) m SI MUOVE VERSO L'ALTO CON $V=0,2\ m/s$ (COSTANTE); c) m SI MUOVE CON $a=0,1\cdot g$ (COSTANTE); INOLTRE LA POSIZIONE DI m È DATA DALLA COORDINATA $z(t)$;

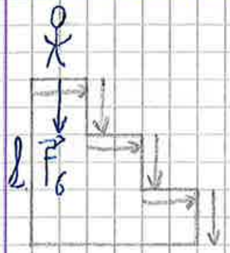
a) SULLA MASSA m AGISCONO LA FORZA DI GRAVITÀ VERSO IL BASSO E LA TENSIONE DEL FILO VERSO L'ALTO CHE FA IN MODO CHE L'OGGETTO NON CADA; LA LEGGE DI NEWTON È: $m\bar a = \bar T + \bar F_G$ CON $\bar T = T\bar u_z$ E $\bar F_G = -mg\bar u_z$;
$\Rightarrow m a\bar u_x = T\bar u_z - mg\bar u_z \Rightarrow \underline{ma = T - mg}$,

b) LA CARRUCOLA GIRA, PERÒ DA NOTARE CHE NON C'È UN MOTO D'INSIEME PERCHÉ LA BARRA CHE SOSTIENE IL SUPPORTO È FERMA, QUINDI VEDENDO TUTTO INSIEME IL SISTEMA CARRUCOLA NON SI MUOVE ANCHE SE LA CARRUCOLA GIRA. IL MOTO D'INSIEME COME SAPPIAMO È DATO DALLA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE:

$\frac{d\bar P}{dt} = \bar F(est) = \sum \bar F_i(est)$, MA $\bar P = \bar 0 \Rightarrow \bar R - \bar T - \bar T = 0 \Rightarrow \underline{R - 2T = 0}$ QUINDI NON ESSENDOCI UN MOTO D'INSIEME LA RISULTANTE DELLE FORZE VALE ZERO, L'OGGETTO (O IL SISTEMA) NON SI MUOVE;

c) SE INFINE CONSIDERO L'ESTREMO LIBERO DOVE APPLICO LA FORZA, ALLORA SU QUELL'ELEMENTINO DI FILO MI POSSO DIRE CHE AGISCONO DUE FORZE, OVVERO LA FORZA CHE APPLICO IO E LA TENSIONE DEL FILO VERSO L'ALTO COME IN FIGURA. QUINDI:
$0 \approx (\Delta m)\bar a = \bar T + \bar F = 0 \Rightarrow \bar T = -\bar F$ CON $\bar F = -F\bar u_z$ E $\bar T = T\bar u_z \Rightarrow T\bar u_z = -(-F u_z) \Rightarrow \underline{T = F}$,
QUINDI LA TENSIONE DEL FILO È UGUALE ALLA FORZA CHE APPLICO ALL'ESTREMO. QUESTE INFORMAZIONI USIAMO I 3 PUNTI.

ADESSO CONSIDERIAMO UNA PERSONA CHE SCENDE LE SCALE E VOGLIAMO TROVARE IL LAVORO:



ABBIAMO LA SOMMA DI TANTI SPOSTAMENTI E POICHÈ IL LAVORO È ADDITIVO, ALLORA VALE QUESTO:

$W = \sum W_i$; DIVIDO QUESTI SPOSTAMENTI IN DUE GRUPPI, QUELLI ORIZZONTALI E VERTICALI:

$$W = \sum W_i\,(\text{orizzontali}) + \sum W_i\,(\text{verticali}) = \sum_{\text{oriz.}} \bar{F}_G \cdot \bar{l}_i + \sum_{\text{vert.}} \bar{F}_G \cdot \bar{l}_i \,;$$

GLI SPOSTAMENTI ORIZZONTALI NON CONTRIBUISCONO PERCHÈ FORZA E SPOSTAMENTO SONO PERPENDICOLARI TRA DI LORO:

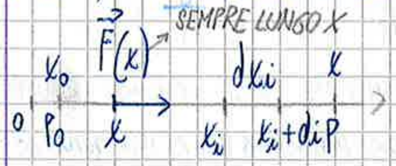
$$W = \sum_{\text{vert.}} mg\, l_i = mg \sum l_i = mg\, l > 0$$ INFATTI STO SCENDENDO LE SCALE.

ADESSO CONSIDERIAMO ALTRO ESEMPIO DI LAVORO: UN ESEMPIO È LA FORZA DI ATTRITO, INFATTI SE NOI SPOSTIAMO UN OGGETTO SU DI ESSO AGISCE LA FORZA DI ATTRITO DINAMICO E QUINDI LA LEGGE DI NEWTON LA SI SCRIVE IN QUESTO MODO:

$\bar{F} = \bar{F}_G + \bar{N} + \bar{F}_d$ CON $\bar{F}_d = -\mu_d N \bar{u}$ CON $\bar{u}$ IL VERSORE SPOSTAMENTO, QUINDI $\bar{l} = l\bar{u}$; IL LAVORO È DATO DA:

$$W = \vec{F}\cdot\vec{l} = (\vec{F}_G + \vec{N} + \vec{F}_d)\cdot\vec{l} = \underbrace{\vec{F}_G\cdot\vec{l}}_{=0} + \underbrace{\vec{N}\cdot\vec{l}}_{=0} + \vec{F}_d\cdot\vec{l} = \vec{F}_d\cdot\vec{l} = (-\mu_d N\bar{u})\cdot(l\bar{u}) = -\mu_d N l$$ E

SAPENDO CHE $N = F_G = mg$ ALLORA POSSIAMO SCRIVERE: $W = -\mu_d mg \cdot l < 0$; QUINDI L'ATTRITO DINAMICO COMPIE LAVORO NEGATIVO PERCHÈ SI OPPONE AL MOTO. L'ATTRITO STATICO NON COMPIE LAVORO PERCHÈ DAL MOMENTO CHE L'OGGETTO È FERMO, NON C'È NEANCHE SPOSTAMENTO. ADESSO CONSIDERIAMO UN ALTRO CASO IMPORTANTE:



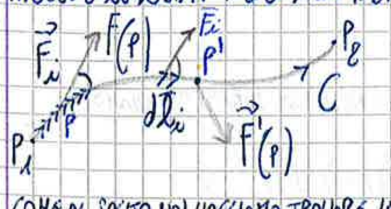
ABBIAMO UNA FORZA CHE VARIA DURANTE LO SPOSTAMENTO E CAMBIA ISTANTE PER ISTANTE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE; QUINDI LA FORZA LA SCRIVIAMO COSÌ: $\vec{F}(x) = F(x)\bar{u}_x$ E VOGLIO TROVARE IL LAVORO QUANDO LA PARTICELLA SI SPOSTA DA UN PUNTO INIZIALE AD UN PUNTO FINALE; ALLORA IO POSSO SCOMPORRE LO SPOSTAMENTO IN TANTI SPOSTAMENTI INFINITESIMI IN MODO DA CONSIDERARE COSTANTE IL MODULO DELLA FORZA AL LORO INTORNO, QUINDI OGNI PICCOLO LAVORO È DATO DA:

$dW_i = F(x_i)\,dx_i$; COME SAPPIAMO SE CONSIDERASSIMO UN GRAFICO DELLA FORZA IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE ALLORA CALCOLARE QUESTO PICCOLO LAVORO, VUOL DIRE CALCOLARE L'AREA DI UN RETTANGOLINO, QUINDI IL LAVORO TOTALE È L'AREA TOTALE CHE È SOTTESA ALLA CURVA DELLA NOSTRA FUNZIONE; IL LAVORO TOTALE È DATO DA:

→ VALORE LIMITE SE $dx_i \to 0$

$$\Rightarrow W = \sum dW_i = \sum F(x_i)\,dx_i = \int_{x_0}^{x} F(x')\,dx'.$$

ADESSO CONSIDERIAMO IL CASO DI UNA PARTICELLA SU CUI AGISCE UNA FORZA CHE VARIA E SI MUOVE LUNGO UNA CURVA:



COME AL SOLITO SI DIVIDE LO SPOSTAMENTO IN TANTI PICCOLI SPOSTAMENTI INFINITESIMI, SAPENDO INOLTRE CHE ISTANTE PER ISTANTE LO SPOSTAMENTO $d\bar{l}$ È // ALLA TANGENTE ALLA CURVA DELLO SPOSTAMENTO E LUNGO OGNI $d\bar{l}$ LA FORZA È PRESSOCHÉ COSTANTE.

COME AL SOLITO NOI VOGLIAMO TROVARE IL LAVORO COME SOMMA DI TANTI PICCOLI CONTRIBUTI, QUINDI SCRIVEREMO:

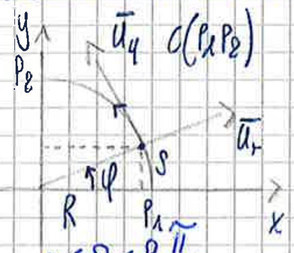
INFINITESIMI, QUINDI RETTILINEI

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\vec{F}(x,y) = F\left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}\right)$$

NUMERO

- CONSIDERIAMO UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE LUNGO UN QUARTO DI CIRCONFERENZA:



SULLA PARTICELLA AGISCE UNA FORZA IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE $\Rightarrow \vec{F}(x,y)$; INOLTRE L'ANGOLO $\varphi = S/R$. LA POSIZIONE DEL PUNTO SI PUÒ ESPRIMERE SIA CON L'ASCISSA CURVILINEA, OPPURE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE ANGOLARE (φ). QUINDI SCRIVIAMO:

$$F(s) = R\left(\cos\left(\frac{S}{R}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{S}{R}\right)\right) \Rightarrow \begin{cases} x(s) = R\cos(S/R) = R\cos\varphi; \\ y(s) = R\operatorname{sen}(S/R) = R\operatorname{sen}\varphi. \end{cases}$$

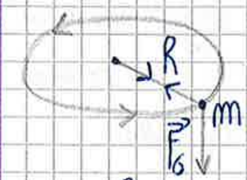
$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ $\qquad 0 \le S \le R\frac{\pi}{2}$

INOLTRE SAPPIAMO CHE: $\bar{u}_\varphi = -\operatorname{sen}\varphi\,\bar{u}_x + \cos\varphi\,\bar{u}_y$; $\bar{u}_r = \cos\varphi\,\bar{u}_x + \operatorname{sen}\varphi\,\bar{u}_y$. QUINDI VALE CHE:

$\Rightarrow \vec{dl} = R\,d\varphi\,\bar{u}_\varphi$ QUINDI IL TRATTO DI CIRCONFERENZA PERCORSA. LA FORZA LA POSSIAMO SCRIVERE IN FUNZIONE DELLA POSIZIONE ANGOLARE: $F(\varphi) = F(x(\varphi), y(\varphi)) = F\left(-\frac{y(\varphi)}{R}; \frac{x(\varphi)}{R}\right) = F(-\operatorname{sen}\varphi, \cos\varphi) = F\vec{u_\varphi}$; IN OGNI PUNTO LA FORZA AGISCE IN DIREZIONE TANGENTE ALLA CURVA NEL VERSO DEGLI φ CRESCENTI. SE FOSSE SFUGGITO UN PASSAGGIO RICORDIAMOCI CHE $F(x,y) = F\left(-\frac{y}{R}; \frac{x}{R}\right)$ COORDINATE CARTESIANE E COORDINATE POLARI PIANE. QUINDI VALE CHE:

$$dW = \vec{F}(\varphi)\,\vec{dl} = (F\vec{u_\varphi})\cdot(R\,d\varphi\,\vec{u_\varphi}) = RF\,d\varphi \Rightarrow W = \int \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} RF\,d\varphi = \underline{RF\frac{\pi}{2}}$$

- ADESSO FACCIAMO RUOTARE UNA PARTICELLA DI MOTO UNIFORME:

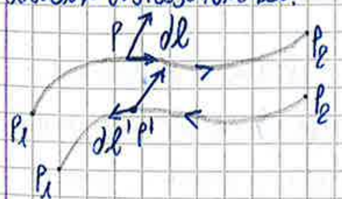


LA MASSA m È SOGGETTA ALLA FORZA DI GRAVITÀ E POI ALLA FORZA DI TENSIONE DEL FILO; QUESTA FORZA È UGUALE E OPPOSTA A QUELLA ESERCITATA SUL DITO DAL FILO. QUINDI LA LEGGE DI NEWTON È: $m\bar{a} = \bar{T} + \bar{F}_G$; DA NOTARE CHE $\bar{T}$ DA DA FORZA CENTRIPETA IN QUESTO CASO, INFATTI È DIRETTA VERSO IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA. RICORDIAMOCI INOLTRE CHE L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA È $\bar{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$ QUINDI $\bar{T} = m\bar{a} = -m\frac{v^2}{R}\vec{u}_r$ QUINDI SI PARLA DI FORZA CENTRIPETA. IL LAVORO SARÀ DATO DA:

$W_{C(P_1P_2)} = \int \bar{T}\cdot\bar{dl}$ CON $\bar{dl} = \bar{v}\,d\delta = v\,d\delta\,\vec{u_\varphi}$. DA NOTARE CHE IN QUESTO RAGIONAMENTO LA FORZA DI GRAVITÀ NON SI CONSIDERA NEANCHE PERCHÉ IN UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO, FORZA E SPOSTAMENTO SONO PERPENDICOLARI. QUINDI:

$\bar{T}\cdot\bar{dl} = \left(-m\frac{v^2}{R}\vec{u_r}\right)\left(v\,d\delta\,\vec{u_\varphi}\right) = 0$ FORZA E SPOSTAMENTO SONO PERPENDICOLARI, INFATTI $\vec{u_r} \perp \vec{u_\varphi}$, QUINDI POSSIAMO DIRE CHE IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA CENTRIPETA È ZERO.

- ADESSO SUPPONIAMO DI SPOSTARE UNA PARTICELLA DA UN PUNTO P_1 AD UN PUNTO P_2 PER POI RIPORTARE LA PARTICELLA INDIETRO SEGUENDO LO STESSO PERCORSO.



SE NOI PRENDIAMO UN QUALSIASI PUNTO P, QUESTO VIENE ATTRAVERSATO ALL'ANDATA E AL RITORNO CON LA STESSA FORZA, MA IN VERSO OPPOSTO, INFATTI CAMBIA LO SPOSTAMENTO PRIMA IN UN VERSO POI NELL'ALTRO, QUINDI I DUE LAVORI SONO UGUALI E DI SEGNO OPPOSTO. QUINDI SCRIVIAMO:

$dW = \vec{F}(P)\,\vec{dl} = \vec{F}(P')(-\vec{dl}') = -\vec{F}(P')\,\vec{dl}' = -dW'$; QUINDI VIENE FUORI CHE:

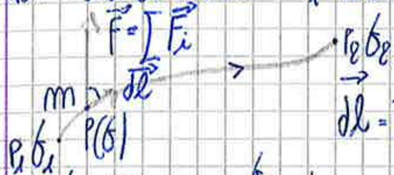
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 174

$$\frac{d|\bar{v}|^2}{dt} = 2\frac{d\bar{v}}{dt}\bar{v}$$

DIPENDE DAL TEMPO OPPURE ALLA POSIZIONE DI m

$$\vec{F} = \sum \vec{F_i} \qquad m\vec{a} = \vec{F} \ (m \text{ COSTANTE})$$

- TEOREMA LAVORO-ENERGIA: CONSIDERO UNA PARTICELLA CHE SI MUOVE LUNGO UNA CURVA E SULLA QUALE AGISCONO DELLE FORZE QUANDO SI SPOSTA DA UN PUNTO P_1 ALL'ISTANTE t_1 AD UN PUNTO P_2 ALL'ISTANTE t_2. VOGLIO TROVARE IL LAVORO TOTALE:



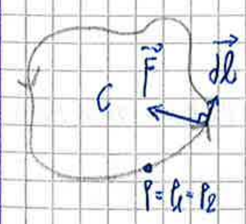
COME AL SOLITO DIVIDO LO SPOSTAMENTO IN TANTI PICCOLI SPOSTAMENTI INFINITESIMI:

$$\vec{dl} = \bar{v}(t)\,dt \Rightarrow W_{C(P_1P_2)} = \int \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,\bar{v}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} m\left(\frac{d\bar{v}}{dt}\bar{v}\right)dt =$$

$$= m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\bar{v}}{dt}\bar{v}\,dt = m\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(\bar{v}\cdot\bar{v})\,dt = m\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\bar{v} + \bar{v}\cdot\frac{d\bar{v}}{dt}}_{\text{LEIBNIZ}} = m\int_{t_1}^{t_2} 2\frac{d\bar{v}}{dt}\cdot\bar{v} \ (\text{DERIVATA DEL PRODOTTO}) =$$

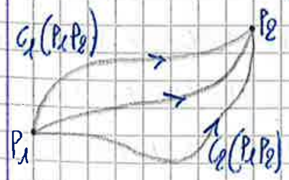
$$= \frac{m}{2}\int \frac{d|v|^2}{\cancel{dt}}\cancel{dt} = \frac{m}{2}\int_{|\bar{v}(t_1)|}^{|v(t_2)|} d|v|^2 = \underline{\frac{m}{2}\left(|\bar{v}(t_2)|^2 - |\bar{v}(t_1)|^2\right)} = \boxed{E_K(t_2) - E_K(t_1) = \Delta E_K};$$

QUINDI IL TEOREMA LAVORO-ENERGIA CI DICE CHE IL LAVORO TOTALE LUNGO LA TRAIETTORIA SI PUÒ SCRIVERE COME DIFFERENZA DI <u>ENERGIA CINETICA</u> CHE SI INDICA CON E_K TRA IL PUNTO INIZIALE (ALL'ISTANTE INIZIALE) E IL PUNTO FINALE (ALL'ISTANTE FINALE). QUINDI SE IL LAVORO È POSITIVO, ALLORA LA DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA È POSITIVA, QUINDI L'ENERGIA AUMENTA; INVECE SE IL LAVORO È NEGATIVO, ALLORA LA DIFFERENZA È NEGATIVA, QUINDI L'ENERGIA DIMINUISCE. SE LA FORZA RISULTANTE COMPIE LAVORO POSITIVO È COME SE CEDESSE ENERGIA CINETICA AL SISTEMA; SE IL LAVORO È NEGATIVO ALLORA SOTTRAE ENERGIA AL SISTEMA. SE IL PENDOLO SALE ALLORA IL LAVORO È NEGATIVO E L'ENERGIA CINETICA DIMINUISCE, INFATTI IL PENDOLO RALLENTA; SE IL PENDOLO SCENDE ALLORA IL LAVORO È POSITIVO E QUINDI L'ENERGIA CINETICA AUMENTA E ACCELERA. QUINDI SE SALE L'ENERGIA DIMINUISCE DI UNA QUANTITÀ, E SE SCENDE ALLORA L'ENERGIA CINETICA AUMENTA DELLA STESSA QUANTITÀ DOPO ESSERE RITORNATO NELLA POSIZIONE INIZIALE. È COME SE SALENDO L'ENERGIA CINETICA SOTTRATTA FOSSE STATA IMMAGAZZINATA IN QUALCOSA E POI RILASCIATA QUANDO SCENDE. COME SI VEDE QUESTA DIFFERENZA DIPENDE SOLO DALLA POSIZIONE INIZIALE E FINALE DELLA PARTICELLA E LA SUA VELOCITÀ INIZIALE E FINALE. QUESTA SARÀ UNA CARATTERISTICA DELLE <u>FORZE CONSERVATIVE</u>. PRIMA DI DEFINIRE QUESTE FORZE BISOGNA INTRODURRE IL CONCETTO DI <u>CIRCUITAZIONE</u> DI UNA FORZA LUNGO UN CAMMINO CHIUSO E ORIENTATO C:



VOGLIAMO CALCOLARE IL LAVORO LUNGO QUESTO CAMMINO CHIUSO; DIVIDENDO COME AL SOLITO LO SPOSTAMENTO IN TANTI PICCOLI SPOSTAMENTI, ALLORA IL LAVORO TOTALE LUNGO IL CAMMINO SI PUÒ SCRIVERE COSÌ:

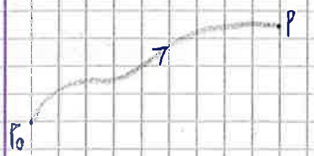
$W_C = \oint \vec{F}\cdot\vec{dl}$ OVVERO LA CIRCUITAZIONE LUNGO LA CURVA CHIUSA C; QUINDI IL LAVORO TOTALE SU UN PERCORSO CHIUSO E ORIENTATO. ADESSO FACCIAMO QUESTO RAGIONAMENTO:



UNA FORZA È CONSERVATIVA SE PER ESEMPIO, CONSIDERATI TRE DIVERSI CAMMINI, QUINDI TRE LAVORI DIVERSI, ALLORA IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA NON DIPENDE DAL CAMMINO SEGUITO, MA SOLO DAL PUNTO INIZIALE E DAL PUNTO FINALE. SE PRENDO DUE PERCORSI C_1 E C_2 CHE VANNO SEMPRE DA P_1 A P_2, ALLORA VALE CHE: $W_{C_1(P_1P_2)} = W_{C_2(P_1P_2)} = \underline{W_{P_1 \to P_2}}$ PER EVIDENZIARE IL FATTO CHE IL LAVORO NON DIPENDE DAL TIPO DI PERCORSO, MA SOLO DAL PUNTO INIZIALE E DAL PUNTO FINALE. IN PARTICOLARE PRESO UNO DEI PERCORSI VALE:

UN CONCETTO IMPORTANTE: SE ABBIAMO $E'_p = E_p + C$ CON C CHE NON DIPENDE DAL PUNTO, ALLORA SI PUÒ SCRIVERE:

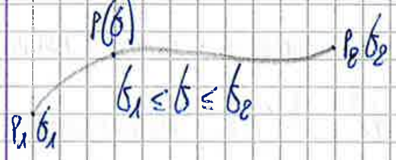
$W_{P_1 \to P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = \left(E'_p(P_1) - \cancel{C}\right) - \left(E'_p(P_2) - \cancel{C}\right) = \underline{E'_p(P_1) - E'_p(P_2)}$ QUINDI QUESTO VUOL DIRE CHE E_p E E'_p SONO EQUIVALENTI, QUINDI E'_p È TANTO BUONA COME E_p A DESCRIVERE L'ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA A QUESTA FORZA CONSERVATIVA. L'ENERGIA POTENZIALE IN UN PUNTO NON HA SIGNIFICATO FISICO PERCHÉ HA PIÙ SIGNIFICATO LA DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE TRA DUE PUNTI. COME POSSO COSTRUIRE L'ENERGIA POTENZIALE $E_p(P)$ IN UN PUNTO DATA UNA FORZA CONSERVATIVA?



INNANZITUTTO FISSO ARBITRARIAMENTE L'ENERGIA POTENZIALE NEL PUNTO P_0 DI RIFERIMENTO; POI SPOSTO LA PARTICELLA AL PUNTO P, MISURO IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA CON IL MENO. QUINDI FISSANDO $E_p(P_0)$ HO FISSATO LA COSTANTE ADDITIVA C. QUINDI SCRIVIAMO LA RELAZIONE:

$$E_p(P) = \underline{E_p(P) - E_p(P_0)} + E_p(P_0) = -\int_{P_0 \to P} \vec{F} \cdot d\vec{l} + E_p(P_0)$$

; ADESSO CONSIDERIAMO UNA FORZA CONSERVATIVA:



PRIMA DI SCRIVERE LA RELAZIONE VA RICORDATO CHE UN LAVORO COMPIUTO DA UNA QUALSIASI FORZA (ANCHE CONSERVATIVA) SI PUÒ SCRIVERE COME DIFFERENZA DI ENERGIA CINETICA, MENTRE SOLO PER LE FORZE CONSERVATIVE, IL LAVORO COMPIUTO DA ESSE SI PUÒ SCRIVERE COME DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE. QUINDI VALE QUESTA RELAZIONE:

$$\Rightarrow W_{P_1 \to P_2} = E_p(P_1) - E_p(P_2) = E_K(t_2) - E_K(t_1) \Rightarrow E_K(t_1) + E_p(P_1) = E_K(t_2) + E_p(P_2) =$$

$$= E_K(t_1) + E_p(P(t_1)) = E_K(t_2) + E_p(P(t_2)) \Rightarrow \boxed{E = E_K + E_p}$$

QUESTA GRANDEZZA CHE ABBIAMO INTRODOTTO SI DICE <u>ENERGIA MECCANICA</u> DELLA PARTICELLA. IL SUO VALORE NON DIPENDE DALL'ISTANTE CONSIDERATO PERCHÉ SOPRA SI VEDE CHE LA SOMMA DELL'ENERGIA CINETICA E POTENZIALE HA LO STESSO VALORE SIA CHE LI SOMMIAMO ALL'ISTANTE INIZIALE SIA CHE LI SOMMIAMO ALL'ISTANTE FINALE; DI CONSEGUENZA <u>L'ENERGIA MECCANICA È UNA COSTANTE, QUINDI SI CONSERVA DURANTE TUTTO IL MOTO.</u>

$$E = E_K(|\bar{v}|) + E_p(\vec{r}) = \frac{m|\bar{v}|^2}{2} + E_p(\vec{r}) \Rightarrow E(t) = \frac{m|\bar{v}(t)|^2}{2} + E_p(\vec{r}(t)) = \underline{\text{COSTANTE}}$$

; DA CUI SE: $E_K(t_2) - E_K(t_1) = E_p(P_1) - E_p(P_2) \Rightarrow \underline{\Delta E_K = -\Delta E_p}$; QUINDI SE LA RISULTANTE DELLE FORZE SU UNA PARTICELLA È UNA FORZA CONSERVATIVA, ALLORA IN OGNI ISTANTE LA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA È UGUALE E OPPOSTA ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA POTENZIALE. QUESTO VUOL DIRE CHE SE IL PENDOLO SALE IL LAVORO DELLA FORZA DI GRAVITÀ È NEGATIVO, QUINDI L'ENERGIA CINETICA DIMINUISCE DI UNA QUANTITÀ E L'ENERGIA POTENZIALE AUMENTA DELLA STESSA QUANTITÀ; SE INVECE IL PENDOLO SCENDE, LA GRAVITÀ FA LAVORO POSITIVO, INFATTI IL PENDOLO RALLENTA, QUINDI L'ENERGIA CINETICA STA AUMENTANDO DI UNA CERTA QUANTITÀ MENTRE L'ENERGIA POTENZIALE DIMINUISCE DELLA STESSA QUANTITÀ.

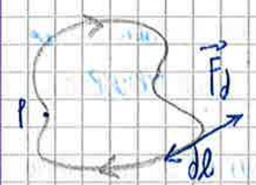
$\bar{v}(0) = v(0)_x \bar{u}_x + v(0)_z \bar{u}_z$ e $\bar{r}(0) = (0,0)$; due moti distinti:

$$\begin{cases} x(t) = v_x(0)t & \text{moto uniforme} \Leftarrow \\ z(t) = v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2 & \text{moto uniformemente accelerato} \Leftarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{E}} = \frac{mv^2}{2} + mgz(t) = \frac{m}{2}\left[v_x(0) + (v_z(0) - gt)\right]^2 + mg\left(v_z(0)t - \frac{1}{2}gt^2\right) = \left[\frac{m}{2}v_x(0)^2 + \frac{m}{2}v_z(0)^2 - m\cancel{v_z(0)}gt + \cancel{\frac{m}{2}g^2t^2}\right] + \left[\cancel{mgv_z(0)t} - \cancel{mg^2\frac{t^2}{2}}\right] = \frac{m}{2}\left(v_x(0)^2 + v_z(0)^2\right) = \underline{\frac{m}{2}|\bar{v}(0)|^2} = E_K(t=0) + E_p(t=0) = cost$$

; dal momento che l'energia meccanica è una costante e si può calcolare a qualunque istante; calcolata nell'istante iniziale $(t=0)$ il cannone si trova nell'origine, quindi energia potenziale è nulla, ma c'è solo energia cinetica.

L'attrito invece non è una forza conservativa e lo possiamo dimostrare:



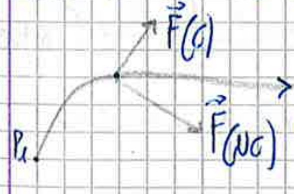
Suddividiamo il percorso in tanti piccoli spostamenti: $\vec{dl} = dl\,\vec{u}_T$; l'attrito dinamico è dato da: $\vec{F}_d = -\mu_d N \frac{\vec{v}}{|v|} = -\mu_d N \vec{u}_T = -\mu_d mg\,\vec{u}_T$; il lavoro infinitesimo invece:

$$dW = \vec{F}_d \cdot \vec{dl} = (-\mu_d mg\,\vec{u}_T)(dl\,\vec{u}_T) = -\mu_d mg\,dl < 0$$

; quindi il lavoro totale:

$$W_c = \oint \vec{F}_d \cdot \vec{dl} = \int(-\mu_d mg\,dl) = -\mu_d mg \int dl = -\mu_d mgL < 0 \neq 0$$

; da ciò deriva che la forza di attrito dinamico non è una forza conservativa; circuitazione oltre a non essere zero è anche negativa, quindi compie lavoro sempre negativo. E cosa succede invece se sulla particella agiscono sia forze conservative e non?



La forza totale è: $\vec{F} = \vec{F}(c) + \vec{F}(NC)$. Il lavoro totale invece lungo C:

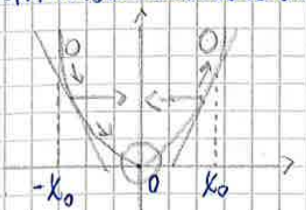
$$W_{C(P_1P_2)} = W^{(c)}_{C(P_1P_2)} + W^{(NC)}_{C(P_1P_2)} = E_p(P_1) - E_p(P_2) + W^{(NC)}_{C(P_1P_2)} = \Delta E_K = E_K(t_2) - E_K(t_1) \Rightarrow -\Delta E_p + W^{(NC)}_{C(P_1P_2)} = \Delta E_K$$

, quindi:

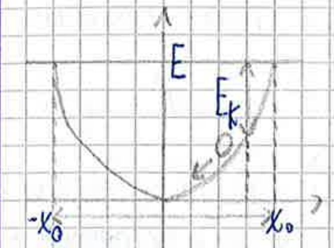
$$\Rightarrow E = E_K + E_p \Rightarrow \Delta E = \Delta E_K + \Delta E_p = W^{(NC)}_{C(P_1P_2)}$$

; innanzitutto la forza $\vec{F}$ si può scrivere (anche il lavoro totale compiuto dalla forza) si può scrivere come differenza di energia cinetica. In secondo luogo abbiamo imparato che la variazione di energia meccanica è data dal lavoro delle forze non conservative; in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non si conserva. Quindi se spingo un oggetto questo si muove e poi si ferma; il tavolo è orizzontale quindi l'energia potenziale è sempre la stessa (z = costante); l'energia cinetica invece varia perché l'oggetto è partito con una certa velocità e poi si è fermato. Quindi l'energia meccanica totale è diminuita e questa riduzione è proprio dovuta al lavoro compiuto dall'attrito dinamico che svolge sempre lavoro negativo. Proprio per questo la forza di attrito dinamico è detta <u>forza dissipativa</u> perché disperde e riduce l'energia.

IL GRAFICO DELL POTENZIALE ELASTICO È UNA PARABOLA PASSANTE PER L'ORIGINE E SUL QUALE CI SONO CONSIDERAZIONI DA FARE:

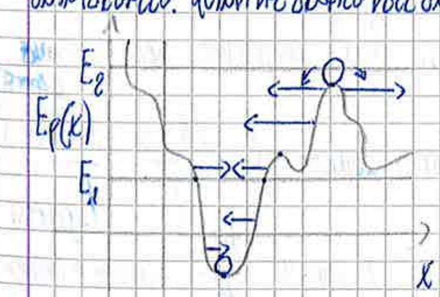


$E_P = \frac{1}{2} K_e x^2$ È UNA PARABOLA E DAL SUO GRAFICO SI POSSONO RICAVARE ASPETTI IMPORTANTI LEGATI AL MOTO; SUPPONIAMO DI AVERE UNA PALLINA CHE SCORRE LUNGO IL GRAFICO DELL'ENERGIA POTENZIALE: A SINISTRA LA PENDENZA È NEGATIVA, QUINDI LA FORZA È RIVOLTA NEL VERSO DI PERCORRENZA, QUINDI È POSITIVA, MA A DESTRA LA PENDENZA È POSITIVA, INFATTI LA FORZA È RIVOLTA VERSO SINISTRA, QUINDI È NEGATIVA. INOLTRE PIÙ CI ALLONTANIAMO DALL'ORIGINE E MAGGIORE È L'INTENSITÀ DELLA FORZA. L'ORIGINE È UN PUNTO DI MINIMO DOVE PER DEFINIZIONE LA DERIVATA PRIMA DELL'ENERGIA POTENZIALE VALE ZERO; SE LO LASCIO LA PALLINA IN QUESTO PUNTO SENZA MUOVERLA, RIMANE FERMO; SI PARLA DI PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE. ALTRA NOZIONE IMPORTANTE:



POSSIAMO FISSARE COME VOGLIAMO L'ENERGIA MECCANICA PERCHÉ TANTO È UNA COSTANTE E COME TALE È UNA RETTA. SUPPONIAMO DI FAR PARTIRE LA PALLINA DA X_0; IN X_0 SI PUÒ DEFINIRE L'ENERGIA MECCANICA AL TEMPO $t = 0$ E POICHÉ LA PALLINA PARTE DA FERMA ALLORA AL TEMPO $t = 0$ L'ENERGIA CINETICA PARTE CON ZERO. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$\Rightarrow E = E_K(t) + E_P(t) \Rightarrow E_P(t) = E - E_K(t) \leq E$ E LO POSSIAMO DIRE PERCHÉ L'ENERGIA CINETICA È SEMPRE UN VALORE POSITIVO O PER LO PIÙ UGUALE A ZERO, MA NON PUÒ ESSERE MAI NEGATIVA. DA QUESTA RELAZIONE POSSIAMO IMPARARE CHE L'ENERGIA POTENZIALE IN OGNI ISTANTE È SEMPRE MINORE O UGUALE DELL'ENERGIA MECCANICA. LA PALLINA SI MUOVE SOLO AL DI SOTTO DELL'ENERGIA POTENZIALE INIZIALE, POI RITORNA SU FINO ALLA QUOTA SIMMETRICA, NON PUÒ ANDARE OLTRE PERCHÉ SENNÒ L'ENERGIA CINETICA SAREBBE NEGATIVA, COSA IMPOSSIBILE. SI DICE CHE IL MOTO È LIMITATO IN UN INTERVALLO. QUINDI DAL GRAFICO DELL'ENERGIA POTENZIALE POSSO SAPERE MOLTE COSE DEL MOTO:



L'ENERGIA POTENZIALE ASSOCIATA AD UN PUNTO PUÒ AVERE FORMA QUALSIASI. DAL SUO GRAFICO PER FORZA POSSIAMO DEDURRE LA FORZA DALLA PENDENZA DELLA TANGENTE IN OGNI PUNTO, QUESTO PERCHÉ VALE LA RELAZIONE GIÀ VISTA PRIMA, OVVERO:

$F(x) = -\frac{dE}{dx}$ (LA DERIVATA PRIMA PER DEFINIZIONE È LA TANGENTE ALLA CURVA IN UN DETERMINATO PUNTO). IL MOTO DELLA MASSA SI PUÒ SCRIVERE COME LA COMPONENTE LUNGO X DEL MOTO DI UNA PALLINA IDEALE CHE VIENE FATTA ROTOLARE LUNGO IL GRAFICO DELL'ENERGIA POTENZIALE A PARTIRE DA UN CERTO PUNTO. I PUNTI IN CUI IL GRAFICO HA UN MASSIMO O UN MINIMO SONO I PUNTI IN CUI LA DERIVATA È ZERO, QUINDI VALE CHE:

$F(x) = -\frac{dE_P}{dx} = 0$, QUINDI METTENDO LA MASSA IN QUEI PUNTI, QUESTA RIMANE FERMA E SONO PUNTI DI EQUILIBRIO. IN PARTICOLARE DOVE C'È UN MINIMO, ABBIAMO UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE (DOVE TRA L'ALTRO LA DERIVATA SECONDA È POSITIVA) E SE FACCIAMO OSCILLARE LA PALLINA IN UN INTORNO MOLTO PICCOLO DI QUEL PUNTO, ALLORA LA FORZA TENDE SEMPRE A RIPORTARLA VERSO IL PUNTO STESSO. INVECE DOVE C'È UN MASSIMO (DOVE LA DERIVATA SECONDA È NEGATIVA) SE LO PERTURBO LA PALLINA, QUESTA NON RITORNA NELL'INTORNO

$$K_e = \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0 \text{ (MOLLA IDEALE)}$$

PROVIAMO A CONSIDERARE MOTI DI PICCOLE OSCILLAZIONI INTORNO AD UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE, DOVE C'È UN MINIMO. QUINDI L'INTORNO $|x(t) - x_0|$ È UN INTERVALLO MOLTO PICCOLO CON $\Delta x = x(t) - x_0$; QUINDI PRENDIAMO L'ENERGIA POTENZIALE E ESPANDIAMOLA IN SERIE DI TAYLOR PERCHÉ L'INTERVALLO È MOLTO PICCOLO E SI OTTIENE DUNQUE:

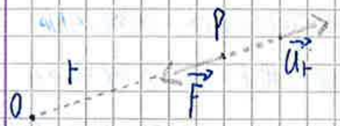
$$E_p(x) = E_p(x_0) + \overset{0}{\frac{dE_p}{dx}(x_0)}(x-x_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0)(x-x_0)^2 + o\left((x-x_0)^3\right).$$

INNANZITUTTO LA DERIVATA PRIMA DELL'ENERGIA POTENZIALE IN QUESTO CASO È ZERO PERCHÉ STIAMO CONSIDERANDO UN MINIMO; INOLTRE SE Δx È MOLTO PICCOLO, ALLORA TERMINI DELL'ORDINE $|\Delta x|^3$ SONO ANCORA PIÙ PICCOLI E SI POSSO TRASCURARE. INFINE CI SI PUÒ CALCOLARE LA DERIVATA SECONDA DEL POTENZIALE ELASTICO E POI ANDARLA A SOSTITUIRE NELLA FORMULA DELLO SVILUPPO E SI OTTIENE:

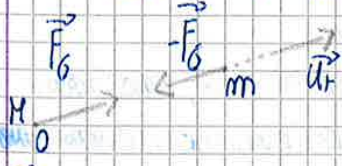
$$\frac{1}{2}\frac{d^2E_p}{dx}(x_0)(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}d^2\left(\frac{K_e x^2}{2}\right)(x_0)(x-x_0)^2 = \frac{1}{2}K_e(x_0)(\Delta x(t))^2 + \text{cost.}$$

QUELLA CHE ABBIAMO OTTENUTO È ESATTAMENTE L'ENERGIA POTENZIALE DI UN OSCILLATORE ARMONICO; QUINDI PER PICCOLE INFINITESIME OSCILLAZIONI INTORNO AD UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE IL MOTO DELLA PARTICELLA SI DESCRIVE COME UN MOTO ARMONICO.

- FORZE CENTRALI: QUESTE FORZE SONO UN ALTRO ESEMPIO DI FORZE CONSERVATIVE E LE ANDIAMO STUDIARE:



UNA FORZA CENTRALE È UNA FORZA SEMPRE DIRETTA VERSO IL CENTRO DI FORZA O E IL MODULO DI QUESTA FORZA DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA DA O. UNA FORZA IN FUNZIONE DELLA DISTANZA: $\vec{F}(r) = F(r)\vec{u}_r$ E SE $F(r)$ È NEGATIVA ALLORA FORZA È ATTRATTIVA, SE LA FORZA È POSITIVA, ALLORA È REPULSIVA. PER ESEMPIO CONSIDERIAMO DUE MASSE PUNTIFORMI CHE SI ATTRAGGONO PER LA GRAVITÀ:



L'INTENSITÀ DELLA FORZA DIPENDE SOLO DALLA DISTANZA TRA I DUE; IN QUESTO CASO INOLTRE IL CENTRO DI FORZA O COINCIDE CON M, MA M NON È UN SISTEMA INERZIALE PERCHÉ RISENTE DI UN'ACCELERAZIONE. QUINDI VALE LA SOLITA LEGGE DI NEWTON PER LA GRAVITÀ:

$$\vec{F}_G(r) = F_G(r)\vec{u}_r \Rightarrow F_G(r) = -G\frac{M \cdot m}{r^2} = -\frac{\gamma}{r^2}$$ CON $\gamma = G \cdot M \cdot m$; PERÒ SE MASSA $M \gg m$, QUINDI MOLTO PIÙ GRANDE DELLA MASSA m, ALLORA L'ACCELERAZIONE CHE RISENTE IL CORPO M È TRASCURABILE RISPETTO A QUELLA CHE RISENTE m E LA STESSA COSA VALE ANCHE NEL CASO IN CUI ABBIAMO DUE CARICHE ELETTRICHE q_1 E q_2; QUINDI ANCHE LA FORZA DI COULOMB È UNA FORZA CENTRALE SOLO CHE NELLA LEGGE DI COULOMB VALE $\gamma = -KQq$, QUINDI SE $\gamma > 0$, ALLORA LE DUE CARICHE HANNO SEGNO OPPOSTO, QUINDI LA FORZA È ATTRATTIVA, MENTRE SE $\gamma < 0$, ALLORA LE DUE CARICHE HANNO STESSO SEGNO E QUINDI LA FORZA È REPULSIVA. MA PER ENTRAMBE LE FORZE VALE LO STESSO RAGIONAMENTO, OVVERO SE MASSA DI UNO DEI DUE CORPI O DI UNA DELLE DUE CARICHE È MOLTO PIÙ GRANDE RISPETTO ALL'ALTRA, ALLORA NOI POSSIAMO METTERCI E FISSARE UN SISTEMA DI RIFERIMENTO IN QUESTA MASSA O CARICA CHE RAPPRESENTA UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE PERCHÉ L'ACCELERAZIONE CHE RISENTONO È TRASCURABILE. TRAMITE QUESTO SISTEMA IO POSSO DUNQUE STUDIARE IL MOTO DELL'ALTRO CORPO. ADESSO DIMOSTRIAMO CHE LA FORZA CENTRALE È UNA FORZA CONSERVATIVA:

SAPENDO CHE $v(t)=\frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = E - E_p(x) \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E-E_p(x)\right)$; QUINDI OTTENIAMO CHE:

$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-E_p(x)\right)} \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-E_p(x)\right)}} = \pm dt$; ADESSO SI SVOLGE UN INTEGRALE TRA LA POSIZIONE INIZIALE $x(0)$ E QUELLA FINALE $x(t)$:

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-E_p(x)\right)}} = \pm\int_0^t dt = \pm t$$

TRAMITE QUESTA RELAZIONE CI POSSIAMO RICAVARE IL MOTO $x(t)$; IL $(\pm)$ DIPENDE DALLA VELOCITÀ CHE PUÒ ESSERE POSITIVA O NEGATIVA; NELLA FORMULA COMPAIONO LE CONDIZIONI INIZIALI, OVVERO E CALCOLATA ALLA VELOCITÀ INIZIALE $v(0)$ E L'ESTREMO $x(0)$ RAPPRESENTA LA POSIZIONE ALL'ISTANTE $t=0$;

SAPENDO CHE $E_p(x) = \frac{K_e x^2}{2} \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{K_e}{2}x^2\right)}} = \pm t \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m}}\cdot\sqrt{\left(1-\frac{K_e}{2E}x^2\right)}} = \pm t$;

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2E}{m}}\int_{x_0}^{x(t)}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{K_e}{2E}x^2}}$; QUESTO INTEGRALE LO SI RISOLVE FACENDO IL CAMBIO DI VARIABILE, IN PARTICOLARE SI PRENDE:

$y(x)=\sqrt{\frac{K_e}{2E}}\cdot x \Rightarrow dy = \sqrt{\frac{K_e}{2E}}\,dx \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{2E}{K_e}}\,dy$; QUINDI ABBIAMO:

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{m}{2E}}\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{\sqrt{\frac{2E}{K_e}}\,dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm t \Rightarrow \sqrt{\frac{m}{K_e}}\int_{y(x_0)}^{y(x)}\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm t \Rightarrow \int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pm \overbrace{\sqrt{\frac{K_e}{m}}}^{\omega_0}\, t = \pm\omega_0 t;$$

DA NOTARE CHE: $E_p(x)\le E \Rightarrow \frac{K_e x^2}{2}\le E \Rightarrow \frac{K_e x^2}{2E}\le 1 \Rightarrow y(x)^2 \le 1$; QUINDI PER FINIRE DI CALCOLARE IL MOTO CONVIENE DEFINIRE UNA NUOVA VARIABILE IL CUI VALORE DEVE ESSERE MINORE O UGUALE A 1, QUINDI $y=\cos\theta \Rightarrow$

$$\Rightarrow dy = -\sin\theta\, d\theta \Rightarrow \theta = \arccos(y) \Rightarrow \int_{\theta_0}^{\theta(y)} \frac{(-\sin\theta\, d\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} = \int_{\theta_0}^{\theta(y)}\frac{-\cancel{\sin\theta}\, d\theta}{\cancel{\sin\theta}} = -\int_{\theta_0}^{\theta(y)} \theta(y) =$$

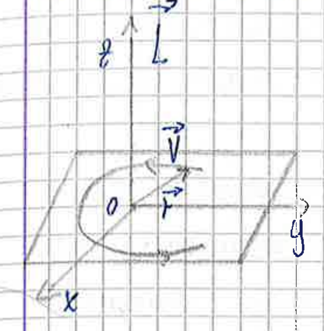
$$= -\left[\theta(y) - \theta(y_0)\right] = -\left[\arccos(y(t)) - \arccos(y(t=0))\right] = \pm\omega_0 t;$$ QUELLO CHE OTTENIAMO È QUESTO:

$\arccos(y(t)) = \pm\left(\omega_0 t \pm \arccos(y(t=0))\right) \Rightarrow \boxed{y(t)=\cos(\omega_0 t+\phi)}$ CON $\phi = \pm\arccos(y(t=0))$.

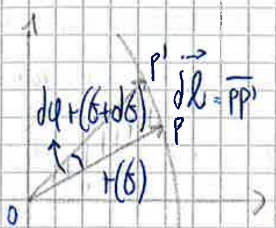
$y(t)=\sqrt{\frac{K_e}{2E}}\,x(t) \Rightarrow x(t)=\sqrt{\frac{2E}{K_e}}\,y(t) = \sqrt{\frac{2E}{K_e}}\cos(\omega_0 t+\phi)$ E SE PONIAMO: $\sqrt{\frac{2E}{K_e}} = x_0$ E SE

$\phi = \pm\arccos(y(t=0)) = \pm\arccos(1) = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$.

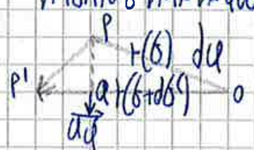
A $\vec r$ e $\vec v$, quindi $\vec r(t)$ e $\vec v(t)$ sono sempre perpendicolari ad un vettore costante e appartengono sempre allo stesso piano perpendicolare a $\vec L$, quindi il moto si svolge su un piano. Graficamente succede questo:



L'asse di riferimento è centrato nel centro di forza con z parallelo e concorde nel centro della forza con $\vec L$. La componente angolare del moto quindi è nel verso di φ crescenti. Il moto è definito da $r(t)$ e $\varphi(t)$ con $r(t)$ che descrive la componente di moto radiale e $\varphi(t)$ la componente di moto angolare. Il modulo di $\vec L$, quello $mr^2\omega$ è anch'esso costante, quindi $r(t)^2\omega(t)$ = costante; questo vuol dire che più vicino è il pianeta al sole maggiore è la velocità angolare. Geometricamente cosa vuol dire?



Se consideriamo due posizioni molto vicine sull'arco di traiettoria allora vale che: $d\varphi = \varphi(t+dt) - \varphi(t)$; l'area individuata dal vettore radiale in quell'istante di tempo è data da questo triangolo che vogliamo studiare?



$dA = A_{OPP'} = A_{OPQ} + A_{PQP'}$; OPQ per un $d\varphi$ infinitesimo è un triangolo isoscele, quindi $|OP| \cong |OQ| = r(t)$, inoltre $|PQ| \cong r(t)\,d\varphi$, quindi $A_{OPQ} = \frac{|PQ||OP|}{2}$ infatti OP si confonde con uno dei due lati uguali; $A_{OPQ} = \frac{r(t)^2}{2}d\varphi$, quindi

$A_{PQP'} = \frac{|PQ||QP'|}{2} = \frac{r(t)\,d\varphi\,dr}{2}$ con $d\varphi\,dr$ (comp. radiale di $d\vec l$) è un prodotto tra due quantità infinitesime quindi è trascurabile, così come è perfettamente trascurabile area di PQP' poiché $A_{PQP'} \ll A_{OPQ}$, quindi possiamo scrivere questa area così:

$$\Rightarrow dA = A_{OPQ} = \frac{r^2}{2}d\varphi \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right) = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m} = \text{costante}$$

; quindi la rapidità con cui varia nel tempo questa area è sempre costante e in particolare si parla di velocità areolare; in uno stesso intervallo di tempo il raggio vettore descrive sempre la stessa area. Di conseguenza se il pianeta è più lontano dal sole allora esso descrive un angolo più piccolo, quando invece è più vicino allora descrive un angolo maggiore. La velocità areolare fu generalizzata da Keplero con la 2ª legge di Keplero: il raggio vettore dei pianeti descrivono aree uguali in tempi uguali. Inoltre:

$m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec F = -\frac{\gamma}{r^2}\vec u_r$ se $M \gg m$; il moto è descritto da $r(t)$ e $\varphi(t)$ quindi scriveremo questo:

$L = mr^2\omega = \text{costante} \Rightarrow \omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{L}{mr(t)^2}$; quindi noto $r(t)$ io posso ricavare $\omega(t)$, come si fa?

Si parte dall'energia meccanica:

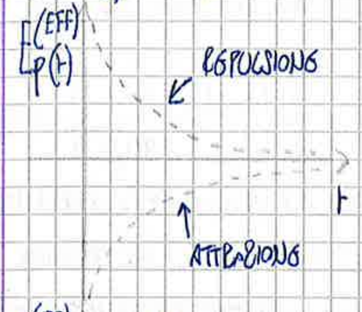
$E = \frac{m|v|^2}{2} - \frac{\gamma}{r} = \text{cost}$; $\vec v = \frac{dr}{dt}\vec u_r + r\omega\vec u_\varphi \Rightarrow |v|^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\omega^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{m^2r^2}$, quindi:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\underbrace{\frac{L^2}{2mr^2}}_{\text{componente angolare del moto di } E_k} - \frac{\gamma}{r}\right)$$

In questo modo abbiamo scritto tutto in componenti radiali; la formula ha la stessa forma di un moto unidimensionale $r(t)$ soggetto ad una forza diretta nella direzione

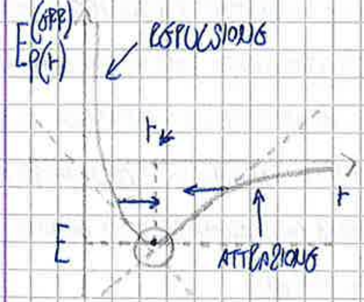
ENERGIA POTENZIALE. QUINDI SE LIMITE $\lim_{r\to\infty} E_p^{(EFF)}(r)=0 \Rightarrow C=0 \Rightarrow E_p^{(EFF)} = -\frac{\gamma}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}$ E QUINDI SEMPRE IN RAPPORTO AL SISTEMA S' $\Rightarrow E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_p^{(EFF)}(r) =$ COSTANTE. QUINDI SI PUÒ RIASSUMERE DICENDO CHE PER UN OSSERVATORE IN S' IL PIANETA SVOLGE UN MOTO LUNGO L'ASSE X' E RISENTE DI DUE SOLE FORZE, OVVERO LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE CHE È PURAMENTE ATTRATTIVA E LA FORZA CENTRIFUGA CHE SPINGE IL PIANETA VERSO L'ESTERNO. TUTTO QUESTO LUNGO X'.

- LA FORMULA $F = -\frac{\gamma}{r^2}$ ACCORPA IN UN'UNICA SCRITTURA SIA L'ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE DI NEWTON, SIA LA FORZA ELETTROSTATICA DI COULOMB, QUINDI SI POSSONO STUDIARE INSIEME. SI CONSIDERANO DUE CASI POSSIBILI: 1) $\gamma>0$; 2) $\gamma<0$.



IL PRIMO CASO DA CONSIDERARE È QUELLO DI $\gamma>0$, OVVERO I CASI IN CUI VALE SIA LA FORZA GRAVITAZIONALE ATTRATTIVA O L'INTERAZIONE ELETTROSTATICA TRA DUE CARICHE DI SEGNO OPPOSTO. NELLA DEFINIZIONE DI ENERGIA COME SAPPIAMO ABBIAMO INTRODOTTO IL TERMINE DI ENERGIA POTENZIALE EFFICACE CON DUE TERMINI:

$E_p^{(EFF)}(r) = -\frac{\gamma}{r}+\frac{l^2}{2mr^2}$ CON IL PRIMO TERMINE CHE INDICA L'ATTRAZIONE, MENTRE IL SECONDO CHE INDICA UNA FORZA REPULSIVA; GRAFICAMENTE ABBIAMO LE DUE CURVE VISTE PRIMA; LA SOMMA DI QUESTE DUE CURVE DANNO LA CURVA SOTTO.



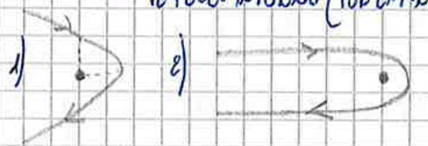
DAL GRAFICO VEDIAMO CHE ESISTE UNA DISTANZA r_* AL DI SOTTO DELLA QUALE LA PENDENZA È POSITIVA, QUINDI LA FORZA È NEGATIVA, MA IN QUESTO CASO SI HANNO DUE CASI: 1) PER $r>r_*$ LA PENDENZA È POSITIVA, QUINDI LA FORZA È NEGATIVA E VERSO IL CENTRO; 2) PER $r<r_*$ LA PENDENZA È NEGATIVA, QUINDI PREVALE LA FORZA CENTRIFUGA, OVVERO LA REPULSIONE. INVECE IN $r=r_*$ LA PENDENZA È ZERO PERCHÉ LA TANGENTE È ORIZZONTALE, QUINDI SIAMO IN UN MINIMO, OVVERO IN UN PUNTO DI EQUILIBRIO STABILE, DOVE LA FORZA DI GRAVITÀ E QUELLA CENTRIFUGA SI COMPENSANO.

$F^{(EFF)}(r) = -\frac{dE_p(r)}{dr} = -\frac{\gamma}{r^2}+\frac{l^2}{mr^3} = 0 \Rightarrow r = r_* = \frac{l^2}{m\gamma}$, OVVERO IL PUNTO DI EQUILIBRIO DEL MOTO. QUINDI SE METTESSIMO UNA PALLINA LÌ DA FERMA, ALLORA RESTA FERMA. SIAMO NEL CASO SEMPRE IN UN MOTO DI TIPO RADIALE; METTERLA LÌ DA FERMA VUOL DIRE CHE LA DISTANZA DALLA MASSA DAL CENTRO, O DISTANZA O RAGGIO, NEL TEMPO È SEMPRE LA STESSA. QUINDI: $r(t=0)=r_* \Rightarrow r(t)=r_*$, QUINDI IN UN SISTEMA BIDIMENSIONALE SIAMO IN UN MOTO CIRCOLARE. QUINDI METTERE LA PALLINA LÌ DA FERMA VUOL DIRE DARE UN VALORE DI ENERGIA E UGUALE AL VALORE MINIMO DELL'ENERGIA POTENZIALE:

$E = E_p^{(EFF)}(\text{minimo}) = -\frac{m\gamma^2}{2l^2} < 0$ OVVERO IL VALORE MINIMO DELL'ENERGIA CON $\gamma>0$; BASTA SOSTITUIRE r_* NELL'ESPRESSIONE DELL'ENERGIA. NON C'È QUINDI UN MOTO UNIDIMENSIONALE PERCHÉ IL MOTO SVOLGERSI SOLO IN QUEI PUNTI IN CUI L'ENERGIA POTENZIALE STA SOTTO LA RETTA DELL'ENERGIA MECCANICA. PERÒ ABBIAMO ANCHE ALTRI VALORI DI ENERGIA MECCANICA PIÙ GRANDI, MA SEMPRE NEGATIVI; QUINDI ADESSO CONSIDERIAMO LO STESSO GRAFICO, MA CON UN VALORE DIVERSO DELL'ENERGIA MECCANICA:

TRA L'ENERGIA MECCANICA E L'ASSE r. QUINDI RAGGIUNGE L'INFINITO CON UNA VELOCITÀ DIVERSA DA ZERO. COMUNQUE PER ENTRAMBI I CASI C'È UN $r(\text{MIN.})$ COME NEL CASO DI UNA COMETA CHE PARTE DALL'INFINITO, SI AVVICINA AL SOLE E RAGGIUNGE DA ESSO UNA DISTANZA MINIMA E POI SE NE VA. QUANTO VALE QUESTA DISTANZA MINIMA $r(\text{MIN.})$?

$E^{(EFF)}(r\,\text{MIN}) = E$ (I PUNTI IN CUI I GRAFICI COINCIDONO) $\Rightarrow E>0$; $r(\text{MIN}) = \dfrac{\gamma}{2E}\left(\sqrt{1+\dfrac{2L^2E}{m\gamma^2}}-1\right)$; MENTRE PER IL SECONDO CASO $E=0$; $r(\text{MIN}) = \dfrac{L^2}{2m\gamma}$; IN PARTICOLARE PER $E>0$ LA TRAIETTORIA È UN RAMO D'IPERBOLE IN CUI IL SOLE OCCUPA IL FUOCO INTERNO (PER LA FORZA ATTRATTIVA); SE $E=0$ LA TRAIETTORIA INVECE È UNA PARABOLA:



LA COMETA SI AVVICINA AL SOLE AD UNA DISTANZA MINIMA E POI SE NE VA VIA CON DUE TRAIETTORIE DIVERSE.

- ADESSO VOGLIAMO RICAVARE L'EQUAZIONE DELLA TRAIETTORIA PER I VARI CASI; LA TRAIETTORIA È SEMPLICEMENTE TROVARE UNA RELAZIONE TRA LE COORDINATE CHE DESCRIVONO IL MOTO DELLA PARTICELLA, OVVERO r, φ; QUINDI VUOL DIRE TROVARE $r(\varphi)$ E IN TEORIA BASTA SOLO RISOLVERE IL MOTO PER TROVARE $r(t)$, OVVERO LA COMPONENTE RADIALE E POI TROVARE LA COMPONENTE ANGOLARE DEL MOTO $\varphi(t)$ E POI TROVARE INFINE LA RELAZIONE $r(\varphi)$ PER TROVARE LA TRAIETTORIA:

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + E_{p(r)}^{(EFF)} \Rightarrow \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right)}$$

(IL "+" SE LA DISTANZA TERRA SOLE DIMINUISCE, IL "−" SE DIMINUISCE); INVECE DI RISOLVERE L'INTEGRALE CORRISPONDENTE, OCCUPIAMOCI DELLA TRAIETTORIA: SAPPIAMO CHE DOBBIAMO TOGLIERE IL TEMPO, QUINDI $\varphi(t) \Rightarrow t(\varphi)$ E POI SOSTITUIRLO IN $r(t) \Rightarrow r(t(\varphi))$. DUNQUE:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{dt}\omega = \underline{\frac{dr}{d\varphi}}\cdot\omega = \frac{L}{mr^2}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \underline{\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2}} \Rightarrow \frac{dr}{d\varphi} = \frac{1}{\omega}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{mr^2}{L}\left(\frac{dr}{dt}\right);$$

IN QUESTO MODO HO TROVATO QUALCOSA CHE METTE IN RELAZIONE L'ANDAMENTO DI r IN FUNZIONE DELL'ANGOLO φ; QUINDI VALE:

$$\int_{r(\text{MIN})}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_p(\text{EFF})\right)}} = \int \pm dt = \pm t$$

; QUESTO È L'INTEGRALE A CUI DOVREMO ARRIVARCI PER DOPO, ADESSO ANDIAMO AVANTI CON IL PASSAGGIO PRECEDENTE:

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm\frac{mr^2}{L}\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right)} = \pm\frac{r^2}{L}\sqrt{2m\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right)} \Rightarrow \int\frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right)}}\cdot\frac{L}{r^2} = \int \pm d\varphi;$$

$$\int d\varphi = \varphi = \pm\int_{r\,\text{MIN}}^{r(\varphi)} \frac{L}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2m\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right)}} \Rightarrow$$

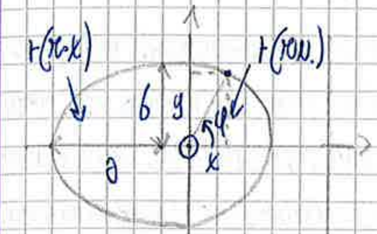
ADESSO FACCIAMO UN PO' DI ALGEBRA SCRIVENDO LA QUANTITÀ SOTTO RADICE COME UNA DIFFERENZA DI QUADRATI: $2m\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right) = 2mE + \underline{\dfrac{2m\gamma}{r}} - \underline{\dfrac{L^2}{r^2}}$;

ADESSO COMPLETIAMO QUESTO QUADRATO:

$$\Rightarrow 2m\left(E - E_{p(r)}^{(EFF)}\right) = 2mE + \frac{m^2\gamma^2}{L^2} - \frac{m^2\gamma^2}{L^2} + \frac{2m\gamma}{r} - \frac{L^2}{r^2} = \underbrace{2mE + \frac{m^2\gamma^2}{L^2}}_{C^2} - \underbrace{\left(\frac{m\gamma}{L} - \frac{L}{r}\right)^2}_{B(r)^2} = C^2 - B(r)^2;$$

QUINDI $r(min) = r(\varphi = 0) = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon}$; $r(max) = r(\varphi = \pi) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon}$. UNA COSA IMPORTANTE DA TENER PRESENTE È CHE LA GRANDEZZA ϵ È SEMPRE UNA QUANTITÀ POSITIVA, MA BISOGNA LO STESSO DISTINGUERE DIVERSI POSSIBILI CASI:

1) $\underline{\epsilon < 1}$ È VERO NEL CASO IN CUI $E < 0$, OVVERO QUANDO ABBIAMO UN'ORBITA LIMITATA, IL PIANETA NON RIESCE A SFUGGIRE ALLA FORZA DI ATTRAZIONE E DI CONSEGUENZA PER OGNI ANGOLO ABBIAMO SEMPRE UN CORRISPONDENTE PUNTO SULL'ORBITA CHIUSA, UN'ORBITA CHE TRA L'ALTRO CORRISPONDE AD UNA ELLISSE. VEDIAMO QUALCHE CONSIDERAZIONE GRAFICA:



UNA ELLISSE È CARATTERIZZATA DA UN SEMIASSE MINORE b E UNO MAGGIORE a; PRIMA OSSERVAZIONE DA FARE È PROVARE A RISCRIVERE LE DUE DISTANZE:

$$r(min) = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon} = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon^2}(1-\epsilon) = \left(\frac{L^2}{m\gamma}\right)\left(-\frac{m\gamma^2}{2EL^2}\right)\left(1-\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}\right) =$$

$$= -\frac{\gamma}{2E}\cdot\left(1-\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}\right)$$ STESSO IDENTICO VALORE CHE AVEVAMO RICAVATO DALL'ENERGIA POTENZIALE E STESSO CON $r(max)$:

$$r(max) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon} = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon^2}(1+\epsilon) = \left(\frac{L^2}{m\gamma}\right)\left(-\frac{m\gamma^2}{2EL^2}\right)\left(1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}\right) = -\frac{\gamma}{2E}\left(1+\sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}\right)$$; ADESSO

RICAVIAMOCI a E b: $\underline{\underline{a}} = \frac{r(min)+r(max)}{2} = \underline{\frac{\epsilon d}{1-\epsilon^2}}$; b INVECE COME SI VEDE IN FIGURA È IL MASSIMO VALORE ASSUNTO DALLA ORDINATA; PER RICAVARE QUESTO VALORE BISOGNA MASSIMIZZARE LA FUNZIONE, OVVERO BISOGNA FARNE LA DERIVATA PRIMA E IL MASSIMO È IL VALORE CHE ANNULLA LA FUNZIONE:

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{\epsilon d}{(1+\epsilon\cos\varphi)^2}\cdot\underline{(\epsilon+\cos\varphi)}$$ IL PRIMO FATTORE È SEMPRE DIVERSO DA ZERO PERCHÈ $\epsilon < 1$ E d È UNA DISTANZA, IL DENOMINATORE È UN QUADRATO, QUINDI LA DERIVATA È ZERO SE $\epsilon + \cos\varphi$ È ZERO, QUINDI:

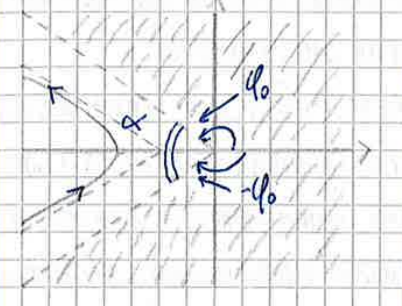
$\frac{dy}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \Rightarrow \cos\varphi_0 = -\epsilon$; RICORDANDOSI CHE LA COORDINATA $y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi \Rightarrow y(\varphi_0) = \frac{\epsilon d}{(1-\epsilon^2)}\sqrt{1-\epsilon^2} =$

$= \frac{\epsilon d}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$ (N.B: $\sin^2\varphi_0 = 1-\cos^2\varphi_0 = 1-\epsilon^2$) $= b$; QUINDI: $\underline{\underline{a}} = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon^2}$ $\underline{\underline{b}} = \frac{\epsilon d}{\sqrt{1-\epsilon^2}}$; COME SI POSSONO SCRIVERE QUESTE DUE LUNGHEZZE a E b IN TERMINI DEI PARAMETRI DEL MOTO, OVVERO ENERGIA MECCANICA E MOMENTO ANGOLARE? BASTA SOSTITUIRE LA ϵ E SI OTTIENE: $\underline{\underline{a}} = -\frac{\gamma}{2E}$ $\underline{\underline{b}} = \frac{L}{\sqrt{-2mE}}$; E A COSA CI SERVONO a E b? PER TROVARE L'AREA DELL'ELLISSE, OVVERO $\underline{A = \pi a \cdot b}$ E PUÒ TORNARE MOLTO UTILE; UN CASO PARTICOLARE È IL CERCHIO DOVE $a = b = R$ E CON $\underline{\epsilon = 0}$ E QUINDI L'AREA SI SEMPLIFICA MOLTO, OVVERO $\underline{A = \pi R^2}$; SE $\epsilon = 0 \Rightarrow a = b = r_* = \frac{L^2}{m\gamma}$ INFATTI IL PUNTO STA PERCORRENDO UN MOTO CIRCOLARE IN CUI LA DISTANZA DAL CENTRO È SEMPRE LA STESSA. L'AREA DELL'ELLISSE CI SERVE PER RICAVARCI IL PERIODO DI RIVOLUZIONE DELLA TERRA INTORNO AL SOLE; BASTA PRENDERE a E b E SOSTITUIRLI NELLA FORMULA DELL'AREA:

$$A = \frac{\pi\gamma\cdot L}{(-8mE^3)^{1/2}} \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \frac{r^2\omega}{2} = cost \Rightarrow dA = \frac{L}{2m}dt$$; dA È LO SPICCHIO INFINITESIMO DESCRITTO

- ADESSO STUDIAMO IL CASO $\gamma < 0$, OVVERO IL SISTEMA CON CARICHE DI SEGNO OPPOSTO CHE SI RESPINGONO, QUINDI ABBIAMO UNA FORZA REPULSIVA. CI SONO CASI IN CUI γ NON DIPENDE DAL SEGNO E CASI IN DOVE IL SEGNO È IMPORTANTE:

$\epsilon = \sqrt{\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}$ QUA γ^2 NON DIPENDE DAL SEGNO, MA $\epsilon d = \frac{L^2}{m\gamma}$ DA $\gamma \to -\gamma$ $d \to -d$, MA d DEVE ESSERE SEMPRE POSITIVO, QUINDI SI DEFINISCE UN $d' \Rightarrow \epsilon d' = \frac{L^2}{m|\gamma|}$, QUINDI ABBIAMO $r(\varphi) = +\frac{\epsilon d}{1+\epsilon\cos\varphi} = \ominus\frac{\epsilon d'}{1+\epsilon\cos\varphi} \geq 0$; IN QUESTO CASO CON IL MENO DAVANTI VALE CHE $1+\epsilon\cos\varphi < 0 \Rightarrow \cos\varphi < -\frac{1}{\epsilon}$, OVVERO $\varphi > \varphi_0$ OPPURE $\varphi < \varphi_0$; DI NUOVO SOLO PER CERTI ANGOLI LA CURVA ESISTE E QUINDI GLI ANGOLI φ STANNO DI NUOVO IN UN INTERVALLO:



IL GRAFICO È SEMPRE UN RAMO DI IPERBOLE CON CENTRO DI FORZA COME FUOCO ESTERNO, MA QUANTO VALE L'ANGOLO TRA I DUE ASINTOTI? SE α È LA SEMIAPERTURA DELL'IPERBOLE E VALE $\alpha = \pi - \varphi_0 \Rightarrow 2\alpha$ È L'APERTURA DELL'IPERBOLE, QUINDI MAGGIORE È α PIÙ APERTA È L'IPERBOLE, MA STAVOLTA LA DISTANZA MINIMA CORRISPONDE AL VALORE IN CUI $\varphi = \pi$, OVVERO $r(min) = r(\varphi = \pi) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon}$; QUESTO È IL CASO CLASSICO DI DUE CARICHE CON STESSO SEGNO CHE SI AVVICINANO TRA DI LORO:

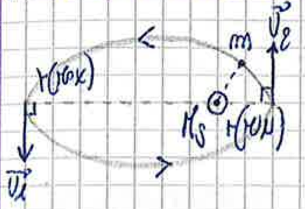
$\beta = \pi - 2\alpha$ ABBIAMO UNA CARICA $q > 0$ CHE SI MUOVE SOTTO L'AZIONE DI UN'ALTRA CARICA $Q > 0$ CON $m_Q \gg m_q$; LA TRAIETTORIA È UN RAMO D'IPERBOLE CON Q COME CENTRO DI FORZA E FUOCO ESTERNO. SE q SI MUOVESSE DA PIÙ VICINO, ALLORA VERREBBE DEVIATA DI PIÙ E IL RAMO È PIÙ CHIUSO; PIÙ VICINO ANCORA E VIENE DEVIATO DI UN ANGOLO MAGGIORE. QUINDI DEFINIAMO Δ (DELTA) LA DISTANZA DELLA CARICA PIÙ GRANDE DALLA LINEA D'INCIDENZA, OVVERO LA DIREZIONE INIZIALE DEL MOTO. PIÙ PICCOLO È DELTA E PIÙ LA CARICA q VIENE DEVIATA, QUINDI PIÙ CHIUSA È L'IPERBOLE. SI DICE CHE q VIENE DEVIATA O <u>DIFFUSA</u> RISPETTO LA SUA DIREZIONE INIZIALE DI UN CERTO ANGOLO. Q SI CHIAMA <u>CENTRO DI DIFFUSIONE</u>; β È L'ANGOLO DI DEVIAZIONE E Δ SI DICE <u>PARAMETRO D'URTO</u>. SUPPONIAMO CHE ALL'ISTANTE INIZIALE LE DUE CARICHE NON DI SENTANO DELLA REPULSIONE E QUINDI $E_P = 0$ E ABBIAMO SOLO ENERGIA CINETICA:

$\Rightarrow E = \frac{mv^2}{2}$ ALL'ISTANTE INIZIALE. COSA DIPENDE DA Δ? DIPENDE DAL MOMENTO ANGOLARE, MA IN CHE MODO?

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \to L = m|v|r\sin\theta = m|v|\underbrace{r\sin(\pi-\theta)}_{=\Delta} = m|\vec{v}|\Delta$, QUINDI Δ È IL BRACCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO RISPETTO AL CENTRO DI DIFFUSIONE. DI CONSEGUENZA PIÙ PICCOLO È Δ, PIÙ PICCOLO È L E COME AVVIENE VISTO SE $b = 0$, ALLORA IL MOMENTO ANGOLARE È UNA COSTANTE DEL MOTO.

SE $\Delta\uparrow \Rightarrow L = m|\vec{v}|\Delta\uparrow \Rightarrow \epsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}}\uparrow$; INOLTRE $\cos(\alpha) = \cos(\pi-\varphi_0) = -\cos(\varphi_0) = \frac{1}{\epsilon}\downarrow$ INFATTI SE α AUMENTA NEL TEMPO, ALLORA IL COSENO DIMINUISCE, OVVERO L'IPERBOLE SI APRE SEMPRE DI PIÙ E L'ANGOLO DI DEFLESSIONE β DIMINUISCE; LA PARTICELLA VIENE DEFLESSA DI MENO E QUINDI PER Δ MOLTO GRANDE q NON RISENTE DELL'INTERAZIONE. QUINDI ESISTE UN $\Delta(min)$ T.C. SE $\Delta < \Delta(min)$ ABBIAMO UNA MAGGIORE DEFLESSIONE PERCHÉ MAGGIORE È L'INTERAZIONE; SE $\Delta > \Delta(min)$ ALLORA $\beta \simeq 0 \Rightarrow 2\alpha \approx \pi$, QUINDI L'IPERBOLE È APERTA E NON C'È INTERAZIONE. INOLTRE QUESTO VALORE $\Delta(min)$ DIPENDE

APPLICAZIONE PRATICHE DELLE LEGGI DI KEPLERO SU PROBLEMI SUL MOTO DEI PIANETI:

A) 

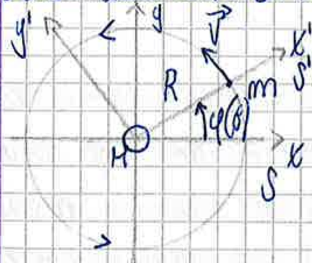
ABBIAMO UNA COMETA CHE PERCORRE UN'ORBITA ELLITTICA INTORNO AL SOLE, SAPENDO CHE L'ECCENTRICITÀ $\epsilon = \sqrt{1+\frac{2EL^2}{m\gamma^2}} = 0,88$ E CON $\gamma = GM_S m$ (COMETA) È PIÙ FACILMENTE POICHÉ L'ORBITA È ELLITTICA VALE CHE $E<0$; DETERMINARE $r(min)$ O PERIELIO E $r(max)$ O AFELIO. INOLTRE DETERMINARE LA VELOCITÀ V_2 AL PERIELIO. INOLTRE SAPPIAMO CHE LA VELOCITÀ ALL'AFELIO È $\vec{V_1} = 3,72$ km/s. DUNQUE: METTENDOCI SEMPRE NEL SISTEMA S' DEL SOLE, ALLORA VALE CHE NEI PUNTI D'AFELIO E PERIELIO LA VELOCITÀ HA SOLO COMPONENTE ANGOLARE PERCHÉ IN QUESTI SOLO DUE PUNTI LA VELOCITÀ È PERPENDICOLARE A $r(min)$ E $r(max)$, QUINDI IL PRODOTTO SCALARE VALE ZERO. QUINDI:

$\Rightarrow \vec V = r\omega \vec{u_\varphi}$; ADESSO SI USA LA CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE: $r(t)^2\omega(t) = \frac{L}{m} = cost$; INOLTRE VALE CHE PER $r(min)$ E $r(max)$ $\Rightarrow V = r\omega$ ($\perp$ AL RAGGIO SOLO IN QUESTI DUE PUNTI, QUINDI ISTANTANEAMENTE È UN MOTO CIRCOLARE):

$$\Rightarrow r(r\omega) = cost \Rightarrow r(max)\left(r(max)\cdot\omega'\right) = r(min)\left(r(min)\cdot\omega''\right) \Rightarrow r(max)V_1 = r(min)V_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_2 = \frac{r(max)}{r(min)}\cdot V_1 \Rightarrow V_2 = \left(\frac{\cancel{\epsilon d}}{1-\epsilon}\cdot\frac{1+\epsilon}{\cancel{\epsilon d}}\right)V_1 = V_1\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right) = \underline{58,28 \text{ km/s}}$$

ED È MAGGIORE DI V_1 E SI SAPEVA PERCHÉ PIÙ LA COMETA SI AVVICINA AL SOLE, MAGGIORE È LA SUA VELOCITÀ.

B) 

PHOBOS, UN SATELLITE DI MARTE HA UN'ORBITA PRESSOCHÉ CIRCOLARE E DI RAGGIO $R = 9400$ km E CON UN PERIODO DI RIVOLUZIONE $T = 7h\ 39\ min$; LA MASSA DI MARTE $M_M >> m$ (PHOBOS) QUINDI CHIAMO S IL SISTEMA INERZIALE IN MARTE E S' QUELLO RIFERITO A PHOBOS CHE RUOTA LUNGO LA SUA ORBITA. DETERMINARE LA MASSA DI MARTE. TENIAMO CONTO INNANZITUTTO CONTO CHE PER UN OSSERVATORE POSTO IN S' IL SATELLITE È FERMO, QUINDI LE DUE FORZE CHE AGISCONO SU DI ESSO, OVVERO LA FORZA DI ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE E LA FORZA CENTRIFUGA SI COMPENSANO PERFETTAMENTE. INVECE PER UN OSSERVATORE SU MARTE IL PIANETA SI MUOVE, QUINDI LA RISULTANTE DELLE FORZE NON È ZERO, RIASSUMENDO:

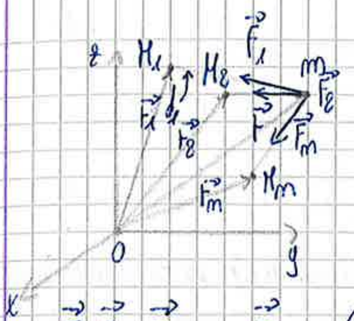
$S')$ $m\vec a = \vec F_G + \vec F(centrifuga) = -\frac{\gamma}{R^2}\vec u_r + m\frac{V^2}{R}\vec u_r = 0 \Rightarrow mV^2 = +\frac{\gamma}{R} \Rightarrow E_K = \frac{mV^2}{2} = \frac{\gamma}{2R} = -\frac{E_P}{2}$;

QUINDI SI PUÒ DIRE: $E = E_K + E_P = \left(-\frac{E_P}{2}\right) + E_P = \frac{E_P}{2} < 0 \Rightarrow \Delta E = -E = -\frac{E_P}{2} > 0$, OVVERO L'ENERGIA DI LEGAME, OVVERO QUEL MINIMO DI ENERGIA SUFFICIENTE PER FAR ARRIVARE LA PARTICELLA ALL'INFINITO, MA CON VELOCITÀ NULLA;

$S)$ $m\vec a_C = \vec F_G$ (NON C'È LA FORZA CENTRIFUGA PERCHÉ L'OSSERVATORE IN S VEDE IL SATELLITE SEMPRE ALLA STESSA DISTANZA, NÉ SI ALLONTANA NÉ SI AVVICINA PERCHÉ L'ORBITA CHE STA PERCORRENDO È DI TIPO CIRCOLARE). QUINDI POSSIAMO SCRIVERE:

$\Rightarrow m\vec a_C = -\frac{\gamma}{r^2}\vec u_r$; QUINDI IN QUESTO CASO LA FORZA DI GRAVITÀ FA DA ACCELERAZIONE CENTRIPETA, ORA DALLA RELAZIONE:

$\Rightarrow mV^2 = \frac{\gamma}{R} \Rightarrow V = \sqrt{\frac{\gamma}{Rm}}$; INOLTRE IN UN MOTO CIRCOLARE UNIFORME $T = \frac{2\pi r}{V} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3 m}{\gamma}}$; QUINDI SI SCRIVE:



LA FORZA RISULTANTE SU m È LA SOMMA DI TUTTE LE FORZE CHE ESSA SUBISCE; INOLTRE d_1 È LA DISTANZA DELLA MASSA M_1 DA m; LA FORZA $\vec F_1$ SENTITA DA m SARÀ DATA DA:

$$\vec F_1 = -\frac{GM_1m}{d_1^2}\vec u_1 = -\frac{GM_1m}{|\vec r-\vec r_1|^2}\cdot\frac{\vec r-\vec r_1}{|\vec r-\vec r_1|} = -\frac{GM_1m}{|\vec r-\vec r_1|^3}(\vec r-\vec r_1)$$

; IN QUESTO MODO ABBIAMO TOLTO I VERSORI; FACCIAMO COSÌ FINO ALLA FORZA $\vec F_m$; SCRIVIAMO LA LEGGE DI NEWTON:

$$\Rightarrow \vec F = \vec F_1+\vec F_2+\dots+\vec F_m = -\frac{GM_1m}{|\vec r-\vec r_1|^3}(\vec r-\vec r_1)+\dots+\left(-\frac{GM_mm}{|\vec r-\vec r_m|^3}(\vec r-\vec r_m)\right) = \sum -\frac{GM_im}{|\vec r-\vec r_i|^3}(\vec r-\vec r_i) = \vec F(\vec r),$$

QUINDI QUESTA DEFINISCE UN CAMPO DI FORZE CHE DESCRIVE L'AZIONE DELLE MASSE M_1 FINO A M_m SULLA MASSA CAMPIONE m. SE CONSIDERIAMO LA FORZA GRAVITAZIONALE, QUESTA LA POSSIAMO ASSOCIARE AD UNA DEFINIZIONE DI ENERGIA POTENZIALE, QUINDI:

$$\Rightarrow E_p(r) = -\frac{\gamma}{r} = -\frac{GMm}{r}$$

; INOLTRE SAPPIAMO CHE LA SOMMA DI FORZE CONSERVATIVE È ANCORA CONSERVATIVA, QUINDI:

$$\Rightarrow E_p^{(1)}(r) = -\frac{GM_1m}{d_1};\quad E_p^{(2)}(r) = -\frac{GM_2m}{d_2}$$

E COSÌ VIA FINO A $E_p^{(m)}(r) = -\frac{GM_mm}{d_m}$; QUINDI L'ENERGIA POTENZIALE TOTALE È LA SOMMA DELLE ENERGIE POTENZIALI ASSOCIATE A CIASCUNA SINGOLA FORZA: $E_p(r) = \sum -\frac{GM_im}{d_i} = \sum E_p^{(i)}(r)$; DAL MOMENTO CHE L'ENERGIA POTENZIALE È UN NUMERO, ABBIAMO REALIZZATO UN ESEMPIO DI CAMPO SCALARE, OVVERO AD OGNI PUNTO SI ASSOCIA UN NUMERO. QUINDI AD OGNI CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE È POSSIBILE SEMPRE ASSOCIARE UN CAMPO SCALARE. ADESSO POSSO SCRIVERE UNA RELAZIONE CHE MI DESCRIVE L'AZIONE INDIPENDENTEMENTE DALLA MASSA m? SI INTRODUCE IL CONCETTO DI CAMPO GRAVITAZIONALE, OVVERO UN CAMPO DEFINITO ASSOCIANDO AD OGNI PUNTO UN VETTORE $\vec g$, QUINDI $\vec r \to \vec g(\vec r) = \frac{\vec F_G(\vec r)}{m}$ QUINDI QUESTO VETTORE $\vec g$ SI DEFINISCE FACENDO IL RAPPORTO TRA LA FORZA CHE SENTE m IN UN PUNTO E LA MASSA m STESSA, OVVERO:

$$\vec F_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec u_r \Rightarrow \vec g(\vec r) = \frac{1}{m}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\vec u_r\right) = -\frac{GM}{r^2}\vec u_r \Rightarrow [\vec g] = [F/m] = [L\cdot T^{-2}]$$

QUESTA È UN'ACCELERAZIONE, QUINDI IL CAMPO GRAVITAZIONALE È L'ACCELERAZIONE DELLA MASSA CAMPIONE POSTA IN UN PUNTO INTORNO ALLA MASSA M. COME SI VEDE NON DIPENDE DALLA MASSA m; E COSA SUCCEDE SE HO UN SISTEMA DI MASSE M_1, M_2 FINO A M_m? ALLORA SCRIVIAMO:

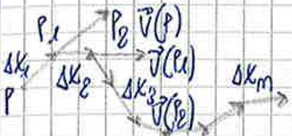
$$\vec g(\vec r) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\vec F_i(\vec r) = \sum\frac{\vec F_i}{m}(\vec r) = \sum -\frac{GM_im}{m|\vec r-\vec r_i|^3}(\vec r-\vec r_i) = \sum \vec g_i(\vec r)$$

OVVERO LA SOMMA DEI CAMPI GRAVITAZIONALI ASSOCIATI AD OGNI PUNTO; DESCRIVE L'AZIONE DI UNA MASSA SU UN'ALTRA INDIPENDENTEMENTE DALLA MASSA m CHE LA SUBISCE.

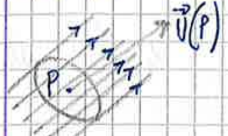
STESSA COSA VALE NEL CASO ELETTROSTATICO, OVVERO UNA CARICA CAMPIONE q CHE SENTE L'INFLUENZA DI UNA CARICA Q E QUESTA FORZA È DEFINITA DALLA LEGGE DI COULOMB:

$$\Rightarrow \vec F(\vec r) = \frac{KQq}{r^2}\vec u_r$$

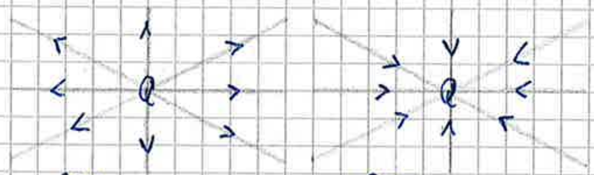
; SE HO PIÙ CARICHE: $\vec F = \vec F_1+\vec F_2+\dots+\vec F_m = \frac{KQ_1q}{|\vec r-\vec r_1|^3}(\vec r-\vec r_1)+\dots+\frac{KQ_mq}{|\vec r-\vec r_m|^3}(\vec r-\vec r_m)$; LA FORZA ELETTROSTATICA È CONSERVATIVA, QUINDI $\vec F_1 \to E_p^{(1)} = \frac{KQ_1q}{d_1} \Rightarrow \vec F(\vec r) = \sum \vec F_i(\vec r) \to E_p(\vec r) = \sum E_p^{(i)}(\vec r)$; DI NUOVO VOGLIAMO SCRIVERE L'INTERAZIONE INDIPENDENTEMENTE DALLA CARICA CAMPIONE q; STAVOLTA BISOGNA INTRODURRE IL CONCETTO



SPOSTIAMO IL PUNTO VERSO P_1; IN QUESTO NUOVO PUNTO IL CAMPO È DIVERSO ED È DESCRITTO DA UN VETTORE $\vec{V}(P_1)$; POI LO SPOSTIAMO VERSO P_2 E DI NUOVO IL CAMPO È DIVERSO. IN QUESTO MODO SI CREANO TANTI PICCOLI SPOSTAMENTI FINO A Δx_m. ADESSO MANDIAMO $m \to \infty$ E $\Delta x_i \to 0$, QUINDI UN NUMERO MOLTO PIÙ GRANDE DI SPOSTAMENTI, MA INFINITESIMI E QUESTI SPOSTAMENTI TUTTI INSIEME SI APPROSSIMANO AD UNA CURVA CONTINUA. LA CURVA È TANGENTE AL VETTORE CHE DESCRIVE IL CAMPO IN QUEL PUNTO POICHÈ GLI SPOSTAMENTI SONO INFINITESIMI.
LE LINEE DI CAMPO NON SI POSSONO INCROCIARE PERCHÈ SENNÒ AVREMMO DUE CAMPI, UNO TANGENTE AD UNA LINEA, UNO TANGENTE ALL'ALTRO; PER DEFINIZIONE AD OGNI PUNTO CORRISPONDE UNO E UN SOLO VETTORE, QUINDI È IMPOSSIBILE. COME SI RAPPRESENTANO LE LINEE?

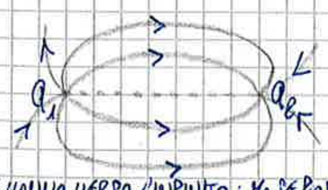


DEFINIAMO LA REGOLA DI FARADAY: LE LINEE SONO PIÙ DENSE DOVE IL CAMPO È PIÙ INTENSO, PIÙ RADE DOVE È MENO INTENSO. SE PRENDIAMO UN PUNTO P E UNA SUPERFICIE ΔS ABBASTANZA PICCOLA IN MODO DA CONSIDERARE COSTANTE E UNIFORME IL CAMPO AL SUO INTERNO, ALLORA POI TRACCIAMO PER QUESTA SUPERFICIE UN NUMERO DI LINEE DI CAMPO $\Delta N = \Delta S \, |\vec{V}(P)| \, k$; k NON DIPENDE DAL PUNTO E DETERMINA QUANTO PRECISA È LA NOSTRA RAPPRESENTAZIONE. SE IL VETTORE $\vec{V}(P)$ È UN VETTORE LUNGO, ALLORA LE LINEE SONO DI PIÙ, SE È PIÙ PICCOLO, ALLORA LE LINEE SONO DI MENO. LA DENSITÀ DI LINEE È PROPORZIONALE AL MODULO DEL CAMPO; IN PARTICOLARE SI PARLA DI DENSITÀ LINEARE. NEL CASO DEL CAMPO GRAVITAZIONALE, ESSO IN OGNI PUNTO È TANGENTE ALLE LINEE DI CAMPO E IL VERSO È ENTRANTE VERSO LA MASSA CHE LO GENERA; DIPENDE ANCHE DALLA DISTANZA, QUINDI PIÙ MI ALLONTANO MINORE È LA DENSITÀ. PER IL CAMPO ELETTROSTATICO LE LINEE SONO ENTRANTI O USCENTI A SECONDA DELLA CARICA:



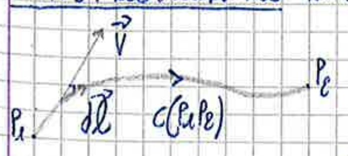
$Q > 0$ $\qquad$ $Q < 0$

QUINDI SE $Q > 0$ IL VERSO DEL CAMPO È RADIALE USCENTE, MENTRE SE $Q < 0$ IL VERSO È ENTRANTE; QUESTO NEL CASO DI UNA CARICA CHE GENERA UN CAMPO ELETTROSTATICO, LE LINEE SONO SEMPRE ENTRANTI CON UNA CARICA NEGATIVA;



SE INVECE HO DUE CARICHE Q_1 E Q_2 CON $|Q_1| = |Q_2|$, ALLORA LE LINEE SI ORIGINANO DALLA CARICA POSITIVA ED ENTRANO IN QUELLA NEGATIVA. SE INVECE $|Q_1| > |Q_2|$ SEMPRE OPPOSTE TRA DI LORO, ALLORA SE $Q_1 > 0$ E $Q_2 < 0$, ALLORA CI SONO DELLE LINEE CHE SFUGGONO E VANNO VERSO L'INFINITO; MA SE FOSSE CHE $|Q_2| > |Q_1|$ ALLORA AVREMMO ALCUNE LINEE CHE SI ORIGINANO ALL'INFINITO E SVANNO A TERMINARE IN Q_2. QUINDI LE LINEE DI CAMPO SI ORIGINANO O ALL'INFINITO E VANNO ALL'INFINITO OPPURE SI ORIGINANO ALL'INFINITO E TERMINANO IN Q_2, OPPURE VANNO DALLA CARICA POSITIVA A QUELLA NEGATIVA.

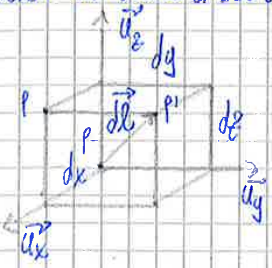
- <u>CAMPO DI FORZE CONSERVATIVE</u>: NOI SAPPIAMO CHE IL LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA LUNGO UN PERCORSO QUALSIASI È DATO DA:



$\Rightarrow \int_{P_1 \to P_2} \vec{F} \cdot d\vec{l} = E_p(P_1) - E_p(P_2)$; DEFINIAMO UN CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO $\vec{V}(r)$ E PRENDIAMO DUE PUNTI P_1 E P_2; DIVIDIAMO LO SPOSTAMENTO IN TANTI SPOSTAMENTI $d\vec{l}$ INFINITESIMI PER CONSIDERARE IL VETTORE $\vec{V}$ COSTANTE AL SUO INTERNO E POI SOMMIAMO TUTTI QUESTI CONTRIBUTI INFINITESIMI E VEDIAMO CHE POICHÈ DIPENDE SOLO DA P_1 E P_2 ALLORA IL CAMPO È CONSERVATIVO; VALE ANCHE CHE LA CIRCUITAZIONE ALL'INTERNO DI UN QUAL=

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 174

VEDERE IN MODO LOCALE LA RELAZIONE TRA CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO E POTENZIALE. CONSIDERIAMO UN CUBO:



PRENDIAMO DUE PUNTI P E P' MOLTO VICINI CHE CORRISPONDONO AI VERTICI OPPOSTI DI UN CUBO DI SPIGOLI dx, dy, dz CON $P(x,y,z)$ E $P'(x+dx, y+dy, z+dz)$ E $\vec{dl}$ IL VETTORE SPOSTAMENTO CON $\vec{dl} = \overline{PP'} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z = (dx, dy, dz)$. PRIMA DI ANDARE AVANTI BISOGNA FARE UNA BREVE PARENTESI MATEMATICA: CONSIDERIAMO UNA QUALSIASI FUNZIONE $f(x)$ E FACCIAMO VARIARE LA FUNZIONE f DI UNA QUANTITÀ INFINITESIMA IN FUNZIONE DI UNA VARIAZIONE INFINITESIMA DELLA VARIABILE x, OVVERO $x \to x+dx \Rightarrow f(x+dx) - f(x) = \frac{df}{dx}(x)\,dx = df$. POSSIAMO GENERALIZZARE QUESTA RELAZIONE NEL CASO IN CUI ABBIAMO TRE VARIABILI, OVVERO $f(x,y,z) \Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz)$, DA CUI DERIVA CHE:

$$\Rightarrow f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = df;$$ DA CUI POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$$\Rightarrow df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}; \frac{\partial f}{\partial z}\right)(dx, dy, dz);$$ QUESTO È UN PRODOTTO SCALARE TRA DUE VETTORI: IL PRIMO HA COME COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI, MENTRE IL SECONDO È IL VETTORE SPOSTAMENTO $\vec{dl}$; IL PRIMO VETTORE SI INDICA CON $\vec{\nabla} f$ E SI CHIAMA <u>GRADIENTE</u> DELLA FUNZIONE f ED È UN CAMPO VETTORIALE ASSOCIATO AD UNA FUNZIONE f DEFINITO IN OGNI PUNTO COME QUEL VETTORE LE CUI COMPONENTI SONO LE DERIVATE PARZIALI DELLA FUNZIONE; È UTILE PER DESCRIVERE VARIAZIONI INFINITESIME DELLA FUNZIONE IN RELAZIONE A SPOSTAMENTI INFINITESIMI. IL GRADIENTE È UN VETTORE CHE CI DICE IN QUALE DIREZIONE E VERSO LA FUNZIONE VARIA PIÙ RAPIDAMENTE IN MODULO.

$$\Rightarrow \vec{dl}\,(P \to P') \Rightarrow df = f(P') - f(P) = \vec{\nabla} f \cdot \vec{dl}.$$ PRENDIAMO COME ESEMPIO UNA FUNZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI PUNTO LA DISTANZA DALL'ORIGINE, QUINDI UNA FUNZIONE SCALARE CHE ASSOCIA UN NUMERO AD OGNI PUNTO; A PRIORI POSSIAMO DIRE CHE LA DISTANZA IN CUI LA DISTANZA AUMENTA PIÙ RAPIDAMENTE È LA DIREZIONE RADIALE, QUINDI IL GRADIENTE SARÀ IN DIREZIONE RADIALE; VEDIAMOLO:

$$\Rightarrow f(x,y,z) = r \Rightarrow \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z \quad \text{CON} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \cdot x = \frac{x}{r}$$ INFATTI BISOGNA DERIVARE LA DISTANZA r IN MODULO DERIVANDO SOLO RISPETTO LA x E TENENDO LE ALTRE VARIABILI COSTANTI: $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{r}$ E $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{r}$;

$$\Rightarrow \nabla f = \left(\frac{x}{r}; \frac{y}{r}; \frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r}(x,y,z) = \frac{\vec{r}}{r} = \underline{\underline{\vec{u}_r}},$$ OVVERO IL VERSORE DEL VETTORE POSIZIONE, OVVERO IL VERSORE RADIALE.

ADESSO CALCOLIAMO: $\vec{V}(P) \cdot \vec{dl} = \Phi(x,y,z) - \Phi(x+dx, y+dy, z+dz) = -(\Phi(x+dx, y+dy, z+dz) - \Phi(x,y,z)) =$
$= (-)\,d\Phi = -\vec{\nabla}\Phi(P) \cdot \vec{dl} \Rightarrow \vec{V}(r) = -\vec{\nabla}\Phi(r)$; QUALSIASI SIA IL PUNTO P E $\vec{dl}$ INFINITESIMO VALE QUESTA RELAZIONE CON $\vec{dl}$ CHE È UNO SPOSTAMENTO ARBITRARIO; MI POSSO SPOSTARE LUNGO x, y, z E POI UGUAGLIARE TRA LE COMPONENTI. QUESTA È UNA <u>RELAZIONE LOCALE</u> TRA IL CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO E IL SUO POTENZIALE PERCHÈ LEGA IL CAMPO IN OGNI PUNTO ALLE DERIVATE DEL POTENZIALE IN QUEL PUNTO, IN UN INTORNO MOLTO PICCOLO DI QUEL PUNTO. CI DICE ANCHE CHE IL CAMPO È DIRETTO NELLA DIREZIONE E VERSO IN CUI Φ DIMINUISCE PIÙ RAPIDAMENTE PERCHÈ C'È IL MENO. QUINDI AD OGNI CAMPO VETTORIALE CONSERVATIVO ASSOCIO UN CAMPO POTENZIALE SCALARE E VICEVERSA POSSO ASSOCIARE AD OGNI POTENZIALE UN CAMPO CONSERVATIVO CHE È L'OPPOSTO DEL SUO GRADIENTE:

$$\Rightarrow V_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad V_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad V_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z};$$ OVVERO IL GRADIENTE IN COMPONENTI; INOLTRE VALGONO QUESTE PROPRIETÀ:

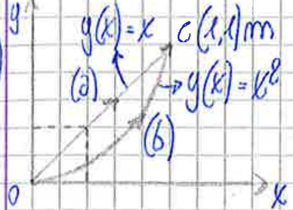
CHE SI FORMA È DI 45°, QUINDI $\vec{dl} = (dx, dx) \Rightarrow \vec{F}(x, y(x)) = (2x\vec{u_x} + x^2\vec{u_y})(N)$; QUINDI ABBIAMO CHE VALE QUESTO:

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{dl} = (2x, x^2)(dx, dx) = 2x\,dx + x^2\,dx = (2x + x^2)\,dx \Rightarrow \int \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^{x_c} (2x + x^2)\,dx = W_{O\to C}^{(b)} = \left(x_c^2 + \frac{x_c^3}{3}\right)(J) =$

$= \left(25 + \frac{125}{3}\right)(J) \cong 66{,}67\ J \neq W_{O\to C}^{(a)}$; LA FORZA QUINDI NON È CONSERVATIVA. UN ALTRO MODO PER VEDERLO È QUESTO:

$\Rightarrow \vec{F}(x, y) = (2y, x^2)(N) \Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} \overset{?}{=} \frac{\partial F_x}{\partial y} : \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2x,\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2$; NON SONO UGUALI, QUINDI È NON CONSERVATIVA.

B)



DETERMINARE IL LAVORO LUNGO I DUE PERCORSI; INOLTRE IL 2° TRATTO È UNA PARABOLA, QUINDI:

$(a): \vec{dl} = (dx, dx) \Rightarrow \vec{F} = (x, y(x)) = (x, x) \Rightarrow W_{O\to C} = \int_0^1 \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^1 (x, x)(dx, dx) =$

$= \int_0^1 2x\,dx = 1\ J$; ADESSO CALCOLIAMO IL LAVORO LUNGO IL SECONDO PERCORSO:

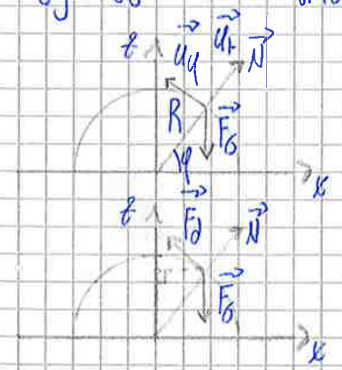
$(b): \vec{dl} = \left(dx, \frac{dy}{dx}dx\right)(\text{con } y(x) = x^2) = (dx, 2x\,dx) \Rightarrow \vec{F}(x, y(x)) = (x, x^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{dl} = (x, x^2)(dx, 2x\,dx) = (x + 2x^3)\,dx \Rightarrow \int \vec{F}\cdot\vec{dl} = \int_0^1 (x + 2x^3)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 1\ J$;

$\Rightarrow \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y) = 0$, PERCHÉ INFATTI VARIA LA x, MA IO DEVO DERIVARE LA y CHE È COSTANTE, QUINDI VALE ZERO LA DERIVATA;

$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0 \Rightarrow$ LE EQUAZIONI SONO VERIFICATE, QUINDI POSSIAMO DIRE CHE LA FORZA È CONSERVATIVA E QUINDI LO SI PUÒ SCRIVERE COME DIFFERENZA DI ENERGIA POTENZIALE.

C)



QUESTO È UN PROBLEMA DI DINAMICA LEGATO ALLE FORZE CONSERVATIVE; ABBIAMO UN BAMBINO CHE SCIVOLA LUNGO UN IGLOO E VOGLIAMO DETERMINARE LA POSIZIONE ALLA QUALE IL BAMBINO SI DISTACCA DALL'IGLOO (PRIMA SENZA ATTRITO E POI CONSIDERANDO ANCHE L'ATTRITO). SE ALL'INIZIO ESCLUDIAMO L'ATTRITO, ALLORA ABBIAMO SOLO DUE FORZE CHE AGISCONO, QUINDI:

$\Rightarrow m\vec{a} = \vec{F_G} + \vec{N}$ CON $\vec{F_G} = -mg\sin\varphi\,\vec{u_r} - mg\cos\varphi\,\vec{u_\varphi}$ E $\vec{N} = N\vec{u_r}$;

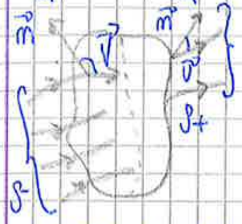
INOLTRE L'ACCELERAZIONE HA DUE COMPONENTI, UNA TANGENZIALE LEGATA ALLA VARIAZIONE DELLA VELOCITÀ IN MODULO E UNA CENTRIPETA LEGATA ALLA VARIAZIONE IN DIREZIONE IN QUANTO IL BAMBINO SCIVOLANDO SEGUE LA CURVATURA DELL'IGLOO, QUINDI: $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_\varphi} - \frac{v^2}{R}\vec{u_r}$; UN'ALTRA CONSIDERAZIONE IMPORTANTE È CHE LA REAZIONE VINCOLARE $\vec{N}$ È SEMPRE ESTERNA PERCHÉ PUÒ SOLO PREMERE, NON PUÒ TIRARE A SÉ. QUINDI $N \geq 0$ E $N = 0$ NEL MOMENTO IN CUI IL BAMBINO SI STACCA PERCHÉ NON PREME PIÙ. QUINDI SI POSSONO SCRIVERE QUESTE EQUAZIONI:

$$\begin{cases} -m\frac{v^2}{R} = N - mg\sin\varphi \\ m\frac{dv}{dt} = -mg\cos\varphi \end{cases}$$

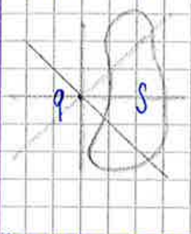
(N COMPENSA IN PARTE LA COMPONENTE RADIALE DELLA FORZA E IN PARTE FA DA FORZA CENTRIPETA CHE SERVE PER FAR SEGUIRE LA CURVATURA AL BAMBINO MENTRE SCIVOLA);

MENTRE IL BAMBINO SCIVOLA LA VELOCITÀ AUMENTA IN MODULO; SULLA PUNTA DELL'IGLOO, OVVERO ALL'ISTANTE INIZIALE, LA TANGENTE È ORIZZONTALE, QUINDI PENDENZA ZERO E $V = 0$; QUINDI $\varphi = \pi/2$ E IN QUESTO ISTANTE IL BAMBINO È FERMO, QUINDI FORZA PESO E REAZIONE VINCOLARE SI COMPENSANO PERFETTAMENTE. MENTRE SCIVOLA φ DIMINUISCE OVVIAMENTE, POICHÉ NON C'È ATTRITO POSSIAMO USARE LA LEGGE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA PERCHÉ LA FORZA PESO CHE È UNA FORZA CONSERVATIVA È L'UNICA A COMPIERE LAVORO; $\vec{N}$ NON COMPIE LAVORO PERCHÉ È $\perp$ ALLO SPOSTAMENTO IN OGNI ISTANTE:

È NEGATIVO; QUINDI IDEALMENTE POSSO DIVIDERE LA SUPERFICIE IN DUE PARTI, OVVERO $S+$ DOVE IL FLUSSO È POSITIVO E $S-$ DOVE IL FLUSSO È NEGATIVO; ALLORA: $\Phi_S(\vec{v}) = \sum d\Phi = \sum d\Phi(ds \in S+) + \sum d\Phi(ds \in S-) = \left(\sum \frac{\Delta N}{4}(S+)\right) + \left(\sum -\frac{\Delta N}{4}(S-)\right) =$
$= \frac{1}{4} N(out) - \frac{1}{4} N(in) = \frac{1}{4}(N(out) - N(in))$; CONSIDERIAMO ADESSO UNA SUPERFICIE CHIUSA:



DOVE LE LINEE ENTRANO IL FLUSSO È NEGATIVO, DOVE ESCONO IL FLUSSO È POSITIVO; ALLORA ABBIAMO: $\Phi_S(\vec{v}) = \frac{1}{4}(2-4) = -\frac{2}{4}$; DA NOTARE CHE AVENDO 4 LINEE ENTRANTI, ALLORA 2 SI SONO INTERROTTE; SE INVECE FOSSE STATO CHE NE ENTRAVANO 2 E NE USCIVANO 4, ALLORA DA QUALCHE PARTE DENTRO LA SUPERFICIE 2 LINEE DI CAMPO SI SONO ORIGINATE. PERÒ SE HO DELLE LINEE DI CAMPO CONTINUE, ALLORA LE LINEE ENTRANTI SONO TANTE QUELLE USCENTI E QUINDI IL FLUSSO VALE ZERO. E SE AVESSI UN FLUSSO COSTANTE, OVVERO UN CAMPO $\vec{V}(r) = \vec{V}$ COSTANTE IN OGNI PUNTO, ALLORA LE LINEE DI CAMPO SONO PARALLELE AL CAMPO E DISTANTI TRA DI LORO ALLO STESSO MODO, QUINDI AVREMO DENSITÀ COSTANTE;



QUANDO IL FLUSSO VALE ZERO, ALLORA LE LINEE DI CAMPO SONO CONTINUE, MA NEL CASO DI LINEE DI CAMPO GENERATE DA UNA CARICA PUNTIFORME, QUESTE NON SONO CONTINUE IN QUANTO L'UNICO PUNTO DI DISCONTINUITÀ È PROPRIO LA CARICA STESSA. SE LA CARICA È POSITIVA, ALLORA LE LINEE SONO USCENTI, MA SE LA CARICA È NEGATIVA, ALLORA LE LINEE SONO ENTRANTI. SE CONSIDERIAMO UNA SUPERFICIE CHE NON CONTIENE LA CARICA, ALLORA LE LINEE SONO CONTINUE TALE CHE LE LINEE ENTRANTI SONO UGUALI A QUELLE USCENTI. QUINDI PER UNA CARICA PUNTIFORME DENTRO LA NOSTRA SUPERFICIE IL FLUSSO È DIVERSO DA ZERO; PER UNA CARICA POSTA FUORI DALLA SUPERFICIE IL FLUSSO È UGUALE A ZERO. ADESSO SUPPONIAMO DI AVERE UN CAMPO DATO DALLA SOMMA DEI CAMPI GENERATI DA PIÙ MASSE (O CARICHE); ALLORA POSSIAMO SCRIVERE CHE:
$\vec{V}(r) = \sum \vec{V_i}(r)$; SE HO UNA SUPERFICIE ORIENTATA $\Rightarrow \Phi_S(\vec{v}) = \int_S \vec{V} \cdot \vec{m} \cdot ds = \int_S \left(\sum V_i\right) \vec{m} \cdot ds = \sum \int (V_i \cdot \vec{m}) ds =$
$\sum \Phi_S(V_i)$; QUINDI SE HO PIÙ CAMPI, ALLORA IL FLUSSO TOTALE È LA SOMMA DEI FLUSSI DI CIASCUN CAMPO ATTRAVERSO LA STESSA SUPERFICIE.

$\vec{N} = N\vec{u_y}$

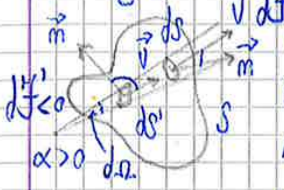
PRENDIAMO UN CUBO DI LATO a: a) DATO $\vec{g} = 6(m/s^2)\vec{u_x}$ (COSTANTE); b) $\vec{g} = 2(m/s^2)\vec{u_y}$;
c) DATO $\vec{E} = -7(N/C)\vec{u_x} + [4(N/C) + 6(N/C\,m)\text{METRO})]\vec{u_y}$; CALCOLARE IL FLUSSO DEI VARI CAMPI ATTRAVERSO LA FACCIA BCDG E POI IL FLUSSO IN TUTTO IL CUBO CON $a = 1$;
a) $\Phi(BCDG) = \int \vec{g} \cdot \vec{m} \cdot ds = \int 6\vec{u_x} \cdot \vec{u_y} \cdot ds = 0$ (QUANDO IL FLUSSO È PARALLELO ALLA FACCIA, ALLORA VALE ZERO); b) $\Phi(BCDG) = \int \vec{g} \cdot \vec{m} \cdot ds = \int 2\vec{u_y} \cdot \vec{u_y} \cdot ds = 2\int ds =$
$= 2a^2$ CON a^2 L'AREA DELLA FACCIA; INVECE IL FLUSSO DEI DUE CAMPI COSTANTI PER TUTTO IL CUBO VALE ZERO. INVECE VALE CHE:
c) $\vec{E} = \vec{E}(\text{UNIF.}) + \vec{E}(\text{NON UNIFORME}) \Rightarrow \Phi_{BCDG} = \int [(-7\vec{u_x} + 4\vec{u_y}) + (6y\,\vec{u_y})]\,\vec{u_y} \cdot ds = \int (4+6a)\,ds = (4+6a)\,a^2$,
INFATTI SULLA FACCIA BCDG TUTTI I PUNTI DELLA SUPERFICIE HANNO $y = a$; E INVECE PER TUTTO IL CUBO QUANTO VALE IL FLUSSO?
$\Phi(\vec{E}) = \Phi(\vec{E}(\text{UNIFORME}) + \vec{E}(\text{NON UNIFORME})) = \Phi(E(\text{NON UNIFORME})) = \int (6y\,\vec{u_y})(-\vec{u_y})\,ds = -\int 6y\,ds = 0$; DA NOTARE CHE IL CAMPO UNIFORME NON DA CONTRIBUTO PERCHÉ IL FLUSSO DI UN CAMPO UNIFORME ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE CHIUSA È ZERO; IL CAMPO NON UNIFORME DA CONTRIBUTO SOLO TRAMITE LA FACCIA AOEF E BCDG PERCHÉ NELLE ALTRE IL CAMPO È PARALLELO ALLE FACCE:
$\Phi_{AOEF}(\vec{E}(\text{UNIFORME})) = \int (6y\,\vec{u_y})(-\vec{u_y}) = -\int 6y\,ds = 0$, QUESTO PERCHÉ SE GUARDIAMO LA FACCIA CHE CI INTERESSA ALLORA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 174

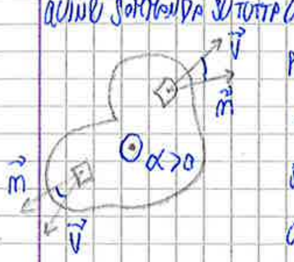
$\alpha > 0$
$\alpha < 0$

POICHÉ $|\vec{v}| = \frac{|\alpha|}{r^2} \Rightarrow |d\mathcal{F}(\vec{v})| = \frac{|\alpha|}{r^2} ds_{\perp} = |\alpha| d\Omega$; QUINDI IMPARIAMO CHE IL FLUSSO ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE INFINITESIMA DIPENDE SOLO DALL'ANGOLO SOLIDO SOTTO CUI LA SORGENTE VEDE TALE SUPERFICIE; NON DIPENDE NEANCHE DALLA DISTANZA DALLA SUPERFICIE, INFATTI SE PRENDESSI UN'ALTRA SUPERFICIE ALL'INTERNO DI QUELL'ANGOLO SOLIDO, ALLORA IL FLUSSO SAREBBE LO STESSO; ERA ANCHE FACILE DA CAPIRE DAL FATTO CHE IL NUMERO DI LINEE DI CAMPO È SEMPRE LO STESSO ED È QUELLO CHE DEFINISCE IL FLUSSO. QUINDI IN VALORE ASSOLUTO IL FLUSSO È PROPORZIONALE ALL'ANGOLO SOLIDO, NON DIPENDE DALL'AREA DELLA SUPERFICIE; QUINDI POSSO DIRE CHE:

$$d\mathcal{F} = \begin{cases} |d\mathcal{F}| = |\alpha| d\Omega & \text{SE } d\mathcal{F} > 0 \text{ CON } \cos\theta > 0 \text{ (FLUSSO USCENTE);} \\ -|d\mathcal{F}| = -|\alpha| d\Omega & \text{SE } d\mathcal{F} < 0 \text{ CON } \cos\theta < 0 \text{ (FLUSSO ENTRANTE).} \end{cases}$$



CONSIDERIAMO LA SORGENTE ESTERNA ALLA SUPERFICIE CHIUSA: NOTIAMO CHE PER OGNI ds ESISTE DALL'ALTRA PARTE UN ds' VISTO DALLA SORGENTE CON LO STESSO $d\Omega$, CON LA DIFFERENZA CHE IN ds IL FLUSSO È POSITIVO, IN ds' IL FLUSSO È NEGATIVO, QUINDI ENTRANTE; MA POICHÉ L'ANGOLO SOLIDO È LO STESSO, ALLORA IN VALORE ASSOLUTO IL FLUSSO È LO STESSO $\Rightarrow d\mathcal{F} = -d\mathcal{F}'$ (UNO OPPOSTO ALL'ALTRO, MA UGUALI IN VALORE ASSOLUTO); QUINDI SOMMANDO SU TUTTA LA SUPERFICIE QUESTI TERMINI A DUE A DUE SI ANNULLANO $\Rightarrow \mathcal{F}(\vec{v}) = \int d\mathcal{F} = 0$; ADESSO INVECE:



PRENDIAMO LA SORGENTE STANDO DENTRO LA SUPERFICIE ($\alpha > 0$); ALLORA IL VETTORE $\vec{v}$ È SEMPRE USCENTE:
$\Rightarrow d\mathcal{F}(\vec{v})(>0) = |\alpha| d\Omega = \underline{\alpha\, d\Omega}$; SE AVESSIMO AVUTO INVECE $\alpha < 0$, ALLORA IL FLUSSO SAREBBE STATO SEMPRE ENTRANTE, QUINDI VALE: $d\mathcal{F}(\vec{v})(<0) = -|\alpha| d\Omega = \underline{\alpha\, d\Omega}$; QUINDI NON IMPORTA CHE IL FLUSSO SIA POSITIVO O NEGATIVO, È SEMPRE UGUALE AL PRODOTTO TRA α E $d\Omega$. MA SE NOI CONSIDERASSIMO UNA SFERA PERFETTA, ALLORA QUALE SAREBBE IL FLUSSO TOTALE ALL'INTERNO DI ESSA? VALE QUESTA RELAZIONE SEMPLICE:

$$\Rightarrow \mathcal{F}_{TOT}(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot \vec{m} \cdot ds = \oint \alpha \, d\Omega = \alpha \oint d\Omega = \alpha \Omega \text{ CON } \Omega = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi \Rightarrow \mathcal{F}_{TOT}(\vec{v}) = \underline{4\pi\alpha};$$

POTEVA ANDARE ANCHE BENE CONSIDERARE UNA SFERA DENTRO LA NOSTRA SUPERFICIE CHIUSA DI RAGGIO r; IL FLUSSO SAREBBE LO STESSO E INOLTRE $\underline{\Omega \text{ È L'ANGOLO SOLIDO GIRO}}$ SOTTO IL QUALE LA SORGENTE VEDE TUTTO LO SPAZIO INTORNO A SÉ. INFINE, ULTIMO CASO, SE NOI PRENDIAMO PIÙ SORGENTI α_1, α_2 FINO AD α_m, ALLORA SAPPIAMO CHE IL FLUSSO NON DIPENDERÀ DALLE SORGENTI ESTERNE, MA SOLO DA QUELLE INTERNE:

$$\Rightarrow \vec{V}(r) = \sum \vec{V}_i(r) \Rightarrow \underline{\mathcal{F}(\vec{v})} = \sum \mathcal{F}_s(\vec{v}_i) = \boxed{\sum 4\pi\alpha_i \text{ (INTERNE AD } S)}$$

$\underline{\text{LEGGE DI GAUSS}}$ (DIMOSTRATO). QUINDI

RIASSUMENDO LE DUE PROPRIETÀ FONDAMENTALI DEL CAMPO GRAVITAZIONALE ED ELETTROSTATICO: 1) SONO CAMPI CONSERVATIVI E CIÒ È LEGATO ALLA PROPRIETÀ CHE I CAMPI GENERATI DALLE SINGOLE SORGENTI SONO CENTRALI. INOLTRE IL CAMPO GENERATO DA UNA SINGOLA SORGENTE È $\vec{g}(r) = g(r)\vec{u}_r$ CON $g(r) = -\frac{GM}{r^2}$ (CASO GRAVITAZIONALE) E $\vec{E}(r) = E(r)\vec{u}_r$ CON $E(r) = \frac{kq}{r^2}$ (CASO ELETTROSTATICO). INOLTRE SAREBBERO STATI CONSERVATIVI ANCHE SE IL MODULO DEL CAMPO FOSSE ANDATO COME $1/r^5$, BASTA SOLO CHE SIA RADIALE; 2) VALE LA LEGGE DI GAUSS E QUESTA SI CHE È LEGATA ALL'ANDAMENTO DEL MODULO COME $1/r^2$ E OVVIAMENTE IL CAMPO È ANCHE CENTRALE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE QUESTE DUE PROPRIETÀ DETERMINANO TUTTE LE CARATTERISTICHE DEI CAMPI GRAVITAZIONALE ED ELETTROSTATICO, QUINDI SI PUÒ RICAVARE SIA LA LEGGE DI NEWTON CHE LA LEGGE DI COULOMB. COME SI DIMOSTRA? SUPPONIAMO DI AVERE UNA SINGOLA SORGENTE α. C'È DA DIRE INNANZITUTTO CHE LE SORGENTI PUNTIFORMI SONO A SIMMETRIA SFERICA E QUINDI IL CAMPO GENERATO DA

PARALLELI INFINITAMENTE VICINI DISTANTI $d\theta$ E DUE MERIDIANI DISTANTI $d\varphi$; L'ALTEZZA DEL CUBETTO È dr; POSSIAMO QUINDI SCRIVERE:

$$ds = dl_\theta + dl_\varphi = (r\,d\theta)(r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi) = r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\varphi \Rightarrow dV = dr \cdot ds = r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi;$$

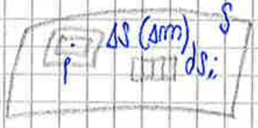
INNANZITUTTO VANNO RICORDATI ALCUNI INTERVALLI: $0 \le r \le R$; $0 \le \theta \le \pi$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; PER TROVARE IL VOLUME DELLA SFERA SI RISOLVONO DEGLI INTEGRALI:

$$\Rightarrow \int dV = \int r^2 \operatorname{sen}\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{R} r^2\, dr\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right) d\varphi;$$

SONO TRE INTEGRALI IN UNA VARIABILE, QUINDI:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\frac{R^3}{3}\right)\operatorname{sen}\theta\, d\theta\right)d\varphi = \frac{R^3}{3}\int_0^{2\pi}\left(\underbrace{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{=2}\right)d\varphi = \frac{2}{3}R^3\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2}{3}R^3 2\pi = \frac{4}{3}\pi R^3$$ (VOLUME DI UNA SFERA).

SE PERÒ ABBIAMO UN OGGETTO OMOGENEO, OVVERO LA MATERIA AL SUO INTERNO È DISTRIBUITA ALLO STESSO MODO IN OGNI PUNTO, ALLORA LA DENSITÀ SARÀ COSTANTE, QUINDI: $M = \int_V \rho \cdot dV = \rho \int_V dV = \rho \cdot V \Rightarrow \rho = \frac{M}{V}$ (QUESTO SOLO SE L'OGGETTO È OMOGENEO); ADESSO:

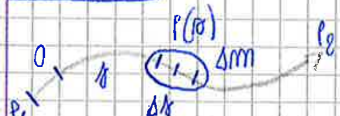


CONSIDERIAMO UN OGGETTO BIDIMENSIONALE MOLTO SOTTILE; SE UNA PORZIONE DI SUPERFICIE ΔS, ALLORA SI PARLA DI DENSITÀ SUPERFICIALE: $\sigma(\text{MEDIA}) = \frac{\Delta m}{\Delta S}$ CON $[\sigma] = [M \cdot L^{-2}] = Kg/m^2$; ALLO STESSO MODO DI PRIMA PASSO CONSIDERARE SUPERFICI SEMPRE PIÙ PICCOLE FINO A QUANDO LA DENSITÀ MEDIA RAGGIUNGE UN VALORE LIMITE, QUINDI:

$$\Rightarrow \sigma(\text{MEDIA}) = \sigma(P) = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta m}{\Delta S} = \frac{dm}{dS} \Rightarrow dm = \sigma(P) \cdot dS \Rightarrow S = \sum dS_i = \int_S dS$$ (INTEGRALE DI SUPERFICIE);

$$\Rightarrow M = \sum dm_i = \sum \sigma(P_i)\, dS_i = \int \sigma(P)\, dS;$$ SE L'OGGETTO È OMOGENEO $(\sigma = \text{COST}) \Rightarrow M = \sigma \int_S dS = S \cdot \sigma \Rightarrow \sigma = \frac{M}{S}$.

ABBIAMO PARLATO DI DENSITÀ DI VOLUME E DENSITÀ DI SUPERFICIE; CI SONO PERÒ ANCHE OGGETTI CHE HANNO ESTENSIONE LINEARE COME PER ESEMPIO I CAVI E I FILI CON UNA SEZIONE TRASVERSALE UNIFORME IN OGNI PUNTO DELLA LORO LUNGHEZZA, QUINDI SI DESCRIVONO CON UNA DENSITÀ LINEARE. SE IL FILO È MOLTO SOTTILE E LA SEZIONE TRASVERSALE TRASCURABILE, ALLORA LO SI APPROSSIMA AD UNA CURVA:



I VARI PUNTI SULLA CURVA SONO DESCRITTI DA UN'ASCISSA CURVILINEA; ALLORA POSSIAMO SCRIVERE:

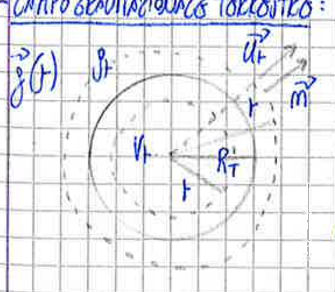
$\Rightarrow \lambda(\text{MEDIA}) = \frac{\Delta m}{\Delta s}$ CON Δs UN PEZZETTINO DI FILO MOLTO PICCOLO INTORNO AD UN PUNTO;

$[\lambda(\text{MEDIA})] = [M \cdot L^{-1}] = Kg/m \Rightarrow \lambda(P) = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta m}{\Delta s} = \frac{dm}{ds}$; LA LUNGHEZZA DEL FILO È $L = \sum ds = \int_{s_1}^{s_2} ds$; QUINDI ANCORA:

$\Rightarrow dm = \lambda(P)\, ds \Rightarrow M = \int dm = \int_{s_1}^{s_2} \lambda(P)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} \lambda(s)\, ds$, UN INTEGRALE AD UNA SOLA VARIABILE IN QUANTO IL PUNTO È DEFINITO DALL'ASCISSA CURVILINEA LUNGO TUTTO IL FILO, QUINDI SAPPIAMO GIÀ CHE È UN INTEGRALE DI LINEA. SE LA BARRA FOSSE OMOGENEA ALLORA:

$\Rightarrow \lambda(s) = \text{COSTANTE} \Rightarrow M = \int_{s_1}^{s_2} \lambda\, ds = \lambda \int_{s_1}^{s_2} ds = \lambda L \Rightarrow \lambda = \frac{M}{L}$, SOLO SE IL FILO FOSSE OMOGENEO.

- CAMPO GRAVITAZIONALE TERRESTRE: $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6\, m$; $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}\, Kg$; QUANTO VALE LA DENSITÀ DELLA TERRA?



SUPPONENDO CHE LA TERRA SIA UNA SFERA PERFETTAMENTE OMOGENEA (ANCHE SE NON È COSÌ PERCHÉ C'È IL FERRO ETC): $\rho(\text{MEDIA}) = \frac{M}{V} = M \cdot \left(\frac{4}{3}\pi R_T^3\right)^{-1} \cong 5523\, Kg/m^3$, QUINDI $1\, m^3$ PESA PIÙ O MENO CINQUE TONNELLATE. ADESSO VOGLIAMO CALCOLARE IL CAMPO GRAVITAZIONALE FUORI E DENTRO LA TERRA. CALCOLIAMOLO PRIMA FUORI; APPROSSIMANDO LA TERRA AD UNA SFERA ALLORA LA SORGENTE SARÀ A SIMMETRIA SFERICA E IL CAMPO GENERATO A SIMMETRIA SFERICA; QUINDI PRENDIAMO COME SUPERFICIE DI GAUSS UNA SFERA S_r (ESTERNA), ALLORA AVREMO CHE IL FLUSSO DI CAMPO GRAVITAZIONALE ATTRAVERSO S_r È DATO DA: