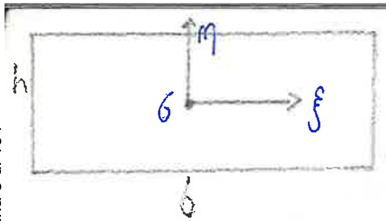
NUMERO: 2310A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Campana Simone

MATERIA: Macchina strutturale - Teoria + Esercizi - Prof. Goglio



$J_{\xi\xi} = \frac{b h^3}{12}$

$J_{\eta\eta} = \frac{h \cdot b^3}{12}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\cdot\sigma_{zz} \\ \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xy} \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xz} \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{yz} \end{cases}$$

SE RIFERIMENTO PRINCIPALE PER LE TENSIONI:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 + \frac{1}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_3 \\ \varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2 + \frac{1}{E}\sigma_3 \end{cases}$$

TENSIONE PIANA : $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}\right) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}\right) \\ \tau_{xy} = G\cdot\gamma_{xy} \end{cases}$$

ESTENSIMETRIA

$$\Longrightarrow U = \frac{VK}{4}\sum\varepsilon$$

CRITERIO DI VON MISES

$$\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2 + (\sigma_2-\sigma_3)^2 + (\sigma_1-\sigma_3)^2}$$

INSTABILITÀ ELASTICA

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{l_0^2} \Longrightarrow \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

CON $\lambda^2 = \frac{l_0^2}{\rho^2} \Longrightarrow \lambda = \frac{l_0}{\rho}$

CON $\rho = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$

$K_I = Y\sigma\sqrt{a}$ CON σ LA TENSIONE SENZA CRICCA

$\sigma_p = K_t \cdot \sigma_m$ $\quad$ $\left.\begin{matrix} r/d \\ D/d \end{matrix}\right| \longrightarrow K_t$

INTAGLIO

- DUTTILE: $\sigma_p = K_t\sigma_m = R_{p0,2}$ 1° SNERVAMENTO
  $F = A_{min} \cdot R_{p0,2}$ COLLASSO PLASTICO
- FRAGILE: $\sigma_p = K_t\sigma_m = R_m$

ASSE NEUTRO

$$tg\,\psi = \frac{M_y}{M_x}\,\frac{J_{xx}}{J_{yy}}$$

COMPORTAMENTO TORSIONALE

$\tau_{tz} = \frac{M_t}{J_p}\cdot r$ $\quad$ $\tau_{picco}^{(TAGLIO)} = \frac{M_t}{J_t}\cdot s$ (SOTTILE APERTA)

$$J_t = \frac{1}{3}\left(l - m\cdot 0{,}3\cdot s\right)\cdot s^3$$

$$\Delta\vartheta' = \frac{M_t}{G J_t} L$$

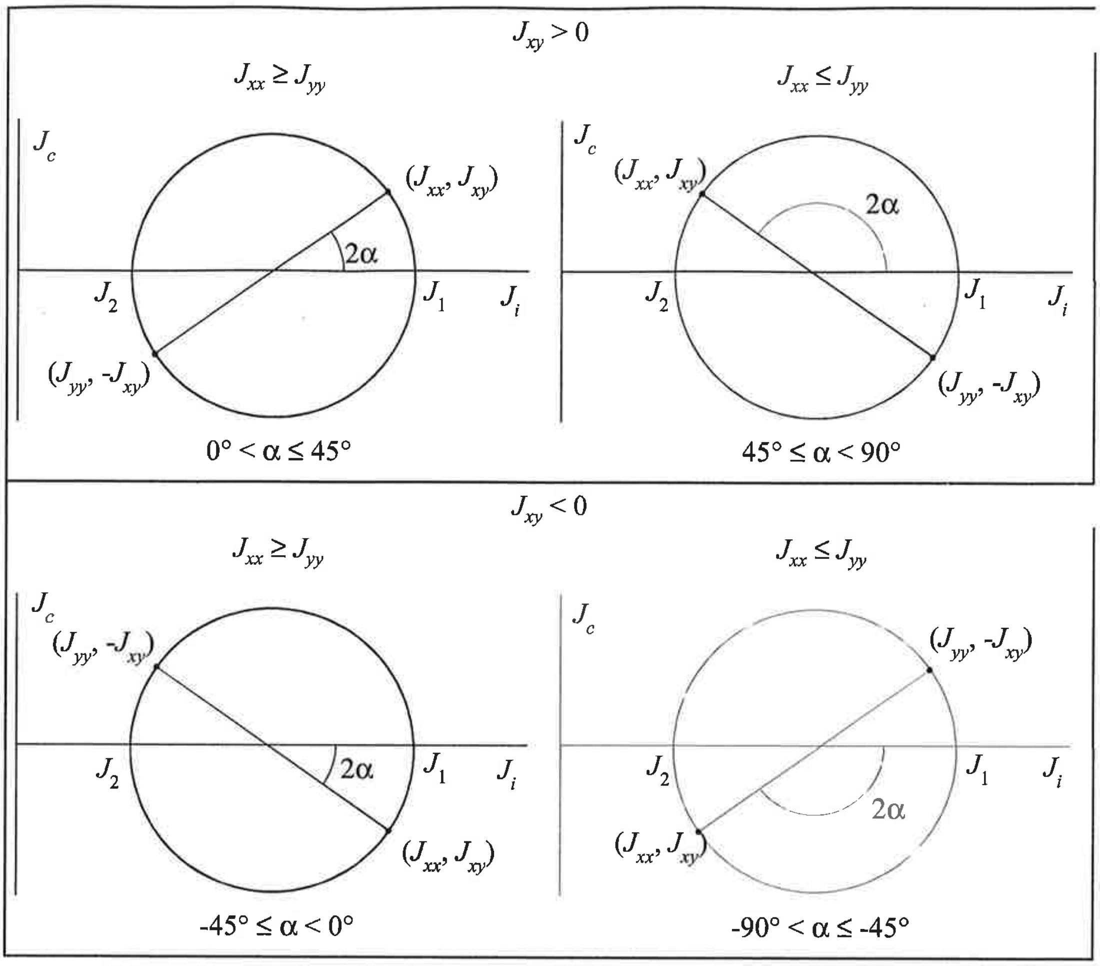
$\tau = \frac{t}{s}$ $\quad$ $J_t = \frac{4\Omega^2}{\sum\frac{l_i}{s_i}}$ (SOTTILE CHIUSA) $\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}$

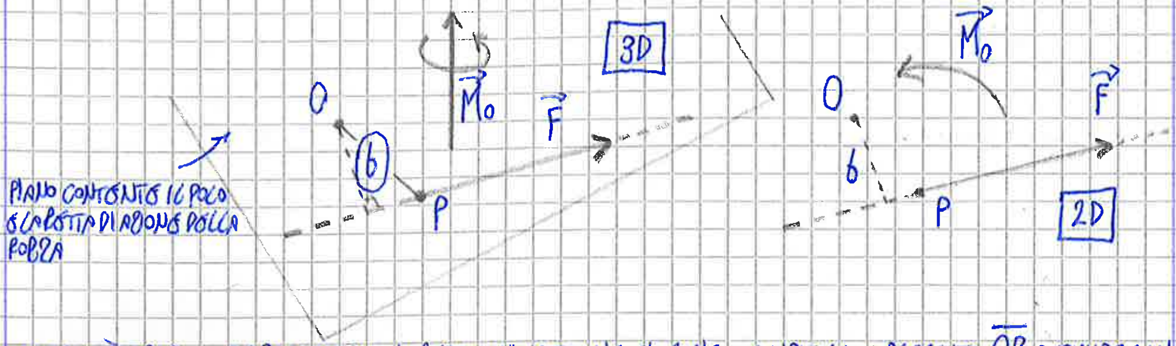
$\tau_{yz} = \frac{T_y}{J_{xx}}\cdot S_x^*$ (TAGLIO) $\quad$ $\tau_{xz} = \frac{T_x}{J_{yy}}\cdot S_y^*$

$$g = e + \frac{b^2 h^2 s_1}{4 J_{xx}} \quad \text{(CENTRO DI TAGLIO)}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 194

Per determinare il segno dell'angolo α si devono considerare i valori di J_{xx}, J_{yy} e J_{xy}; possono presentarsi i casi illustrati negli schemi seguenti:





COME SI PUÒ VEDERE LA FORZA GIACE SU UNA RETTA, CHIAMATA LINEA DI AZIONE, E INSIEME AL SEGMENTO $\overline{OP}$ DEFINISCE UN PIANO; SE AVESSI SOLO LA FORZA ALLORA DEFINIREI UN FASCIO DI PIANI. IL MOMENTO È PERPENDICOLARE AI DUE VETTORI PER DEFINIZIONE DI PRODOTTO ESTERNO E QUINDI SARÀ ANCHE PERPENDICOLARE A QUESTO PIANO. UNA MANIERA GRAFICAMENTE COMODA DI RAPPRESENTARE IL MOMENTO È DATA DA UN ARCO DI CERCHIO A CUI È AGGIUNTO IL VERSO DI ROTAZIONE, SOPRATTUTTO QUANDO SIAMO IN DUE DIMENSIONI CHE È QUELLO CHE CI IMPORTERÀ MAGGIORMENTE. IL PRODOTTO ESTERNO PERÒ POSSIAMO SCRIVERLO COME:

$$\underbrace{|F| \cdot |O-P| \sin\theta}$$

CON $|O-P|\sin\theta$ LA DISTANZA DAL POLO O DALLA RETTA DI AZIONE, DETTO ANCHE BRACCIO DELLA FORZA CHE È LA GRANDEZZA UTILE IN QUESTO CONTESTO. ALLORA IL MOMENTO POTREMO SCRIVERLO COME:

$$\underbrace{\vec{M}_0 = F \cdot b}$$

SE LA FORZA VENISSE SPOSTATA LUNGO LA LINEA DI AZIONE IL BRACCIO RIMARREBBE SEMPRE LO STESSO E QUINDI IL MOMENTO NON CAMBIA. IL PUNTO P SI SPOSTA E SI ALLONTANA SEMPRE DI PIÙ, MA IL BRACCIO NON CAMBIA. ANCHE IN QUESTO CASO TALVOLTA SI PRENDE UN VERSO CONVENZIONALE PRESO COME POSITIVO (SENSO ANTIORARIO) SULLA QUALE FARE I CALCOLI.

ANCHE IL MOMENTO È UN VETTORE LIBERO E ANCHE CON QUESTO POSSIAMO DEFINIRE LA RISULTANTE RISPETTO AL POLO O COME LA SOMMA DEI SINGOLI MOMENTI DI OGNI FORZA E UN SECONDO CONTRIBUTO DETTO MOMENTO PURO O CONCENTRATO:

$$\Longrightarrow \vec{R}M_0 = \sum\left(\vec{M}_{0i} + \vec{C}_i\right) = \sum\left[(P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i\right]$$

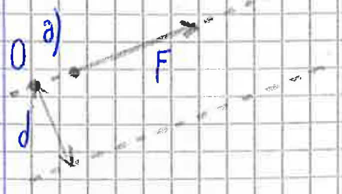
IL CONCETTO DI MOMENTO PURO DERIVA DAL FATTO CHE IN CERTE SITUAZIONI SI RIESCE A VEDERE SOLO L'EFFETTO ESTERNO (UN MOTORINO CHE AVVITA UNA VITE), OVVERO NON SI VEDE L'EFFETTO DI UNA FORZA, SI VEDE SOLO IL RISULTATO, OVVERO LA ROTAZIONE; QUINDI IL MOMENTO PURO È QUELLO CHE SI VEDE SENZA IL RISULTATO DELLA FORZA CHE C'È DIETRO. SE NON SI VEDE LA FORZA DI CONSEGUENZA IL POLO DIVENTA INDIPENDENTE, IN QUANTO NON C'È APPLICAZIONE DA NESSUNA PARTE.

MA SE VOLESSI CAMBIARE POLO, PER ESEMPIO DA O A O' COSA SUCCEDE?

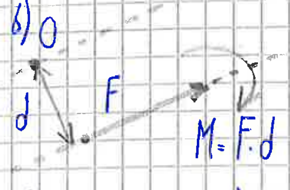
$$\Longrightarrow \underline{\vec{R}M_{O'}} = \sum\left[(P_i - O') \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i\right] = \sum\left\{\left[(P_i - O) + (O - O')\right] \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i\right\} =$$

$$= \underbrace{\sum\left[(P_i - O) \wedge \vec{F}_i + \vec{C}_i\right]}_{\vec{R}M_0} + (O - O') \wedge \underbrace{\sum \vec{F}_i}_{\vec{R}F} = \underline{\vec{R}M_0 + (O - O') \wedge \vec{R}F}$$

LA DISTANZA TRA I DUE POLI È UNA COSTANTE E PER QUESTO PUÒ ESSERE PORTATO FUORI DALLA SOMMATORIA. ALLA FINE QUELLO CHE



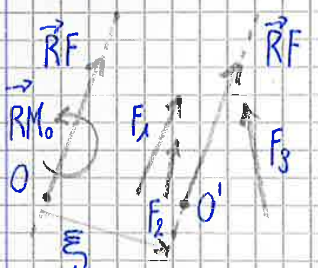
(SISTEMA ORIGINALE)



(SISTEMA EQUIVALENTE)

Considerando il sistema a: il vettore forza giace sulla retta passante per il polo, quindi il braccio è nullo, quindi non abbiamo momento. Prima abbiamo che facendo scorrere la forza sulla stessa retta non fa cambiare niente, ma se invece facessi scorrere la forza su un'altra retta in direzione perpendicolare allora d diventerebbe il braccio e quindi il momento non sarebbe nullo. Come faccio a compensare questo errore? Semplicemente aggiungendo un momento che ha di effetto opposto: modificando la posizione della forza avrei momento antiorario, ma se applico un momento orario tutto torna a zero. Questo momento è detto <u>momento di trasporto</u> (quello che in figura è $M = F \cdot d$). Ovviamente le due rette devono essere parallele perché se cambio inclinazione cambiano anche le componenti.

2) Sostituire un sistema di forze con la sua risultante applicata in un punto arbitrario (in quanto è un vettore libero) e con momento risultante avente per polo il punto di passaggio della risultante, quindi da n vettori mi riduco a 2 soli vettori, ovvero la forza e il momento risultante. Vediamo meglio:



Supponiamo di essere nel piano. Possiamo sostituire il sistema originale, fatto di tanti termini, con la sola forza risultante, però non rispetto una direzione arbitraria, ma rispetto una direzione privilegiata, detta <u>asse centrale</u>. Rispetto a questo asse il momento risultante è sempre zero. Come si determina questo asse? In due passi:

a) Scelgo un polo arbitrario O a cui applicare la risultante delle forze e il momento risultante. A questo punto per ogni forza $F_1, F_2, F_3 \dots$ prendo il braccio rispetto ad O e calcolo i vettori momento e calcolo il momento risultante. Però io voglio solo la forza risultante, non il momento risultante, allora sfrutto la regola precedente del trasporto di una forza. b) Trasporto $\vec{RF}$ verso un nuovo polo O' in modo tale che il momento risultante sia nullo. L'entità del trasporto è tale da cancellare $\vec{RM}_0$; quindi $O - O'$ è la mia incognita in quanto conta solo la distanza presa perpendicolarmente, ovvero di quanto mi devo spostare di lato. Si scriverà dunque:

$$\Rightarrow 0 = \vec{RM}_0 + (O-O') \wedge \vec{RF} = \vec{RM}_0 + (O-O') \cdot \vec{RF}\, \mathrm{sen}\, 90 = \vec{RM}_0 + (O-O') \cdot \vec{RF} =$$

$$= \vec{RM}_0 + (O-O') \cdot \vec{RF} = \vec{RM}_0 \ominus (O'-O) \cdot \vec{RF}$$

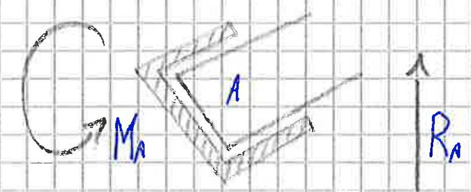
Lo spostamento avviene in direzione perpendicolare e quindi l'angolo che formano la risultante e la distanza tra i due poli è di 90°; il cambiamento di segno è legato al fatto che abbiamo considerato il verso da O' a O. Se chiamo ξ questa distanza avremo che:

$$\Rightarrow 0 = \vec{RM}_0 - \xi \cdot \vec{RF} \Rightarrow \underbrace{\xi = \frac{\vec{RM}_0}{\vec{RF}}}$$

Questo concetto ci sarà molto utile perché ci consente di lavorare solo con la forza risultante.

3) INCASTRO: NON C'È POSSIBILITÀ DI MOTO, SONO BLOCCATE LE COMPONENTI DI TRASLAZIONE E DI ROTAZIONE INTORNO ALLA NORMALE AL DISEGNO (COME QUANDO INSERIAMO UNA PENNA NEL CAPPUCCIO, QUESTO FUNGE DA VINCOLO CHE IMPEDISCE ALLA PENNA DI RUOTARE E TRASLARE). QUINDI AVREMO 3 COMPONENTI DI REAZIONE INCOGNITE.

4) COPPIA PRISMATICA: È CONSENTITO IL MOVIMENTO LONGITUDINALE, MA IL MOVIMENTO TRASVERSALE E LA ROTAZIONE SONO IMPEDITE, QUINDI AVREMO DUE COMPONENTI DI REAZIONE INCOGNITA (COME IN UNA CASSETTIERA).



QUESTE COMPONENTI DI REAZIONE SONO LE INCOGNITE CHE DOVREMO DETERMINARE TRAMITE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO. PER PRIMA COSA DOBBIAMO CHIEDERCI QUANTE INCOGNITE CI SONO, QUANTE EQUAZIONI LO RISOLVONO. PER RISPONDERE A QUESTE DOMANDE SI DEFINISCE UN PARAMETRO DETTO GRADO DI IPERSTATICITÀ CHE INDICHIAMO CON h ED È DEFINITO COME:

$\Longrightarrow \boxed{h = r - 3m}$ CON r IL NUMERO COMPLESSIVO DI REAZIONI VINCOLARI (POSSIAMO AVERE VARI VINCOLI OGNUNO DEI QUALI INSERISCE LE PROPRIE REAZIONI INCOGNITE); IL NUMERO 3 SI RIFERISCE AL FATTO CHE NEL PIANO CI SONO 3 GRADI DI LIBERTÀ (ROTAZIONE, TRASLAZIONE ORIZZONTALE, TRASLAZIONE VERTICALE); m INVECE È IL NUMERO DI ELEMENTI NELLA STRUTTURA IN GIOCO. QUINDI IN GENERE PER OGNI ELEMENTO ABBIAMO 3 EQUAZIONI IN QUANTO NEL PIANO UN ELEMENTO PUÒ RUOTARE, TRASLARE ORIZZONTALMENTE E VERTICALMENTE. COME STABILISCO r? OGNI VINCOLO INTRODUCE VARIE INCOGNITE, L'APPOGGIO CONTA 1 INCOGNITA, LA CERNIERA 2 INCOGNITE E COSÌ VIA, QUINDI:

$\Longrightarrow r = 3i + 2c + 2p + 1 \cdot a = 3i + 2(c+p) + a$ CON i IL NUMERO DI INCASTRI, c IL NUMERO DI CERNIERE, p IL NUMERO DI COPPIE PRISMATICHE E a IL NUMERO DI APPOGGI.

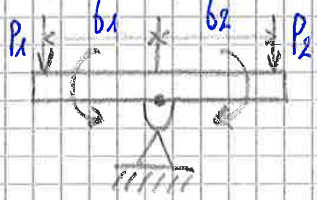
POSSIAMO AVERE DIVERSI CASI:

a) $h < 0$: VUOL DIRE CHE ABBIAMO POCHI VINCOLI RISPETTO AL NUMERO DI EQUAZIONI. IN PARTICOLARE SI PARLA DI SISTEMA IPOSTATICO (O LABILE), OVVERO I VINCOLI NON RIESCONO A BLOCCARE TUTTI I GRADI DI LIBERTÀ, INFATTI ALCUNI PEZZI POSSONO CONTINUARE A MUOVERSI. QUESTA PROPRIETÀ È TIPICA DI TUTTI I MECCANISMI PERCHÉ ALTRIMENTI NON SI MUOVEREBBE NIENTE.

b) $h = 0$: ABBIAMO TANTI VINCOLI QUANTE SONO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, QUINDI TANTE EQUAZIONI QUANTE SONO LE INCOGNITE, SI PARLA DI SISTEMA ISOSTATICO; C'È IL NUMERO DI VINCOLI NECESSARIO PER IMPEDIRE OGNI MOVIMENTO, NULLA DI PIÙ NULLA DI MENO, ESATTAMENTE QUELLI CHE BASTANO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 194

DEI CARICHI OPPORTUNI POSSO AVERE EQUILIBRIO. FACCIAMO UN ESEMPIO SEMPLICE:

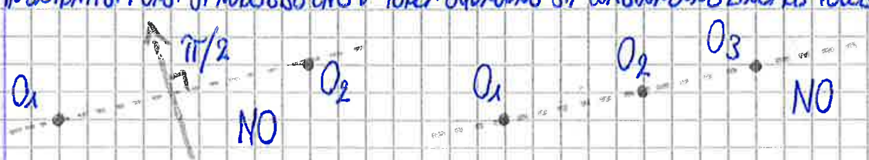


NELL'ALTALENA ABBIAMO UN ELEMENTO LEGATO AD UNA CERNIERA, QUINDI:
$m = 1$ E $\gamma = 2 \cdot C = 2 \Longrightarrow h = 2 - 3 = -1$ (IL SISTEMA PUÒ RUOTARE INTORNO AL FULCRO). PERÒ PER AVERE EQUILIBRIO POSSO FAR SEDERE DUE BAMBINI DI PESO P_1 E P_2 E SE COME POLO PRENDO IL FULCRO POSSO POSIZIONARE QUESTI DUE CARICHI IN MODO CHE $P_1 \cdot b_1 = P_2 \cdot b_2$ IN MODO DA ANNULLARE LA COMPONENTE ROTAZIONALE.

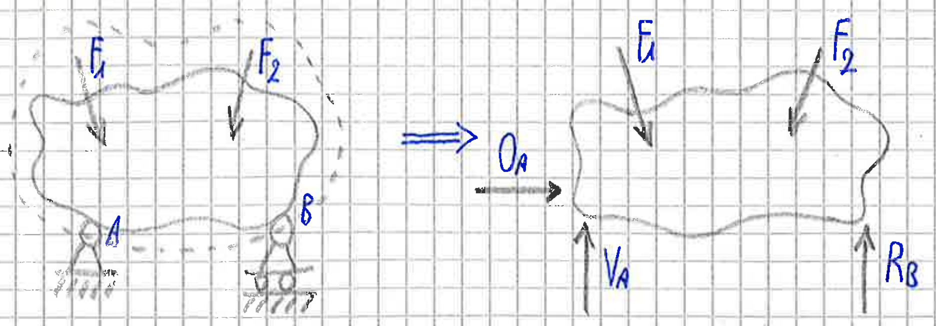
ADESSO ABBIAMO TUTTO QUELLO CHE SERVE PER SCRIVERE LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO. PER PRIMA COSA DOBBIAMO RIUSCIRE A SCRIVERE UN GRUPPO DI EQUAZIONI IL PIÙ SEMPLICE POSSIBILE, IN SECONDO LUOGO EVITARE DI SCRIVERE DELLE EQUAZIONI CHE SONO COMBINAZIONI LINEARI DELLE ALTRE. PER I CALCOLI INOLTRE DOBBIAMO SCEGLIERE I POLI E LE PROIEZIONI PIÙ ADATTE PER I CALCOLI.
UNO STRUMENTO FONDAMENTALE PER FARE QUESTO È IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO: L'IDEA È QUELLA DI CIRCONDARE OGNI ELEMENTO CON UNA LINEA CHIUSA DI DISTACCO E SICCOME SI ATTRAVERSANO ANCHE DEI VINCOLI, ALLORA BISOGNA TAGLIARE ANCHE I VINCOLI. SULL'ELEMENTO VANNO APPLICATE LE REAZIONI E DOVE SI SONO TAGLIATI I VINCOLI BISOGNA APPLICARE LE COMPONENTI DI REAZIONI CORRISPONDENTI (SE HO UN INCASTRO, DOVRÒ INSERIRE LE COMPONENTI DI REAZIONE DELL'INCASTRO PER ESEMPIO).
PER OGNI ELEMENTO DEVO SCRIVERE 3 EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, MA PER FARLO DEVO SCEGLIERE LE EQUAZIONI IN MODO CORRETTO.
ABBIAMO 3 POSSIBILITÀ DI SCELTA DELLE EQUAZIONI:

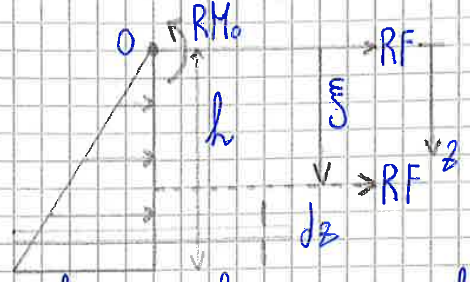
a) 2 EQUILIBRI PER LA TRASLAZIONE E 1 PER LA ROTAZIONE;
b) 2 EQUILIBRI PER LA ROTAZIONE E 1 PER LA TRASLAZIONE;
c) 3 EQUILIBRI PER LA ROTAZIONE.

PER IL PUNTO a POSSIAMO SCEGLIERE UN POLO QUALSIASI; PER IL PUNTO b LA DIREZIONE DELL'EQUILIBRIO TRASLAZIONALE NON DEVE ESSERE ORTOGONALE ALLA RETTA PER I DUE POLI E PER IL PUNTO c I 3 POLI NON DEVONO ESSERE ALLINEATI PERCHÉ IN ENTRAMBI I CASI SI AVREBBE CHE LA TERZA EQUAZIONE SIA COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE DUE.



ESEMPIO DI DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



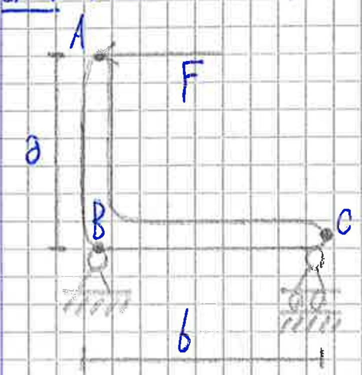


POICHÉ LA FORZA VARIA LINEARMENTE LA POSSIAMO SCRIVERE COME: $q = K\cdot z$ (VALE ZERO CON $z = 0$ E CON $z = h$ ASSUME IL VALORE MASSIMO).

$$RF = \int_0^h q\cdot dz = \int_0^h Kz\,dz = K\frac{h^2}{2};$$

$$RM_0 = \int_0^h q\cdot z\cdot dz = \int_0^h K\cdot z^2\cdot dz = K\frac{h^3}{3} \Longrightarrow \xi = \frac{K\cdot h^3/3}{K h^2/3} = \frac{2}{3}h$$ (IL BARICENTRO DEL TRIANGOLO)

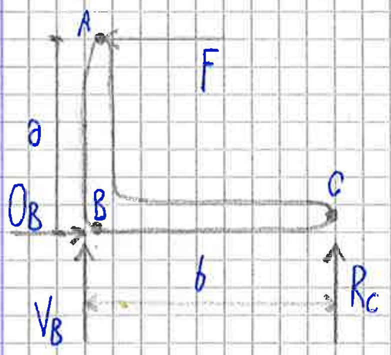
ES 4: UN ESEMPIO DI SCRITTURA DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO.



IMMAGINIAMO UNA STRUTTURA SEMPLICE COME QUESTA IN CUI A, B E C SONO I PUNTI DI APPLICAZIONE DEI CARICHI E DEI VINCOLI. ABBIAMO UNA FORZA APPLICATA NEL PUNTO A, UN APPOGGIO NEL PUNTO C E UNA CERNIERA NEL PUNTO B. QUINDI:

$v = 2\cdot C + 1\cdot a = 3 \Longrightarrow h = 3 - 3\cdot m = 3 - 3 = 0$ (ISOSTATICA).

IL PROBLEMA DUNQUE È RISOLVIBILE IN QUANTO ABBIAMO TANTE INCOGNITE QUANTE SONO LE EQUAZIONI. ORA SI REALIZZA IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:



IL VERSO DELLE REAZIONI È CONVENZIONALE, VOLENDO POTEVO ANCHE FISSARE IL VERSO OPPOSTO, ALLA FINE È LA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI A DARTI IL VERSO GIUSTO. ADESSO POSSO SCRIVERE LE EQUAZIONI CHE MI SERVONO SCEGLIENDO TRA 2 EQUAZIONI DI TRASLAZIONE E 1 DI ROTAZIONE SCEGLIENDO IL PUNTO B COME POLO. PERCHÉ B? PERCHÉ OCCORRE SEMPRE SCEGLIERE UN POLO CONVENIENTE CHE MI DIA LA MAGGIOR PARTE DEI MOMENTI ZERO. INOLTRE POSSO SCEGLIERE IL VERSO ANTIORARIO COME POSITIVO. QUINDI IL POLO E LE DIREZIONI DI TRASLAZIONE SONO ARBITRARIE.

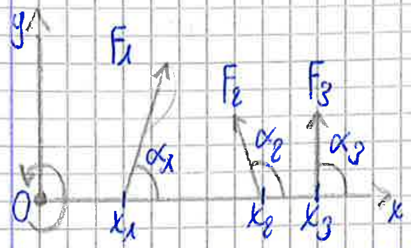
$\leftarrow \oplus \quad O_B - F = 0 \Longrightarrow O_B = F;$

↳ POSITIVO PER CONVENZIONE

$\uparrow \quad V_B + R_C = 0 \Longrightarrow V_B = -R_C;$

$\curvearrowleft B \quad R_C\cdot b + F\cdot a = 0$ (V_B DA MOMENTO ZERO) $\Longrightarrow R_C = \ominus\frac{F\cdot a}{b};$

QUINDI NELLA REALTÀ IL PUNTO C SI ALZEREBBE PER EFFETTO DELLA FORZA F, PER QUESTO MOTIVO R_C DEVE ESSERE RIVOLTA PER IL BASSO, AVREMMO POTUTO AVERE ALTRE DUE POSSIBILITÀ, UNA GIUSTA E UNA SBAGLIATA:



DATI: $F_1 = 100\,N$, $F_2 = 200\,N$, $F_3 = 50\,N$;
$x_1 = 2m$, $x_2 = 3m$, $x_3 = 4m$;
$y_1 = y_2 = y_3 = 0\,m$; $\alpha_1 = 60°$, $\alpha_2 = 135°$, $\alpha_2 = 90°$.

IN QUESTO CASO CONVIENE PRIMA SCOMPORRE LE FORZE NELLE DUE DIREZIONI;
POI SI SOMMA COMPONENTE PER COMPONENTE PER AVERE LE COMPONENTI DELLA RISULTANTE:

F_1: (x) $F_1 \vec{u}_x = F_1 \cdot \cos\alpha_1 = 100 \cdot \cos 60° = 50\,N$
(y) $F_1 \vec{u}_y = F_1 \cdot \text{sen}\,\alpha_1 = 100 \cdot \text{sen}\,60° = 86,60\,N$

F_2: (x) $F_2 \vec{u}_x = F_2 \cdot \cos(\pi - \alpha_2) = -200 \cdot \cos(180-135) = -141,42\,N$
(y) $F_2 \vec{u}_y = F_2 \cdot \text{sen}(\pi - \alpha_2) = +200 \cdot \text{sen}(180-135) = +141,42\,N$

F_3: (x) $F_3 \vec{u}_x = F_3 \cos\alpha_3 = 50 \cdot \cos 90 = 0\,N$
(y) $F_3 \vec{u}_y = F_3 \cos\alpha_3 = 50 \cdot \text{sen}\,90 = 50\,N$

$\Rightarrow RF_x = 50 - 141,42 + 0 = -91,42\,N \qquad RF_y = 86,60 + 141,42 + 50 = 278,02\,N$;

$\Rightarrow |RF| = \sqrt{(-91,42)^2 + (278,02)^2} = \underbrace{262\,N}$. POSSIAMO ANCHE CALCOLARE L'INCLINAZIONE DELLA RISULTANTE:

$\Rightarrow RF_x = |RF_x| \cos\alpha \Rightarrow -91,42 = 262 \cdot \cos\alpha \Rightarrow \underbrace{\alpha = 110°}$.

PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO RISULTANTE SI APPLICA LA FORMULA GENERALE:

$$\vec{RM}_0 = \sum (P_i - O) \wedge \vec{F}_i = (2,0) \wedge (50, 86.60) + (3,0) \wedge (-141,42, +141.42) + $$
$$+ (4,0) \wedge (0,50) =$$

$$= \begin{vmatrix} x & y \\ 2 & 0 \\ 50 & 86.60 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 0 \\ -141,42 & +141,42 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ 4 & 0 \\ 0 & 50 \end{vmatrix} = (2+3+4; 0) + (50 - 141,42 + 0; 86.60 + 141,42 + 50) =$$

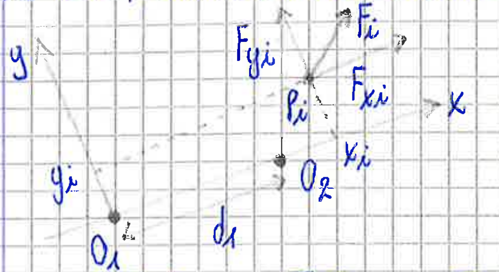
$= (9;0) + (-91,42; 278,02) = (-82,42; 278,02)$. RISOLVENDO LE MATRICI SI OTTIENE:

$$\vec{RM}_0 = (0;0;173,2) + (0;0;424,26) + (0;0;797,46) = \underbrace{(0;0;797,46)};$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{\vec{RM}_0 \wedge \vec{RF}}{|\vec{RF}|^2} = \frac{(221709,82; 72903,79; 0)}{85848} \Rightarrow \xi = \underbrace{2,72\,m}.$$

OVVIAMENTE PRIMA AVREMO UN VETTORE E POI ξ SI CALCOLA DAL SUO MODULO.

ABBIAMO VISTO TRE POSSIBILITÀ DI SCELTA DELLE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO, MA ANCHE DELLE RESTRIZIONI SU ALCUNE DI ESSE. RIASSUMIAMOLE IN BREVE: a) 2 EQUAZIONI PER LA TRASLAZIONE + 1 PER LA ROTAZIONE (NESSUNA RESTRIZIONE); b) 2 EQUAZIONI PER LA ROTAZIONE + 1 PER LA TRASLAZIONE (LA DIREZIONE DELLA TRASLAZIONE NON DEVE ESSERE $\perp$ ALLA RETTA PASSANTE PER I DUE POLI); c) 3 EQUAZIONI PER LA ROTAZIONE (I TRE POLI NON DEVONO ESSERE ALLINEATI). MA PERCHÉ CI SONO QUESTE LIMITAZIONI? CERCHIAMO DI SPIEGARE LA LIMITAZIONE SU b:



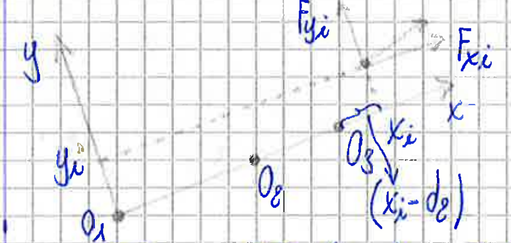
IMMAGINO DI AVERE DUE POLI PER CUI FACCIO PASSARE UNA RETTA CHE POSSIAMO IMMAGINARE ESSERE L'ASSE X. CONSIDERIAMO UN PUNTO DOVE APPLICARE LA FORZA CHE POI SCOMPONIAMO NELLE DUE DIREZIONI E CHIAMO d_1 LA DISTANZA DEI DUE POLI. SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO DOPO AVER ASSUNTO LE CONVENZIONI PER I SEGNI:

$$O_1: -\sum F_{xi}\, y_i + \sum F_{yi}\, x_i + \sum C_i = 0;$$

$$O_2: -\sum F_{xi}\, y_i + \sum F_{yi}(x_i - d_1) + \sum C_i = 0;$$ SOLTANTO CON QUESTE DUE EQUAZIONI FACCIAMONE LA DIFFERENZA:

$$O_1 - O_2: +d_1 \sum F_{yi} = 0$$ ALLA FINE VIENE FUORI L'EQUAZIONE DI EQUILIBRIO PER LA TRASLAZIONE LUNGO L'ASSE y, OVVERO LUNGO LA DIREZIONE $\perp$ ALLA RETTA PASSANTE PER I POLI, QUINDI LA 3ª EQUAZIONE È SOLO UN RICICLO DELLE PRIME DUE.

ADESSO SPIEGHIAMO LA RESTRIZIONE SU c:



CHIAMIAMO SEMPRE CON d_1 LA DISTANZA $\overline{O_1O_2}$ E CHIAMO CON d_2 LA DISTANZA $\overline{O_1O_3}$. ADESSO SCRIVO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO SAPENDO CHE DUE LE HO GIÀ SCRITTE, MI MANCA SOLO QUELLA RISPETTO IL POLO O_3:

$$O_3: -\sum F_{xi}\, y_i + \sum F_{yi}(x_i - d_2) + \sum C_i = 0;$$ ADESSO FACCIO QUESTA TRASFORMAZIONE, OVVERO MOLTIPLICO L'EQUAZIONE PER O_2 PER LA GRANDEZZA d_2 E CI SOTTRAGGO L'EQUAZIONE PER O_3 MOLTIPLICATA PER d_1:

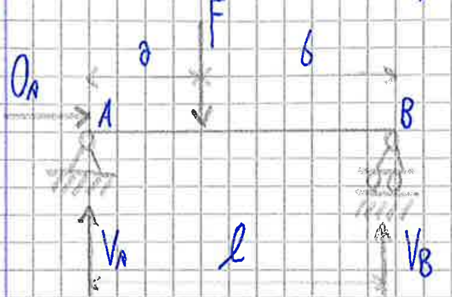
$$d_2\, O_2 - d_1\, O_3: -\cancel{(d_2 - d_1)} \sum F_{xi}\, y_i + \cancel{(d_2 - d_1)} \sum F_{yi}\, x_i - \cancel{d_1 d_2 \sum F_{yi}} + \cancel{d_1 d_2 \sum F_{yi}} + \cancel{(d_2 - d_1)} \sum C_i = 0$$ ALLA FINE RIMANE L'EQUAZIONE RISPETTO O_1, QUINDI ALLA FINE L'EQUAZIONE PER O_1 NON È ALTRO CHE UNA COMBINAZIONE LINEARE DELLE ALTRE DUE, IN SOSTANZA NON AGGIUNGO NIENTE IN TERMINI DI EQUAZIONI. QUINDI QUESTI ACCORGIMENTI SONO UTILI PER NON INCAPPARE IN ANOMALIE DURANTE LA SCRITTURA DELLE EQUAZIONI.

ADESSO INVECE PASSIAMO AI CASI IN CUI ABBIAMO PIÙ ELEMENTI, NON PIÙ UNO SOLO. LA SOSTANZIALE DIFFERENZA È RAPPRE-

REREMO QUESTI CASI, IN QUANTO IL NUMERO DI EQUAZIONI INIZIEREBBE A DIVENTARE TROPPO GRANDE.

TUTTAVIA POSSIAMO INCONTRARE TALVOLTA DEI CASI ANOMALI NEI QUALI LE CONDIZIONI DI VINCOLO NON PORTANO A NESSUNA SOLUZIONE. METTIAMOCI IN UN CASO ISOSTATICO, OVVERO TANTE EQUAZIONI QUANTE SONO LE INCOGNITE. COSA PUÒ CAPITARE?

a) CASO 1: CONSIDERIAMO UN ELEMENTO SOLO, UN ELEMENTO VINCOLATO CON CERNIERA E APPOGGIO (QUINDI 3 EQUAZIONI).



$$\rightarrow: \underbrace{O_A = 0}$$

$$\uparrow: V_A + V_B - F = 0 \implies V_A = F - V_B = F\left(1 - \frac{a}{\ell}\right) = \underbrace{F \cdot \frac{b}{\ell}}$$

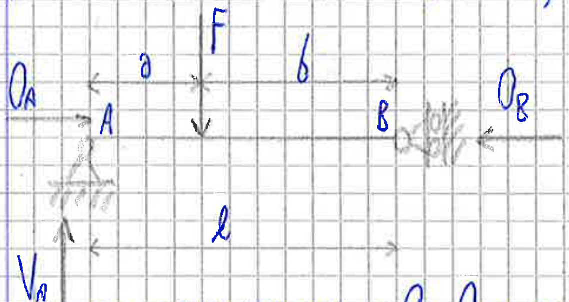
$$\circlearrowleft A: V_B \cdot \ell - F \cdot a = 0 \implies \underbrace{V_B = \frac{F a}{\ell}}$$

ABBIAMO TROVATO DELLE SOLUZIONI, QUINDI IL PROBLEMA È RISOLVIBILE; POSSIAMO VEDERLO IMPOSTANDO IL SISTEMA DI EQUAZIONI USANDO LE MATRICI:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \ell \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ V_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ F \cdot a \end{Bmatrix}$$

POICHÉ IL PROBLEMA È RISOLVIBILE POSSIAMO VERIFICARE CHE IL DETERMINANTE È DIVERSO DA ZERO ED È UGUALE A ℓ. SE OSSERVIAMO V_B NOTIAMO CHE PIÙ a È GRANDE, PIÙ V_B È GRANDE, QUINDI SE LA FORZA È PIÙ VICINA AL PUNTO B È FACILE ASPETTARSI CHE SU QUESTO PUNTO LA REAZIONE CRESCERÀ DI PIÙ.

ADESSO FACCIAMO UNA TRASFORMAZIONE: CON GLI STESSI PEZZI METTIAMO L'APPOGGIO ORIENTATO IN MODO RUOTATO RISPETTO A PRIMA IN CUI ERA FAVORITO LO SCORRIMENTO ORIZZONTALE; ADESSO FAVORIAMO LO SCORRIMENTO VERTICALE, OVVERO:



$$\rightarrow: O_A - O_B = 0$$

$$\uparrow: V_A - F = 0$$

$$\circlearrowleft A: \underbrace{-F \cdot a = 0}\ (?)$$

NELLA PRIMA EQUAZIONE SI DICE SOLO CHE $O_A = O_B$ MA POI NELLE EQUAZIONI SUCCESSIVE NON COMPAIONO PIÙ E QUINDI NON POTREMO TROVARE UNA RELAZIONE PER VALUTARNE L'INTENSITÀ. NELLA TERZA EQUAZIONE INVECE È COME DIRE CHE LA FORZA DEVE ESSERE NULLA AFFINCHÉ L'UGUAGLIANZA SIA CORRETTA, MA SE NON C'È LA FORZA NON CI DOVREBBERO ESSERE NEANCHE LE REAZIONI, QUINDI È UNA SITUAZIONE ANOMALA. INTERPRETIAMO LA COSA IN TERMINI DI MATRICI:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} O_A \\ V_A \\ O_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \\ F \cdot a \end{Bmatrix}$$

L'ULTIMA RIGA DELLA MATRICE È FATTA DI ZERI, QUINDI SIAMO IN UN CASO SINGOLARE IN QUANTO IL SUO DETERMINANTE È ZERO. SI POTREBBE PENSARE CHE LA SCELTA DELLE EQUAZIONI È SBAGLIATA; PROVIAMO ALLORA A FARE UNA COSA DIVERSA:

$$\rightarrow: O_A - O_B = 0$$

$$\circlearrowleft B: V_A \cdot \ell - F \cdot b = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 194

ADESSO FACCIO UNA PICCOLA TRASFORMAZIONE, OVVERO ANNULLO ℓ, QUINDI ALLINEO I DUE ELEMENTI SULLA STESSA RETTA:

ADESSO SCRIVIAMO LE EQUAZIONI DI EQUILIBRIO:

ELEMENTO I: $\rightarrow$: $O_A - O_B = 0$

$\uparrow$: $V_A - V_B = F$

$\circlearrowleft A$: $V_B \cdot \ell_1 = -F \cdot a \Rightarrow \underbrace{V_B = \frac{F \cdot a}{\ell_1}}$

ELEMENTO II: $\rightarrow$: $O_B + O_C = 0$

$\uparrow$: $V_B + V_C = 0$

$\circlearrowleft C$: $V_B \cdot \ell_2 = 0 \Rightarrow \underbrace{V_B = 0}$

DI NUOVO OTTENGO DUE VALORI DIVERSI PER LA STESSA INCOGNITA. IN TERMINI MATRICIALI POSSO RICAVARE LA MATRICE DI PRIMA PONENDO SEMPLICEMENTE $\ell = 0$: SI OSSERVA CHE LA 3^a E LA 6^a RIGA SONO LINEARMENTE DIPENDENTI, QUINDI IL PROBLEMA NON È RISOLVIBILE.

VEDIAMO COME RICONOSCERE I CASI ANOMALI QUASI SENZA FARE NESSUN CALCOLO:

1) POSSIBILITÀ DI TROVARE EQUILIBRIO CON REAZIONI DIVERSE DA ZERO IN ASSENZA DI CARICHI (LE REAZIONI NASCONO PER EQUILIBRARE I CARICHI, SE NON CI SONO CARICHI LE REAZIONI SONO TUTTE NULLE):

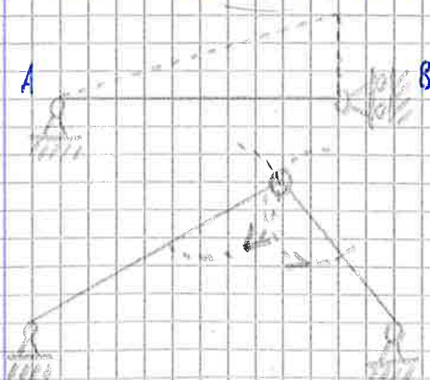
$\rightarrow$: $O_A - O_B = 0 \Rightarrow O_A = O_B = K$

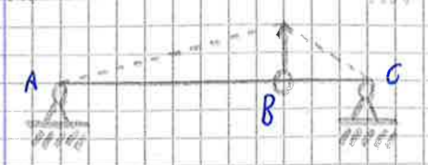
$\uparrow$: $V_A = 0$

$\circlearrowleft B$: $V_A \cdot \ell = 0$

SE PONGO $O_B = K$ OVVERO UGUALE AD UNA COSTANTE IO AVREI CHE IN ASSENZA DI CARICHI TUTTE LE REAZIONI SI ANNULLANO MENTRE UNA SI COMPORTA IN MODO INDIPENDENTE.

2) MOTO RIGIDO INFINITESIMO NON IMPEDITO DAI VINCOLI:

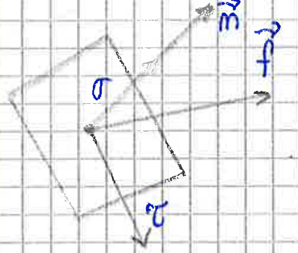




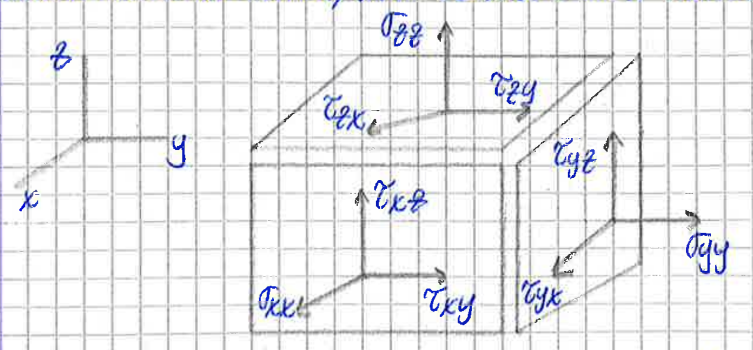
CON LA CERNIERA POSSO SOLO RUOTARE, CON L'APPOGGIO POSSO TRASLARE VERTICALMENTE. TUTTAVIA L'ELEMENTO PUÒ COMPIERE UN MOTO RIGIDO INFINITESIMO NON OSTACOLATO, SE PERÒ IL MOTO PROSEGUE IL VINCOLO INIZIA A TIRARE.

SE INVECE CONSIDERO IL CASO DI PRIMA, L'IMMAGINE SOTTO MI DICE CHE NONOSTANTE I VINCOLI, SE B TENDE A SPOSTARSI I DUE ELEMENTI SI SPOSTANO VERSO L'ALTO (CASO ANOMALO). L'IMMAGINE DI SOPRA INVECE MI FA CAPIRE CHE SE I DUE ELEMENTI FOSSERO STACCATI POTREBBERO RUOTARE, MA SE SONO VINCOLATI LE DUE CIRCONFERENZE SI INCROCEREBBERO E QUINDI IL VINCOLO IMPEDISCE IL MOVIMENTO (NON C'È TANGENZA DELLE CIRCONFERENZE).

VETTORI IN QUANTO SONO DEI VETTORI DIVISO UNO SCALARE. IL PRIMO LIMITE VIENE INDICATO CON $\vec{f}$ E PRENDE IL NOME DI VETTORE DELLA TENSIONE: POICHÉ È UNA FORZA SU UNA SUPERFICIE LA POSSIAMO PARAGONARE AD UNA PRESSIONE, QUINDI IN QUALCHE MODO POSSIAMO DIRE CHE I CARICHI SI TRASMETTONO CON UN MECCANISMO ANALOGO AL CASO DELLE PRESSIONI DEI FLUIDI. IL SECONDO LIMITE INVECE LO POSSIAMO ASSUMERE NULLO, MA PERCHÉ SE ESTRAIAMO UN ΔA INFINITESIMO NON SI TRASMETTE NULLA IN TERMINI DI MOMENTI? IMMAGINIAMO DI TENERE UN FOGLIETTO CON LE DITA, FIN QUANDO LO PRENDIAMO PER UN AREA ABBASTANZA GRANDE QUESTO NON PUÒ RUOTARE E TRASLARE, MA PIÙ L'AREA COLLASSA PIÙ IL PUNTO DI APPLICAZIONE DELLA FORZA SI AVVICINA AL POLO RISPETTO AL QUALE SI CALCOLA IL MOMENTO E POICHÉ IL MOMENTO È UNA FORZA PER UN BRACCIO, SE SI ANNULLA IL BRACCIO L'EQUILIBRIO NON È PIÙ GARANTITO, INFATTI IL FOGLIO INIZIA A RUOTARE.



ANALIZZIAMO LE PROPRIETÀ DEL VETTORE DI TENSIONE. COME SAPPIAMO UN CORPO IN UN CERTO ISTANTE, DAL PUNTO DI VISTA TENSIONALE INTERNO, SI TROVA IN UNA CONDIZIONE DI EQUILIBRIO CHE PUÒ ESSERE ALTERATO TRAMITE L'APPLICAZIONE DI FORZE ESTERNE CHE LO PORTANO FINO A ROTTURA EVENTUALMENTE; IL VETTORE DI TENSIONE DESCRIVE APPUNTO LA FORZA DI CONTATTO ESERCITATA TRA LE PARTI INTERNE DI UN CORPO CONTINUO, ATTRAVERSO LA SUPERFICIE DI SEPARAZIONE. TRAMITE LA NORMALE NOI POSSIAMO ORIENTARE L'AREA; $\vec{f}$ IN GENERALE NON È PARALLELO ALLA NORMALE ALLA SUPERFICIE, MA POSSIAMO SCOMPORLO IN DUE COMPONENTI, UNA COMPONENTE PARALLELA ALLA NORMALE (CHE CHIAMO σ) E UNA NORMALE ALLA NORMALE (CHE CHIAMO τ) DETTA ANCHE COMPONENTE TANGENZIALE (CHE SCORRE SULLA FACCIA). σ È ANALOGA ALLA PRESSIONE DEI FLUIDI, C'È SOLO UNA DIFFERENZA FISICA: NEL FLUIDO LA PRESSIONE PUÒ SOLO COMPRIMERE, IN UN SOLIDO INVECE POSSIAMO SIA ESERCITARE UNA COMPRESSIONE CHE UNA TRAZIONE, IN PARTICOLARE SE $\sigma > 0$ ABBIAMO UNO STATO DI TRAZIONE, SE $\sigma < 0$ ABBIAMO UNO STATO DI COMPRESSIONE. PER CONVENZIONE SI SCEGLIE IL VERSO USCENTE DI σ. τ INVECE NON È PRESENTE NEI FLUIDI IN QUIETE (LA PRESSIONE È SOLO NORMALE, NON È PRESENTE LA COMPONENTE TANGENZIALE); PER UN FLUIDO IN MOTO INVECE AVREMMO ANCHE UNA COMPONENTE TANGENZIALE (COME UN FLUIDO CHE SCORRE IN UN TUBO). L'EFFETTO DI τ È SEMPLICEMENTE RADENTE ALLA SUPERFICIE, QUINDI CAMBIARE SEGNO NON FA CAMBIARE LA SITUAZIONE FISICA.



IN QUESTO STUDIO NON BASTA SOLO AVERE LA DIREZIONE DELLA TENSIONE, MA L'ORIENTAZIONE DELL'AREA È UN DISCORSO SU CUI BISOGNA ANDARE PIÙ IN PROFONDITÀ: CONSIDERIAMO LE FACCE PERPENDICOLARI AGLI ASSI DI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO xyz, SE LA FORZA AGISCE PER ESEMPIO IN DIREZIONE DELL'ASSE y ALLORA NON AGISCE SU TUTTE LE FACCE ALLO STESSO MODO, INFATTI

POSSIAMO ANCHE NOTARE CHE LE COMPONENTI TANGENZIALI SONO QUELLE CHE FANNO RUOTARE, QUELLE NORMALI POSSONO CONTRARRE O COMPRIMERE. QUINDI SOLO LE COMPONENTI TANGENZIALI HANNO BRACCIO: SE COME POLO CONSIDERIAMO IL PUNTO P ALLORA SI VEDE CHE LA COMPONENTE NORMALE HA UNA RETTA DI AZIONE PASSANTE PER IL POLO STESSO (BRACCIO NULLO), MENTRE INVECE QUELLA TANGENZIALE HA BRACCIO CHE È METÀ DELLA LUNGHEZZA DEL LATO.

$$\circlearrowleft P: \tau_{xy}\cdot \overset{(1)}{dx/2}\cdot dy\cdot dz - \tau_{yx}\cdot \overset{(2)}{dy/2}\cdot dx\,dz + (\tau_{xy} + \overset{(3)}{d\tau_{xy}})\,dy\,dz\cdot dx/2 - (\overset{(4)}{\tau_{yx}} + d\tau_{yx})\,dx\cdot dz\cdot dy/2 = 0;$$

IN QUESTA EQUAZIONE I VALORI $dx/2$, $dy/2$ SONO I BRACCI DELLE FORZE; SE CONSIDERIAMO PER ESEMPIO IL TERMINE $\tau_{xy}\,dy\,dz$ QUESTA È LA FORZA MOLTIPLICATA PER L'AREA INFINITESIMA SU CUI AGISCE. IL SEGNO È RELATIVO AL VERSO IN CUI AGISCE LA FORZA. POSSIAMO FARE DELLE SEMPLIFICAZIONI: SUI TERMINI (3) E (4) ABBIAMO DEI TERMINI $(d\tau_{xy}\cdot dy\cdot dz\cdot dx/2)$ DI ORDINE INFINITESIMO SUPERIORE AL SECONDO E SI POSSONO TRASCURARE, QUINDI IN SEGUITO A QUESTA PRIMA SEMPLIFICAZIONE SI OTTIENE:

$$\Rightarrow \tau_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2} - \tau_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2} + \tau_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2} - \tau_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2} = 0$$

TUTTO IL RESTO SI PUÒ SEMPLIFICARE COME SI VEDE E QUINDI ALLA FINE QUELLO CHE RIMANE È:

$$\Rightarrow \cancel{2}\tau_{xy} - \cancel{2}\tau_{yx} = 0 \Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}}$$

QUINDI LE COMPONENTI CHE CONTENGONO GLI STESSI PEDICI INVERTITI SONO UGUALI TRA DI LORO. QUINDI LE COMPONENTI TANGENZIALI SI RIDUCONO DA 9 A 6 (SEI COMPONENTI DIVERSE). SE RIPETIAMO LO STESSO RAGIONAMENTO PER L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE INTORNO AGLI ASSI X E Y SI OTTIENE:

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = \tau_{zx}} \quad e \quad \boxed{\tau_{yz} = \tau_{zy}}$$

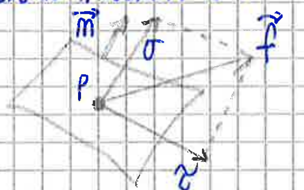
QUINDI ABBIAMO VISTO CHE SU UNA FACCIA ELEMENTARE GENERICA PASSANTE PER IL PUNTO P E NORMALE AL VERSORE $\vec{m}$ AGISCE IL VETTORE DELLA TENSIONE $\vec{f}$. MA SE QUESTA FACCIA DOVESSE CAMBIARE ORIENTAZIONE, COME VARIANO LE COMPONENTI DELLA TENSIONE? SE PRIMA ABBIAMO CONSIDERATO DELLE FACCE NORMALI AI TRE ASSI, ADESSO DOVREMO CAMBIARE NECESSARIAMENTE FIGURA GEOMETRICA, IN PARTICOLARE NON PIÙ UN PARALLELEPIPEDO, MA UN TETRAEDRO; MA PRIMA DI FARE QUESTO CERCHIAMO DI DEFINIRE IL VETTORE DELLA TENSIONE NEL MODO PIÙ ESPLICITO POSSIBILE:

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} f_{mx} \\ f_{my} \\ f_{mz} \end{Bmatrix} \qquad \vec{f}_x = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \qquad \vec{f}_y = \begin{Bmatrix} \tau_{yx} = \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \qquad \vec{f}_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} = \tau_{xz} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} \\ \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

QUESTE SONO VARIE DEFINIZIONI PER VETTORE DELLA TENSIONE: IN PARTICOLARE LE ULTIME TRE SONO QUELLE CHE ABBIAMO VISTO FINORA, PER ESEMPIO $\vec{f}_x$ È IL VETTORE TENSIONE RIFERITO ALLA FACCIA NORMALE ALL'ASSE X CON LE SUE COMPONENTI NORMALI E TANGENZIALI ALLA FACCIA STESSA; SE INVECE NON HO UNA FACCIA NORMALE A UNO DEGLI ASSI (IL RIFERIMENTO È SEMPRE LA TERNA DI ASSI CARTESIANI XYZ) ALLORA LE COMPONENTI DELLA TENSIONE NON SARANNO NÉ NORMALI NÉ TANGENZIALI AL PIANO, MA SARANNO OBLIQUE. QUINDI f_{mx} È LA COMPONENTE LUNGO X RISPETTO ALLA GENERICA $\vec{m}$.

ZIONE DELLA SUPERFICIE. IL TENSORE QUINDI RIASSUME LE TENSIONI AGENTI IN UN GENERICO PUNTO P ED È UNA MATRICE 3x3 SIMMETRICA: FUORI DALLA DIAGONALE INFATTI ABBIAMO I TERMINI DI TENSIONE TANGENZIALE (UGUALI A DUE A DUE LUNGO I PIANI CHE FORMANO UN DIEDRO PER FAVORIRE L'EQUILIBRIO); SULLA DIAGONALE INVECE ABBIAMO LE TENSIONI NORMALI DI TIPO σ. IL TENSORE È FONDAMENTALE IN QUANTO CONTIENE TUTTE LE INFORMAZIONI RELATIVE ALLA POSIZIONE DI UN PUNTO: SE PER LA VELOCITÀ BASTAVANO SOLO LE COMPONENTI LUNGO I 3 ASSI, PER LA TENSIONE INVECE DOBBIAMO INDICARE LA TENS FACCIA SULLA QUALE LA TENSIONE AGISCE E LUNGO QUALE DIREZIONE (DA CUI LE 6 COMPONENTI NECESSARIE), QUINDI UNA VOLTA DEFINITA LA TENSIONE, L'INCLINAZIONE DELLA SUPERFICIE È GIÀ STATA ASSEGNATA. IL TENSORE CONTIENE LE TENSIONI SULLE FACCE NORMALI AGLI ASSI E DA QUESTE INFORMAZIONI POSSO RICAVARE IL VETTORE DELLA TENSIONE SU UNA FACCIA DI INCLINAZIONE QUALUNQUE.

TUTTO QUESTO APRE LA STRADA A DELLE CONSIDERAZIONI IMPORTANTI, INFATTI PARLIAMO DI TENSIONI PRINCIPALI. IN PRECEDENZA ABBIAMO DETTO CHE IN GENERALE $\vec{f}$ NON È PARALLELO A $\vec{m}$, QUINDI LA TENSIONE NON È DI TIPO NORMALE IN QUANTO CI SONO LE TENSIONI TANGENZIALI τ:



ESISTONO DELLE CONDIZIONI TALI CHE $\vec{f}$ PUÒ ESSERE PARALLELO A $\vec{m}$? PER RISPONDERE DOBBIAMO RICORDARCI GLI AUTOVALORI E I AUTOVETTORI: UN AUTOVETTORE È UN VETTORE NON NULLO LA CUI IMMAGINE È IL VETTORE STESSO (STESSO ORIENTAMENTO NELLO SPAZIO) MOLTIPLICATO PER UN NUMERO DETTO AUTOVALORE. IN PARTICOLARE PER DEFINIZIONE λ E $\{v\}$ SONO RISPETTIVAMENTE UN AUTOVALORE E UN AUTOVETTORE DELLA MATRICE $[A]$ SE VALE QUESTA RELAZIONE:

$\Rightarrow [A]\{v\} = \lambda\{v\} \Rightarrow ([A] - \lambda[I])\{v\} = \{0\}$ E LA SOLUZIONE DI QUESTO SISTEMA DI EQUAZIONI HA SOLUZIONE NON BANALE (VETTORE NULLO) SE VALE CHE:

$\Rightarrow \det([A] - \lambda[I]) = 0$ QUESTO CI PORTA ALLA SCRITTURA DI UN POLINOMIO IN CUI LE SOLUZIONI $\lambda_1, \lambda_2 \dots$ SONO GLI AUTOVALORI, CHE POI ANDANDO A SOSTITUIRE NELLA RELAZIONE $[A]\{v\} = \lambda\{v\}$ SI POSSONO AVERE GLI AUTOVETTORI $\{v_1\}$, $\{v_2\}$... NEL NOSTRO CASO $[A] = [\sigma]$ E QUINDI QUESTO CORRISPONDE ALLA RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI PER IL TENSORE, OVVERO:

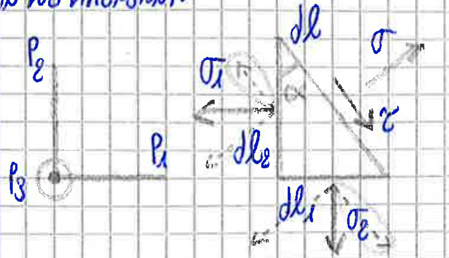
$\Rightarrow [\sigma]\{v\} = \lambda\{v\} \Rightarrow \det([\sigma] - \lambda[I]) = 0$ IL TERMINE DEL DETERMINANTE SARÀ UN POLINOMIO DI TERZO GRADO NELL'INCOGNITA λ; LA RICERCA DI AUTOVALORI E AUTOVETTORI SODDISFA LA NOSTRA RICHIESTA INIZIALE DI RICERCARE DELLE ORIENTAZIONI PRIVILEGIATE DELLE FACCE TALE CHE $\vec{f}$ SIA PARALLELO A $\vec{m}$, OVVERO $\{f\} = \lambda\{v\}$ CON $\{v\} = \{m\}$ OVVIAMENTE. IL SISTEMA AMMETTE SOLUZIONE NON BANALE SE:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

ESPANDENDO QUESTO DETERMINANTE IL POLINOMIO CHE SI OTTIENE È:

$\Rightarrow \lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$; I COEFFICIENTI I_1, I_2, I_3 SONO LEGATI ALLE TENSIONI E SONO DETTI INVARIANTI, OVVERO INDIPENDENTI DAL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO xyz SCELTO. PENSIAMO

COMPONENTE TANGENZIALE, MA SE FOSSE COSÌ COME SAPPIAMO SULLA FACCIA A FIANCO CI DOVREBBE ESSERE UNA GEMELLA PER MANTENERE L'EQUILIBRIO, MA ABBIAMO VISTO CHE SU QUESTE FACCE ABBIAMO SOLO LA COMPONENTE NORMALE. GUARDIAMO LA SITUAZIONE IN DUE DIMENSIONI:



CHIAMIAMO dl_3 LA DIMENSIONE LEGATA ALLO SPESSORE CONCORDE CON LA DIREZIONE P_3. α VA VARIARE LA PROPORZIONE DEI LATI E IN QUESTO MODO POSSIAMO SCRIVERE: $dl_1 = dl \sin\alpha$ E $dl_2 = dl \cos\alpha$. PER FAR COMPARIRE LE DUE INCOGNITE σ E τ POSSO IMPOSTARE UNA EQUAZIONE DI EQUILIBRIO LUNGO LA DIREZIONE NORMALE AL PIANO INCLINATO E UNA LUNGO LA DIREZIONE TANGENZIALE AL PIANO INCLINATO:

$$: \sigma\, dl\, \cancel{dl_3} - \sigma_1\, dl_2\, \cancel{dl_3} \cos\alpha - \sigma_2\, dl_1\, \cancel{dl_3} \sin\alpha = 0;$$

$$\Rightarrow \sigma - \sigma_1 \cos^2\alpha - \sigma_2 \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \boxed{\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha}$$

ABBIAMO UNA RELAZIONI TRA LE TENSIONI PRINCIPALI E QUELLE SU UNA FACCIA QUALUNQUE.

$$: \tau\, dl\, \cancel{dl_3} - \sigma_1\, dl_2\, \cancel{dl_3} \sin\alpha + \sigma_2\, dl_1\, \cancel{dl_3} \cos\alpha = 0;$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos\alpha \sin\alpha}$$

QUINDI DATE LE TENSIONE PRINCIPALI ED EVENTUALMENTE L'INCLINAZIONE α, SONO FISSATE LE TENSIONI SULLA FACCIA OBLIQUA. PRIMA DI ARRIVARE ALLA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DOBBIAMO FARE ANCORA UN PASSO: σ E τ DIPENDONO DA TERMINI DI 2° GRADO $(\cos^2\alpha, \sin^2\alpha)$, ALLORA POSSIAMO RICORDARCI DI QUESTE RELAZIONI:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos\alpha \sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

SOSTITUENDO SI TROVA:

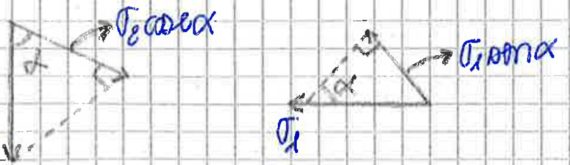
$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha \Rightarrow \sigma - \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\alpha \sin\alpha \Rightarrow \tau = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

ADESSO SOMMIAMO E QUADRIAMO LE DUE RELAZIONI:

$$\Rightarrow \Big(\sigma - \underbrace{\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}}\Big)^2 + \underbrace{\tau}^2 = \underbrace{\Big(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\Big)^2} \Rightarrow \boxed{(X - X_c)^2 + Y^2 = R^2}$$

QUELLO CHE ABBIAMO OTTENUTO È L'EQUAZIONE DI UNA CIRCONFERENZA CON ORDINATA NULLA E ASCISSA DEL CENTRO DATA DA X_c (IL CENTRO DUNQUE È SULL'ASSE DELLE ASCISSE); IL RAGGIO INVECE È LA SEMIDIFFERENZA DELLE TENSIONI σ_1 E σ_2.

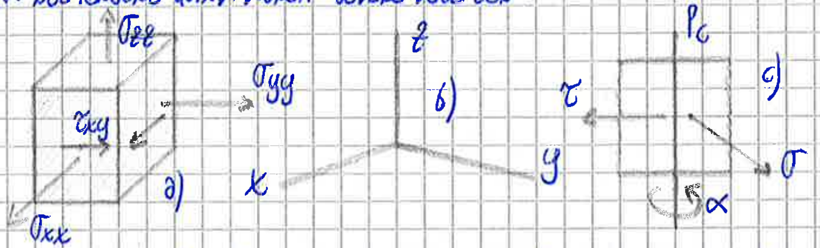
N.B



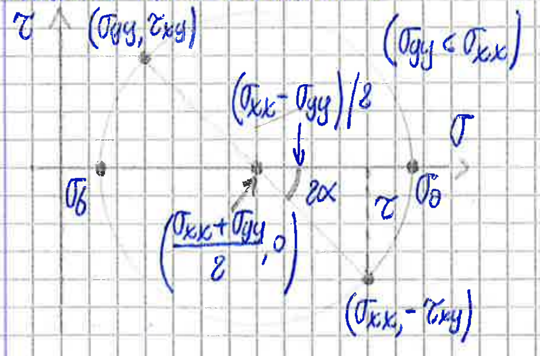
PERCHÈ UN MATERIALE CEDE QUANDO È SOTTOPOSTO AD UNA CERTA TENSIONE.

I CERCHI DI MOHR POSSONO ESSERE USATI COME STRUMENTO DI CALCOLO PER RISOLVERE DEI PROBLEMI. QUELLO CHE CERCHEREMO DI FARE È COSTRUIRE DIRETTAMENTE I CERCHI DI MOHR SENZA AVER PRIMA RISOLTO IL PROBLEMA DEGLI AUTOVETTORI. LA COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR SENZA CONOSCERE GLI AUTOVETTORI È POSSIBILE SE SI CONOSCONO DUE CONDIZIONI: 1) ALMENO UNA DELLE DIREZIONI PRINCIPALI E LA RELATIVA TENSIONE PRINCIPALE; 2) LE TENSIONI τ E σ SU DUE PIANI ORTOGONALI TRA DI LORO APPARTENENTI AL FASCIO DI PIANI INCERNIERATO IN QUELLA DIREZIONE PRINCIPALE GIÀ NOTA. PER ILLUSTRARE IL PROCEDIMENTO ASSUMIAMO CHE z SIA LA DIREZIONE PRINCIPALE NOTA: NEL TENSORE QUINDI DOVREMO VEDERE DEGLI ZERI:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



PER QUANTO RIGUARDA LA SECONDA CONDIZIONE DEVO TROVARE DUE PIANI ORTOGONALI TRA DI LORO APPARTENENTI AL FASCIO DI PIANI PASSANTE PER LA DIREZIONE z CHE CHIAMO P_c ("C" È SOLO PER UNA QUESTIONE DI NOME PERCHÈ NON SO L'ORDINE DELLE DIREZIONI PRINCIPALI); x E y POSSO PENSARLI COME INCERNIERATI RISPETTO L'ASSE z, IN PARTICOLARE SE CONSIDERO LA FIGURA a) LE DUE FACCE SEGNATE LE POSSO VEDERE COME UNO STESSO PIANO CHE RUOTA INTORNO ALL'ASSE z. QUINDI SICCOME SUL CERCHIO DI MOHR SI DESCRIVE LA VARIAZIONE DI τ E σ AL VARIARE DELL'INCLINAZIONE DELLA FACCIA POSSO INIZIARE A METTERE I PUNTI FACENDO ATTENZIONE AI SEGNI: $(\sigma_{xx}, \ominus\tau_{xy})$ (GUARDANDO LA FIGURA c) SULLA QUALE ABBIAMO FISSATO I VERSI CONVENZIONALI POSITIVI), STATO DI TENSIONE SULLA SUPERFICIE NORMALE A x; (σ_{yy}, τ_{xy}) STATO DI TENSIONE SULLA SUPERFICIE NORMALE A y. ENTRAMBI I PIANI SONO ORTOGONALI TRA DI LORO E NEL CERCHIO GLI ANGOLI SONO RADDOPPIATI E RICORDIAMOCI SEMPRE CHE AD OGNI FACCIA CORRISPONDE UN PUNTO SUL DIAGRAMMA:



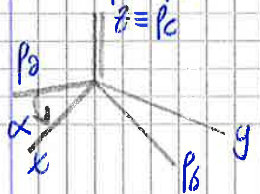
IL CENTRO È DATO DA $\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$ MENTRE IL RAGGIO È DATO DAL TEOREMA DI PITAGORA:

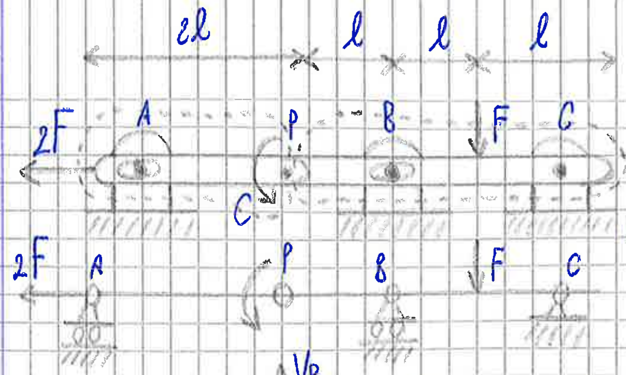
$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

QUINDI IL CENTRO E IL RAGGIO SI POSSONO RICAVARE MOLTO FACILMENTE; I DUE ESTREMI DEL CERCHIO DI MOHR SI POSSONO RICAVARE SEMPLICEMENTE AGGIUNGENDO O SOTTRAENDO IL VALORE DEL RAGGIO ALL'ASCISSA DEL CENTRO:

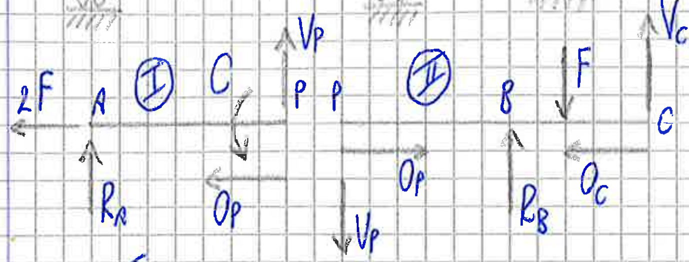
$$\Longrightarrow \sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

MANCANO ANCORA LE ALTRE DUE DIREZIONI PRINCIPALI CHE POSSIAMO CHIAMARE P_a E P_b E QUESTE SI POSSONO DETERMINARE SEMPRE PER MEZZO DEL CERCHIO. RICORDIAMOCI INNANZITUTTO CHE α RAPPRESENTA L'ANGOLO DI INCLINAZIONE TRA L'ASSE P_a E L'ASSE x CHE PUÒ ESSERE RICAVATO FACENDO IL RAPPORTO TRA IL CATETO VERTICALE E QUELLO ORIZZONTALE:





$F = 2000\,N$, $C = 1000\,Nm$, $l = 0{,}5\,m$
(3 cerniere, più una interna)



LA STRUTTURA PRESENTA DUE APPOGGI, UNA CERNIERA ESTERNA E UNA INTERNA. IL PUNTO P RECI=TA I DUE ELEMENTI.

ELEMENTO I

$\leftarrow$: $2F + O_P = 0 \Rightarrow 2F = -O_P \Rightarrow \underbrace{O_P = -2F}$

$\uparrow$: $R_A + V_P = 0 \Rightarrow R_A = -V_P = \underbrace{-C/2l}$

$\circlearrowleft A$: $-V_P \cdot 2l + C = 0 \Rightarrow \underbrace{V_P = \frac{C}{2l}}$

ELEMENTO II

$\uparrow$: $-V_P + V_B - F + V_C = 0$ *

$\rightarrow$: $O_P - O_C = 0 \Rightarrow O_P = \underbrace{O_C = -2F}$

$\circlearrowleft C$: $-V_B \cdot 2\cancel{l} + F \cdot \cancel{l} + V_P \cdot 3\cancel{l} = 0$

$\Rightarrow -V_B \cdot 2 + F + 3 \cdot C/2l = 0$

$\Rightarrow \underbrace{V_B = F/2 - 3C/4l}$

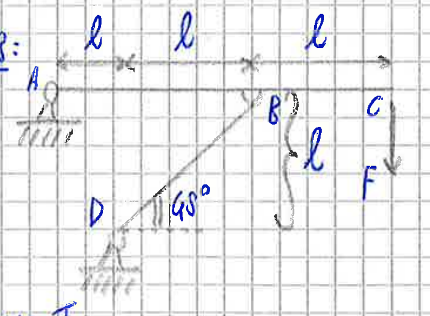
$$* \; -\frac{C}{2l} + \frac{F}{2} - \frac{3C}{4l} - F + V_C = 0$$

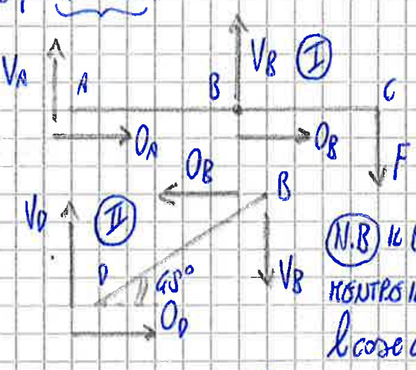
$$\Rightarrow \underbrace{V_C = \frac{F}{2} + \frac{C}{4l}}$$

QUINDI $|R_A| = |V_P| = \underbrace{1000\,N}$, $|R_B| = \underbrace{500\,N}$, $|V_C| = \underbrace{1500\,N}$,

$|O_P| = |O_C| = \underbrace{4000\,N}$

EX 3:





(N.B) IL BRACCIO DI $O_B = l \sin 45°$, MENTRE IL BRACCIO DI V_B È $l \cos 45°$, SE $\overline{BD} = l$.

ELEMENTO I

$\uparrow$: $V_A + V_B - F = 0 \Rightarrow V_A + \frac{3}{2}F - F = 0 \Rightarrow \underbrace{V_A = \frac{F}{2}}$

$\rightarrow$: $O_A + O_B = 0 \Rightarrow O_A = -O_B = \underbrace{-3/2F}$

$\circlearrowleft A$: $V_B \cdot 2\cancel{l} - F \cdot 3\cancel{l} = 0 \Rightarrow \underbrace{V_B = \frac{3}{2}F}$

ELEMENTO II

$\uparrow$: $V_D - V_B = 0 \Rightarrow \underbrace{V_D = 3/2F}$

$\rightarrow$: $O_D - O_B = 0 \Rightarrow O_D = O_B = \underbrace{3/2F}$

$\circlearrowleft D$: $O_B \frac{\cancel{l}}{\sqrt{2}} - V_B \frac{\cancel{l}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow \underbrace{O_B = 3/2F}$

GRAZIE AL TENSORE POSSIAMO DETERMINARE IL VETTORE DELLA TENSIONE SU UNA FACCIA DI QUALUNQUE INCLINAZIONE; FISSATA L'INCLINAZIONE IL VETTORE DELLA TENSIONE È DATO. IL TENSORE ASSUME QUESTA FORMA:

$$\begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \Rightarrow \{f\} = [\sigma]\{\vec{m}\};$$

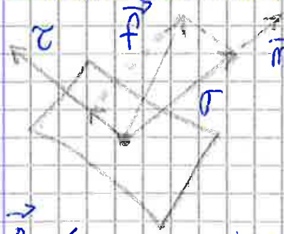
$$\{f_1\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 250 \\ -90 \\ 110 \end{Bmatrix} \Rightarrow |f_1| = \sqrt{(250)^2 + (-90)^2 + (110)^2} = \underbrace{288\ MPa}$$

$$\{f_2\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -90 \\ 310 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow |f_2| = \sqrt{(-90)^2 + (310)^2} = \underbrace{323\ MPa}$$

$$\{f_3\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 110 \\ 0 \\ -180 \end{Bmatrix} \Rightarrow |f_3| = \sqrt{(110)^2 + (-180)^2} = \underbrace{211\ MPa}$$

$$\{f_4\} = \begin{bmatrix} 250 & -90 & 110 \\ -90 & 310 & 0 \\ 110 & 0 & -180 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 155,88 \\ 127,01 \\ -40,41 \end{Bmatrix} \Rightarrow |f_4| = \sqrt{(155,88)^2 + (127,01)^2 + (-40,41)^2} = \underbrace{205\ MPa}$$

PER TROVARE τ E σ POSSO RAGIONARE COSÌ:



LA COMPONENTE σ SI TROVA SEMPLICEMENTE FACENDO LA PROIEZIONE DI $\vec{f}$ LUNGO LA DIREZIONE NORMALE, QUINDI POSSIAMO FARE UN SEMPLICE PRODOTTO SCALARE TRA $\vec{f}$ E $\vec{m}$;
LA COMPONENTE τ SI TROVA SEMPLICEMENTE USANDO IL TEOREMA DI PITAGORA.

$$\vec{f_1} = (250, -90, 110) \quad \vec{m}_1 = (1,0,0) \Rightarrow \sigma = (250, -90, 110)(1,0,0) = \underbrace{250\ MPa}$$

$$\Rightarrow \tau = \sqrt{|f_1|^2 - (\sigma)^2} = \sqrt{(288)^2 - (250)^2} = 142\ MPa.$$

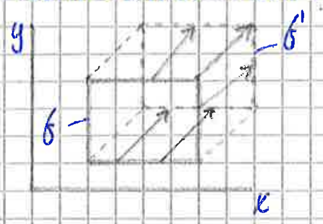
$$\vec{f_2} = (-90, 310, 0) \quad \vec{m}_2 = (0,1,0) \Rightarrow \sigma = (-90, 310, 0)(0,1,0) = \underbrace{310\ MPa}$$

$$\Rightarrow \tau = \sqrt{(323)^2 - (310)^2} = \underbrace{90\ MPa}.$$

$$\vec{f_3} = (110, 0, -180) \quad \vec{m}_3 = (0,0,1) \Rightarrow \sigma = (110, 0, -180)\cdot(0,0,1) = \underbrace{-180\ MPa}$$

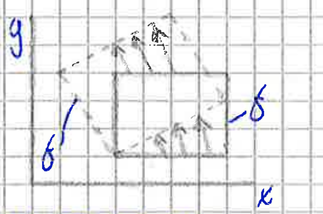
SENZA CHE IL MOTO RIGIDO INTERVENGA. OVVIAMENTE QUESTO PROBLEMA È STATO RISOLTO E INIZIAMO PER PRIMA COSA A FARE DELLE CONSIDERAZIONI. ABBIAMO DUE TIPI DI MOTO RIGIDO:

1) TRASLAZIONE:



PER QUESTO TIPO DI MOTO IL VETTORE SPOSTAMENTO È LO STESSO PER TUTTI I PUNTI DEL CORPO. L'IMMAGINE NON RAPPRESENTA UN PARALLELEPIPEDO, MA UN RETTANGOLO IN DUE POSIZIONI DIVERSE.

2) ROTAZIONE:



IN QUESTO CASO INVECE IL VETTORE SPOSTAMENTO CAMBIA DA PUNTO A PUNTO, IN PARTICOLARE LO SPOSTAMENTO È TANTO MAGGIORE QUANTO PIÙ È LONTANO IL PUNTO DAL CENTRO DI ROTAZIONE.

ABBIAMO DUE TIPI DI MOTO DEFORMATIVO:

1) DILATAZIONE:

NEL CASO DELLA DILATAZIONE I LATI DI UN ELEMENTO CHE SI DEFORMA VARIANO DI LUNGHEZZA, MA LE ORIENTAZIONI SI CONSERVANO (CIÒ CHE È ORIZZONTALE RESTA ORIZZONTALE, CIÒ CHE È VERTICALE RESTA VERTICALE). CAMBIANO I RAPPORTI TRA I LATI.

2) SCORRIMENTO:

NEL CASO DELLO SCORRIMENTO INVECE I LATI VARIANO DI ORIENTAZIONE, MA LE LUNGHEZZE DEI LATI SI CONSERVANO. LA DISTINZIONE TRA SCORRIMENTO E DILATAZIONE NON VALE SE ABBIAMO SEGMENTI ORIENTATI DIVERSAMENTE, COME PER ESEMPIO LA DIAGONALE: NEL CASO DELLA DILATAZIONE LA DIAGONALE HA CAMBIATO ANCHE ORIENTAZIONE, NEL CASO DELLO SCORRIMENTO HA CAMBIATO LUNGHEZZA. QUINDI È NATURALE PENSARE CHE DIETRO QUESTA DISTINZIONE CI SIA QUALCHE COSA DI PIÙ COMPLICATO.

INIZIAMO AD ANALIZZARE IL FENOMENO DELLA DILATAZIONE E COME MISURARLO. DURANTE LA DILATAZIONE I LATI SI DEFORMANO, ALLUNGANDOSI O ACCORCIANDOSI, MANTENENDO LA STESSA ORIENTAZIONE; PER POTER CONTINUARE A RAGIONARE A LIVELLO PUNTUALE (INFATTI LO SPOSTAMENTO AVVIENE A LIVELLO LINEARE) NOI ANDREMO A CONSIDERARE SPOSTAMENTI PICCOLI, IPOTESI CHE CI CONSENTE DI STUDIARE IL PROBLEMA DAL PUNTO DI VISTA PRATICO. NON È SUFFICIENTE RAGIONARE IN TERMINI MACROSCOPICI DI SPOSTAMENTO PERCHÉ NON SI TERREBBE CONTO DELLE CARATTERISTICHE DEL MATERIALE, INFATTI PER ESEMPIO DIRE CHE UN ALBERO SI PIEGA DI 1 mm SOTTO L'EFFETTO DI UN CARICO NON CI CONSENTE DI DIRE SE È MOLTO O POCO DEFORMATO. QUINDI SE ABBIAMO DUE PUNTI A E B DISTANTI l, DOPO LA DEFORMAZIONE QUESTI OCCUPERANNO DUE NUOVE POSIZIONI A' E B' E AVRANNO UNA NUOVA DISTANZA l'. LA VARIAZIONE DI DISTANZA È DATA DA $u = l' - l$, MA PER TENERE CONTO DELLE CARATTERISTICHE DEL MATERIALE DOVREMO RAPPORTARE TUTTO ALLA LUNGHEZZA INIZIALE. QUINDI LA DILATAZIONE È DEFINITA COSÌ:

$\Rightarrow \varepsilon = (l'-l)/l = \underbrace{u/l}$ MA RAGIONANDO IN TERMINI INFINITESIMI: $\varepsilon = (dl' - dl)/dl = \underbrace{du/dl}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 194

GLI EFFETTI DI ROTAZIONE, DILATAZIONE E SCORRIMENTO; CONTIENE TUTTE LE VARIAZIONI DELLE COMPONENTI LUNGO LE 3 DIREZIONI.
QUESTA MATRICE PUÒ ESSERE SCOMPOSTA IN QUESTO MODO:

$$\Rightarrow [J] = \frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J] = \text{(ADESSO AGGIUNGO E SOTTRAGGO LA METÀ DELLA TRASPOSTA)} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}[J]}_{//} + \underbrace{\frac{1}{2}[J]}_{\times} + \underbrace{\frac{1}{2}[J]^T}_{//} - \underbrace{\frac{1}{2}[J]^T}_{\times}; \text{ ANALIZZIAMO PRIMA LA SOMMA:}$$

$$\frac{1}{2}[J] + \frac{1}{2}[J]^T = \begin{bmatrix} \partial u/\partial x & 1/2(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) & 1/2(\partial u/\partial z + \partial w/\partial x) \\ 1/2(\partial v/\partial x + \partial u/\partial y) & \partial v/\partial y & 1/2(\partial v/\partial z + \partial w/\partial y) \\ 1/2(\partial w/\partial x + \partial u/\partial x) & 1/2(\partial w/\partial y + \partial v/\partial z) & \partial w/\partial z \end{bmatrix}$$

POSSIAMO FARE DELLE OSSERVAZIONI SU QUESTA MATRICE: I TERMINI DELLA DIAGONALE COINVOLGONO TUTTI UN SOLO ASSE E QUINDI SONO TUTTI TERMINI DI DILATAZIONE; FUORI DIAGONALE INVECE ABBIAMO DEI TERMINI CHE COINVOLGONO SEMPRE DUE ASSI E QUINDI SONO TUTTI TERMINI DI SCORRIMENTO DIVISO 2. POSSIAMO INDICARE CON:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \text{I TERMINI DI DILATAZIONE;}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xy} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{xz} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\gamma_{yz} \quad \text{I TERMINI DI}$$

SCORRIMENTO. QUESTA MATRICE HA QUALCHE AFFINITÀ CON LE TENSIONI: NEL TENSORE SULLA DIAGONALE AVEVAMO LE DIREZIONI NORMALI, FUORI DIAGONALE AVEVAMO I TERMINI TANGENZIALI. PER QUESTO MOTIVO QUESTA MATRICE LA CHIAMO $[\varepsilon]$ E PRENDE IL NOME DI <u>TENSORE DELLA DEFORMAZIONE</u>. QUELLO CHE RIMANE INVECE, OVVERO LA DIFFERENZA:

$$\frac{1}{2}[J] - \frac{1}{2}[J]^T = \begin{bmatrix} 0 & 1/2(\partial u/\partial y - \partial v/\partial x) & 1/2(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x) \\ 1/2(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) & 0 & 1/2(\partial v/\partial z - \partial w/\partial y) \\ 1/2(\partial w/\partial x - \partial u/\partial z) & 1/2(\partial w/\partial y - \partial v/\partial z) & 0 \end{bmatrix}$$

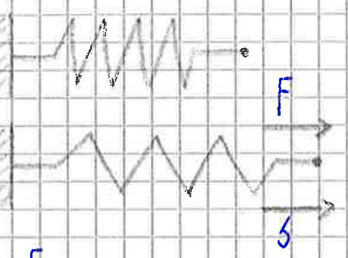
DI CONSEGUENZA QUESTA MATRICE, CHE CHIAMIAMO $[\Omega]$ RAPPRESENTA QUEL CONTRIBUTO DOVUTO ALLA ROTAZIONE RIGIDA.
MA ALLORA POSSIAMO SCRIVERE LA MATRICE JACOBIANA COME SOMMA DI DUE CONTRIBUTI:

$\Rightarrow [J] = [\varepsilon] + [\Omega]$ MA A ME INTERESSA SOLO IL CONTRIBUTO DELLA DEFORMAZIONE E QUINDI DEI DUE MEMBRI CONSIDERO SOLO IL PRIMO; MA ALLORA POSSO SCRIVERE:

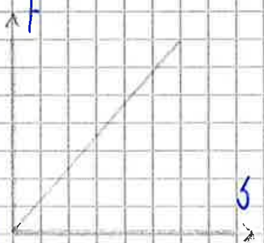
$\Rightarrow \{dU\} = [\varepsilon]\{dX\}$ CHE DESCRIVE LA VARIAZIONE DI CONFIGURAZIONE DEL VETTORE dX IN TERMINI DELLA SOLA DILATAZIONE E SCORRIMENTO. IL TENSORE DELLA DEFORMAZIONE È UNA MATRICE 3×3 SIMMETRICA CHE ESPRIME LO STATO DI DEFOR-

VALORI DI ε E $\gamma/2$ CORRISPONDONO A SEGMENTI CHE FORMANO UN ANGOLO α RISPETTO ALLA DIREZIONE PRINCIPALE. UN SEGMENTO CHE PER ESEMPIO FORMA UN ANGOLO α RISPETTO P_1 SUBISCE UNA DILATAZIONE CHE CORRISPONDE ALL'ASCISSA DEL PUNTO E UNO SCORRIMENTO CHE CORRISPONDE ALL'ORDINATA, QUINDI PER ESEMPIO SE $\alpha = 0$ IL SEGMENTO È ALLINEATO CON LA DIREZIONE PRINCIPALE E QUINDI VIENE SOLO TIRATO, MA NON RUOTATO. STESSA COSA SI RIPETE PER TUTTI E 3 I CERCHI. TUTTAVIA PER LE DEFORMAZIONI I CERCHI DI MOHR LI USEREMO MOLTO MENO.

ADESSO DOBBIAMO LEGARE LO STATO DI TENSIONE ALLO STATO DI DEFORMAZIONE; QUESTA RELAZIONE È LEGATA A COME IL MATERIALE RISPONDE ALLE SOLLECITAZIONI. POSSIAMO USARE DUE APPROCCI PER QUESTO STUDIO: 1) APPLICARE DEI CARICHI E VEDERE COME SI DEFORMA IL MATERIALE; 2) SI APPLICA LA DEFORMAZIONE E SI OSSERVA LO SFORZO, OVVERO COME IL MATERIALE REAGISCE OPPONENDOSI AD ESSI.



CONSIDERIAMO UN OGGETTO BANALE COME UNA MOLLA; TENENDO FERMO UN ESTREMO (E QUINDI METTENDO DA PARTE IL MOTO RIGIDO) ALL'ALTRO ESTREMO SI PUÒ ESERCITARE UNA FORZA NOTA E POI MISURARE CON UNO STRUMENTO L'EFFETTO δ. OPPURE IMPONGO UN ALLUNGAMENTO CONTROLLATO APPLICANDO UNO SFORZO A CUI LA MOLLA REAGISCE ESERCITANDO UNA REAZIONE. SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:



C'È UNA RELAZIONE DI PROPORZIONALITÀ DIRETTA TRA F E δ CHE SI PUÒ QUINDI ESPRIMERE COME:
$\Rightarrow \underbrace{F = K \cdot \delta}$ CON K UNA COSTANTE CHE DESCRIVE LA RIGIDEZZA DELLA MOLLA, IN PARTICOLARE PIÙ È GRANDE LA COSTANTE K PIÙ PICCOLO È L'ALLUNGAMENTO; OPPURE A PARITÀ DI ALLUNGAMENTO MAGGIORE È K PIÙ GRANDE È LO SFORZO CHE SERVE. QUESTO COMPORTAMENTO È DETTO ELASTICITÀ LINEARE ED È IL PIÙ SEMPLICE CHE SI PUÒ RISCONTRARE NEI MATERIALI. IL TERMINE "ELASTICO" È LEGATO AL FATTO CHE RIMUOVENDO LA CAUSA ANCHE L'EFFETTO SPARISCE (QUINDI SE RIMUOVO IL CARICO LA DEFORMAZIONE ISTANTANEAMENTE SI ANNULLA, OPPURE ANNULLANDO L'ALLUNGAMENTO IL MATERIALE NON MANIFESTA PIÙ UNA REAZIONE); QUINDI TUTTO QUESTO È LEGATO AL CONCETTO DI REVERSIBILITÀ. PER GLI ELASTOMERI INVECE NON VALE QUESTO IN QUANTO IL LEGAME TRA F E δ NON È LINEARE (SI PARLA DI MATERIALE IPERELASTICO). ALTRI COMPORTAMENTI CHE POSSIAMO RICORDARE SONO: 1) NON ELASTICO, IN CUI IL CASO PIÙ SEMPLICE È IL COMPORTAMENTO PLASTICO, OVVERO RIMOSSA LA CAUSA L'EFFETTO RIMANE (È UN FENOMENO ISTANTANEO IN QUANTO MENTRE DEFORMIAMO L'EFFETTO SI VEDE SUBITO); 2) SCORRIMENTO VISCOSO (DETTO ANCHE CREEP), UN PROCESSO CHE AVVIENE LENTAMENTE NEL TEMPO (UN PROVINO SOTTO CARICO CHE NEL TEMPO SI DEFORMA SEMPRE DI PIÙ) E IRREVERSIBILE IN QUANTO IL PROVINO NON TORNA ALLE CONDIZIONI DI PARTENZA, MA NON È ISTANTANEO COME NEI PLASTICI.

ADESSO METTIAMO DA PARTE LA GEOMETRIA DELL'OGGETTO E IMMAGINIAMO DI PRENDERE UN CAMPIONCINO INFINITESIMO DI MATERIALE E DI STUDIARNE IL COMPORTAMENTO IN TERMINI DI TENSIONI E DEFORMAZIONI. IL NOSTRO CAMPIONCINO È SOTTOPOSTO ALLE VARIE TENSIONI σ E τ (6 COMPONENTI); ADESSO IMMAGINIAMO DI APPLICARE UNA TENSIONE (τ O σ VARIANDOLA), UNA COMPONENTE ALLA VOLTA, POI SIMULTANEAMENTE; SUCCESSIVAMENTE MISURIAMO LA DEFORMAZIONE ε O γ.

ABBIAMO TROVATO 3 RAPPORTI DI PROPORZIONALITÀ E VALE LA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI: SE ABBIAMO TUTTE LE TENSIONI IN SIMULTANEA, OGNUNA DÀ IL SUO EFFETTO:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha(T - T_0)$$

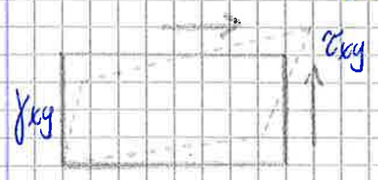
$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} + \frac{1}{E}\sigma_{yy} - \frac{\nu}{E}\sigma_{zz} + \alpha(T - T_0)$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{xx} - \frac{\nu}{E}\sigma_{yy} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} + \alpha(T - T_0)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy} \qquad \gamma_{xz} = \frac{1}{G}\tau_{xz} \qquad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz}$$

TUTTE QUESTE RELAZIONI LEGANO LE COMPONENTI DI TENSIONE A QUELLE DI DEFORMAZIONE. FINORA ABBIAMO CONSIDERATO SEMPRE L'EFFETTO MECCANICO, MA ABBIAMO ANCHE UN EFFETTO TERMICO (AUMENTANDO LA TEMPERATURA IL CORPO SI DILATA). QUINDI OCCORRE AGGIUNGERE LA CORREZIONE $\alpha(T - T_0)$ IN CUI T È LA VARIAZIONE DI TEMPERATURA A CUI SI TROVA IL MATERIALE, T_0 È UNA TEMPERATURA DI RIFERIMENTO (IN GENERE 20°C A CUI CORRISPONDE DILATAZIONE ZERO), α È IL COEFFICIENTE DI DILATAZIONE TERMICA ED È LEGATO AL TIPO DI MATERIALE, E HA LE DIMENSIONI DELL'INVERSO DI UNA TEMPERATURA. NELLE ULTIME 3 EQUAZIONI NON SI VEDE L'EFFETTO DELLA TEMPERATURA IN QUANTO LA DEFORMAZIONE È UGUALE IN TUTTE LE DIREZIONI QUINDI IL CORPO SI DILATA SENZA DISTORCERSI PERCIÒ NON CAMBIANO LE PROPORZIONI TRA I LATI. COMPLESSIVAMENTE LE RELAZIONI FRA LE TENSIONI E LE DEFORMAZIONI È DETTA LEGGE DI HOOKE, SENZA DIMENTICARCI DELL'EFFETTO FISICO:

PER LE PRIME TRE RELAZIONI VALE QUESTO, SE CONSIDERIAMO SOLO DUE ASSI, ABBIAMO UN EFFETTO POSITIVO LUNGO x E UN EFFETTO NEGATIVO LUNGO y. SE SOLLECITATO A TENSIONI NORMALI IL CORPO MODIFICA LE SUE LUNGHEZZE.



PER LE ALTRE 3 RELAZIONI INVECE POSSIAMO DIRE CHE SE IL CORPO È SOLLECITATO A TENSIONI TANGENZIALI CAMBIANO GLI ANGOLI. NELLA FIGURA A FIANCO SI VEDE CHE DA UNA FORMA A RETTANGOLO SI PASSA AD UN PARALLELEPIPEDO.

SONO STATE CITATE 3 COSTANTI, OVVERO E, ν, G; QUESTE 3 COSTANTI DEVONO RISPETTARE UNA RELAZIONE:

$$\Longrightarrow G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

QUINDI DATE DUE COSTANTI INDIPENDENTI, LA TERZA È FISSATA.

MA SE INVECE USASSI UN SISTEMA DI RIFERIMENTO PRINCIPALE $P_1 P_2 P_3$, ALLORA AVREMO CHE AL POSTO DI $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ AVREMO $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ A CUI CORRISPONDONO LE DEFORMAZIONI PRINCIPALI $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; PERÒ PONENDOCI IN QUESTO SISTEMA DI RIFERIMENTO AVREMO CHE TUTTE LE τ SONO ZERO E QUINDI LE ULTIME 3 EQUAZIONI RISULTANO DELLE UGUAGLIANZE $0 = 0$ (SCORRIMENTI NULLI).

$$\{dU\} = [\mathcal{E}]\{dx\} \Rightarrow \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

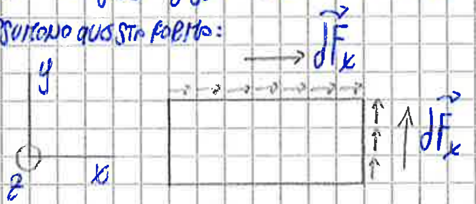
DELLE TRE COMPONENTI MI IMPORTA SOLO du PERCHÉ LE ALTRE DUE NON FANNO LAVORO: $\Rightarrow \underbrace{du = \varepsilon_{xx}\, dx}$;

$\Rightarrow d\mathcal{E} = \frac{1}{2} dF_x \, du = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\, dy\, dz\, \varepsilon_{xx}\, dx = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\, dV$ SE DIVIDO PER dV POSSO OTTENERE UNA ENERGIA SPECIFICA, OVVERO UN'ENERGIA PER UNITÀ DI VOLUME:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}}$$

SE NOI CONSIDERASSIMO σ_{yy} E σ_{zz} NON CONTRIBUIREBBE NIENTE, CONTRIBUIREBBERO ANCHE ESSI, MA IL SENSO FISICO RIMANE SEMPRE LO STESSO. ADESSO PROVIAMO AD APPLICARE SOLO τ_{xy} (LE ALTRE τ E TUTTE LE σ SONO NULLE), QUINDI $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = 0$ E $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, L'UNICA NON NULLA È $\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G$. QUINDI I TENSORI DI TENSIONE E DI DEFORMAZIONE ASSUMONO QUESTA FORMA:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad [\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



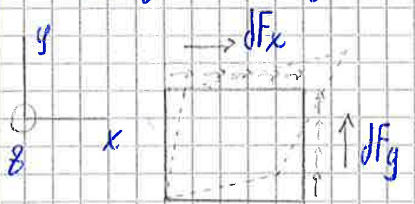
ABBIAMO DUE COMPONENTI DI FORZA; LA STESSA τ È VISTA SIA SULLA FACCIA ORIZZONTALE CAUSANDO UNA FORZA $d\vec{F}_x$, MA SULLA FACCIA DESTRA LE τ SONO ORIENTATE COME y E QUINDI CAUSANO UNA FORZA dF_y ED ENTRAMBE QUESTE FORZE FANNO LAVORO:

$$\begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma_{xy}/2 & 0 \\ \gamma_{xy}/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow du = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, dy$; $dv = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\, dx$ OGNI SPOSTAMENTO FA LAVORO CON LA CORRISPONDENTE FORZA. QUINDI LE FORZE SONO:

$\Rightarrow dF_x = \tau_{xy}\, dx\, dz$; $dF_y = \tau_{xy}\, dy\, dz$.

$$\Rightarrow d\mathcal{E} = \frac{1}{2} dF_x\, du + \frac{1}{2} dF_y\, dv = \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}\frac{\gamma_{xy}}{2}\, dx\, dz\, dy + \tau_{xy}\frac{\gamma_{xy}}{2}\, dy\, dz\, dx\right) = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}\, dV;$$



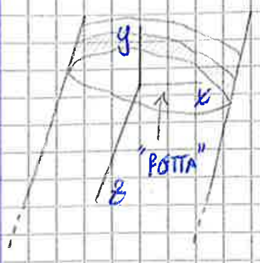
ALLO STESSO MODO POSSO RICAVARE UNA ENERGIA SPECIFICA:

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}}$$

SONO RELAZIONI MOLTO SEMPLICI IN CUI COMPARE SEMPRE LA TENSIONE CON LA SUA CORRISPONDENTE DEFORMAZIONE (IL TERMINE STATICO E IL TERMINE CINEMATICO). MA SE INVECE DI CONSIDERARE OGNI TENSIONE PRESA SINGOLARMENTE, MESSIMO TUTTE LE COMPONENTI DI TENSIONE COME CI COMPORTIAMO? PARLANDO DI EFFETTI INCROCIATI POSSIAMO DIRE CHE LE TENSIONI NORMALI NON FANNO LAVORO CON GLI SPOSTAMENTI DOVUTI AGLI SCORRIMENTI (SONO PERPENDICOLARI TRA DI LORO), E LE TENSIONI TANGENZIALI NON FANNO LAVORO CON GLI SPOSTAMENTI DOVUTI ALLE DILATAZIONI. QUINDI MOLTI TERMINI VANNO AD ELIDERSI E POICHÉ L'ENERGIA È UNA GRANDEZZA ESTENSIVA BASTA FARE UNA SEMPLICE SOMMA DI TUTTI I CONTRIBUTI DI TUTTE LE COMPONENTI:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dV} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\cdot\gamma_{yz}\right);$$

SE CI TROVASSIMO



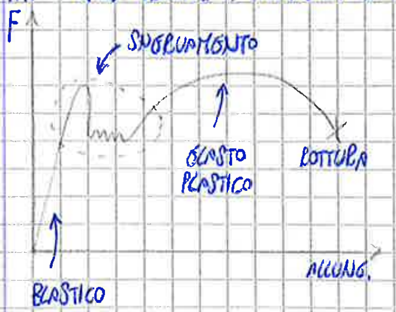
IMMAGINANDO OGNI QUALUNQUE SEZIONE IN CUI POSSO SUDDIVIDERE IL MATERIALE, ALLORA POICHÉ z È ILLIMITATO NON HO DIFFERENZA DI COMPORTAMENTO TRA UNA SEZIONE IN UNO z E UNA SEZIONE IN UN ALTRO z; OGNI RETTA SI MANTIENE SEMPRE PIANA, LE FACCE CHE LE DELIMITANO RIMANGONO SEMPRE PIANE. ALLORA IN QUESTE CONDIZIONI SI PUÒ ASSUMERE CHE $\varepsilon_{zz} = 0$, OPPURE PER LO PIÙ $\varepsilon_{zz} = K$ CON K UNA COSTANTE; INOLTRE $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ E DI CONSEGUENZA SONO NULLI ANCHE I RELATIVI SCORRIMENTI. SI PUÒ DUNQUE DIRE CHE LA DEFORMAZIONE È IMPEDITA ASSUMENDO QUELLA COSTANTE K PARI A ZERO. ANCHE IN QUESTO CASO È POSSIBILE RICAVARE TUTTE LE RELAZIONI TRA TENSIONI E DEFORMAZIONI IN CONDIZIONE DI DEFORMAZIONE PIANA:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{yy}+K) - (1+\nu)\alpha(T-T_0)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx}+K) - (1+\nu)\alpha(T-T_0)\right]$$

$$\tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \qquad \sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)K + \nu(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) - (1+\nu)\alpha(T-T_0)\right]$$

IL METODO PIÙ COMUNE PER VALUTARE SPERIMENTALMENTE LE CARATTERISTICHE MECCANICHE DI UN MATERIALE È LA PROVA DI TRAZIONE: SI SOTTOPONE UN PROVINO DI FORMA OPPORTUNA A CARICO DI TRAZIONE LUNGO IL SUO ASSE, FINO IN GENERE A PRODURNE ROTTURA. ISTANTE PER ISTANTE SI MISURANO SIA LA FORZA CHE L'ALLUNGAMENTO PRODOTTO COSTRUENDO IL RELATIVO DIAGRAMMA; LA PROVA SI ESEGUE IMPONENDO L'ALLUNGAMENTO E MISURANDO LA FORZA CHE È UNA MISURA DI COME IL PROVINO REAGISCE ALL'ESSERE TESO. UNO DEI RISULTATI PIÙ IMPORTANTI DI QUESTA PROVA È LA DISTINZIONE TRA MATERIALI DUTTILI (PRIMA DI ROMPERSI ACCETTANO DEFORMAZIONI DI TIPO PLASTICO) E FRAGILI.



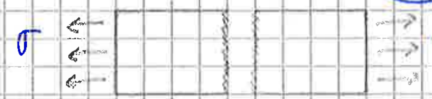
NELLA FASE INIZIALE DELLA PROVA, FINCHÉ IL CARICO SI MANTIENE SUFFICIENTEMENTE BASSO, IL COMPORTAMENTO DEL MATERIALE È ELASTICO (COMPORTAMENTO LINEARE). ANDANDO AVANTI AD ESERCITARE LA TRAZIONE SULLA PROVETTA SI ARRIVA AD UN CERTO LIVELLO PER IL QUALE LA FORZA E L'ALLUNGAMENTO NON SONO PIÙ PROPORZIONALI (COMPORTAMENTO ELASTO PLASTICO); PER ALCUNI MATERIALI, COME GLI ACCIAI, QUESTO CAMBIO DI COMPORTAMENTO È EVIDENTE IN UNA ZONA DETTA SNERVAMENTO: LA FORZA CESSA IMPROVVISAMENTE DI SALIRE MENTRE IL PROVINO CONTINUA AD ALLUNGARSI, SI DEFINISCE CARICO DI SNERVAMENTO SUPERIORE F_{eH} IL VALORE DI PICCO DELLA FORZA DI TRAZIONE CORRISPONDENTE ALLA FINE DEL COMPORTAMENTO ELASTICO, E CARICO DI SNERVAMENTO INFERIORE F_{eL} IL VALORE MINIMO A CUI LA FORZA SI STABILISCE QUANDO IL FENOMENO SI È MANIFESTATO. SUCCESSIVAMENTE CONTINUANDO AD ESERCITARE LA TRAZIONE SULLA PROVETTA LA FORZA RIPRENDE A SALIRE (CON MINORE PENDENZA) E IN QUESTA FASE IL VOLUME SI MANTIENE COSTANTE IN QUANTO L'ALLUNGAMENTO È COMPENSATO DA UNA CONTRAZIONE TRASVERSALE. IL FENOMENO PROSEGUE FINO A RAGGIUNGERE UN MASSIMO F_m DETTO CARICO DI ROTTURA; IN SEGUITO LA FORZA SCENDE DI NUOVO E STAVOLTA SI NOTA CHE IL TRATTO CENTRALE SI STRINGE SEMPRE DI PIÙ, QUINDI LA RIDUZIONE DI SEZIONE NON AVVIENE IN MODO UNIFORME, MA SOLO IN UNA ZONA LOCALIZZATA E QUESTO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 194

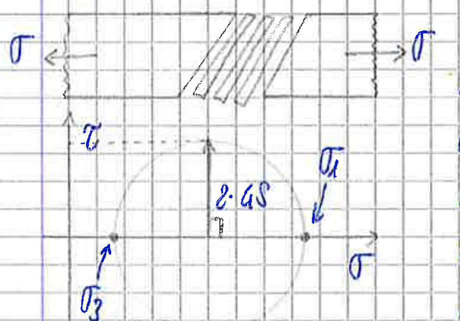
riale è fragile. Stiamo considerando 3 tensioni perché nel caso più generale ogni punto di un elemento di una macchina può essere soggetto ad uno stato di tensione triassiale; il nostro problema è verificare se questo stato di tensione è compatibile con la resistenza del materiale definendo un valore scalare detto tensione ideale (o equivalente). Questo è equivalente a fare una prova di trazione uniassiale applicando una tensione ideale; questo valore è possibile utilizzarlo al posto di $[\sigma]$ per poterlo confrontare con σ_{lim} che esprime il limite caratteristico del materiale. Questo valore di tensione ideale è una funzione delle 3 tensioni principali:

$\Longrightarrow \sigma_{ideale} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ da solo equivalente ai termini di pericolo per quel materiale in presenza di quelle 3 tensioni. Questa funzione si determina in base al tipo di cedimento del materiale:

a) Materiale fragile: come avviene il cedimento (in questo caso corrispondente alla rottura) per questo tipo di materiale? Avviene sul piano normale al carico e viene causato da una forza di distacco, le forze di coesione interna sono superate da quelle del carico esterno. Se ci sono tutte e 3 le tensioni, allora il cedimento avviene sul piano in cui c'è la tensione più forte (le altre non riescono a fare danno). Quindi $\sigma_{ideale} = \sigma_1$ (quella maggiore).



b) Materiale duttile: il cedimento avviene per scorrimento plastico su piani obliqui circa a 45° rispetto all'asse del carico stesso. Poiché abbiamo scorrimento entrano in gioco le tensioni tangenziali τ.



Si suppone che il materiale ceda quando la massima tensione tangenziale tra quelle agenti sugli infiniti piani passanti per il punto raggiunge un valore limite. Nel caso dei materiali duttili il cedimento vuol dire che il materiale inizia a deformarsi plasticamente. Guardando i cerchi di Mohr si vede che il massimo della tensione della tensione tangenziale corrisponde al piano che ha normale ortogonale alla direzione principale corrispondente alla tensione σ_1 (piano inclinato nell'asse p_2). L'angolo che vediamo nel cerchio di Mohr è di 90°, quindi effettivamente l'angolo reale è proprio 45°. Per poter determinare la tensione ideale per il caso duttile possiamo usare due approcci che portano a risultati non tanto differenti tra di loro:

1) Criterio di Tresca: la tensione ideale è semplicemente il diametro del cerchio di Mohr più grande, ovvero:

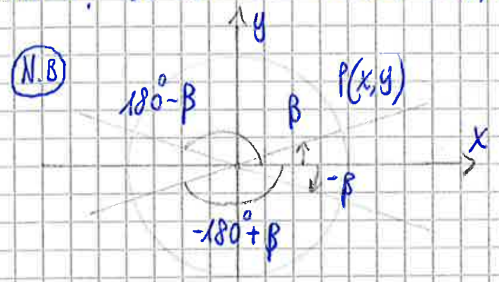
$\Longrightarrow \sigma_{ideale} = \sigma_1 - \sigma_3$ la massima tensione tangenziale sappiamo che è il raggio del cerchio:

$\Longrightarrow \tau_{max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2 = \sigma_{ideale}/2$ questo ultimo risultato in particolare vale nel caso monoassiale, mentre invece l'uguaglianza precedente vale nel caso triassiale.

2) Criterio di Von Mises: si suppone che il materiale ceda quando la quota di energia elastica di deformazione (corrispondente al solo cambiamento di forma) raggiunge un valore critico. Allora la tensione ideale è una specie di media

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 194

NEL PRIMO QUADRANTE E' UNO CHE $\underbrace{-45° < \alpha < 0°}$. I QUATTRO ANGOLI POSSIBILI SONO:
2α, -2α, $180-2\alpha$, $-180+2\alpha$ CON $|2\alpha| = 63,4°$ ANDANDO A SOSTITUIRE SI OTTIENE CHE $2\alpha = 63,4°$, $-2\alpha = -63,4°$, $180-2\alpha = 116,6°$, $-180+2\alpha = -116,6°$. QUALE DEI 4 VALORI È QUELLO COERENTE CON LA COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR? $-90° < 2\alpha < 0° \Rightarrow 2\alpha = -63,4° \Rightarrow \underbrace{\alpha = -31,7°}$



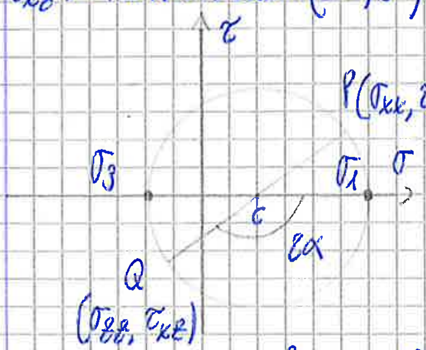
SE $y>0$ E $x>0$ → 1° QUADRANTE
SE $y>0$ E $x>0$ → 2° QUADRANTE
SE $y<0$ E $x<0$ → 3° QUADRANTE
SE $y<0$ E $x<0$ → 4° QUADRANTE

ES 2: DATO IL SEGUENTE TENSORE DELLA TENSIONE:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 90 \\ 0 & 170 & 0 \\ 90 & 0 & -180 \end{bmatrix}$$

CALCOLARE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$; CALCOLARE L'ORIENTAZIONE α DELLE DIREZIONI PRINCIPALI E CALCOLARE LA COMPONENTE σ E τ SUL FASCIO CON ASSE p_2 E SU UN PIANO DI QUESTO FASCIO CON $\vec{n}$ INCLINATO DI 45° RISPETTO p_2.

GUARDANDO IL TENSORE SI VEDE $\sigma_2 = \sigma_{yy} = 170$ MPa (DIREZIONE PRINCIPALE NOTA). SAPENDO CHE $\sigma_{xx} > \sigma_{zz}$ E CHE $\tau_{xz} > 0$ ALLORA DA TABELLA $P(250, 90)$ E $Q(-180, -90)$. QUINDI POSSIAMO COSTRUIRE IL SEGUENTE CERCHIO:



$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \begin{cases} 271 \text{ MPa} \\ -161 \text{ MPa} \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_1 = 271$ MPa $\sigma_2 = 170$ MPa $\sigma_3 = -161$ MPa.

PER TROVARE L'ORIENTAZIONE DEVO CERCARE L'ANGOLO COMPRESO TRA LA DIREZIONE z E LA DIREZIONE p_1 (LO STATO DI TENSIONE DEL PUNTO Q È APPLICATO SULLA FACCIA NORMALE A z). STESSO RAGIONAMENTO DI PRIMA:
DA TABELLA VEDO CHE $-90° \le \alpha \le -45°$, QUINDI NEL CERCHIO DI MOHR VEDO $-180 \le 2\alpha \le -90°$. SAPENDO CHE:

$$\Rightarrow tg(2\alpha) = \left|\frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx}-\sigma_{zz}}\right| = 0,486 \Rightarrow 2\alpha = 25,91°$$ DI NUOVO ABBIAMO 4 POSSIBILITÀ:

$2\alpha = 25,91°$
$-2\alpha = -25,91°$
$180-2\alpha = 154,09°$
$-180+2\alpha = -154,09°$

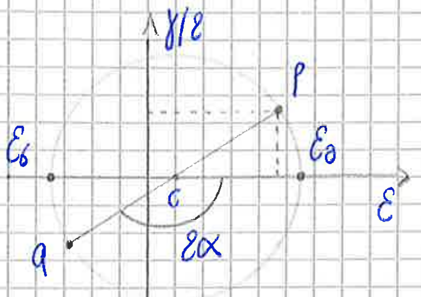
QUALE RIENTRA IN $-180 \le 2\alpha \le -90°$? LA RISPOSTA È $-154,09°$ QUINDI:
$\Rightarrow \underbrace{\alpha = -77°}$

PER QUANTO RIGUARDA LA SECONDA RICHIESTA FACCIAMO ATTENZIONE A QUELLO CHE CI VIENE DETTO: CI CHIEDE UN FASCIO CON ASSE p_1, QUINDI DOVREMO SCEGLIERE IL CERCHIO DI MOHR DI ESTREMI σ_2 E σ_3 (STATO DI TENSIONI DI PIANI INCERNIERATI NELL'ASSE p_1); INOLTRE SIAMO INTERESSATI AD UNA DIREZIONE INCLINATA DI 45° RISPETTO p_2. MA NEL CERCHIO NOI USIAMO

$$[\varepsilon]=\begin{bmatrix} 5{,}12\cdot10^{-4} & 0 & 1{,}25\cdot10^{-3}/2 \\ 0 & -5{,}15\cdot10^{-5} & 0 \\ 1{,}25\cdot10^{-3}/2 & 0 & -1{,}14\cdot10^{-4}\end{bmatrix}$$

UNA DIREZIONE PRINCIPALE È GIÀ NOTA, OVVERO:

$\Rightarrow \varepsilon_c=\varepsilon_{yy}=-5{,}15\cdot10^{-5}$. ADESSO CONOSCENDO DUE PUNTI $P(\varepsilon_{xx},\gamma_{xz}/2)=(5{,}12\cdot10^{-4};\,1{,}25\cdot10^{-3}/2)$ E $Q(\varepsilon_{zz},-\gamma_{xz}/2)=(-1{,}14\cdot10^{-4};\,-1{,}25\cdot10^{-3}/2)$:



$$\varepsilon_{a,b}=\frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{zz}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{zz}}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2}\;\begin{cases}8{,}98\cdot10^{-4}\\-5\cdot10^{-4}\end{cases}$$

$\Rightarrow \varepsilon_1=8{,}98\cdot10^{-4}$ $\varepsilon_2=-5{,}15\cdot10^{-5}$ $\varepsilon_3=-5\cdot10^{-4}$.

DALLE TABELLE SAPPIAMO CHE $-180^\circ\le2\alpha\le-90^\circ\Rightarrow-90^\circ\le\alpha\le-45^\circ$;

ALLORA POSSIAMO CALCOLARE LA TANGENTE DI 2α COME:

$$\Rightarrow tg(2\alpha)=\frac{\gamma_{xz}/2}{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{zz})/2}=1{,}996\Rightarrow arctg(2\alpha)=63{,}39^\circ.$$

DI NUOVO ABBIAMO 4 POSSIBILITÀ:

$2\alpha=63{,}39^\circ$

$-2\alpha=-63{,}39^\circ$

$180-2\alpha=116{,}61^\circ$

$-180+2\alpha=-116{,}61^\circ$

QUELLO COERENTE CON LA COSTRUZIONE DEI CERCHI DI MOHR È $-116{,}61^\circ$. QUINDI VALE:

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha=-58{,}3^\circ}$$

EX. 4: UN PUNTO È SOGGETTO AD UNO STATO DI TENSIONE PIANA, OVVERO $\sigma_{zz}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$; SONO NOTE LE COMPONENTI NORMALI DI DEFORMAZIONE $\varepsilon_{xx}=-2{,}22\cdot10^{-3}$ $\varepsilon_{yy}=2{,}52\cdot10^{-3}$ $\varepsilon_{zz}=2{,}28\cdot10^{-3}$; SONO NOTE LE PROPRIETÀ DEL MATERIALE, OVVERO $E=6{,}90\cdot10^{4}$ E $\nu=0{,}31$. DETERMINARE $[\sigma]$, σ_1, σ_2, σ_3 E L'ORIENTAZIONE α.

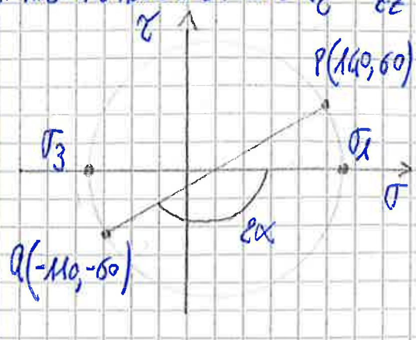
$$\sigma_{xx}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{xx}+\nu\varepsilon_{yy}\right)=-110\,MPa;$$

$$\sigma_{yy}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{yy}+\nu\varepsilon_{xx}\right)=140\,MPa;\quad\Rightarrow[\sigma]=\begin{bmatrix}-110&60&0\\60&140&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ANCHE SE NON CONOSCO ε_{zz} POSSO CALCOLARE σ_{xx} E σ_{yy}.

$$\tau_{xy}=G\cdot\gamma_{xy}=60\,MPa$$

LA DIREZIONE PRINCIPALE NOTA È $\sigma_c=\sigma_{zz}=0\,MPa$, I PUNTI CHE CONOSCIAMO SONO $P(140,60)$ E $Q(-110,-60)$:



$$\sigma_{a,b}=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\;\begin{cases}154\,MPa\,(\sigma_1)\\-124\,MPa\,(\sigma_3)\end{cases}$$

QUINDI $\sigma_1=154\,MPa$ $\sigma_2=0$ E $\sigma_3=-124\,MPa$. PER QUANTO RIGUARDA L'ORIENTAZIONE DA TABELLA SAPPIAMO CHE $-180^\circ\le2\alpha\le-90^\circ$; QUINDI:

$$\Rightarrow tg(2\alpha)=\left|\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}\right|=0{,}481\Rightarrow2\alpha=25{,}7^\circ;$$ DI NUOVO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 194

$$[\sigma_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 35 \\ 0 & 35 & 80 \end{bmatrix} \qquad [\sigma_2] = \begin{bmatrix} 40 & 150 & 0 \\ 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

SE SIAMO IN GRADO DI FAR CORRISPONDERE IL TENSORE AD UN VALORE SCALARE, OVVERO σ_{IDEALE} POTREMO USARE, CONFRONTANDO I DUE VALORI OTTENUTI, QUALE CORRISPONDE AD ESEGUIRE UNA PROVA DI TRAZIONE PIÙ PERICOLOSA. COMINCIAMO DA $[\sigma_1]$: LA DIREZIONE PRINCIPALE GIÀ NOTA È $\sigma_C = \sigma_{xx} = 0\ MPa$, LE ALTRE DUE TENSIONI PRINCIPALI SONO:

$$\Longrightarrow \sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{yy}+\sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{yy}-\sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \; \begin{cases} 140\ MPa\ (\sigma_1) \\ -40\ MPa\ (\sigma_3) \end{cases} \Longrightarrow \sigma_{IDEALE} = \underbrace{140\ MPa}\,;$$

PER IL TENSORE $[\sigma_2]$ LA DIREZIONE PRINCIPALE NOTA È $\sigma_C = \sigma_{zz} = 0\ MPa$, PER LE ALTRE DUE INVECE:

$$\Longrightarrow \sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \; \begin{cases} 171\ MPa \\ -131\ MPa \end{cases} \Longrightarrow \sigma_{IDEALE} = \underbrace{171\ MPa}$$

HO ALLORA È OVVIO CHE LO STATO DI TENSIONE PIÙ PERICOLOSO È QUELLO RELATIVO A $[\sigma_2]$.

6.8: DATO IL SEGUENTE TENSORE DELLA TENSIONE:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 280 & -120 & 0 \\ -120 & 320 & 0 \\ 0 & 0 & -160 \end{bmatrix}$$

LE PROPRIETÀ DEL MATERIALE SONO $E = 6{,}8 \cdot 10^4\ N/mm^2$ E $\nu = 0{,}31$. DETERMINARE $[\varepsilon]$; DETERMINARE $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ E $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$; DETERMINARE L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA PER UNITÀ DI VOLUME VERIFICANDO CHE IL RISULTATO È LO STESSO SIA USANDO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO xyz CHE QUELLO PRINCIPALE.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 280 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 320 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot(-160) = \underbrace{3{,}38\cdot10^{-3}}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{-0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 280 + \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 320 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}(-160) = \underbrace{4{,}159\cdot10^{-3}} \Longrightarrow [\varepsilon] = \begin{bmatrix} 3{,}38\cdot10^{-3} & -4{,}624\cdot10^{-3} & 0 \\ -4{,}624\cdot10^{-3} & 4{,}159\cdot10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}089 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 280 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 320 + \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot(-160) = \underbrace{-5{,}089\cdot10^{-3}}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G}\cdot\tau_{xy} = \frac{1}{25954{,}19}(-120) = \underbrace{-4{,}624\cdot10^{-3}} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0;$$

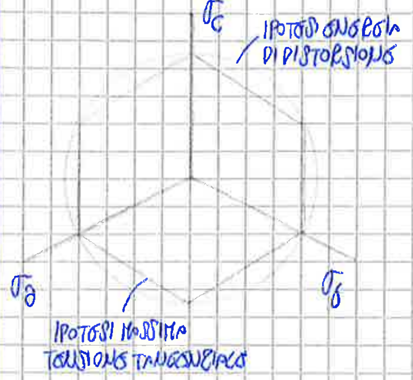
LA DIREZIONE PRINCIPALE GIÀ NOTA È $\sigma_C = \sigma_{zz} = -160\ MPa$; LE ALTRE DUE SONO:

$$\Longrightarrow \sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \; \begin{cases} 421{,}65\ MPa\ (\sigma_1) \\ 178{,}35\ MPa\ (\sigma_2) \end{cases} \quad \sigma_3 = -160\ MPa;$$

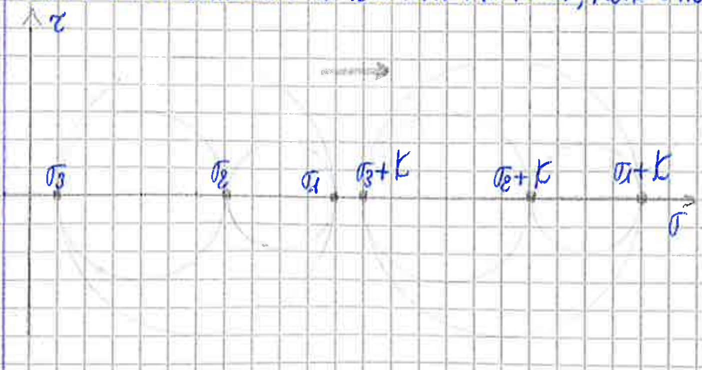
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 421{,}65 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 178{,}35 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot(-160) = \underbrace{6{,}117\cdot10^{-3}}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot(-0{,}31)\cdot 421{,}65 + \frac{1}{6{,}8\cdot10^4}\cdot 178{,}35 - \frac{0{,}31}{6{,}8\cdot10^4}\cdot(-160) = \underbrace{1{,}430\cdot10^{-3}}$$

Le ipotesi di Tresca e Von Mises sono state formulate per rappresentare il comportamento dei materiali duttili: la prima ipotesi suppone che il materiale inizi a deformarsi plasticamente quando la massima tensione tangenziale tra quelle agenti sugli infiniti piani passanti per il punto raggiunge un valore limite; la seconda ipotesi invece ci dice che il materiale inizia a deformarsi plasticamente quando la quota di energia elastica di deformazione raggiunge un valore critico (il materiale si distorce cambiando forma). Entrambe queste ipotesi vanno bene, ma che differenza c'è applicare una piuttosto che l'altra? È utile fare un confronto in forma grafica:

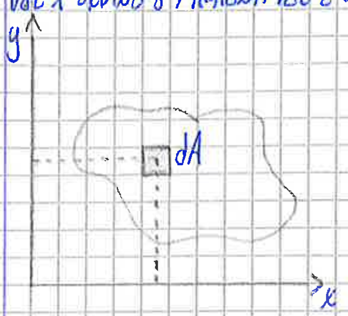


Consideriamo uno spazio cartesiano in cui le coordinate rappresentano i valori delle tensioni principali; si indica genericamente con $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ perché non occorre mettere un vincolo sulle coordinate (ricordiamoci che la denominazione $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avviene dopo aver ordinato le tre tensioni da più grande al più piccolo), ognuna può variare come vuole. In questo spazio ad ogni ipotesi corrisponde una superficie limite, in particolare per l'ipotesi dell'energia di distorsione la superficie limite è un cilindro circolare, per l'ipotesi della massima tensione tangenziale invece la superficie limite è un cilindro a sezione esagonale. Perché ci siamo preoccupati di definire una tensione ideale? Per poterla confrontare con il valore di tensione limite (quel valore che rappresenta il superamento dell'elasticità); la condizione di pericolosità è ben intuibile da questa rappresentazione: se il valore trovato è più piccolo del valore di tensione limite allora la tensione ideale si trova all'interno del cilindro, se invece è più grande si trova all'esterno. Quindi all'interno siamo tranquilli, all'esterno siamo in una situazione non sopportabile, sull'orlo siamo al limite di elasticità. Nel caso dell'ipotesi della massima tensione tangenziale la tensione ideale è definita come $\sigma_1 - \sigma_3$ ma le 3 coordinate $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ possono scambiarsi i ruoli e possiamo ottenere, e come immaginavamo, 6 casi diversi, ovvero 6 piani, da cui la consueta figura esagonale; nel secondo caso invece la sezione è circolare, quindi se osserviamo i due cilindri lungo il loro asse vedremo un esagono perfettamente inscritto nella circonferenza: se a pari materiale la figura rappresentativa della forma è più piccola, allora è più severa nel considerare lo stato limite.



Dalla prima ipotesi e dalla seconda si evince che quello che conta è quanto distano una tensione rispetto all'altra. Se dovessi aggiungere una stessa costante a tutte le tensioni, queste ovviamente saranno più forti (la figura verrà traslata), però le tensioni avranno la stessa distanza l'una rispetto all'altra e quindi nella formula otteniamo lo stesso valore. Ma come è possibile che tipo con $K \to +\infty$ non cambia nulla? Questo si spiega con il fatto che si aggiungerebbe energia di deformazione associata ad un cambiamento di volume, ma non di

DEL 1° ORDINE E I MOMENTI DEL 2° ORDINE (L'AREA PUÒ ESSERE VISTA COME MOMENTO DI ORDINE ZERO).



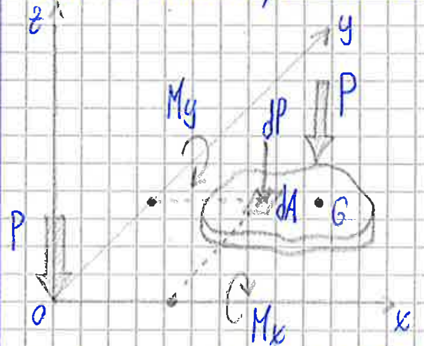
SE CONSIDERIAMO UN ELEMENTINO INFINITESIMO DI AREA dA ALLORA L'AREA COMPLESSIVA SI SCRIVERÀ COME $A=\int_A dA$ SI PARLA DI ORDINE ZERO PERCHÉ NON COMPARE NESSUNA POTENZA. ADESSO CONSIDERIAMO I MOMENTI DEL 1° ORDINE (O MOMENTI STATICI):

$\Rightarrow S_x = \int_A y\,dA$ IL PEDICE x INDICA RISPETTO QUALE ASSE STIAMO CALCOLANDO IL MOMENTO; RISPETTO x LA DISTANZA RISPETTO QUESTO ASSE DI UN PUNTO È L'ORDINATA y. ANALOGAMENTE ESISTE UN MOMENTO RISPETTO y:

$\Rightarrow S_y = \int_A x\,dA$ A COSA CI SERVONO QUESTE PAIO DI FORMULE? A CALCOLARE LA POSIZIONE DEL BARICENTRO DELL'AREA:

$$\Rightarrow \boxed{x_G = \frac{S_y}{A}} \qquad \boxed{y_G = \frac{S_x}{A}}$$

DIAMO UNA SPIEGAZIONE DI QUESTE DUE RELAZIONI PENSANDO AL VECCHIO GIOCO DEL CORPO IN EQUILIBRIO SUL DITO, SE QUESTO È POSIZIONATO SUL BARICENTRO, NON C'È MOMENTO E IL CORPO NON CASCA.



CONSIDERIAMO UNA LASTRA OMOGENEA SOGGETTA A PESO PROPRIO E QUESTO PESO È RIVOLTO VERSO L'ASSE z IN VERSO OPPOSTO. SE CONSIDERIAMO UN PEZZETTINO DI AREA dA SU DI ESSO AGISCE UNA FORZA PESO dP (LA LASTRA MOLTO SOTTILE QUINDI RICORDANDOCI I CARICHI DISTRIBUITI È IL CASO DI UN PESO PER UNITÀ DI AREA). ADESSO DOBBIAMO RICORDARCI DEL CONCETTO DI EQUIVALENZA STATICA, OVVERO IN UNA PRESENZA DI SISTEMA DI FORZE POSSO RICONDURMI AD UN SISTEMA EQUIVALENTE IN CUI IL SISTEMA DI FORZE È SOSTITUITO CON LA RISULTANTE E APPLICATO IN UN PUNTO TALE CHE OGNI MOMENTO È NULLO.

1) PER PRIMA COSA DETERMINO LA RISULTANTE E LA FACCIO PASSARE PER IL PUNTO O:

$\Rightarrow P(\text{COMPLESSIVO}) = \int dP = \int p \cdot dA = pA$ CON p IL PESO ALL'UNITÀ DI SUPERFICIE. RISPETTO QUESTO POLO DOBBIAMO ANCORA AGGIUNGERE DEI MOMENTI:

$$M_x = \int_A y p\,dA = p\int y\,dA = pS_x \qquad M_y = \int_A x p\,dA = p\int_A x\,dA = pS_y.$$

2) ADESSO DOBBIAMO TRASPORTARE LA RISULTANTE LUNGO L'ASSE CENTRALE, QUINDI SPOSTO IL PESO COMPLESSIVO NEL BARICENTRO; LE COORDINATE DI QUESTO PUNTO COME SAPPIAMO SI DETERMINANO COME:

$$\Rightarrow \xi = \frac{RM_o}{RP} \Rightarrow x_G = \frac{M_y}{P} = \frac{\cancel{p}S_y}{\cancel{p}A} = \frac{S_y}{A} \qquad y_G = \frac{M_x}{P} = \frac{\cancel{p}S_x}{\cancel{p}A} = \frac{S_x}{A}.$$

PERÒ TUTTO QUESTO NON È SUFFICIENTE IN QUANTO DOBBIAMO AGGIUNGERE I MOMENTI DEL 2° ORDINE DEFINITI COME:

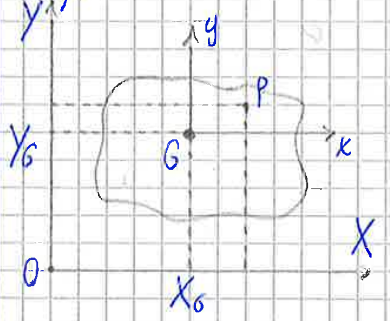
$\Rightarrow J_{xx} = \int_A y^2\,dA \qquad J_{yy} = \int_A x^2\,dA$ IN QUESTI TERMINI COMPAIONO DELLE POTENZE DI ORDINE 2. POSSONO RICORDARE I MOMENTI D'INERZIA SOLO CHE AL POSTO DI UNA MASSA ABBIAMO UN'AREA; IL PRIMO TERMINE RISPETTO L'ASSE y, IL SECONDO TERMINE RISPETTO L'ASSE x. USIAMO IL DOPPIO PEDICE PERCHÉ A QUESTI DUE TERMINI SE NE AGGIUNGE UN TERZO CHE COINVOLGE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 194

$(-x, y)$ SULLA FACCIA A_1, QUINDI UN EFFETTO BILANCIA L'ALTRO, A DUE A DUE I TERMINI SI ANNULLANO E ALLA FINE IL RISULTATO CHE SI OTTIENE È ZERO, QUINDI $S_y = 0$ MA ALLORA $x_G = 0$. SE INVECE GLI ASSI DI SIMMETRIA SONO DUE, ALLORA IL BARICENTRO SI TROVA NELL'INTERSEZIONE (NEL RETTANGOLO SI VEDE BENE).

LE SIMMETRIE SI RIFERISCONO ANCHE AI MOMENTI DEL 2° ORDINE PER I MOMENTI CENTRIFUGHI. RIFERENDOCI SEMPRE ALLA STESSA FIGURA DI PRIMA POSSIAMO SCRIVERE:

$\Longrightarrow J_{xy} = \int_A xy\,dA = \int_{A_1} xy\,dA + \int_{A_2} xy\,dA$ ANCHE IN QUESTO CASO PER UN PUNTO SU A_1 NE CORRISPONDE UNO SU A_2 CON STESSA ORDINATA E ASCISSA x OPPOSTA, QUINDI ANCHE IN QUESTO CASO IL RISULTATO È NULLO, QUINDI $J_{xy} = 0$. UN ASSE DI SIMMETRIA È UN ASSE PRINCIPALE DI INERZIA; SE IL RIFERIMENTO HA ORIGINE NEL BARICENTRO E GLI ASSI SONO ORIENTATI IN MODO DA ANNULLARE I MOMENTI CENTRIFUGHI SI PARLA DI CENTRALE PRINCIPALE DI INERZIA (RIFERIMENTO PRINCIPALE CON ORIGINE NEL BARICENTRO). COSA SUCCEDE SE L'ORIGINE DEL RIFERIMENTO CAMBIASSE?



IMMAGINIAMO DI AVERE UN RIFERIMENTO GENERICO OXY E DI TRASLARLO VERSO UN NUOVO RIFERIMENTO CON ORIGINE NEL BARICENTRO (ASSI PARALLELI AI PRECEDENTI, MA TRASLATI). IL NUOVO RIFERIMENTO LO CHIAMIAMO Gxy ED È UN RIFERIMENTO BARICENTRICO. ADESSO CERCHIAMO DI SCRIVERE IL TIPO DI RELAZIONE CHE SUSSISTE TRA LE COORDINATE DEI DUE RIFERIMENTI:

$$\begin{cases} X = X_G + x \\ Y = Y_G + y \end{cases} \quad \text{TRASFORMAZIONE}$$

COME VENGONO INFLUENZATI I MOMENTI DEL 1° E DEL 2° ORDINE?

a) 1° ORDINE: $S_Y = \int_A X\,dA = \int_A X_G\,dA + \int_A x\,dA$ IL SECONDO TERMINE È IL MOMENTO STATICO RISPETTO L'ASSE y, MA QUESTO ASSE PASSA PER IL BARICENTRO E DI CONSEGUENZA QUESTO CONTRIBUTO È NULLO, QUINDI SI OTTIENE:

$\Longrightarrow S_Y = X_G A + 0 = X_G A$; ANALOGAMENTE RISPETTO L'ALTRO ASSE:

$\Longrightarrow S_X = \int_A Y\,dA = \int_A Y_G\,dA + \int_A y\,dA = Y_G A.$

b) 2° ORDINE: $J_{YY} = \int_A X^2 dA = \int_A X_G^2\,dA + \int_A x^2 dA + 2\int_A X_G \cdot x\,dA$ DUNQUE IL SECONDO TERMINE È SEMPLICEMENTE IL MOMENTO DEL 2° ORDINE RISPETTO L'ASSE x BARICENTRICO; NEL TERZO TERMINE COMPARE $x\,dA$ OVVERO IL MOMENTO STATICO RISPETTO UN ASSE BARICENTRICO, QUINDI SI ANNULLA. QUINDI SI OTTIENE:

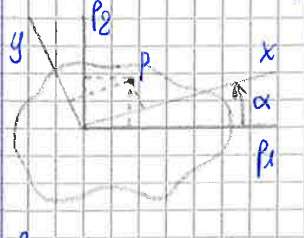
$\Longrightarrow J_{YY} = X_G^2 A + J_{yy}$ IL TERMINE J_{yy} PRENDE IL NOME DI INERZIA LOCALE, MENTRE $X_G^2 A$ PRENDE IL NOME DI INERZIA DI TRASPORTO. IN MODO ANALOGO:

$\Longrightarrow J_{XX} = Y_G^2 A + J_{xx}$ QUINDI L'INERZIA RISPETTO UN RIFERIMENTO GENERICO È DATA DALL'INERZIA BARICENTRICA PIÙ UN FATTORE CORRETTIVO. PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI CENTRIFUGHI:

$$\Longrightarrow J_{XY} = \int_A XY\,dA = \int_A (X_G + x)(Y_G + y)\,dA = \int_A (X_G Y_G + X_G \cdot y + x Y_G + xy)\,dA =$$
$$= \int_A X_G Y_G\,dA + \int_A \underbrace{X_G \cdot y\,dA}_{=0} + \int_A \underbrace{x Y_G\,dA}_{=0} + \int_A \underbrace{xy\,dA}_{=J_{xy}} = X_G Y_G A + J_{xy}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

ANCHE IN QUESTO CASO QUESTO RIFERIMENTO $\rho_1 \rho_2$ SARÀ UN RIFERIMENTO PRINCIPALE E PRENDE IL NOME DI RIFERIMENTO PRINCIPALE DI INERZIA CON $J_1 \geq J_2$ I MOMENTI PRINCIPALI DI INERZIA. IN QUESTO CASO NE ABBIAMO SOLO DUE E QUINDI NON C'È IL PROBLEMA DI PORSI QUALE SIA IL VALORE INTERMEDIO. ADESSO CERCHIAMO DI LEGARE LE COORDINATE RISPETTO xy CON QUELLE RISPETTO $\rho_1 \rho_2$. NEL CASO DELLE TENSIONI AVEVAMO IMPOSTATO L'EQUILIBRIO DEL CUNEO, MA STAVOLTA L'EQUILIBRIO NON CI SERVE, MA CI SERVONO DELLE PROPRIETÀ GEOMETRICHE.



NON MI STO PREOCCUPANDO DI DOVE SIA L'ORIGINE, RAGIONO SOLO SULLE INCLINAZIONI. IMMAGINO DI CONOSCERE $\rho_1 \rho_2$: QUELLO GENERICO SARÀ INCLINATO DI UN ANGOLO α RICORDANDOCI CHE QUESTO ANGOLO SI MISURA DA ρ_1 A x. LA POSIZIONE DI UN PUNTO P PUÒ ESSERE RIPORTATO SIA MEDIANTE xy SIA CON $\rho_1 \rho_2$. LE DIVERSE COORDINATE SEGUONO QUESTE RELAZIONI:

$$\begin{cases} x = \rho_1 \cos\alpha + \rho_2 \sin\alpha \\ y = -\rho_1 \sin\alpha + \rho_2 \cos\alpha \end{cases}$$

ADESSO PRENDIAMO LE DEFINIZIONI DI MOMENTO DI 2° ORDINE E SOSTITUIAMO:

$$J_{xx} = \int_A (-\rho_1 \sin\alpha + \rho_2 \cos\alpha)^2 dA = \sin^2\alpha \underbrace{\int_A \rho_1^2 dA}_{\text{MOMENTO D'INERZIA RISPETTO } \rho_2} + \cos^2\alpha \underbrace{\int_A \rho_2^2 dA}_{\text{MOMENTO DI INERZIA RISPETTO } \rho_1} - 2\cos\alpha \sin\alpha \underbrace{\overset{0}{\cancel{\int_A \rho_1 \rho_2 dA}}}_{\substack{\text{MOMENTO CENTRIFUGO} \\ \text{(TERMINI NELLE FUORI DIAGONALE)}}} =$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{xx} = \sin^2\alpha \, J_2 + \cos^2\alpha \, J_1}$$

SE $\alpha = 1$ ρ_1 COINCIDE CON x, SE $\alpha = 90°$ ρ_2 COINCIDE CON x.

$$J_{yy} = \int_A (\rho_1 \cos\alpha + \rho_2 \sin\alpha)^2 dA = \cos^2\alpha \int \rho_1^2 dA + \sin^2\alpha \int_A \rho_2^2 dA + 2\cos\alpha \sin\alpha \int_A \overset{0}{\cancel{\rho_1 \rho_2}} dA =$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{yy} = \cos^2\alpha \, J_2 + \sin^2\alpha \, J_1} ;$$

$$J_{xy} = \int_A (\rho_1 \cos\alpha + \rho_2 \sin\alpha)(-\rho_1 \sin\alpha + \rho_2 \cos\alpha) dA =$$

$$= -\sin\alpha \cos\alpha \int_A \rho_1^2 dA + \cos\alpha \sin\alpha \int_A \rho_2^2 dA + \cos^2\alpha \int_A \overset{0}{\cancel{\rho_1 \rho_2}} dA - \sin^2\alpha \int_A \overset{0}{\cancel{\rho_1 \rho_2}} dA =$$

$$\Rightarrow J_{xy} = -\sin\alpha \cos\alpha \, J_2 + \cos\alpha \sin\alpha \, J_1 \Rightarrow \boxed{J_{xy} = (J_1 - J_2) \cos\alpha \sin\alpha}$$

COME NEL CASO DELLE TENSIONI POSSIAMO ELIMINARE I TERMINI DI 2° GRADO USANDO LE TRASFORMAZIONI DELL'ANGOLO DOPPIO:

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2} \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\sin 2\alpha}{2} \qquad \sin\alpha \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

ALLA FINE SI OTTIENE:

$$J_{xx} = \frac{J_1 + J_2}{2} + \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \qquad J_{yy} = \frac{J_1 + J_2}{2} - \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\alpha \qquad J_{xy} = \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\alpha$$

LA SCRITTURA È LA STESSA DELLE TENSIONI, QUINDI VALE CHE QUESTI RISULTATI SI RAPPRESENTANO IN FORMA GRAFICA:

PER TROVARE IL BARICENTRO DELLA FIGURA COMPLESSIVA SI USANO I MOMENTI STATICI SECONDO OXY:

$$S_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 1500 \cdot 75 + 1000 \cdot 5 = 1,175 \cdot 10^5 \ mm^3;$$
$$S_y = A_1 X_1 + A_2 X_2 = 1500 \cdot 5 + 1000 \cdot 60 = 6,75 \cdot 10^4 \ mm^3$$

$$\Rightarrow X_G = S_y / A = 6,75 \cdot 10^4 / 2,500 \cdot 10^3 = 27,0 \ mm$$
$$Y_G = S_x / A = 1,175 \cdot 10^5 / 2,500 \cdot 10^3 = 47,0 \ mm \quad \Rightarrow G(X_G, Y_G) = G(27,0;\ 47,0).$$

IL BARICENTRO COMPLESSIVO SI TROVA TRA UN BARICENTRO E L'ALTRO; PIÙ VICINO A UNO, PIÙ VICINO ALL'ALTRO QUESTO DIPENDE DA QUANTO SONO GRANDI LE AREE. A QUESTO PUNTO SPOSTIAMO IL RIFERIMENTO NEL BARICENTRO, QUINDI MANTENIAMO PARALLELI GLI ASSI, MA FISSIAMO L'ORIGINE NEL BARICENTRO (Gxy) E QUINDI È UN RIFERIMENTO BARICENTRICO. RISPETTO A QUESTO NUOVO RIFERIMENTO CAMBIANO ANCHE LE COORDINATE DEI BARICENTRI:

$$x_1 = X_1 - X_G = 5 - 27 = -22 \ mm \qquad x_2 = X_2 - X_G = 60 - 27 = 33 \ mm$$
$$y_1 = Y_1 - Y_G = 75 - 47 = 28 \ mm \qquad y_2 = Y_2 - Y_G = 5 - 47 = -42 \ mm$$

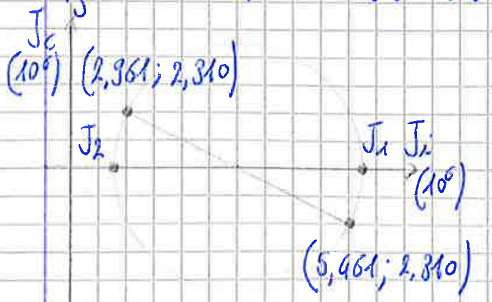
QUESTE COORDINATE SERVONO PER ESPRIMERE L'INERZIA DI TRASPORTO. ADESSO IL GROSSO DEL LAVORO È QUELLO DI TROVARE $[J]$ QUINDI DOBBIAMO TROVARE J_{xx}, J_{yy} E J_{xy}:

$$J_{xx} = y_1^2 A_1 + J_{\xi\xi_1} + y_2^2 A_2 + J_{\xi\xi_2} = (28)^2 \cdot 1500 + \frac{150 \cdot 10^3}{12} + (-42)^2 \cdot 1000 + \frac{100 \cdot 10^3}{12} =$$
$$= \underbrace{2,961 \cdot 10^6}\ mm^4;$$

$$J_{yy} = x_1^2 A_1 + J_{\eta\eta_1} + x_2^2 A_2 + J_{\eta\eta_2} = (-22)^2 \cdot 1500 + \frac{10 \cdot 150^3}{12} + (33)^2 \cdot 1000 + \frac{10 \cdot 100^3}{12} =$$
$$= \underbrace{5,461 \cdot 10^6}\ mm^4;$$

$$J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + J_{\eta\xi_1} + A_2 x_2 y_2 + J_{\eta\xi_2} = 1500 (-22)(28) + 0 + 1000 \cdot 33 \cdot (-42) + 0 =$$
$$= \underbrace{-2,310 \cdot 10^6}\ mm^4$$

I MOMENTI CENTRIFUGHI LOCALI SONO NULLI CHE RIFERITI AD UN SISTEMA DI RIFERIMENTO $\eta\xi$ PRINCIPALE IN QUANTO GLI ASSI SONO DI SIMMETRIA. ADESSO FACCIAMO LA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA:



$$J_{1,2} = \frac{J_{xx} + J_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_{xx} - J_{yy}}{2}\right)^2 + J_{xy}^2} =$$
$$= \left[\frac{5,461 + 2,661}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5,461 - 2,961}{2}\right)^2 + (-2,310)^2}\ \right] \cdot 10^6 =$$
$$\Rightarrow J_1 = \underbrace{6,993 \cdot 10^6}\ mm^4 \qquad J_2 = \underbrace{1,429 \cdot 10^6}\ mm^4$$

ADESSO PER L'ORIENTAZIONE USO LO STESSO RAGIONAMENTO DELLE TENSIONI, QUINDI CALCOLIAMO LA TANGENTE:

$$\Rightarrow |tg\, 2\alpha| = \left|\frac{2 J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}}\right| = 1,49 \Rightarrow 2\alpha = 56,13^\circ$$ ADESSO RAGIONIAMO SUI SEGNI E VEDIAMO L'ANGOLO REALE QUALE

ZIONE DEL BARICENTRO DI QUELLO CHE SAREBBE UN RETTANGOLO PIENO. PER I MOMENTI NEL SECONDO ORDINE INVECE:

$$J_{xx} = y_1^2 A_1 + J_{\xi\xi 1} - y_2^2 A_2 - J_{\xi\xi 2} \qquad J_{yy} = x_1^2 A_1 + J_{\eta\eta 1} - x_2^2 A_2 - J_{\eta\eta 2}$$

PER PRIMA COSA CALCOLIAMO LE NUOVE COORDINATE DEI DUE BARICENTRI:

$$x_1 = X_1 - X_G = 30 - 31,21 = -1,21\ mm \qquad x_2 = X_2 - X_G = 13 - 31,21 = -18,21\ mm$$

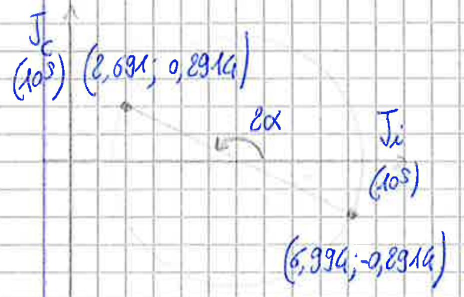
$$y_2 = Y_1 - Y_G = 20 - 19,29 = 0,71\ mm \qquad y_2 = Y_2 - Y_G = 30 - 19,29 = 10,71\ mm$$

$$\Rightarrow J_{xx} = (0,71)^2 \cdot 2400 + \frac{40 \cdot 60^3}{12} - (10,71)^2\, 160 - \frac{10 \cdot 16^3}{12} = 6,994 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$J_{yy} = (-1,21)^2 \cdot 2400 + \frac{60 \cdot 40^3}{12} - (-18,21)^2\, 160 - \frac{16 \cdot 10^3}{12} = 2,691 \cdot 10^5\ mm^4$$

$$J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + \cancel{J_{\eta\xi 1}}^{\,0} - A_2 x_2 y_2 - \cancel{J_{\eta\xi 2}}^{\,0} = 2400 \cdot (-1,21)(0,71) - 160 \cdot (-18,21)(10,71) = 2,914 \cdot 10^4;$$

È RAGIONEVOLE CHE IL MOMENTO DI INERZIA RISPETTO y SIA PIÙ GRANDE DI QUELLO RISPETTO x PERCHÉ C'È MAGGIORE SVILUPPO IN ORIZZONTALE. ADESSO FACCIAMO LA SOLITA RAPPRESENTAZIONE GRAFICA:



$$J_{1,2} = \left[\frac{2,691 + 6,994}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,691 - 6,994}{2}\right)^2 + (0,29)^2}\ \right] \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow J_1 = 6,694 \cdot 10^5\ mm^4 \quad J_2 = 2,992 \cdot 10^5\ mm^4$$

COME SI PUÒ VEDERE J_1 DIFFERISCE DI POCO DA J_{xx}, COME ANCHE J_2 DIFFERISCE DI POCO DA J_{yy}. QUESTO CI FA CAPIRE CHE QUELLA CAVITÀ RETTANGOLARE PERTURBA MOLTO POCO LA PRINCIPALITÀ. LA NON PRINCIPALITÀ È LEGATA AL FATTO CHE A CAUSA DELLA CAVITÀ I DUE ASSI NON SONO DUE ASSI DI SIMMETRIA. ADESSO POSSIAMO CALCOLARE L'ANGOLO:

$$\Rightarrow |tg\, 2\alpha| = \left| \frac{2 J_{xy}}{J_{xx} - J_{yy}} \right| = 0,139 \Rightarrow 2\alpha = 9,03^\circ$$

RAGIONANDO SUI SEGNI POSSIAMO DIRE CHE J_{xy} È POSITIVO, QUINDI L'ANGOLO È POSITIVO; INOLTRE $J_{xx} < J_{yy}$ DA CUI VIENE FUORI CHE $90^\circ \leq 2\alpha \leq 180^\circ$ OVVERO $45^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$; LE 4 POSSIBILITÀ SONO:

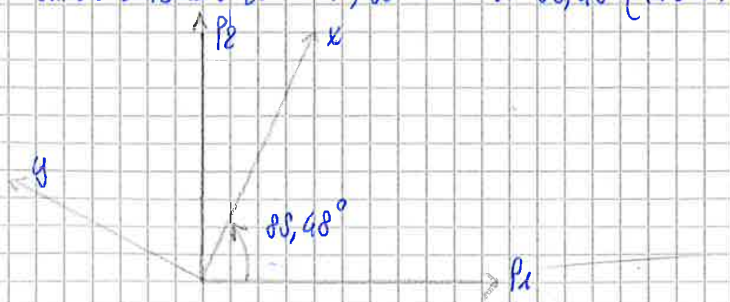
$2\alpha = 9,03$

$-2\alpha = -9,03$

$180 - 2\alpha = 170,96^\circ$

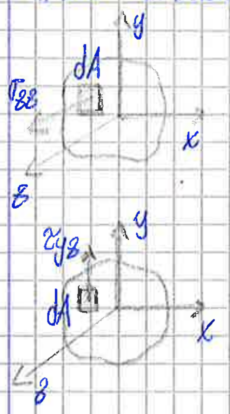
$-180 + 2\alpha = -170,96^\circ$

L'ANGOLO CORRETTO È $2\alpha = 170,96^\circ$ DA CUI $\alpha = 85,48^\circ$ (QUASI UN ANGOLO RETTO).



RISULTANTI EQUIVALENTI. ADESSO CONSIDERIAMO UNA SEZIONE NORMALE SU CUI AGISCONO σ_{zz}, τ_{xz}, τ_{yz}: COME POSSIAMO NOTARE ALLA FINE FACCIAMO DIPENDERE TUTTO DA z, ORA ANALIZZIAMO QUALI SONO LE COMPONENTI DELLA RISULTANTE E DEI MOMENTI RISULTANTI:

1) COMPONENTI DELLA RISULTANTE:



- FORZA NORMALE ALLA SEZIONE: PUÒ ESSERE UN'AZIONE DI TRAZIONE (SE POSITIVA) O DI COMPRESSIONE (SE NEGATIVA) DELL'ELEMENTO IN DIREZIONE z. IN OGNI PUNTO ABBIAMO UN σ_{zz} CHE AGISCE SU UN dA, QUINDI LA RISULTANTE SARÀ DATA DA:

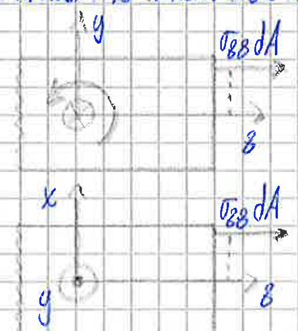
$$\Longrightarrow N = \int_A \sigma_{zz}\, dA$$ CON N PER INDICARE LA NORMALE.

- FORZA DI TAGLIO: INTEGRANO TENSIONI TANGENZIALI E FANNO SCIVOLARE TRASVERSALMENTE UNA PARTE DI MATERIALE RISPETTO ALL'ALTRA. PUÒ AGIRE SIA LUNGO x SIA LUNGO y, QUINDI AVREMO DUE COMPONENTI:

$$\Longrightarrow T_x = \int_A \tau_{xz}\, dA \qquad T_y = \int_A \tau_{yz}\, dA.$$

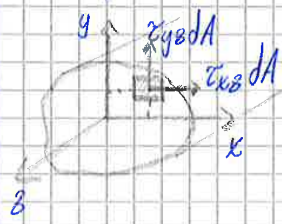
COME SI PUÒ NOTARE STIAMO FACENDO UNA INTEGRAZIONE IN QUANTO LE TENSIONI IN GENERALE NON SONO DELLE COSTANTI, MA POSSONO CAMBIARE DA PUNTO A PUNTO; SE QUANDO AVEVAMO UN SISTEMA DI FORZE PER TROVARE LA RISULTANTE (CASO DISCRETO) APPLICAVAMO UNA SOMMATORIA, ADESSO NEL CONTINUO APPLICO UNA INTEGRAZIONE.

2) COMPONENTI DEI MOMENTI RISULTANTI:



- MOMENTO FLETTENTE: TENDE A FAR CURVARE L'ASSE DEL SOLIDO E QUESTA AZIONE DI MOMENTO È DOVUTA A σ_{zz}. POSSO AVERE DUE COMPONENTI DI MOMENTO, UNA RISPETTO x E UNA RISPETTO y: SE OSSERVIAMO LA SITUAZIONE LATERALMENTE, CONSIDERANDO IL PIANO yz ALLORA L'ASSE x SARÀ ENTRANTE NELLA FIGURA, CONSIDERANDO IL PIANO xz ALLORA L'ASSE y SARÀ USCENTE DALLA FIGURA. NEL PRIMO CASO IL BRACCIO DELLA FORZA INFINITESIMA È LA COORDINATA y, NEL SECONDO CASO LA COORDINATA x. INOLTRE σ_{zz} PROVOCA UN MOVIMENTO ORARIO; SE PRENDIAMO QUESTO COME VERSO CONVENZIONALE POSITIVO, ALLORA NEL PRIMO CASO IL SENSO DI ROTAZIONE È CONCORDE CON IL VERSO CONVENZIONALE, NEL SECONDO CASO INVECE È DISCORDE, QUINDI CI SARÀ UN CAMBIAMENTO DI SEGNO. HO ALLORA:

$$\Longrightarrow M_x = \int_A \sigma_{zz} \cdot y \cdot dA \qquad M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA.$$



- MOMENTO TORCENTE: CALCOLATO RISPETTO L'ASSE z È QUELLA COMPONENTE CHE TENDE AD ATTORCIGLIARE L'ASSE DEL SOLIDO. COME SI PUÒ BEN CAPIRE IL MOMENTO TORCENTE SARÀ ORIGINATO DALLE τ; UN PUNTO GENERICO VIENE SOLLECITATO DA τ_{yz} E τ_{xz}, IN PARTICOLARE LA FORZA $\tau_{yz}\, dA$ RISPETTO L'ASSE z COME BRACCIO HA LA COORDINATA x MENTRE INVECE LA FORZA $\tau_{xz}\, dA$ HA COME BRACCIO LA COORDINATA y. τ_{yz} TENDE A FAR RUOTARE IN SENSO ANTIORARIO, τ_{xz} IN SENSO ORARIO, QUINDI TRA DI LORO SONO DISCORDI. IL MOMENTO TORCENTE È DUNQUE DEFINITO COME I MOMENTI RISULTANTI DELLE FORZE INFINITESIME $\tau_{xz}\, dA$ E $\tau_{yz}\, dA$: $\Longrightarrow M_z = \int_A (+\tau_{yz}\, x - \tau_{xz}\, y)\, dA$ (SEMPRE POSITIVO IL VERSO ANTIORARIO).

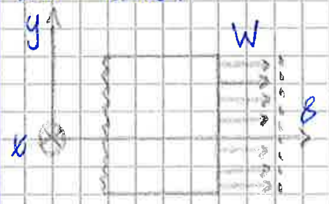
NEL PRIMO CASO IL CARICO È APPLICATO NELLA ZONA ESTERNA, NEL SECONDO CASO SI PREME NELLA ZONA INTERNA, QUINDI IL MODO IN CUI È APPLICATO IL CARICO È DIVERSO NEI DUE CASI, MA SE CI ALLONTANIAMO UN PO' DALLA SEZIONE DI BASE I DUE PROBLEMI DIVENTANO EQUIVALENTI E LA RISULTANTE È LA STESSA.

ADESSO POSSIAMO PASSARE ALLA FASE ANALITICA DEL PROBLEMA. SI TRATTA DI TROVARE GLI STATI DI TENSIONE σ E τ IN FUNZIONE DEI MOMENTI E DELLE FORZE RISULTANTI. COME CI ARRIVO? CONVIENE STILARE UNA SCALETTA DEI CALCOLI CHE FAREMO:

1) SI PARTE DAGLI SPOSTAMENTI, SE L'OGGETTO È TIRATO O FLESSO SI ASSUME UNA LEGGE DI SPOSTAMENTO RAGIONEVOLE;
2) DERIVANDO GLI SPOSTAMENTI SI OTTENGONO LE DEFORMAZIONI;
3) APPLICANDO LA LEGGE ELASTICA DALLE DEFORMAZIONI SI OTTENGONO LE TENSIONI.

IN QUESTO MODO SI OTTENGONO LE FORMULE PER σ_{zz}, τ_{xz}, τ_{yz} IN FUNZIONE DI $N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z$.

- COMPORTAMENTO ESTENSIONALE (TRAZIONE - COMPRESSIONE): UN ELEMENTO DESCRITTO CON IL SOLIDO DI SAINT VENANT VIENE TIRATO O COMPRESSO.



1) SPOSTAMENTO: LA SEZIONE SOTTO VIENE AVANTI PARALLELAMENTE A SE STESSA. POSSIAMO ASSUMERE LA LEGGE $W = K_0 \cdot z$; PER UNA CERTA SEZIONE TUTTI I PUNTI SI MUOVONO LONGITUDINALMENTE ALLA STESSA MANIERA LUNGO L'ASSE z, QUINDI NON C'È DIPENDENZA DA x E y. PER $z=0$ NON SI MUOVE NIENTE, PIÙ z AUMENTA PIÙ LO SPOSTAMENTO CRESCE PRENDENDO SEZIONI PIÙ LONTANE. K_0 È UNA COSTANTE, QUINDI W E z SONO DIRETTAMENTE PROPORZIONALI.

2) DEFORMAZIONI: DI TUTTO IL TENSORE MI INTERESSA SOLO COSA SUCCEDE LUNGO z, QUINDI $\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = 0$. ALLORA SAPPIAMO CHE:

$$\Longrightarrow \varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z} = K_0$$ QUINDI LA DILATAZIONE È LA STESSA IN TUTTI I PUNTI.

3) ELASTICITÀ: IN GENERALE ε_{zz} DIPENDE DA TUTTE E 3 LE σ, MA PER IPOTESI σ_{xx} E σ_{yy} SONO NULLE, QUINDI DALLA LEGGE DI HOOKE POSSIAMO OTTENERE:

$$\Longrightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E}\cancel{\sigma_{xx}}^{0} - \frac{\nu}{E}\cancel{\sigma_{yy}}^{0} + \frac{1}{E}\sigma_{zz} + \alpha(T-T_0) = \frac{1}{E}\sigma_{zz}$$ (NON CONSIDERIAMO LA TEMPERATURA).

$$\Longrightarrow \sigma_{zz} = E \cdot \varepsilon_{zz} \Longrightarrow \boxed{\sigma_{zz} = E \cdot K_0}.$$

4) EQUIVALENTI STATICI:

$$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = \int_A E K_0\, dA = E K_0 \int_A dA = E K_0 A;$$

$$M_x = \int_A \sigma_{zz} \cdot y\, dA = E K_0 \int_A y\, dA = 0;$$

$$M_y = -\int_A \sigma_{zz} \cdot x\, dA = -E K_0 \int_A x\, dA = 0;$$

POSSIAMO ASSUMERE COSTANTE IL MODULO ELASTICO PERCHÉ ABBIAMO IPOTIZZATO CHE IL MATERIALE SIA OMOGENEO, QUINDI SI DEFORMA ALLO STESSO MODO IN OGNI PUNTO E QUINDI IL MODULO ELASTICO È LO STESSO OVUNQUE. IN M_x COMPARE IL MOMENTO STATICO RISPETTO y,

$M_y = -\int_A x\,\sigma_{zz}\,dA = -E K_x \int_A xy\,dA = 0$ QUALCHE SPIEGAZIONE: K_x È UNA COSTANTE CHE SI PUÒ PORTARE FUORI DAL SEGNO DI INTEGRALE PERCHÉ K_x DIPENDE DA z, L'INTEGRAZIONE COINVOLGE x E y; IN N COMPARE IL MOMENTO STATICO RISPETTO y, NULLO PERCHÉ IL RIFERIMENTO È BARICENTRICO; IN M_x COMPARE IL MOMENTO DI INERZIA INTORNO ALL'ASSE x (SEMPRE POSITIVO); IN M_y COMPARE IL MOMENTO CENTRIFUGO J_{xy}, MA SE ASSUMO COME xy UN RIFERIMENTO, OLTRE CHE BARICENTRICO, ANCHE PRINCIPALE D'INERZIA, ALLORA J_{xy} È NULLO. QUINDI LA FORZA NORMALE È NULLA, IL MOMENTO RISPETTO y È NULLO, C'È SOLO MOMENTO RISPETTO x.

$$\Longrightarrow M_x = E K_x J_{xx} \Longrightarrow K_x = \frac{M_x}{E J_{xx}} \Longrightarrow \boxed{\sigma_{zz} = (M_x / J_{xx})\, y}$$

NELLA FORMULA COMPARE IL MOMENTO STATICO M_x LEGATO AL CARICO ESTERNO, E J_{xx} CHE DIPENDE DALLA GEOMETRIA DEL SOLIDO; ANCHE LA TENSIONE VARIA LINEARMENTE CON LA y. IL MASSIMO VALORE DI σ_{zz} LO TROVIAMO SUL BORDO (FINO A QUANDO C'È MATERIALE OVVIAMENTE) SUPERIORE, GUARDANDO L'IMMAGINE DI PRIMA. SE $y > 0$ ALLORA $\sigma_{zz} > 0$ E SE $y < 0$ ALLORA $\sigma_{zz} < 0$, QUINDI σ_{zz} RAGGIUNGE VALORI MASSIMI E OPPOSTI IN VERSO (SEGNO) AGLI ESTREMI DELLA SEZIONE. IN $y = 0$ LA TENSIONE NULLA DIVENTA; $y = 0$ SAREBBE L'ASSE x CHE PER QUESTO MOTIVO PRENDE IL NOME DI ASSE <u>NEUTRO</u>. DA TUTTO QUESTO SI È VISTO QUINDI CHE NEL MOMENTO IN CUI LA SEZIONE RUOTA INTORNO ALL'ASSE x, ALLORA DELLE DUE COMPONENTI DI MOMENTO RISULTANTE QUELLA NON NULLA È M_x, QUELLA NULLA È M_y. LA SEZIONE RUOTA INTORNO ALL'ASSE x, QUINDI C'È UN MOMENTO RISPETTO x, MA NON È COSÌ SCONTATA LA COSA PERCHÉ QUESTA COSA VALE IN QUANTO xy È UN RIFERIMENTO PRINCIPALE, INFATTI:

$\Longrightarrow M_x = E J_{xx} K_x \qquad M_y = E J_{xy} K_x$ I TERMINI J_{xx} E J_{xy} FANNO ENTRARE IN GIOCO LA ROTAZIONE, SE IL RIFERIMENTO NON FOSSE PRINCIPALE, ALLORA J_{xy} NON SAREBBE NULLO E QUINDI ANCHE SE LA ROTAZIONE AVVIENE SOLO ATTORNO ALL'ASSE x, ABBIAMO ANCHE UNA COMPONENTE DI MOMENTO INTORNO L'ASSE y.

ADESSO CONSIDERIAMO LA FLESSIONE NEL PIANO <u>zx</u>:

SE PRIMA CONSIDERAVAMO LA VISTA LATERALE, ALLORA ADESSO CONSIDERIAMO LA VISTA DALL'ALTO. L'ASSE y ESCE DAL PIANO E QUINDI PENSANDO ALLA REGOLA DELLA VITE, QUESTA STA USCENDO, QUINDI IL VERSO CONVENZIONALE POSITIVO È QUELLO ANTIORARIO.

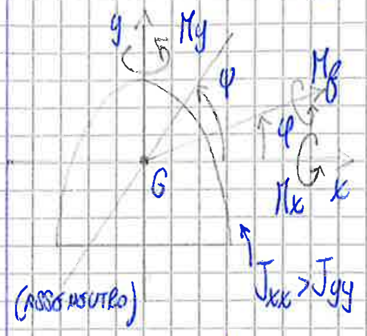
1) SPOSTAMENTO: PER EFFETTO DELLA ROTAZIONE I PUNTI SI SPOSTANO IN AVANTI E INDIETRO PERCORRENDO UN ARCO DI CIRCONFERENZA CHE PER α_y INFINITESIMO SI CONFONDE CON LA CORDA, QUINDI OSSERVIAMO DEGLI SPOSTAMENTI RETTILINEI PARALLELI A z. QUINDI POSSIAMO ASSUMERE LA LEGGE $W = -x\,\alpha_y$ IN QUANTO UN PUNTO CON $x > 0$ SEGUE UNO SPOSTAMENTO ALL'INDIETRO, UN PUNTO DELLA SEZIONE CON $x < 0$ SEGUE UNO SPOSTAMENTO IN AVANTI, DA QUI IL SEGNO MENO.

2) DEFORMAZIONE: DERIVANDO LO SPOSTAMENTO SI OTTIENE:

$\varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} = -x\,\dfrac{d\alpha_x}{dz} = -K_y \cdot x$ z COMPARE SOLO IN α_y PERCHÉ L'ANGOLO DI ROTAZIONE NON È COSTANTE PER OGNI SEZIONE; SE TUTTO RUOTASSE ALLO STESSO MODO SAREBBE UN MOTO RIGIDO

$$\Longrightarrow \boxed{y = \frac{M_y}{M_x} \frac{J_{xx}}{J_{yy}} x}$$

La pendenza di questa retta è caratterizzata dalla presenza del rapporto tra i momenti di inerzia e quello del rapporto tra i momenti flettenti. Graficamente abbiamo questo:



Se xy è un riferimento principale di inerzia, allora l'asse neutro è una retta di questo genere. La pendenza della retta è la tangente dell'angolo che forma con l'orizzontale, quindi chiamiamo:

$$\Longrightarrow tg\,\psi = \frac{M_y}{M_x} \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}}.$$

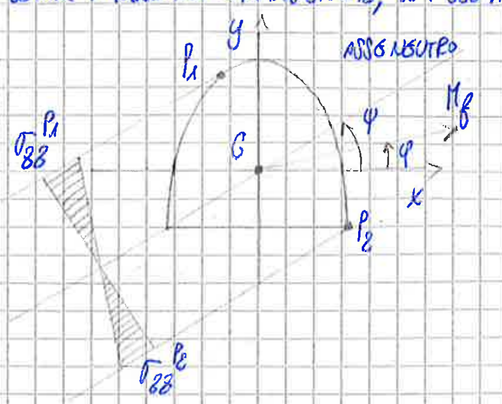
Se quello che abbiamo trovato è l'asse neutro, come è fatto il momento risultante? Il momento flettente risultante M_f si scrive come somma vettoriale delle componenti M_x e M_y ovvero:

$$\Longrightarrow M_f = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$$

è un vettore inclinato rispetto all'asse x di un angolo φ, la cui tangente è il rapporto tra i due cateti, ovvero M_x e M_y: $tg\,\varphi = M_y / M_x$ ovvero solo una parte di $tg\,\psi$. Adesso c'è da fare un ragionamento un po' più sofisticato; sostituendo $tg\,\varphi$ nella formuletta sopra si ottiene:

$$\Longrightarrow tg\,\psi = tg\,\varphi \cdot \frac{J_{xx}}{J_{yy}}$$

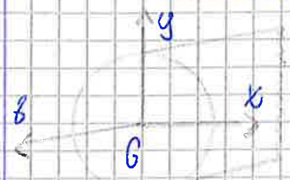
Diciamo subito che J_{xx} e J_{yy} dipendono dalla geometria della sezione, se fossero uguali vorrebbe dire che la geometria della sezione è la stessa ovunque. Però se fosse così, allora $J_{xx} = J_{yy}$ ovvero $tg\,\psi = tg\,\varphi$ quindi $\psi = \varphi$ ovvero la rotazione della sezione avviene intorno all'asse neutro. Però in generale non è così, ovvero $J_{xx} \neq J_{yy}$ e quindi $\psi \neq \varphi$ ovvero l'asse intorno a cui la sezione ruota non è parallelo a quello di un asse centrale di inerzia, ma ha una diversa inclinazione rispetto l'asse x: questo fenomeno prende il nome di <u>flessione deviata</u>. Si parla invece di <u>flessione retta</u> quando il momento flettente è contenuto in un piano principale di inerzia (xz o yz). In particolare se $J_{xx} > J_{yy}$ (ovvero il corpo ha maggiore estensione verso l'alto) allora l'asse neutro sarà più vicino alla zona dove il momento flettente da maggiore contributo, mentre il momento risultante sarà più vicino alla zona dove è più facile imporre una rotazione alla sezione, ovvero dove il momento flettente è minore. Infatti se ci pensiamo bene dove il momento di inerzia J è maggiore, allora le tensioni sono più piccole, ovvero la sezione in quella zona è più resistente, se fosse più piccolo allora la tensione che sente la sezione sarebbe maggiore.



Adesso il problema che ci poniamo è quello di trovare i valori massimi (in modulo) di σ_{zz}. Prima era facile in quanto il valore massimo era sul bordo, sia sopra che sotto, ma adesso abbiamo una miscela dei due momenti. Dobbiamo partire dall'asse neutro: quello che sappiamo è che più ci allontaniamo dall'asse neutro più le tensioni crescono in modulo, ma allora dovremo semplicemente trovare i due

• **COMPORTAMENTO TORSIONALE**: IN TUTTI I MACCHINARI DI TIPO ELETTRICO O CHIMICO C'È SEMPRE DA TRASMETTERE UN MOVIMENTO ROTATORIO E PER FARE QUESTO OCCORRE APPLICARE UNA TORSIONE. SE PRIMA NON ERA NECESSARIO FARE RIFERIMENTO ALLA FORMA DELLA SEZIONE (INFORMAZIONE INGLOBATA NEI MOMENTI DI INERZIA), ADESSO INVECE OCCORRE CLASSIFICARE DUE CASI NOTEVOLI IN BASE ALLA GEOMETRIA:

1) SEZIONE RETTA CIRCOLARE (PIENA O CAVA):



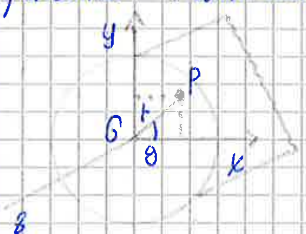
PER QUESTO TIPO DI SEZIONE POSSIAMO AVERE UNA SOLUZIONE IN FORMA CHIUSA, OVVERO SI OTTENGONO DELLE FORMULE ESATTE CHE NON SONO UNA SERIE DI TERMINI.

2) SEZIONE RETTA NON CIRCOLARE:

PER QUESTO TIPO DI SEZIONE INVECE NON SI RIESCE AD OTTENERE UNA SOLUZIONE IN FORMA CHIUSA; IN PARTICOLARE NOI VEDREMO COSA SUCCEDE NELLA SEZIONE A "PARETE SOTTILE" IN CUI LO SPESSORE È PIÙ PICCOLO DELLE DIMENSIONI GENERALI. CON QUESTA SI POSSONO RICAVARE DELLE SOLUZIONI APPROSSIMATE, SEMPRE NON CHIUSE, MA PIÙ SEMPLICI.

PER PRIMA COSA CONSIDERIAMO LA SEZIONE CIRCOLARE. ANCHE IN QUESTO CASO USO IL CLASSICO PROCEDIMENTO IN 4 PASSI, OVVERO: 1) SPOSTAMENTO; 2) DEFORMAZIONI; 3) TENSIONI MEDIANTE ELASTICITÀ; 4) EQUIVALENTI STATICI. QUINDI SI SEGUE LO STESSO RAGIONAMENTO COME NEI CASI DI TRAZIONE E FLESSIONE.

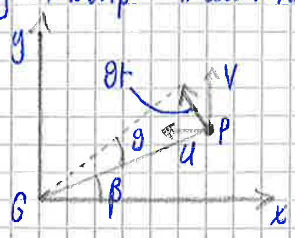
1) SPOSTAMENTO: DOBBIAMO CHIEDERCI COME SI MUOVE LA SEZIONE PER EFFETTO DELLA TORSIONE, BASIAMOCI SU QUESTA FIGURA:



L'IDEA È CHE CI SIANO TANTI DISCHETTI IMPILATI UNO SOPRA L'ALTRO, OGNUNO DI QUESTI RUOTA INTORNO A z DI UN ANGOLO θ. QUESTO ANGOLO È IN GENERALE FUNZIONE DI z; SE L'ANGOLO FOSSE COSTANTE ALLORA SI TRATTEREBBE DI MOTO RIGIDO, INVECE SEZIONE PER SEZIONE θ CAMBIA. INOLTRE QUESTO FENOMENO AVVIENE NEL PIANO xy, NON C'È UNA COMPONENTE LONGITUDINALE LUNGO z. IN QUESTO CONTESTO È UTILE USARE UN DOPPIO RIFERIMENTO, CARTESIANO E POLARE: LA SEZIONE DI TIPO CIRCOLARE CI CONSENTE DI USARE UN RIFERIMENTO POLARE, MA SICCOME DOVRÒ RICAVARE LE TENSIONI E LE DEFORMAZIONI ALLORA IMPIEGO ANCHE QUELLO CARTESIANO. LE RELAZIONI TRA LE COORDINATE POLARI $r\,\beta$ E QUELLE CARTESIANE xy SONO:

$$\begin{cases} x = r\cos\beta \\ y = r\sin\beta \end{cases}$$

NOTARE LA DIFFERENZA TRA β E θ: β È LA COORDINATA POLARE, θ INVECE È L'ANGOLO DI CUI RUOTA IL PUNTO IN SEGUITO ALLA DEFORMAZIONE. QUINDI FACCIO RUOTARE LA SEZIONE DI UN θ NON TANTO GRANDE:



IL PUNTO P, DESCRITTO IN COORDINATE POLARI, RUOTERÀ DI UN ANGOLO θ MUOVENDOSI IN DIREZIONE PERPENDICOLARE A QUELLA RADIALE. SE θ È PICCOLO ALLORA POSSO CONFONDERE L'ARCO PERCORSO CON UN SEGMENTO; QUESTO SEGMENTO APPUNTO È θr E SUA ORIENTAZIONE DIPENDE DA β, OVVERO DA COME ERA ORIENTATO r INIZIALMENTE. DI QUESTO SEGMENTO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 194

FORZA, MA È NORMALE PERCHÉ C'È UNA ROTAZIONE, NON UNA FORZA CHE TIRA LUNGO UNA CERTA DIREZIONE. PER QUANTO RIGUARDA IL MOMENTO TORCENTE NOI SAPPIAMO CHE τ_{yz} HA BRACCIO x, MENTRE τ_{xz} HA BRACCIO y; L'ASSE z È USCENTE DAL DISEGNO, QUINDI COME VERSO CONVENZIONALE POSITIVO DI ROTAZIONE PRENDO QUELLO ANTIORARIO (LA VITE ESCE), QUINDI AVREMO:

$\Rightarrow M_z = \int_A (x\tau_{yz}\,dA - y\tau_{xz}\,dA) = G\theta' \int_A (x^2+y^2)\,dA$ È COME SE FOSSE UN MOMENTO DI INERZIA SOLO CHE SONO PRESENTI TUTTE E DUE LE COORDINATE. LO SI INDICA CON IL PEDICE z IN QUANTO LA ROTAZIONE AVVIENE INTORNO ALL'ASSE z; INOLTRE SI PUÒ OSSERVARE CHE $x^2+y^2=r^2$ DA CUI POSSIAMO DERIVARE CHE:

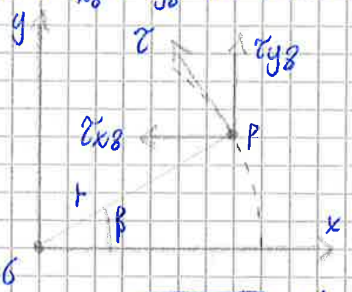
$\Rightarrow \int_A (x^2+y^2)\,dA = \int_A r^2\,dA$ CON r LA DISTANZA DAL CENTRO E NON DALL'ASSE; QUESTA QUANTITÀ PRENDE IL NOME DI MOMENTO DI INERZIA POLARE E ANDANDO A SOSTITUIRE SI OTTIENE:

$\Rightarrow M_z = G\theta' J_p \Rightarrow \theta' = \frac{M_z}{GJ_p}$ POSSIAMO SOSTITUIRE NELLE FORMULE DI TENSIONE RICAVATE PRIMA:

$$\Rightarrow \tau_{xz} = -\cancel{G}y\frac{M_z}{\cancel{G}J_p} \quad E \quad \tau_{yz} = \cancel{G}x\frac{M_z}{\cancel{G}J_p} \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = -\frac{M_z}{J_p}y \qquad \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p}x}$$

POSSIAMO FARE UNA ULTERIORE SEMPLIFICAZIONE; GUARDANDO LE FORMULE APPENA RICAVATE, CONFRONTIAMOLE CON GLI SPOSTAMENTI:

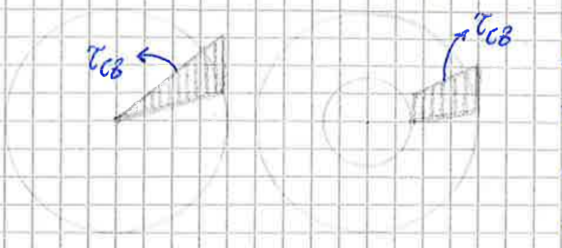
$u = -\theta y \longrightarrow \tau_{xy} = -\frac{M_z}{J_p}y \qquad v = \theta x \longrightarrow \tau_{yz} = \frac{M_z}{J_p}y$ HANNO ESATTAMENTE LA STESSA STRUTTURA E QUINDI COME AVEVAMO SCOMPOSTO IL VETTORE SPOSTAMENTO NELLE SUE COMPONENTI u E v, ALLO STESSO MODO POSSIAMO PENSARE CHE τ_{xz} E τ_{yz} SIANO LE COMPONENTI DI UNA UNICA TENSIONE COMPLESSIVA.



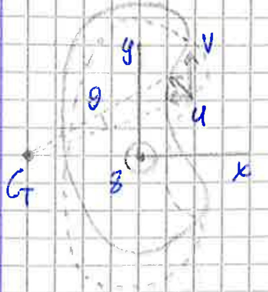
COME È RIVOLTA QUESTA τ COMPLESSIVA? SE IMMAGINO IL MOTO CIRCOLARE, τ È PERPENDICOLARE AL RAGGIO E QUINDI TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA NEL PUNTO P. LA CHIAMO QUINDI τ_{cz} CON "c" CHE INDICA L'ORIENTAMENTO LUNGO LA CIRCONFERENZA, E z COME AL SOLITO VUOL DIRE CHE APPLICATA SULLA FACCIA NORMALE A z. QUINDI POSSIAMO SCRIVERE τ COME:

$$\Rightarrow \tau_{cz} = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M_z}{J_p}\underbrace{\sqrt{y^2+x^2}} \Rightarrow \boxed{\tau_{cz} = \frac{M_z}{J_p}r}$$

QUINDI NON SERVE DISTINGUERE TRA τ_{xz} E τ_{yz}, MA VALUTIAMO L'EFFETTO COMPLESSIVO. QUINDI τ_{cz} È ZERO NEL CENTRO, POI CRESCE LINEARMENTE FINO ALL'ORLO DOVE C'È IL PICCO (RAGGIO ESTERNO). LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI È PIÙ FACILE:

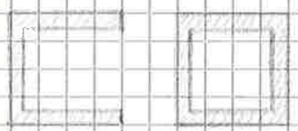


NEL CERCHIO PIENO NEL CENTRO τ_{cz} È NULLO, POI CRESCE LINEARMENTE FINO A RAGGIUNGERE IL MASSIMO SUL BORDO; NEL CASO DELLA SEZIONE CAVA INVECE r VARIA TRA IL BORDO INTERNO E QUELLO ESTERNO QUINDI NEL BORDO INTERNO τ_{cz} ASSUME UN CERTO VALORE. QUESTO GRAFICO VALE IN QUALUNQUE SEZIONE CI SI METTA, LA SEZIONE AVRÀ IN OGNI PUNTO UNA TENSIONE TANGENZIALE ALLA CIRCONFERENZA

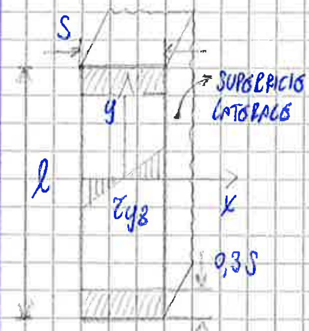


DURANTE LA TORSIONE QUINDI I PUNTI NON SI SPOSTANO SOLO SUL PIANO x,y, MA HANNO ANCHE UNA COMPONENTE LUNGO z CHE NON È COSTANTE, MA VARIABILE LUNGO LA SEZIONE. PER UNA SEZIONE NON CIRCOLARE LE FUNZIONE DELLO SPOSTAMENTO SONO LE STESSE, MA IL PUNTO INTORNO CUI RUOTA TUTTO È C_T. QUESTE RELAZIONI SONO:

$u = -\theta(y - y_{C_T})$ $\quad v = \theta(x - x_{C_T})$ $\quad W = \theta\omega(x,y)$ DOVE $\omega(x,y)$ È LA FUNZIONE DI INGOBBAMENTO CHE CI SPIEGA COME LE SEZIONI NON RIMANGONO PIANE, MA SI INGOBBANO. CI SONO DELLE COMPLICAZIONI MATEMATICHE IN PIÙ RISPETTO ALLA SEZIONE CIRCOLARE, PERÒ SONO DISPONIBILI DELLE TRATTAZIONI SEMPLIFICATE PER I CASI DI SEZIONE A PARETE SOTTILE.



PER QUESTO TIPO DI SEZIONE OCCORRE FARE UNA DISTINZIONE TRA IL TIPO APERTO E CHIUSO; NEL PRIMO DI TIPO ABBIAMO DELLE CAVITÀ ACCESSIBILI DALL'ESTERNO, NEL SECONDO TIPO INVECE LA SEZIONE SI CHIUDE COME UN CIRCUITO LASCIANDO DELLE ZONE CHE NON SONO ACCESSIBILI DALL'ESTERNO. PRIMA DI PROCEDERE CON LA TRATTAZIONE FACCIAMO SUBITO UNA PRECISAZIONE: SE PRIMA IL MOMENTO TORCENTE LO INDICAVAMO CON M_z IN QUANTO LA SEZIONE RUOTAVA INTORNO AL BARICENTRO, ADESSO INVECE USEREMO IL SIMBOLO M_t PER INDICARE CHE LA SEZIONE RUOTA INTORNO AL CENTRO DI TORSIONE. UN CASO PARTICOLARE CHE ANDIAMO A STUDIARE È QUELLO DELLA SEZIONE A PARETE RETTANGOLARE:



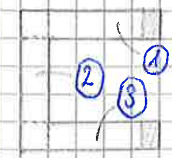
CONSIDERIAMO UNA SEZIONE RETTANGOLARE CON $l >> s$ IN CUI LE TENSIONI τ SONO ALLINEATE CON IL LATO MAGGIORE l. QUESTO PER RISPETTARE LA CONDIZIONE DI SUPERFICIE LATERALE SCARICA DELL'IPOTESI DI SAINT VENANT; UNA TENSIONE τ ALLINEATA CON l NON COMPORTA NIENTE SULLA SUPERFICIE LATERALE, SE AVESSI UNA TENSIONE LUNGO x MI OCCORREREBBE UNA GEMELLA SULLA SUPERFICIE LATERALE PER AVERE EQUILIBRIO. A DUE A DUE QUESTE TENSIONI SI ANNULLANO DAL MOMENTO CHE NON C'È FORZA RISULTANTE; QUELLO CHE CI INTERESSA È IL MOMENTO TORCENTE, ANCHE IL MOMENTO RISULTANTE A CUI È SOGGETTA LA SEZIONE. I VALORI DI PICCO DI QUESTE TENSIONI SI TROVANO AI BORDI E SONO DATI DA QUESTA FORMULA:

$\Longrightarrow \tau_{picco} = \pm \frac{M_t}{J_t} \cdot s$ CON M_t IL MOMENTO TORCENTE A CUI È SOGGETTO LA SEZIONE, J_t È IL COEFFICIENTE DELLA SEZIONE (RELATIVO ALLA FORMA DELLA SEZIONE) CHE SAREBBE UN MOMENTO DI INERZIA (DIMENSIONALMENTE LO È) MA NON LO È IN SENSO STRETTO. DA NOTARE CHE INDICHIAMO QUESTO COEFFICIENTE CON QUESTA FORMULA:

$\Longrightarrow J_t = \frac{1}{3} l s^3 \ [mm^4]$ QUESTA NEL CASO IN CUI $l >> s$, ALTRIMENTI SI USA QUESTA FORMULA:

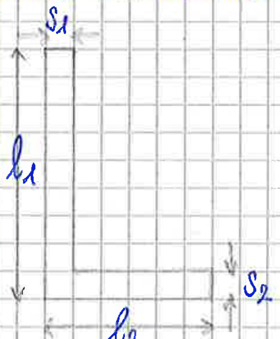
$\Longrightarrow J_t = \frac{1}{3}(l - 2 \cdot 0,3s)s^3$ RIFERENDOCI ALLA SEZIONE RETTANGOLO IL TERMINE TRA PARENTESI CI DICE CHE ABBIAMO TIRATO VIA UN PO' DI LATO DA UNA PARTE E DALL'ALTRA; LASCIAMO SCRITTO $2 \cdot 0,3s$ IN QUANTO QUESTA RIDUZIONE SI APPLICA AD OGNI

$\Longrightarrow J_t = \frac{1}{3}(l - m \cdot 0{,}3 \cdot s)\, s^3$ CON $m = 0, 1, 2$ NEL CASO DEL RETTANGOLO $m = 2$ (DUE ESTREMI LIBERI), MA QUANDO ABBIAMO UNA COMPOSIZIONE DI RETTANGOLI COME IN QUESTO CASO:



IL RETTANGOLO ① HA UN SOLO ESTREMO LIBERO, DALL'ALTRA PARTE NON È LIBERO PERCHÉ IL MATERIALE PROSEGUE, QUINDI $m = 1$; NEL RETTANGOLO ② ENTRAMBI GLI ESTREMI SONO CONTIGUI AL RESTO DELLA SEZIONE E QUINDI $m = 0$ (NO ESTREMI LIBERI); IL RETTANGOLO ① È UGUALE AL ③ E QUINDI QUEST'ULTIMO HA $m = 1$.

DOVE L'ELEMENTO CONTINUA LA RIDUZIONE NON È DA FARE, DOVE IL MATERIALE È LIBERO LA RIDUZIONE SI DEVE FARE. MA PERCHÉ SI ESEGUE QUESTA RIDUZIONE? LE TENSIONI τ SONO ALLINEATE CON IL BORDO, SU QUELLO OPPOSTO NECESSARIAMENTE CI SONO DELLE TENSIONI τ SEMPRE ALLINEATE COL BORDO, MA DI VERSO OPPOSTO. QUESTA CONSIDERAZIONE È VERA PER LA MAGGIOR PARTE DEL RETTANGOLO, MA SULL'ORLO SUPERIORE C'È UN CAMBIAMENTO DI DIREZIONE DELLE τ; STANDO A DEBITA DISTANZA DAI BORDI SUPERIORE ED INFERIORE NON SI HA PIÙ PERTURBAZIONE DELLO STATO DI TENSIONE. SE IL RETTANGOLO CONTINUA LE TENSIONI PROSEGUONO PARALLELAMENTE AI BORDI E QUINDI LA CORREZIONE NON SI APPLICA. SE LA SEZIONE FOSSE MOLTO SOTTILE $(l \gg s)$ ALLORA IL TERMINE $m \cdot 0{,}3 \cdot s$ INCIDEREBBE MOLTO POCO. ADESSO DOBBIAMO CHIEDERCI: COME SI CALCOLANO LE TENSIONI?



COME SAPPIAMO $J_T = J_{t1} + J_{t2}$ E PER IL RETTANGOLO i-ESIMO (O IL RETTANGOLO ① OPPURE IL ②) VALE CHE LE TENSIONI DI PICCO SONO DATE DA:

$\Longrightarrow \tau_{picco,i} = \pm (M_{ti}/J_{ti}) \cdot s_i$ RICORDANDOCI CHE $\theta' = M_t / G \cdot J_T$

ALLORA POSSIAMO RAGIONARE COSÌ: θ' È COSTANTE PER L'INTERA SEZIONE, MA ALLORA VALE ANCHE PER I SINGOLI RETTANGOLI IN CUI LA SEZIONE VIENE DIVISA. QUINDI POSSO SCRIVERE LA STESSA EQUAZIONE ANCHE PER IL RETTANGOLO i-ESIMO, OVVERO:

$\Longrightarrow \theta' = \frac{M_t}{G J_T} = \frac{M_{ti}}{G J_{ti}}$ SICCOME DEVONO ESSERE UGUALI, ALLORA PER ANALOGIA $\frac{M_t}{J_T} = \frac{M_{ti}}{J_{ti}}$, QUINDI TANTO VALE SCRIVERE:

$\Longrightarrow \tau_{picco,i} = \pm \frac{M_t}{G J_T} \cdot s_i$ L'UNICA COSA VARIABILE È LO SPESSORE, E COME SI VEDE C'È UN RAPPORTO DI PROPORZIONALITÀ DIRETTA, OVVERO MAGGIORE È LA TENSIONE CHE QUELLA PARTE SUBISCE, ALLORA VUOL DIRE CHE LO SPESSORE È MAGGIORE. EPPURE SI POTREBBE INVECE PENSARE CHE DOVE LO SPESSORE È MAGGIORE, ALLORA QUELLA PARTE È PIÙ RESISTENTE, QUINDI MENO SOLLECITATA. QUINDI COME SI SPIEGA QUESTO? DICIAMO SUBITO CHE NEL TERMINE J_T È PRESENTE UNO SPESSORE ELEVATO ALLA TERZA (s^3), QUINDI MAGGIORE È LO SPESSORE PIÙ GRANDE È IL DENOMINATORE E QUINDI τ È PIÙ PICCOLO; PERÒ È VERO ANCHE CHE LE PARTI PIÙ SPESSE DEVONO ESSERE SOLLECITATE DI PIÙ PER PERCORRERE LO STESSO θ'.

ADESSO CONSIDERIAMO L'ULTIMO CASO DELLA TORSIONE CHE CI RESTA, OVVERO LA SEZIONE A PARETE SOTTILE CHIUSA. LA FORMA DI QUESTE SEZIONE SI CHIUDE SU SE STESSO COME UN CIRCUITO LASCIANDO UNA CAVITÀ CHE NON È ACCESSIBILE DALL'ESTERNO.

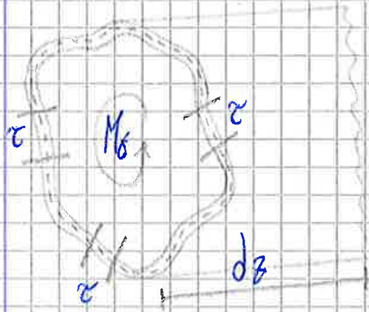
QUINDI $T_x = T_y = 0$. PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI INVECE:

QUALUNQUE POLO SI CONSIDERA SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO; RISPETTO A QUESTO QUELLO CHE MI IMPORTA È IL BRACCIO r, OVVERO LA PROIEZIONE DETTA DISTANZA POLO - FORZA ELEMENTARE SULLA LINEA D'AZIONE. ALLORA IL MOMENTO È DATO DA: $dM_t = r\delta dl$ (MOMENTO TORCENTE ELEMENTARE DOVUTO A $\delta d\vec{l}$) CON r LA DISTANZA DI O DALLA RETTA D'AZIONE. LA FIGURA A FIANCO MOSTRA UN RETTANGOLO DI BASE $d\vec{l}$, ALTEZZA r, L'AREA È QUELLA TRATTEGGIATA: $r\,dl$ È IL DOPPIO DI QUESTA AREA (L'AREA DI UN TRIANGOLO È $1/2 \cdot b \cdot h$), MA ALLORA SE UNE QUESTO, IL RISULTATO DELL'INTEGRAZIONE È DATO DA:

$$\Longrightarrow M_t = \oint_l r\delta\, d\vec{l} = \delta \int_l r\,dl = \delta \cdot 2 \cdot \Omega$$

CON Ω IL DOPPIO DELL'AREA RACCHIUSA DALLA LINEA MEDIA. QUINDI:

$$\Longrightarrow \delta = \frac{M_t}{2\Omega} \Longrightarrow \tau = \frac{\delta}{s} = \frac{M_t}{2\Omega s} \Longrightarrow \boxed{\tau = \frac{M_t}{2\Omega s}}$$



QUINDI τ IN GENERALE NON È COSTANTE, MA DIPENDE DALLO SPESSORE E ZONA PER ZONA LO SPESSORE PUÒ CAMBIARE, QUINDI NON È UN RISULTATO UNICO. QUESTO RISULTATO ABBIAMO DETTO ESSERE INDIPENDENTE DALLA SCELTA DEL POLO. A DIFFERENZA DI PRIMA STAVOLTA VALE CHE τ È PROPORZIONALE A $1/S$, QUINDI MAGGIORE È LO SPESSORE MENO QUELLA ZONA È SOLLECITATA, QUESTO ASPETTO SARÀ PIÙ CHIARO CON ALCUNI ESERCIZI. ADESSO DETERMINIAMO IL GRADIENTE DI TORSIONE: CONVIENE RAGIONARE IN TERMINI DI ENERGIA. COME SAPPIAMO IL LAVORO ESTERNO È UGUALE ALL'ENERGIA ELASTICA INTERNA; QUESTO DERIVA DAL FATTO CHE UNA MOLLA CHE VIENE COMPRESSA O ALLUNGATA DI UNA CERTA QUANTITÀ È A SUA VOLTA IN GRADO DI COMPIERE UN LAVORO PARI AL LAVORO CHE È STATO COMPIUTO PER ALLUNGARLA O COMPRIMERLA. QUESTO LAVORO ESTERNO È DATO DA $1/2 K x^2$; Kx ERA LA FORZA ELASTICA, x È LO SPOSTAMENTO, QUINDI IL PRODOTTO DEL FATTORE STATICO E DI QUELLO CINEMATICO. ANALOGAMENTE NEL NOSTRO CONTESTO POSSIAMO SCRIVERE IL LAVORO ESTERNO COME $1/2\, M_t\, d\theta$; ANCHE IN QUESTO CASO ABBIAMO IL PRODOTTO DEL FATTORE STATICO M_t E DI QUELLO CINEMATICO CHE IL MOMENTO PRODUCE. QUINDI CONSIDERANDO UNO SPEZZONE dz TRA LE DUE ESTREMITÀ CI SARÀ UNA ROTAZIONE RELATIVA $d\theta$. PER QUANTO RIGUARDA IL LAVORO INTERNO POSSO PARTIRE DALLE TENSIONI E DALLE DEFORMAZIONI RICORDANDOCI CHE IL MOMENTO TORCENTE È APPLICATO SOLO ALLE ESTREMITÀ, DENTRO NON CI SONO VARIAZIONI. QUINDI dz SARÀ UN FATTORE MOLTIPLICATIVO COSTANTE; NOI ANDREMO AD INTEGRARE IL LAVORO MECCANICO ELEMENTARE CHE PRODUCE LA TENSIONE τ LUNGO UN PEZZETTO DI AREA INFINITESIMA dA (FORZA) PRODUCENDO UNA DEFORMAZIONE γ:

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} dz \int_A \tau \gamma \cdot dA = \left(\gamma = \frac{\tau}{G}\right) = \frac{1}{2} \frac{dz}{G} \int_A \tau^2 dA = \left(\tau = \frac{\delta}{s} \text{ e } dA = s \cdot dl\right) =$$

PER GARANTIRE L'EQUILIBRIO TRASLAZIONALE; PER QUANTO RIGUARDA I MOMENTI INVECE MUOVENDOCI LUNGO dz I BRACCI VARIERANNO DA SINISTRA VERSO DESTRA E QUINDI I MOMENTI POSSONO VARIARE DI UNA QUANTITÀ INFINITESIMA. ADESSO SCRIVIAMO L'EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE SCEGLIENDO COME POLO IL PUNTO P.

$$P: \cancel{M_x} + dM_x - \cancel{M_x} - T_y\,dz = 0$$

T_y SULLA FACCIA NEGATIVA NON DA CONTRIBUTO PERCHÉ PASSA PER IL POLO, MENTRE T_y SULLA FACCIA POSITIVA DAREBBE UNA ROTAZIONE ANTIORARIA, DA QUI IL SEGNO MENO. RIMANGONO I TERMINI DIFFERENZIALI DEL 1° ORDINE E DA QUESTO POSSIAMO RICAVARE T_y:

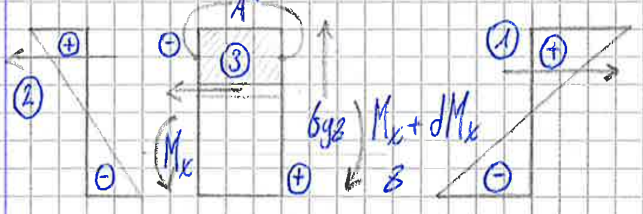
$$\Longrightarrow \boxed{T_y = \frac{dM_x}{dz}}$$

QUINDI IL TAGLIO RAPPRESENTA, IN OGNI SEZIONE DEL SOLIDO, LA DERIVATA DEL MOMENTO FLETTENTE RISPETTO ALLA COORDINATA z. FLESSIONE E TAGLIO SONO DUNQUE CORRELATI TRA DI LORO.

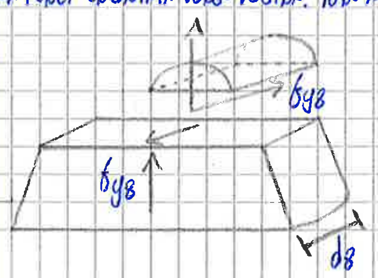
ADESSO DOBBIAMO PREOCCUPARCI DI TROVARE LE TENSIONI DI TAGLIO LA CUI SOMMA CI DANNO QUESTA FORZA. CONSIDERIAMO UN'AREA TRIANGOLARE TRACCIANDO UN SEGMENTO ORIZZONTALE (CORDA) CHE DISTINGUE UNA ZONA SUPERIORE A^* DELIMITATA DAL BORDO SUPERIORE. A LIVELLO DI QUESTA CORDA POSIZIONO LE TENSIONI τ AGENTI; RICORDANDOCI LA SEZIONE SOTTILE CHIUSA, ALLORA SE LA LUNGHEZZA DELLA CORDA È PICCOLA POSSO APPROSSIMARE LE TENSIONI AL FLUSSO DI TENSIONE LUNGO LA LINEA MEDIA. QUESTO FLUSSO q_{yz} È DATO DA:

$$\Longrightarrow q_{yz} = \int_c \tau_{yz}\,dx$$

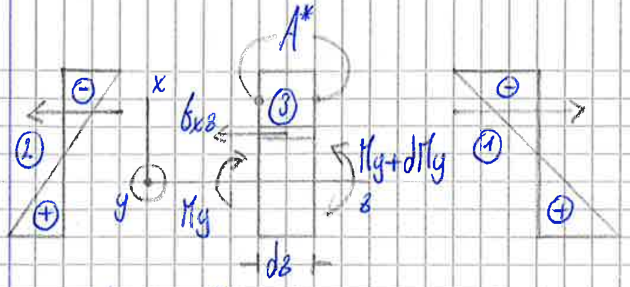
CI SERVE PER COMODITÀ PER POTER FARE IL RAGIONAMENTO SUCCESSIVO. IMMAGINIAMO DI STACCARE LA PARTE SOLIDA AL DI SOPRA DI QUESTA CORDA. QUESTO PEZZO DOVRÀ ESSERE IN EQUILIBRIO ASSIALE, OVVERO LUNGO L'ASSE z; LA COSA PUÒ SEMBRARE STRANA IN QUANTO NON STIAMO PIÙ CONSIDERANDO L'ASSE y, MA QUELLO z, PERÒ INVECE TUTTO SI RENDERÀ PIÙ CHIARO CON I PASSAGGI SUCCESSIVI. RAPPRESENTIAMO LA DISTRIBUZIONE DELLE TENSIONI σ_{zz}:



DA UNA PARTE ABBIAMO UN MOMENTO FLETTENTE CHE COMPRIME LA ZONA INFERIORE ED ESPANDE LA ZONA SUPERIORE; SULLA FACCIA DESTRA INVECE IL MOMENTO NON È FINITO COME SULLA FACCIA SINISTRA, MA PRESENTA UN INCREMENTO, DI CONSEGUENZA SULLA FACCIA SINISTRA LE TENSIONI SONO PIÙ PICCOLE. QUINDI LA FACCIA SINISTRA È CARICATA VERSO SINISTRA DALLE σ_{zz}, MENTRE INVECE LA FACCIA DESTRA È CARICATA VERSO DESTRA DELLE σ_{zz} PIÙ UN DIFFERENZIALE CHE SOMMATE TRA DI LORO DANNO UNA FORZA ORIENTATA VERSO DESTRA. PERÒ NON PUÒ STARE IN EQUILIBRIO QUESTO BLOCCHETTO PERCHÉ LE FORZE SONO DIVERSE.



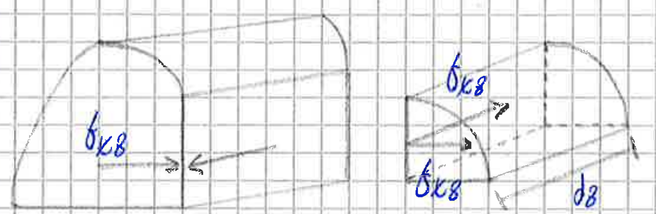
SULLA FACCIA FRONTALE AGISCE q_{yz} VERSO L'ALTO, SULLA FACCIA ORTOGONALE ABBIAMO LA GEMELLA. SUL BLOCCHETTO IN ALTRO INVECE ABBIAMO UNA q_{yz} SEMPRE VERSO L'ALTO PERCHÉ IL FLUSSO È CONTINUO LUNGO LA SEZIONE, SULLA FACCIA IN BASSO



COME SAPPIAMO LE TENSIONI σ_{zz} PER QUESTO CASO HANNO UNA DISTRIBUZIONE LINEARE LUNGO x E SI SCRIVONO COME:

$$\Longrightarrow \sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}}\,x.$$

DI NUOVO L'EQUILIBRIO È ASSICURATO DALLA TENSIONE TANGENZIALE SINTETIZZATA COME FLUSSO δ_{xz}; QUESTA COMPENSA LE DIFFERENZE dM_y CHE INCREMENTA LE TENSIONI τ SULLA FACCIA DESTRA. ADESSO STACCHIAMO IL PEZZETTO SOLIDO LATERALE:



$$\sigma_{zz} = -\frac{M_y}{J_{yy}}\,x$$

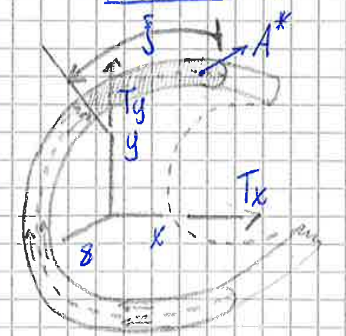
$$d\sigma_{zz} = -\frac{1}{J_{yy}}\frac{dM_y}{dz}\,dz\cdot x = \underbrace{\frac{T_x}{J_{yy}}\,x\,dz}.$$

ADESSO IMPOSTIAMO L'EQUILIBRIO ASSIALE:

$$\xrightarrow{}:\ \int_{A^*}\left(\cancel{\sigma_{zz}} + d\sigma_{zz}\right)dA - \int_{A^*}\cancel{\sigma_{zz}}\,dA - \delta_{xz}\,dz = 0;$$

$$\Longrightarrow \frac{T_x}{J_{yy}}\int_{A^*} x\,dA\,\cancel{dz} - \delta_{xz}\,\cancel{dz} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\delta_{xz} = \frac{T_x}{J_{yy}}\cdot S_y^*}$$

ANCHE IN QUESTO CASO S_y^* È VARIABILE CON LA POSIZIONE DELLA CORDA; IN QUESTO MODO ABBIAMO TROVATO DUE RELAZIONI FONDAMENTALI. DA TENERE PRESENTE CHE I MOMENTI DI INERZIA ENTRANO IN GIOCO PENSANDO ALLA TENSIONE DI FLESSIONE E QUINDI NON RIGUARDA SOLO A^*, MA TUTTA QUANTA LA SEZIONE. ANCORA QUALCHE PICCOLA OSSERVAZIONE: GUARDANDO LA FORMULA IN ALTO POSSIAMO STABILIRE DEI CASI LIMITE, PER ESEMPIO SE $S_x^* = 0$ ALLORA $\delta_{yz} = 0$, INFATTI ALL'ORLO SUPERIORE τ SI DEVE ANNULLARE PER FORZA IN QUANTO SE CI FOSSE, ALLORA CE NE DOVREBBE ESSERE UNA GEMELLA SULLA SUPERFICIE LATERALE, MA QUESTA PER IPOTESI È SCARICA. CON QUESTA TRATTAZIONE CI SIAMO RIFERITI AL FLUSSO, ORA CONSIDERIAMO DEGLI ELEMENTI MECCANICI MOLTO FREQUENTI LA CUI SEZIONE È FORMATA DA PARETI SOTTILI, OVVERO DI SPESSORE PICCOLO RISPETTO ALLE DIMENSIONI DELLA SEZIONE.



SE LA PARETE È SOTTILE ALLORA ENTRA IN GIOCO IL DISCORSO SULLE CONDIZIONI AL CONTORNO, OVVERO τ NON PUÒ ATTRAVERSARE IL CONTORNO DELLA SEZIONE. ALLORA ANCHE IN QUESTO CASO τ E δ SONO PARALLELI ALLA LINEA MEDIA; SE LA LINEA MEDIA È UNA CURVA, ALLORA SONO TANGENTI ALLA LINEA MEDIA. NON SI UTILIZZANO LE COMPONENTI x E y IN QUANTO L'EFFETTO COMPLESSIVO DEVE SEGUIRE L'ANDAMENTO DELLA LINEA MEDIA; IL FLUSSO COMPLESSIVO ATTRAVERSO LA CORDA È LA SOVRAPPOSIZIONE DEI FLUSSI DOVUTI A T_x E T_y, QUINDI SI OTTIENE:

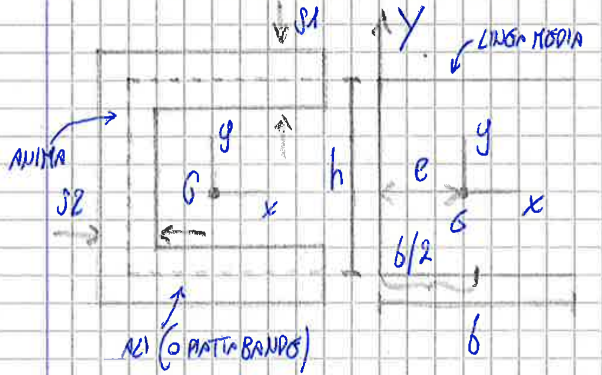
$$\Longrightarrow \delta = \frac{T_x}{J_{yy}}\,S_y^* + \frac{T_y}{J_{xx}}\,S_x^*$$

LA TENSIONE CORRISPONDENTE È IL FLUSSO DIVISO LO SPESSORE CHE PUÒ ESSERE

INOLTRE DA NOTARE UN'ALTRA DIFFERENZA: IN PRECEDENZA SE APPLICAVAMO UNA FORZA NORMALE PIÙ UNA FLESSIONE ALLORA AGGIUNGEVAMO TENSIONI AI BORDI E QUINDI IL RISCHIO DI DANNO ERA MAGGIORE; ADESSO INVECE APPLICANDO UNO SFORZO DI TAGLIO PIÙ UNA FLESSIONE NON AGGIUNGO TENSIONE AI BORDI, DOVE GIÀ SONO PRESENTI I PICCHI DI TENSIONE (IL RISCHIO È MINORE). IL CASO $b > a$ INVECE È QUELLO CHE CONSIDERA LA FORZA DI TAGLIO T_x: IL RAGIONAMENTO È ANALOGO E ALLA FINE SI OTTENGONO I SEGUENTI VALORI:

$$\Longrightarrow S_x^* = \xi a\left(\frac{b}{2}-\frac{\xi}{2}\right) \qquad \tau_{xz} = \frac{3T_x}{2A} \qquad J_{yy} = \frac{ab^3}{12}.$$

ADESSO CONSIDERIAMO UNA SEZIONE A C SOGGETTA AI TAGLI T_x E T_y:



LA PARETE È COLLASSATA SULLA LINEA MEDIA CON xy RIFERIMENTO PRINCIPALE DI INERZIA BARICENTRICO. LA GRANDEZZA e CORRISPONDE ALLA DISTANZA DEL BARICENTRO RISPETTO LA LINEA MEDIA DELL'ANIMA. POSIZIONO Y DIRETTAMENTE SULLA LINEA MEDIA E DA LÌ PASSO CALCOLARE IL MOMENTO STATICO, DEDUCENDO CHE GLI UNICI A DARE CONTRIBUTO SONO L'ALA SUPERIORE E INFERIORE, L'ANIMA NON DÀ CONTRIBUTO PERCHÉ L'ASSE Y È DI SIMMETRIA PER QUESTO RETTANGOLO, QUINDI:

$$\Longrightarrow S_Y = 2bs_1\frac{b}{2}$$ CON $b/2$ LA DISTANZA DEL BARICENTRO DELL'ALA DALL'ASSE Y. LA GRANDEZZA e SI PUÒ SCRIVERE COSÌ:

$$\Longrightarrow e = \frac{S_Y}{A} = \frac{s_1 b^2}{hs_2+2bs_1}$$ OPPURE SI PUÒ USARE ANCHE IN TERMINI DI SIMMETRIA RAGIONANDO SUL FATTO CHE SICCOME Y È DI SIMMETRIA I MOMENTI STATICI A DESTRA E A SINISTRA DEVONO ANNULLARSI: $\Longrightarrow h s_2 e = 2bs_1\left(\frac{b}{2}-e\right)$. BENE IN QUESTO MODO ABBIAMO DEFINITO e.

ADESSO IL NOSTRO OBIETTIVO È DEFINIRE LA DISTRIBUZIONE DI TENSIONI CHE SI VIENE A CREARE IN SEGUITO ALL'EFFETTO DELLA FORZA DI TAGLIO T_y, CONSIDERANDO PORZIONI DI AREA SEMPRE PIÙ GRANDI PARTENDO DALL'ESTREMO DESTRO DELL'ALA:

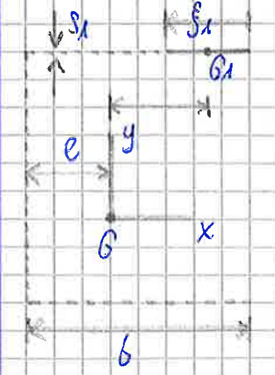
ADESSO DEFINIAMO S_x^* AL VARIARE DI ξ_1 DELL'ALA SUPERIORE. AL VARIARE DI ξ_1 SI SPOSTA IL BARICENTRO RIMANENDO SEMPRE A MEZZA ALTEZZA RISPETTO L'ASSE x, QUINDI:

$$\Longrightarrow S_x^* = s_1\xi_1\frac{h}{2}$$ VARIA IN MODO LINEARE E NON PARABOLICO. ADESSO VEDIAMO I PUNTI NOTEVOLI:

- $\xi_1 = 0$ (NESSUNA AREA) $\Longrightarrow S_x^* = 0 \quad \delta = 0 \quad \tau = 0$;
- $\xi_1 = b$ (SUL GOMITO) $\Longrightarrow S_x^* = s_1 b\frac{h}{2} \Longrightarrow \delta = \frac{T_y}{J_{xx}} s_1 b\frac{h}{2}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 194

ADESSO CONSIDERIAMO IL CASO DELLA FORZA DI TAGLIO T_x SEMPRE CON LA STESSA PROCEDURA, INIZIANDO DALL'ALA SUPERIORE:



SCRIVIAMO IL MOMENTO STATICO S_y^* DELLA ZONA CHE CORRISPONDE ALLA CORDA (CHE CORRISPONDE ALLA LINEA DI PASSAGGIO DELLE TENSIONI):

$\Longrightarrow S_y^* = s_1 \xi_1 \left(b - e - \frac{\xi_1}{2}\right)$ IL TERMINE TRA PARENTESI È LA DISTANZA DEL BARICENTRO DELLA ZONA ASTERISCATA DALL'ASSE y (QUINDI LA COORDINATA x). PUNTI NOTEVOLI:

- $\xi_1 = 0 \Longrightarrow S_y^* = 0 \quad b = 0 \quad \tau = 0$;
- $\xi_1 = b - e$ (QUANDO SI ATTRAVERSA IL BARICENTRO G) $\Longrightarrow S_y^* = \frac{s_1 (b-e)^2}{2}$

$\Longrightarrow \tau = \frac{T_x \cancel{s_1} (b-e)^2}{J_{yy} \cdot \cancel{s_1} \cdot 2}$ GUARDANDO S_y^* CI SI RENDE CONTO CHE LE TENSIONI AVRANNO UN ANDAMENTO PARABOLICO IN QUANTO COMPARE ξ_1 ALLA SECONDA POTENZA.

- $\xi_1 = b$ (TUTTA L'ESTENSIONE DELL'ALA SUPERIORE) $\Longrightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) \Longrightarrow \tau = \frac{T_x \cdot \cancel{s_1} \, b}{J_{yy} \cdot \cancel{s_1}} \left(\frac{b}{2} - e\right)$.

ADESSO CONSIDERIAMO L'ANIMA:

CAMBIO L'ASCISSA LOCALE PONENDO ξ_2 E CALCOLO IL MOMENTO STATICO CHE SARÀ LA SOMMA DI DUE CONTRIBUTI, OVVERO QUELLO DOVUTO AL SEGMENTO SUPERIORE E QUELLO DOVUTO AL RETTANGOLO SOLO $s_2 \xi_2$:

$\Longrightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) \overset{\text{ASCISSA NEGATIVA}}{-} e \, s_2 \xi_2$; ADESSO VEDIAMO I PUNTI NOTEVOLI:

- $\xi_2 = 0 \Longrightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) \Longrightarrow \tau = \frac{T_x s_1 \cdot b}{J_{yy} \cdot s_2} \left(\frac{b}{2} - e\right)$;
- $\xi_2 = \frac{h}{2}$ (A LIVELLO DEL BARICENTRO) $\Longrightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) - s_2 \frac{h}{2} \cdot e$; ALLORA RICORDANDOCI DELLA RELAZIONE CHE DEVE RISPETTARE LA DISTANZA e:

$\Longrightarrow \underbrace{h s_2 e} = 2 b s_1 \left(\frac{b}{2} - e\right)$ SE DIVIDIAMO TUTTO PER 2 OTTENIAMO PROPRIO I TERMINI SOPRA, MA ALLORA LA LORO DIFFERENZA È ZERO, QUINDI ALLA FINE SI RICAVA: $S_y^* = 0 \Longrightarrow \tau = 0$;

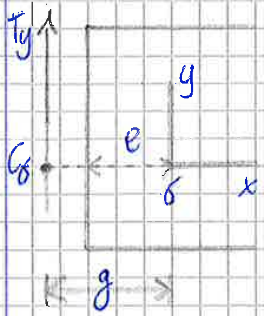
- $\xi_2 = h \Longrightarrow S_y^* = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) - \underbrace{s_2 h \cdot e} = s_1 b \left(\frac{b}{2} - e\right) - 2 b s_1 \left(\frac{b}{2} - e\right) = -b s_1 \left(\frac{b}{2} - e\right)$

QUINDI È LA STESSA COSA CALCOLATA PRIMA CON L'ASCISSA $\xi_2 = 0$, SOLO CON IL SEGNO CAMBIATO:

$\Longrightarrow \tau = -\frac{T_x s_1 b}{J_{yy} \cdot s_2} \left(\frac{b}{2} - e\right)$.

ADESSO CONSIDERIAMO L'ULTIMO TRATTO, OVVERO L'ALA INFERIORE:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 194



IL CENTRO DI TAGLIO CORRISPONDE AL CENTRO DI TORSIONE, QUINDI IL PUNTO INTORNO A CUI LA SEZIONE RUOTA PER EFFETTO DELLA TORSIONE È LO STESSO RISPETTO CUI DEVE AGIRE LA FORZA DI TAGLIO. SE ALLORA T_y NON È POSIZIONATA NEL CENTRO DI TAGLIO C_t DI CONSEGUENZA NON SIAMO IN CONDIZIONI DI TAGLIO PURO; SE LA RETTA D'AZIONE DELLA RISULTANTE DISTA DA TALE PUNTO DI UN VALORE e_c (ECCENTRICITÀ) SI AGGIUNGE ANCHE UN CONTRIBUTO DI MOMENTO TORCENTE, QUINDI OLTRE ALLA FORZA DI TAGLIO AGISCE ANCHE UNA TORSIONE.

ULTIME OSSERVAZIONI CHE POSSIAMO FARE RIGUARDANO LE TENSIONI PRINCIPALI. PER LE IPOTESI DEL SOLIDO DI SAINT-VENANT IL TENSORE DELLA TENSIONE AGENTE IN UN PUNTO QUALSIASI DELLA SEZIONE HA QUESTA FORMA:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & -\lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\lambda \end{bmatrix}$$

UNA VOLTA CHE CONOSCIAMO LE TENSIONI σ_{zz}, τ_{xz} E τ_{yz} COME SOLUZIONI DEL SOLIDO DI SAINT-VENANT, ALLORA POSSO RICAVARE LE DIREZIONI PRINCIPALI COME AUTOVALORI DEL TENSORE A PIANO; IL DETERMINANTE DI QUESTO TENSORE SI SCRIVERÀ COME:

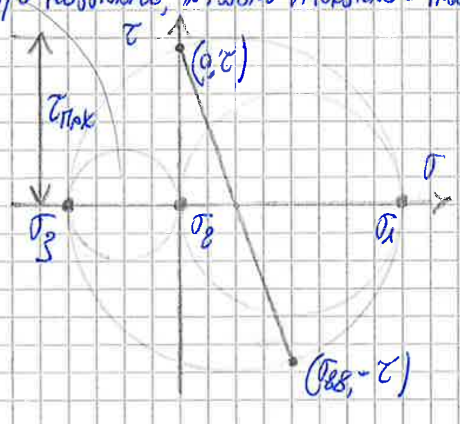
$$\Rightarrow \det\left|[\sigma]-\lambda[I]\right| = -\lambda\left[-\lambda(\sigma_{zz}-\lambda)-\tau_{yz}^2\right]+\tau_{xz}\left[-\tau_{xz}(-\lambda)\right] =$$

$$= -\lambda\left[\lambda^2-\sigma_{zz}\lambda-(\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)\right]=0 \quad \text{(EQUAZIONE CARATTERISTICA)}$$

UNA SOLUZIONE È SEMPRE $\lambda=0$ E QUINDI UNA TENSIONE PRINCIPALE È SEMPRE NULLA. LE ALTRE DUE SONO LE RADICI DELL'EQUAZIONE NELLA PARENTESI E SONO DATE DA:

$$\Rightarrow \lambda^2-\sigma_{zz}\lambda-(\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2)=0 \Rightarrow \sigma_{1,3}=\frac{\sigma_{zz}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{zz}}{2}\right)^2+\underbrace{\left(\tau_{xz}^2+\tau_{yz}^2\right)}_{\tau^2}}$$

SI OSSERVA CHE SE LE TENSIONI TANGENZIALI SONO NULLE, ALLORA ANCHE UNA DELLE RADICI DEL POLINOMIO DI 2° GRADO È NULLA; IL PUNTO SI TROVA IN CONDIZIONE DI TENSIONE MONOASSIALE, QUINDI IN PRESENZA DI COMPORTAMENTO ESTENSIONALE E/O FLESSIONALE, IN ASSENZA DI TORSIONE O TAGLIO. SE INVECE $\tau \neq 0$, ALLORA SI OTTIENE UNA RADICE NEGATIVA.



I CERCHI DI MOHR PER UN PUNTO QUALSIASI DELLA SEZIONE DEL SOLIDO DI SAINT VENANT ASSUMONO QUESTA FORMA. VOLENDO QUESTI CERCHI SI POSSONO TRACCIARE ANCHE SENZA AVERE DETERMINATO PRECEDENTEMENTE LE TENSIONI PRINCIPALI; INFATTI CONOSCO LE COMPONENTI DI TENSIONE SU DUE PIANI PERPENDICOLARI INCERNIERATI LUNGO LA DIREZIONE PRINCIPALE 2 E QUESTI DUE PIANI SONO IL PIANO XY DELLA SEZIONE SU CUI AGISCONO σ_{zz} E τ E IL PIANO PARALLELO