



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2302A**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Cavallo Federico**

**MATERIA: Idraulica Ambientale - Esercitazioni Complete -  
Dimostrazioni per Esame - Prof. Ridolfi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

1

# DIMOSTRAZIONI PER L'ESAME DI IDRAULICA AMBIENTALE (prof. Ridolfi)

1) Equazione di Navier-Stokes

$$\rho(\vec{F} - \vec{A}) = \text{grad } \vec{p} - \mu \nabla^2 \vec{v}$$

con gli indici di Einstein:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3}$$

2) Equazione di Continuità

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

con gli indici di Einstein:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

3) Equazione del Moto Medio

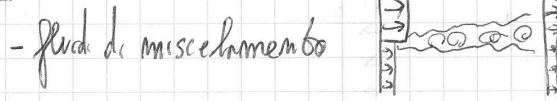
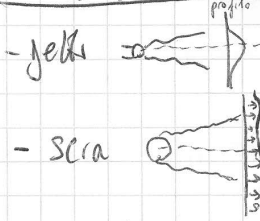
$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle u_j u_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3}$$

3.1) Equazione di Reynolds

$$\frac{D \bar{u}_i}{D t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle \tau_{ij} \rangle}{\partial x_j} - g \delta_{i3}$$

↳ Tensioni di Reynolds

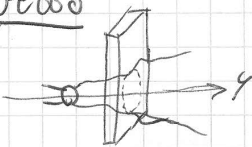
7) Turbolenza Libera



3 caratteristiche: Intermitenza (ha t quiete, qui moment), Impulsamento ( $\sim \omega \sim \omega$ ), Autosimilitudine (a scale diverse osservo lo stesso fenomeno)

↳ uso profilo normalizzato  $\frac{u}{u_{max}}$

7.1) Jetto



$$\vec{i} \cdot (\vec{P} + \vec{F}_c + \vec{I} + M_{im} - M_{out}) \approx 0 \rightarrow M_{im} = M_{out} \text{ lungo } x$$

Forma del getto:  $M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U^2 dy = \rho \int U^2 dy = \text{cost}$

profilo autosimile:  $\frac{U}{U_c} = f\left(\frac{y}{\delta}\right) \rightarrow U = U_c \cdot f\left(\frac{y}{\delta}\right)$

$$M = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} U_c^2 \cdot f^2\left(\frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \text{cost}$$

è l'area della funzione normalizzata del getto

$U_c \cdot \delta = \text{cost lungo } x$  ←  $M = \rho U_c^2 C_f \delta = \text{cost lungo } x$

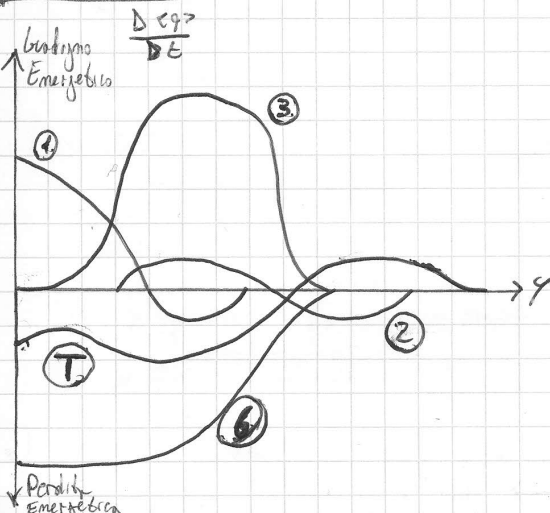
$U_c?$   $T \Pi \rightarrow U_c = U_c(x, M, \rho) \rightarrow U_c \propto \sqrt{\frac{M}{\rho x}}$

Alla fine brava che il getto scappa linearmente

Scie il getto scappa  $\propto \sqrt{x}$

7.2) Andamento dell'Energia nei getti (lungo le tre componenti)

$$\frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial t} = U \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial x} - V \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial y} - \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\langle uv \rangle}{T} \right] - \epsilon \quad A=0 \text{ flusso stazionario}$$

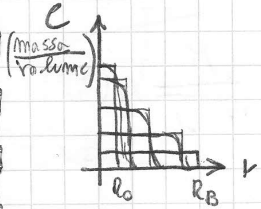


- ①: Variaz di energia lungo x, è lei che fa energia al getto nella zona centrale, poi all'ambrosandosi man mano dal centro, va a zero
- ③: Area del vortex stretching, è calce che rube l'energia al modo medio dove il gradiente è più alto (al centro infatti è zero)
- ⑥: Sono le dissipazioni turbolente che mantengono in vita gli altri vortici più piccoli (em ceduto ai vortici più piccoli)
- ②: È il fronte che combatte, è il getto che si allarga (verso y). Ma a y alte non ci sono più ① e ③ che si formano, quindi avvanno.
- T: i termini di trasporto, che trasportano energia al fronte per andare ② ad allargarsi.

# 9) Ciclo del Borsting (Appunti)

## PROCESSI DI TRASPORTO

### 10) DIFFUSIONE MOLECOLARE



- irreversibile
- fluido fermo
- ripido e poroso

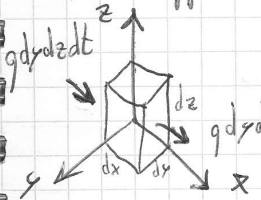
Legge di Fick

$$\vec{q} = -D \cdot \nabla C$$

delta C / delta r (gradiente di concentrazione)  
 D (coeff. di diffusione)  
 q (flusso)

si diffonde per vibrazioni tra le molecole

Come si diffonde la massa C nello spazio



Eg. di bilancio

$$\begin{cases} \text{lungo } x) \text{ in-out} : -\frac{\partial q}{\partial x} dx dy dz dt \\ \text{lungo } y) \text{ " " } : -\frac{\partial q}{\partial y} dy dx dz dt \\ \text{lungo } z) \text{ " " } : -\frac{\partial q}{\partial z} dz dy dx dt \end{cases}$$

↓ Sommo

$$-\left(\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial z}\right) dx dy dz dt$$

è uguale a

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial (c dV)}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} dV dt$$

le uguagliamo ↓

$$\frac{\partial C}{\partial t} dV dt = -\text{div } q \, dV dt$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div } q = 0$$

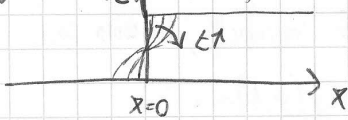
dato che  $q = -D \cdot \nabla C$  (da Fick)

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 C$$

Proprietà:

- 1) E' lineare (se  $D = \text{cost}$ ). Diventa non lineare se  $D = D(C)$  (per  $C \uparrow \uparrow$ )
- 2) Devinto spaziali par: non comparo da dove giunto. Devinto temporale prima: importa da dove giunto  
 irreversibile
- 3) In N-S c'è un termine diffusivo  $(\rho(\vec{F}-\vec{A}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \vec{u})$
- 4) Equazione PARABOLICA → la soluzione non può essere più difficile delle condizioni iniziali.

12) Esempio Aperiun di un selbo



è una funzione gradino

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

quindi  $C(x, t=0) = C_0 \cdot f(x)$

$$\rightarrow C = \frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du$$

11.1) Composizione della funzione mattoni

$f(x) = C(x, t=0)$

sulla singola  $C_0 dx = \text{massa}$

facciamo la somma (S) senza influenzare quello a fianco

$$C(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}}$$

definisco  $u = \frac{x-\xi}{\sqrt{4Dt}} \rightarrow$

Spezziamo l'int

$$\frac{C_0}{\sqrt{\pi}} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du \right]$$

da tavola in integrali

quindi lo

chiamo funzione di errore

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$$

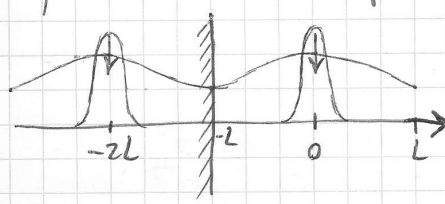
$0 < \text{erf}(z) < 1$

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 + \text{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right) \right]$$

13) Metodo delle Immagini 1D

Considero il fenomeno considerando a specchio una massa  $x = -2L$ . Per simmetria in  $x = L$  avranno gli stessi valori di  $C$  da destra e da sinistra e i flussi si compensano.

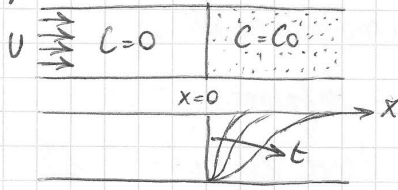
Cio' equivale ad avere una parete impermeabile in cui il flusso è nullo



$$C(x, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x+2mL)^2}{4Dt}}$$

dove  $m$ : moltiplicandi

16) Esempio: Apertura di un serbatoio 1D (convezione + diffusione)



$$C(x < 0, t = 0) = C_0$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

C? uso un SR mobile (che si sposta col flusso):  $\xi = x - Ut$ ;  $\tau = t \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}$ ;  $\frac{\partial}{\partial t} = -U \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}$

e allora  $\rightarrow -U \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial \tau} + U \frac{\partial C}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$

da cui  $\rightarrow C(\xi, \tau) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{\sqrt{4D\tau}} \right) \right]$

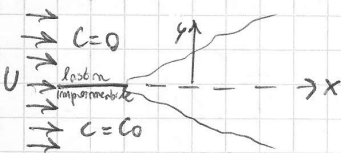
ossia  $C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x - Ut}{\sqrt{4Dt}} \right) \right]$

17) Esempio: Afflusso di un affluente (convezione) 2D



assumiamo che  $R_n [ ]$  non dip da  $t$

analogo a:



$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

$\rightarrow = 0$

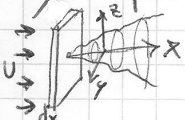
è o trascurabile  
risp. alla convezione  
lungo x

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

C? chiamiamo  $\tau = \frac{x}{U} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \rightarrow C(\tau, y) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4D\tau}} \right) \right]$

$$C(x, y) = \frac{C_0}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{\sqrt{4D \frac{x}{U}}} \right) \right]$$

18) Esempio: Pemissione di una sostanza emessa puntualmente in un campo di moto 3D



$$\frac{\partial C}{\partial t} = 0 \rightarrow U \frac{\partial C}{\partial x} = D \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$$

Abbinato la lastra (spessa dx) arriva una porzione  $\dot{M} dt = M \frac{dx}{U}$  che poi si allarga

C? uso un SR solido col flusso:

si parte da una massa puntuale che si allarga per diff. molec. in 2D (lunga y e z); con  $D_y = D_z = D$

$$C(y, z) = \frac{M dx}{4\pi D \tau U} e^{-\frac{y^2 + z^2}{4D\tau}}$$

dividendo per dx la brava su un generico piano, e

ricordando che  $tU = x$  brava:  $C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi D x} \cdot e^{-\frac{(y^2 + z^2)U}{4Dx}}$

Per  $t \ll \tau$  c'è forte correlazione con le c.i. quindi il comportamento delle particelle è influenzato (non Fickiano), mentre per  $t \gg \tau$  ormai ci sono nuove realizzazioni, la memoria del sistema è esaurita e quindi il comportamento delle particelle è indipendente tra loro (Fickiano),

Quando vale la legge di Fick ( $t \gg \tau$ ) la diffusione turbolenta è descrivibile come la diffusione molecolare  $\rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = E \left[ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right]$  dove  $C$  è  $C(x, y, z)$

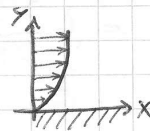
derivata campo di moto ( $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ): coeff. di diffusione turbolenta

$$\rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \epsilon_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial C}{\partial z} \right) \quad \text{EQ. DELLA DIFFUSIONE TURBOLENTA}$$

## 20) DISPERSIONE PER SHEAR "abbino"

c'è sia nei moti laminari che turbolenti

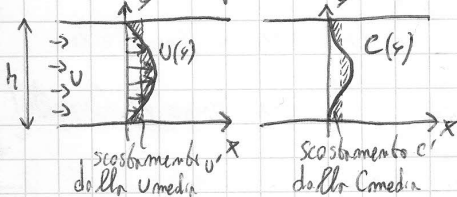
a) Nasce dalla presenza di un profilo di velocità



Se mettiamo una sbrucia di colorante sull'asse delle y e col tempo si dispone lungo il profilo delle U  $\rightarrow$  si muove con la velocità. Dato che si allunga la C diminuisce  $\rightarrow$  miscelamento/diluzione

b) Combustione della diffusione molecolare  $\rightarrow$  si sposta lungo le 3 direzioni inf. del gradiente di velocità.

Teoria di dispersione di Taylor - Moto Laminare

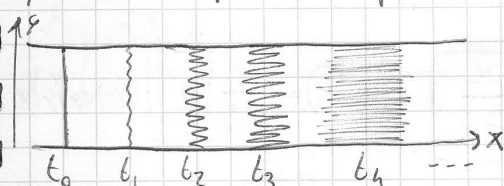


$$\bar{U} = \frac{1}{h} \int_0^h U(y) dy \quad \text{velocità media}; \quad U'(y) = U(y) - \bar{U} \quad \text{lo scostamento dalla media}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{h} \int_0^h C(y) dy \quad \text{concentrazione media}; \quad C'(y) = C(y) - \bar{C} \quad \text{lo scostamento reale dalla media}$$

Inizialmente domina il profilo di velocità, successivamente la diffusione molecolare.

A questo punto le particelle esplorano tutto il campo di moto ( $P_x \neq 0$ ). A questo punto si avvia la disp. per shear



cambia gradiente si discosta dalla media, non la media

$\downarrow$   
osservare la diluizione



Per tempi lunghi ( $t > \frac{h^2}{D}$ ) il fenomeno è Fickiano. Torna alle coordinate  $(x, t)$ :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C}{\partial x} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

Equazione di dispersione per Shear Laminare

Osservazioni:

- Se  $D \uparrow$  allora  $K \downarrow$ . Tutte le particelle vedono istantaneamente il campo di moto e c'è pura convezione (tutte le particelle viaggiano praticamente alla stessa velocità media)
- Tanto più il profilo è distante dalla media tanto più  $K$  è elevato. Se  $u \uparrow$  allora  $K \uparrow$ .

20.a) Profilo circolare (tubo)

$$u(r) = u_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) ; K = \frac{R^2 u_0^2}{192 D} \quad \text{discr. } K \gg D \quad t_{\text{minimo}} \approx 5200 \cdot D_{\text{tubo}}$$

20.b) Nel moto turbolento

c'è dispersione  $D$  e diffusione turbolenta  $E_T$  trasversale

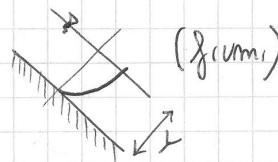
$$K = -\frac{1}{h E_T} \int_0^h u' \int_0^y u' dy dz$$

- In un profilo circolare (tubo)

$$K = 10,1 R u_* ; \frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

- In un piano inclinato con superficie libera

$$K = 5,93 Y u_* \quad \text{e vale per } t > 0,5 \frac{h^2}{E_T}$$



Osservazioni finali:

I) Se  $D$  è funzione del tempo chiamato  $T = \int_0^t D(t) dt \rightarrow \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$

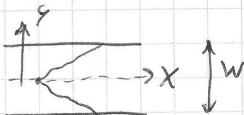
II) Caso Anisotropo (ha  $D_x, D_y, D_z$ ):  $\bar{y} = x \sqrt{\frac{D}{D_x}} ; \bar{y} = y \sqrt{\frac{D}{D_y}} ; \bar{z} = z \sqrt{\frac{D}{D_z}} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \bar{z}^2}$

III) Se la velocità  $u$  è funzione della  $C$ :  $\frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$  Eq. di Burgler

IV) Se ha reazioni di decadimento chimiche  $\frac{\partial C}{\partial t} = -K C$  (f. inversa  $C = C_0 e^{-Kt}$ )

l'equazione diventa:  $\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - K C$   
 ↑ termine diffusivo      ↑ termine di decadimento

### 21.2) FASE B

la forma è a pennacchio 

La soluzione di  $C(x,y)$  senza le pareti sarebbe  $\rightarrow C(x,y) = \frac{N}{d\bar{u} \sqrt{4\pi \frac{E_T x}{U}}} e^{-\frac{(yU)}{4xE_T}}$

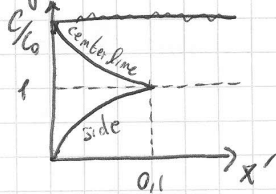
Con le pareti (metodo delle sorgenti immagine):

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi x'}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{-(y'-2m-y_0)^2/4x'}{}} + e^{-\frac{-(y'-2m+y_0)^2/4x'}{}} \right\}$$

valore a cui la C tende a distribuzione uniforme

dove  $x' = \frac{xE_T}{UW^2}$  ;  $y' = \frac{y}{W}$  ;  $C_0 = \frac{N}{d\bar{u}W}$  ;  $y_0$ : posizione in cui immette la sostanza

- profilo in caso di immissione centrale  $y_0 = 0.5$

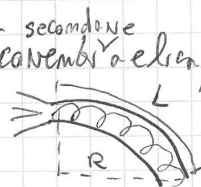


per  $x' > 0.1$  il fiume ha la stessa  $[C] = C_0$  e finisce la fase B


$$L = 0.1 \frac{UW^2}{E_T}$$

- Se invece ha la sorgente su una sponda (immagine: fiume largo doppio  $\rightarrow W = 2W$ ):  $x' = \frac{xE_T}{U4W^2} \rightarrow$   
 $\rightarrow L = 0.1 \frac{UW^2}{E_T}$  la lunghezza <sup>alla</sup> dopo la quale termina la fase B quadruplica.

- Se il fiume ha una curva ha più miscelazione (cavembri e elica)  $\rightarrow E_T = \frac{25 v^2 d}{R^2 U_x}$   
 $\rightarrow$  la L diminuisce di un ordine di grandezza




### 21.3) FASE C

Si sa che  $K = 5.93 d U_x$  (Elder) nei fiumi, ma nella realtà si trovano molto maggior. Questo perché Elder guarda canal. rettilineari (nel fiume il profilo ) e bisogna la dispersione longitudinalinale (che agisce su scale molto maggior).

Se si conoscesse la geometria e il campo di moto si avrebbe:

$$K = \frac{1}{A} \int_0^W \int_0^y \int_0^y \frac{1}{E_T d} \int_0^y u' d dy dy dy$$

Tenendo presente:  $\leftarrow$  modifichiamo il profilo del fiume  $\sim \Omega \sim \Omega \sim \Omega$

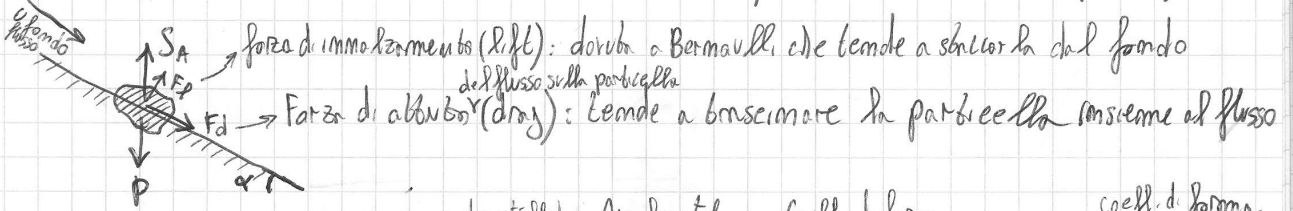
- 1) l'effetto delle curve (cavembri e elica  $E_T \uparrow$  quindi  $K \uparrow$ , inoltre  $U \uparrow$  quindi  $K \uparrow$ ) per le quali la dispersione è più alta
- 2) l'effetto delle zone morte (le sostanze <sup>dove</sup> si stagnano): sponde irregolari  /  
vegetazione riparia (idem, la vegetazione rallenta il flusso), zone spartite (la sostanza ha un frotto).

TRASPORTO SOLIDO AL FONDO

25) I° criterio di moto incipiente: Velocità cubica

L'erosione avviene se il fluido ha una certa velocità: Moto incipiente

Qual'è il valore di velocità cubica oltre la quale inizia il trasporto?



$$R_i = P - S_A = K_3 (\rho_s - \rho) g d^3 \quad ; \quad F_d = \frac{1}{2} \rho C_D \cdot A \cdot d^2 \cdot u_f \cdot K_1 \quad ; \quad F_p = \frac{1}{2} \rho C_L \cdot A \cdot d^2 \cdot u_f \cdot K_2$$

Annotations:  $K_3$  is the immersed weight coefficient;  $C_D$  is the drag coefficient;  $C_L$  is the lift coefficient;  $u_f$  is the velocity at the bottom.

→ lungo  $x$ :  $R_i \sin \alpha + F_d$  forze //

↓ lungo  $y$ :  $R_i \cos \alpha + F_L$  forze ⊥

Si stacca dal fondo se  $\frac{\text{Forze //}}{\text{Forze } \perp} = \tan \varphi$  →  $\frac{R_i \sin \alpha + F_d}{R_i \cos \alpha - F_L} = \tan \varphi$

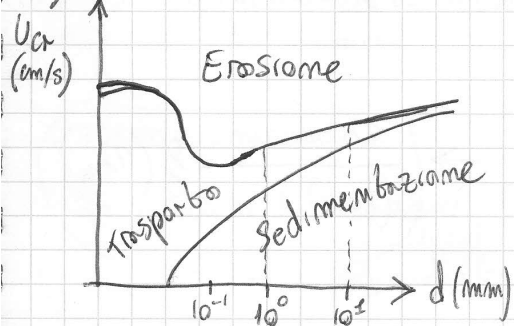
→  $\frac{u_{fc}^3}{(\frac{\rho_s}{\rho} - 1) g d} = \frac{2 K_3 (\tan \varphi \cdot \cos \alpha - \sin \alpha)}{C_D \cdot K_1 + C_L \cdot K_2 \cdot \tan \varphi} = A$

per particelle sferiche è costante

Se  $u_f > u_{cubica}$  la particella si stacca.   
 Ma che valore uso per la  $u_f$ ?   
 Formule:   
 - Brauns  $(u_{fc} \propto \sqrt{d})$  + importante   
 - Meyer   
 - Corbets

Per velocità del flusso al fondo  $u_f$  uso la velocità media cubica  $u_{cr} = \frac{Q}{A}$  che arriva dal...

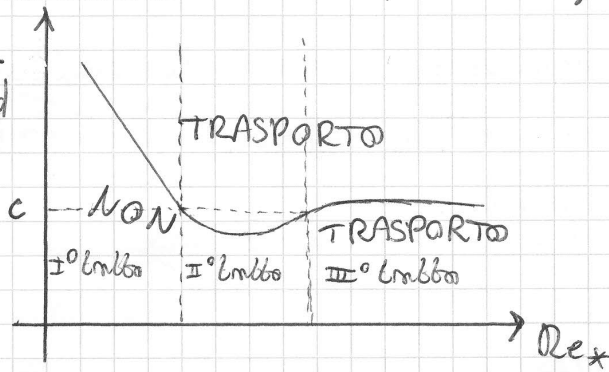
26) DIAGRAMMA DI Hjulstrom



Si osserva, in base alle  $u$  del fiume, se le particelle di diametro  $d$  sedimentano, vengono trasportate, o erose.

### 29) Diagramma di Shields (in pianura $d \geq 0$ )

$$\theta_x = \frac{\tau_{0x}}{(\gamma_s - \gamma) d}$$



Shields  $c = 0,06$

Zeller  $c = 0,047$

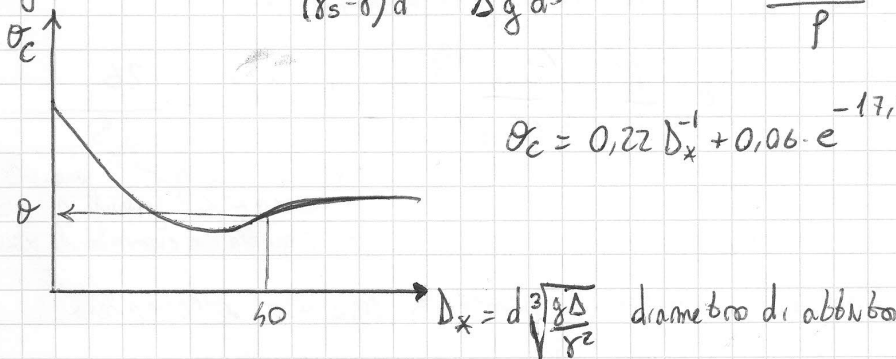
I° limbo: rappresenta le condizioni idrodinamiche di equilibrio limite nelle quali il diametro  $d$  delle particelle è più piccolo del sottostato viscoso in cui si trovano e che le protegge dalla turbolenza.

II° limbo: regime di transizione: la mobilità delle particelle sia dalla viscosità che dalla dimensione delle stesse

III° limbo: le particelle, che fanno parte della scabrezza, bucano il sottostato viscoso e sono completamente esposte alla turbolenza. La viscosità è indeterminante e di conseguenza Reynolds ( $Re_x = \frac{u_* d}{\nu}$ ) è influente.

### 30) Diagramma di Shields modificato

Si è eliminata la dipendenza di  $\tau_x$  e  $Re_x$  da  $u_x$  introducendo la grandezza  $\theta_c = \frac{\tau_{0cubico}}{(\gamma_s - \gamma) d} = \frac{u_*^2}{\Delta g d^3}$ , dove  $\Delta = \frac{(\rho_s - \rho)}{\rho}$



$$\theta_c = 0,22 D_x^{-1} + 0,06 e^{-17,77 D_x^{-1}}$$

$D_x = d \sqrt[3]{\frac{\Delta g}{\gamma_s}}$  diametro di abito

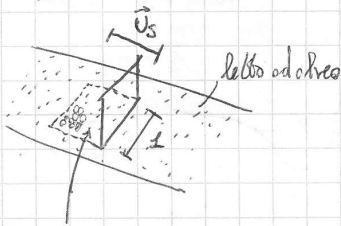
Nato  $D_x \rightarrow \theta \rightarrow \tau_0 \rightarrow U \rightarrow Q$

#### Osservazioni

Tutto questo vale per  $d \geq 0$ . Per pendenze non trascurabili uso la seguente formula:

$$\theta_c = f(Re_x) = \left[ \cos \alpha - \frac{\rho_s}{\rho_s - \rho} \cdot \frac{\sin \alpha}{\tan \phi} \right]$$

### 33) Teoria di Kalinske (1947)



Va a ragionare sulla  $q_s$  che in  $\frac{1}{s}$  secondo passa attraverso una sezione di controllo

Sezione in cui sono presenti le particelle che saranno sollevate e passeranno attraverso la sezione di controllo.

N° di particelle presenti in quell'area:  $N = \frac{\text{Area di quella sezione} \cdot U_s \cdot t}{\underbrace{k_1 \cdot d^2}_{\text{area singola particella}}}$

Tuttavia a causa della turbolenza le particelle che effettivamente si muovono sono il 35%.

$N_a = N \cdot 0,35 = p \cdot N$

La portata solida quindi rimane:  $q_s = N_a \cdot \underbrace{(k_3 d^3)}_{\text{volume di una particella}} = \frac{U_s \cdot p}{k_1 d^2} (k_3 d^3) = k_0 d p U_s$

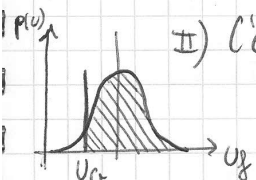
In termini adimensionali:  $\frac{q_s}{d \cdot U_x} = k_0 \cdot p \cdot \frac{U_s}{U_x}$

*(Coeff. di forma)*

Per trovare  $U_s$ ?

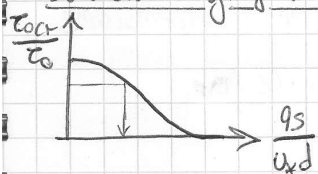
Ipotesi: I)  $U_s = U_g$  le particelle si muovono con la velocità del flusso

II) C'è turbolenza  $\rightarrow$  Suppongo la velocità del flusso essere una gaussiana del flusso e chiamo  $U_s$  la media delle (distribuzioni di) velocità  $\rightarrow U_{cr}$ .



$$U_s = \int_{U_{cr}}^{\infty} (u - U_{cr}) \cdot p(u) du$$

- Soluzione grafica



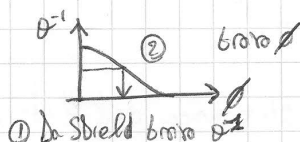
Trova  $z_{0cr}$  usando Shields e dal grafico trovare  $q_s$

- Soluzione analitica

$$\frac{q_s}{U_x d} = 1,5 \left( \frac{z_{0cr}}{z_0} \right)^{1/6} \cdot \left( \sqrt{\frac{z_0}{z_{0cr}}} - 1 \right)^{5/3}$$

Formula di Kalinske-Pezzoli

### 34) Formula di Einstein



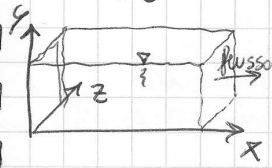
$\rightarrow q_s = \phi d U_g \Delta d$  e poi bravo  $q_s$

I ipotesi:  $\epsilon) C_s \ll 1$ , ossia il volume <sup>complessivo</sup> delle particelle in sospensione è balmente piccolo da non influenzare il campo di moto.

II) le particelle sono diffuse per la Turbolenza e hanno un peso

$$\rightarrow \frac{\partial \tilde{C}_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{U}_s \otimes \tilde{C}_s) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{U}_s \otimes \tilde{C}_s) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{U}_s \otimes \tilde{C}_s) = 0$$

EQUAZIONE DI CONVEZIONE IN CAMPO TURBOLENTO + COMPONENTE DI ADIUTTA VERTICALE  
 ↳ <sup>brascuro</sup> la diffusione molecolare



componenti del vettore velocità che agisce sulle particelle solide  $U_s$ , che è diverso dal campo di moto del fluido

Poiché <sup>ved</sup> le particelle sono piccole e leggere  $\rightarrow$  <sup>assumo</sup>  $\begin{cases} \tilde{U}_{s,x} \cong \tilde{U}_x \\ U_{s,y} \cong \tilde{U}_y - W_s \\ U_{s,z} \cong \tilde{U}_z \end{cases}$ , e li sostituisco.

<sup>velocità di sedi membrano</sup>

Poi applico la decomposizione di Reynolds ( $\tilde{C} = C + c$  e  $\tilde{U} = U + u$ ) e lo medio d'insieme:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \langle U_x c \rangle + \frac{\partial U_y C}{\partial y} - \frac{\partial W_s C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \langle U_y c \rangle + \frac{\partial U_z C}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \langle U_z c \rangle = 0$$

Tuboaria: <sup>l'acqua</sup> non si solleva ( $U_y = 0$ ), non si muove lungo  $z$  ( $U_z = 0$ ), e non c'è variazione lungo  $z$  ( $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ). Quindi rimane:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} - \frac{\partial W_s C}{\partial y} = - \frac{\partial}{\partial x} \langle U_x c \rangle - \frac{\partial}{\partial y} \langle U_y c \rangle$$

Trasporto convettivo dovuto al moto medio      Trasporto convettivo dovuto alle crosscorrelazioni velocità - concentrazione dovuto al trasporto TURBOLENTO

Da esperimenti vedo che il trasporto dovuto al moto medio rimane lungo  $x$ , quindi  $\frac{\partial}{\partial x} \langle U_x c \rangle = 0$

$$\rightarrow \left( \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U_x C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} [W_s C - \langle U_y c \rangle] \right)$$

Se provo a calcolarlo ho il problema di chiusura delle crosscorrelazioni turbolente, quindi devo ricorre a modelli di chiusura (in maniera ingegneristica).

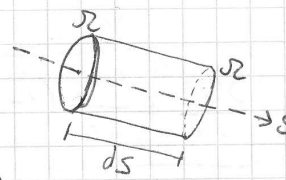
# 38) MORFODINAMICA FLUVIALE

Corrente fluida che si muove in un fondo deformabile → massimo delle forme  
 Navier-Stokes → troppo dotti → uso le correnti → Equazioni di de Saint Venant

- I) Trincee sostanzialmente rettilinee parallele (per le correnti)
- II)  $if \ll 1$  per avere la superficie piezometrica sul pelo libero ( $h = z_b + Y$ )
- III) La corrente è turbolenta ( $\alpha \approx 1$ ) → profilo di  $u$  quasi piatto →  $u = \text{cost}$  per tutto lo  $Y$ .
- IV) Pressione idrostatica  $\Delta p = \rho_0 + \rho g h$

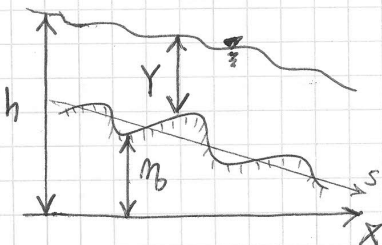
Eq. di DE SAINT VENANT

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = if - J & \text{Eq. di conservazione della quantità di moto} \\ \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 & \text{Eq. di continuità} \end{cases}$$



No due incognite  $y(s,t)$  e  $u(s,t)$

Per tenere conto del fatto che ora il fondo varia definisco:



$$h = m_b + Y \quad m_b = m_b(s,t) = \frac{\partial z_b}{\partial s}$$

Quindi sostituisco  $if$  nella prima equazione e cambio SR  $(s,t) \rightarrow (x,t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial m_b}{\partial x} - J \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (y + m_b) + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = -J \rightarrow \left( J = \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} \right) \\ \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u}{g} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} &= 0 \rightarrow g \frac{\partial h}{\partial x} + \left[ \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{Q}{\Omega} \right) \right] + \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} = 0 \\ \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{1}{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right] + \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} &= 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q}{\Omega} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{\Omega} \frac{\partial \Omega}{\partial x} \right] + \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} = 0 \\ \rightarrow \Omega g \frac{\partial h}{\partial x} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\Omega} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\Omega} \right) \right] + \frac{Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} &= 0 \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rightarrow \left\{ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{\Omega} \right) + \Omega g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{g Q^2}{\Omega^2 R^2 \alpha} = 0 \right\} \text{ Eq. Idrodinamica (I) (Eq. di conservazione della qte di moto)}$$

$$\left\{ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 \right\}$$

Indichiamo come si comporta la corrente date le condizioni al contorno.

Si può formalmente chiudere il sistema:

$$\theta = \frac{z_0}{(x_s - x)d} \rightarrow \phi = f(\theta, \theta_{cr}) \rightarrow q_s = \phi \sqrt{g S d^3} \rightarrow Q_s = q_s \cdot b g$$

Perturb. Solida  $\downarrow$   
 Molo  $\downarrow$

#### 4.1) Teoria delle Caratteristiche di Riemann

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Eq. De Saint Venant} \\ \text{Eq. di Exner} \end{array} \right.$

$\rightarrow$  eq. differenziali iperboliche



la soluzione è la composizione di tante onde quante sono le variabili (3).

Le onde raggiamo: 2 sulla superficie libera (onde idrodinamiche  $c_1, c_2$ )  
1 sul fondo (onde di fondo  $c_3$ )

Le onde idrodinamiche sono quelle che, in base a  $Fr$ , nascono a valle o meno la corrente:

-  $Fr < 1 \rightarrow \frac{U_g}{\sqrt{gH}} < 1 \rightarrow U_g < \sqrt{gH}$  l'onda nasce la corrente  $\rightarrow$  CORRENTI LENTE

-  $Fr > 1 \rightarrow \frac{U_g}{\sqrt{gH}} > 1 \rightarrow U_g > \sqrt{gH}$  l'onda non nasce a valle  $\rightarrow$  CORRENTI VELOCI

Le onde di fondo sono legate alle perturbazioni del fondo e si può capire quant'è la velocità con cui l'eq di Exner si propaga sul fondo.

$$c_3 = \frac{U_g}{1 - Fr^2} \left( \underbrace{\frac{\partial S}{\partial Y}}_Y - \frac{\partial S}{\partial Y}}_U \right) \quad \text{Se } Fr < 1 \text{ l'onda}$$

$> 0$

Osservazioni:

- Se  $Fr > 1$  l'onda di fondo nasce verso monte. Nei fiumi per tanto con  $Fr > 1$  la corrente nasce solo a valle, ma il fondo ne nasce anche a monte.
- Se  $Fr < 1$  l'onda di fondo si propaga verso valle (è la corrente che la sposta), quindi nei fiumi con  $Fr < 1$  la corrente nasce anche a monte, ma il fondo ne nasce solo a valle.



Se impongo  $Q_1 = Q_2$ , <sup>usando</sup> dove  $Q = \Omega X \sqrt{R} i f$  :

$$\frac{1}{2} b_1 \cdot c \cdot Y_1^{\frac{1}{6}} \cdot Y_1^{\frac{1}{2}} \cdot i f_1^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} b_2 \cdot c \cdot Y_2^{\frac{1}{6}} \cdot Y_2^{\frac{1}{2}} \cdot i f_2^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{ditempo}} \left(\frac{Y_1}{Y_2}\right)^{\frac{5}{3}} = \left(\frac{b_2}{b_1}\right) \left(\frac{i f_2}{i f_1}\right)^{\frac{1}{2}} \textcircled{B}$$

Unendo la  $\textcircled{A}$  e  $\textcircled{B}$  :  $\rightarrow \left(\frac{i f_2}{i f_1}\right) = \left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Osservazioni:

Scopro che se  $b_2 < b_1 \rightarrow Y_2 > Y_1$ , cioè se restringo le sponde l'altezza si alza (erode e aumenta la pendenza).

Se invece <sup>allarga</sup> ~~abbasso~~ le sponde l'altezza si abbassa  $\rightarrow$  la velocità diminuisce e sedimenta di più  $\rightarrow$  l'altezza si abbassa (sedimenti accumulati) e il fiume tende ad allargarsi in valli bruciate (e la pendenza si riduce).

Quindi per evitare alluvioni, occorrerebbe restringere, facendo aumentare la velocità del fiume che erode andando ad impassarsi sempre più.

44) Fondo erodibile in modo permanente non uniforme

$$\sigma_{cr} = \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx}\right) \text{ concezione di } \sigma_{cr} \text{ per effetto della gravità}$$

$$q_s = 8 \left(\sigma - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx}\right)\right)^{\frac{3}{2}} = \text{cost} \xrightarrow{\substack{\text{per il modo} \\ \text{permanente}}} \xrightarrow{\substack{\text{in modo} \\ \text{uniforme}}} \sigma_u - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx}\right) = \text{cost} = \sigma - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx}\right) \text{ in modo permanente}$$

$$\rightarrow \frac{dm_b}{dx} = \frac{u}{\sigma_{cr}} (\sigma - \sigma_u) - i f \rightarrow \frac{dm_b}{dx} = \frac{u \sigma_u}{\sigma_{cr}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_u} - 1\right) - i f$$

$$\text{dato che } \sigma = \frac{\tau_0}{(s-\gamma)d} = \frac{\gamma R S}{(s-\gamma)d} = \frac{\gamma R^2}{(s-\gamma)d} \rightarrow \sigma \propto \left(\frac{1}{Y}\right)^2 \rightarrow \frac{\sigma}{\sigma_u} \propto \left(\frac{Y_u}{Y}\right)^2$$

Quindi sostituisco:  $\frac{dm_b}{dx} = \frac{u \sigma_u}{\sigma_{cr}} \left[ \left(\frac{Y_u}{Y}\right)^2 - 1 \right] - i f$   $\rightarrow$  è il fattore correttivo alla  $i f$  per il disturbo del modo uniforme

Osservazioni:

- Se  $Y > Y_u \rightarrow \frac{Y}{Y_u} > 1 \rightarrow [ ] < 0 \rightarrow \frac{dm_b}{dx} < -i f \rightarrow$  la pendenza aumenta

- Se  $Y < Y_u \rightarrow \frac{Y}{Y_u} < 1 \rightarrow [ ] > 0 \rightarrow \frac{dm_b}{dx} > -i f \rightarrow$  la pendenza diminuisce

# POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria per l'Ambiente  
e il Territorio

a.a. 2017/2018

Corso di Idraulica Ambientale

Esercitazioni



Docenti:

Prof. Luca Ridolfi  
Prof. Costantino Manes

Federico Cavallo  
S245415

## Esercitazione 1: calcolo flussi turbolenti di CO<sub>2</sub>

Gli obiettivi di questa esercitazione sono i seguenti:

1. Calcolo flusso atmosferico di CO<sub>2</sub> emessa dal terreno alpino;
2. Analisi statistica delle serie di dati, in particolare calcolando: media, deviazione standard, CV, flusso turbolento di CO<sub>2</sub>, distribuzione di frequenza e correlazioni;

Sono disponibili le misure delle velocità del vento nelle tre dimensioni u, v, w, la temperatura dell'aria e la concentrazione della CO<sub>2</sub>.

Queste misure sono state effettuate su una serie di 30 minuti ad una frequenza di 20 Hz (36000 dati).

Il sito di misura è collocato a Davos, in Svizzera, ad una quota di 2540 m s.l.m.

La tecnica utilizzata è la eddy-covariance, la quale si può applicare ovunque ci sia uno scambio di sostanze tra una superficie (in questo caso la neve) e una corrente turbolenta che la lambisce (flusso di CO<sub>2</sub>).

### Svolgimento:

Per il calcolo del flusso atmosferico di CO<sub>2</sub>, emessa o assorbita, è necessario considerare solo la componente della velocità del vento perpendicolare al terreno  $w(t)$ .

Il flusso di CO<sub>2</sub> si calcola come il prodotto tra la concentrazione  $c(t)$  e la relativa velocità  $w(t)$ :

$$f(t) = w(t) c(t) \quad (1.1)$$

Grazie alla decomposizione di Reynolds, è possibile vedere  $w(t)$  e  $c(t)$  come la somma delle medie di queste grandezze ( $W$  e  $C$ ), che rimangono costanti per tutti i tempi, e le fluttuazioni turbolente in funzione del tempo  $w'(t)$  e  $c'(t)$ , pari alla differenza tra il valore delle grandezze misurate ( $w(t)$  e  $c(t)$ ) e la loro media. Di conseguenza la (1.1) diventa:

$$f(t) = (W + w'(t)) (C + c'(t)) \quad (1.2)$$

Si procede quindi a considerare la media d'insieme del flusso di CO<sub>2</sub>, e grazie a questo si può considerare praticamente uguale a zero il termine  $W$ , in quanto il flusso medio della velocità perpendicolare al terreno in prossimità di quest'ultimo è circa uguale a zero.

Di conseguenza il flusso medio di CO<sub>2</sub> si ottiene utilizzando la seguente relazione:

$$\langle f(t) \rangle = W C + \langle w' c' \rangle = \langle w' c' \rangle \quad (1.3)$$

Dalla (1.3) si ottiene un valore del flusso pari a  $-0.000397 \text{ mol}/(\text{sm}^2)$ .

Questo valore indicherebbe che la CO<sub>2</sub> venga assorbita dalla neve, il che non ha senso dal momento che nella neve non abbiamo alghe o altri tipi di piante o organismi che potrebbero assorbire la CO<sub>2</sub> presente nell'aria.

Di conseguenza si può ipotizzare che ci sia un errore della rilevazione delle velocità da parte dello strumento.

In questo caso si è deciso di suddividere il campione di dati in 20 classi. È stata scelta questa suddivisione in quanto si è osservato dal grafico che una suddivisione maggiore non avrebbe fornito ulteriori indicazioni rispetto a quelle che si possono osservare scegliendo questa suddivisione. Si osserva dalla Figura 1.1 una distribuzione modale avente un solo picco.

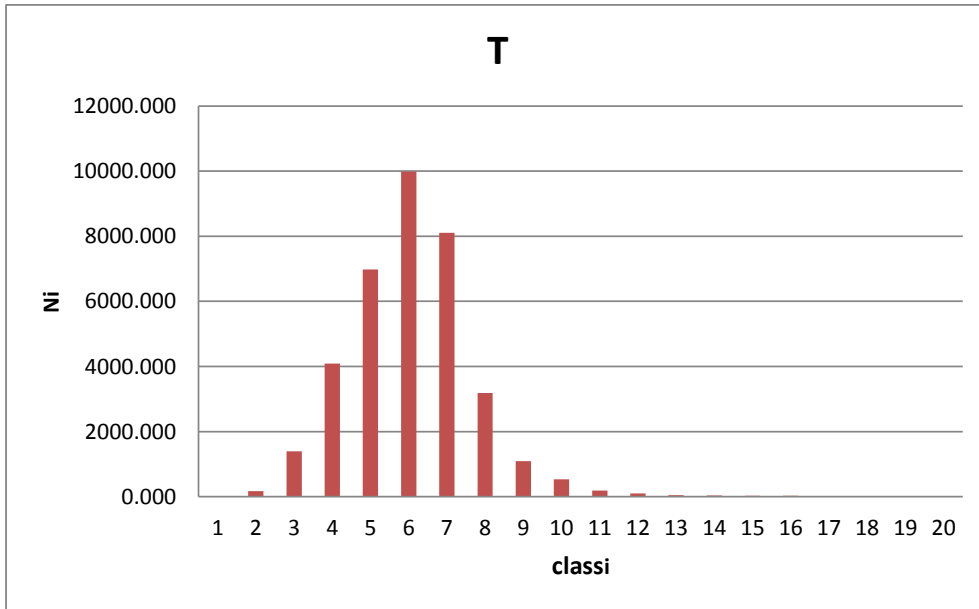


Figura 1.1

Si è scelta la stessa suddivisione per la velocità lungo v e lungo w, mentre per la velocità lungo u si è deciso di aumentare il numero di classi a 50 per mettere maggiormente in risalto il fatto di avere una distribuzione bimodale (Figure 1.2, 1.3 e 1.4).

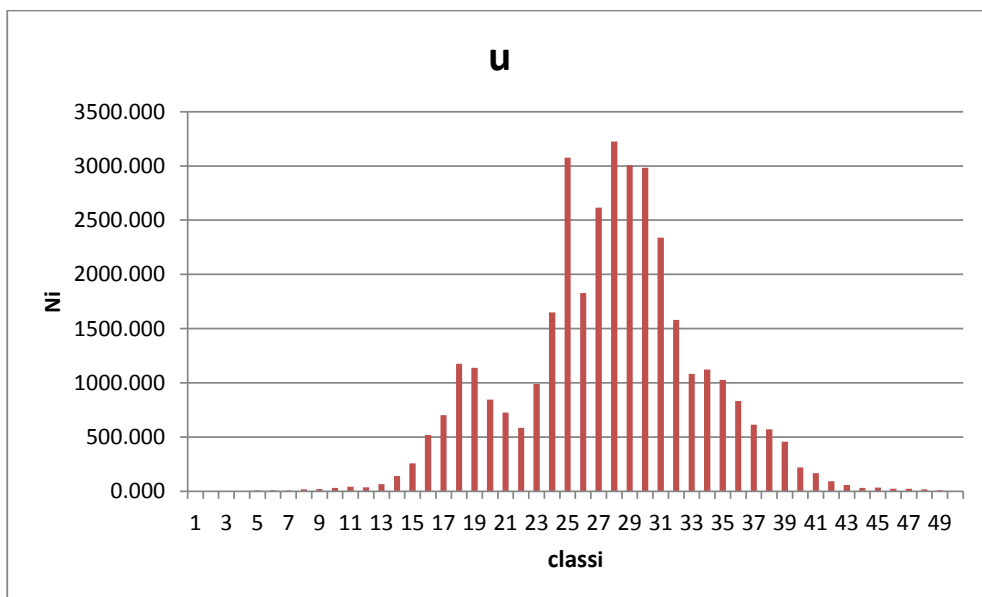


Figura 1.2

L'autocorrelazione  $\rho$  si calcola tramite una serie di operazioni:

- Si calcolano le serie delle fluttuazioni  $x'$  e  $y'$ , le quali in questo caso coincidono dal momento che si calcola l'autocorrelazione.
- Si sfasano le due serie di un intervallo pari allo sfasamento T, uguale a 20 secondi per la  $t'$ , per  $u'$  e per  $v'$  e pari a 1 secondo invece per  $w'$ .

$$\begin{array}{c}
 [x'_1 \ x'_2 \ \dots \ x'_{96} \ x'_{97} \ x'_{98} \ x'_{99} \ x'_{100}] \\
 [y'_1 \ y'_2 \ y'_3 \ y'_4 \ y'_5 \ \dots \ y'_{99} \ y'_{100}]
 \end{array}$$

- Si calcola R(T) come media di  $[x'_1 y'_4 \ x'_2 y'_5 \ \dots \dots]$ .
- Si ripete per tutti i valori di T, normalizzando alla fine

$$\rho(T) = R(T) / (\sigma_x \sigma_y)$$

Su Excel si procede al calcolo utilizzando la funzione CORRELAZIONE(x,y), creando una tabella come quella riportata di seguito (Tabella 1.3).

Tabella 1.3

	A (Colonna dati)	B (Colonna sfasamento)	C
1	25	0	=CORRELAZIONE(A1:A4; A1:A4)
2	45	1	=CORRELAZIONE(A1:A4; A2:A5)
3	23	2	...
4	46	3	...
5		4	...
...		...	...

In Tabella 1.4 si riportano i risultati dei calcoli sopra esposti, e in Figura 1.5 i relativi grafici dell'autocorrelazione.

Dalla Figura 1.5 si osserva che i diagrammi vengono rappresentati fino ad una autocorrelazione pari a 0,2, in quanto per valori inferiori l'autocorrelazione non è significativa a causa di errori strumentali.

## Esercitazione 2: trasporto di inquinanti nei corsi d'acqua

### PROBLEMA:

- La centrale nucleare di Fort Calhoun (Nebraska, USA) è situata sulla sponda destra del Missouri River. Si vuole verificare quali siano le concentrazioni nel corso d'acqua in seguito ad un incidente che comporti un rilascio istantaneo nel fiume di 100 kg di uranio in forma disciolta.
- Si richiede in particolare di determinare gli effetti di tale rilascio sulle concentrazioni nel tempo  $C(x,t)$  in corrispondenza di alcuni centri urbani (Figura 2.1);
- L'analisi deve essere effettuata per le condizioni di piena e di magra. In particolare, per le città presenti sul tratto di fiume in esame si identifichino quando e per quanto tempo la concentrazione sia superiore al valore limite di concentrazione ammissibile fornito dall'OMS ( $C_{LIM} = 15 \mu\text{g/L}$ ).



*Missouri River*

$$K = 0.011 \frac{w^2 U^2}{d u_*} \quad \text{Fischer}$$

$$K = 0.058 \frac{dU}{S} \quad \text{Mcquivery \& Keefer}$$

$$K = 0.18 \left( \frac{u_*}{U} \right)^{1.5} \frac{w^2 U^2}{d u_*} \quad \text{Liu}$$

$$K = 5.915 d u_* \left( \frac{w}{d} \right)^{0.62} \left( \frac{U}{u_*} \right)^{1.428} \quad \text{Seo \& Chong}$$

$$K = 2.0 d u_* \left( \frac{w}{d} \right)^{1.5} \quad \text{Iwasa \& Aya}$$

$$K = 10.612 d U \left( \frac{U}{u_*} \right) \quad \text{Kashefipour \& Falconer}$$

$$K = 2.0 d u_* \left( \frac{w}{d} \right)^{0.96} \left( \frac{U}{u_*} \right)^{1.25} \quad \text{Saway \& Dutta}$$

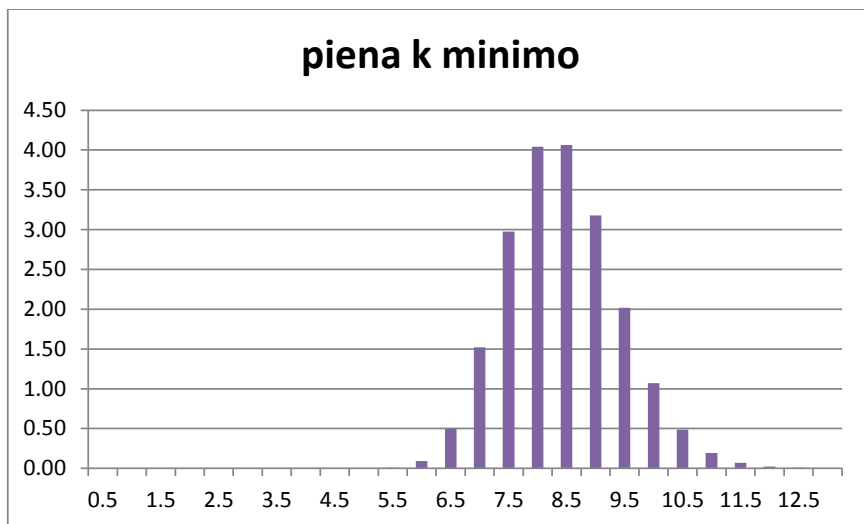
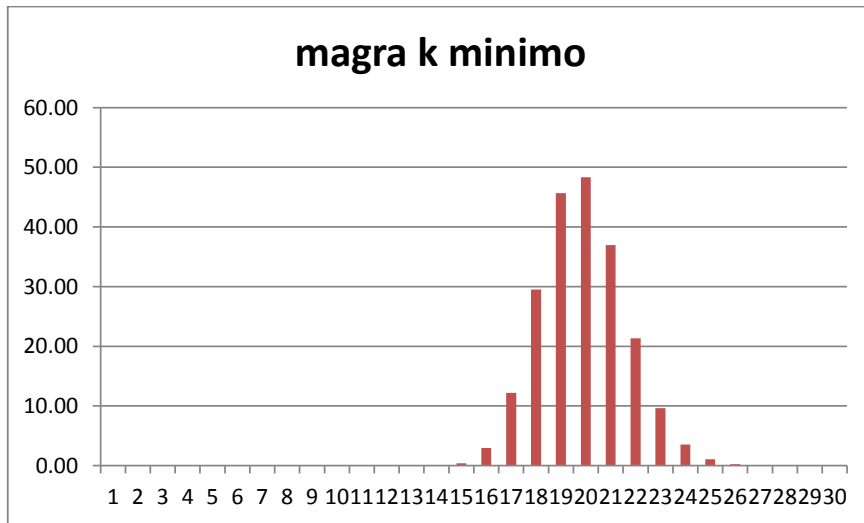
I dati utilizzati nelle formule sopra riportante e i relativi risultati sono riportati in Tabella 2.2 e 2.3.

Tabella 2.2

		Q	w	A	if	U media	d	u*	epsilon t
missouri a monte	magra	131	157	198	0.0002	0.66	1.26	0.05	0.04
	piena	2744	316	1747	0.0002	1.57	5.53	0.10	0.35
missouri a valle	magra	141	166	375	0.0002	0.38	2.26	0.07	0.09
	piena	5021	335	2100	0.0002	2.39	6.27	0.11	0.42
platte river	magra	10							
	piena	2277							

Tabella 2.3

	Fischer	McQuivery	Liu	Seo	Iwasa	Kashefipuor	Saway
Monte magra	1891.94	241.97	638.23	297.39	174.27	117.77	327.11
Monte piena	4706.42	2518.23	1314.96	2015.64	497.63	1389.74	1663.93
Valle magra	284.94	246.33	347.39	151.32	189.47	50.91	162.05
Valle piena	10151.10	4346.54	1659.36	3888.44	543.18	3429.07	2944.01

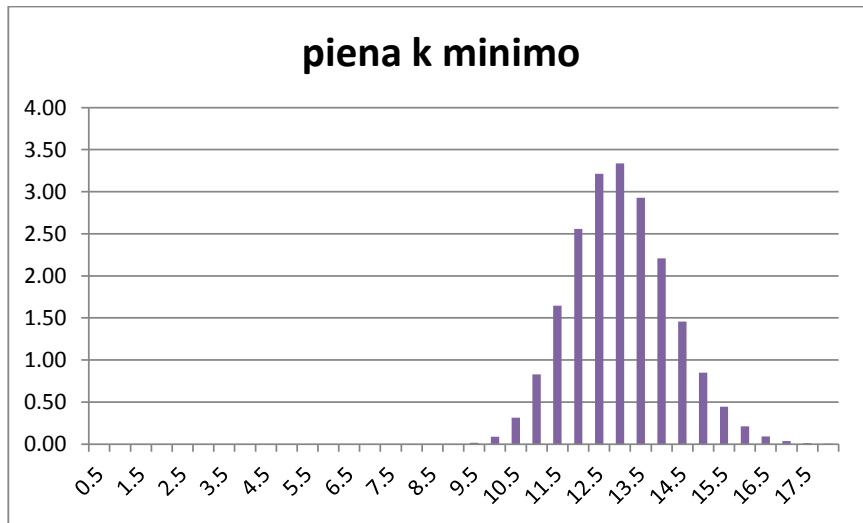


Dall'analisi dei grafici, si evince che la concentrazione limite di 15 µg/L è superata a Omaha solo nel caso del fiume in magra utilizzando la relazione che prevede il K minimo. La concentrazione limite in particolare viene superata dopo un tempo di rilascio di 16 ore e rimane oltre tale valore per 6 ore.

Questo risultato è da ricercarsi nel fatto che durante un evento di magra, essendoci una portata molto bassa, l'inquinante non può diluirsi in molta acqua, e di conseguenza le concentrazioni rimangono più elevate. Questo effetto è anche incrementato dal fatto di aver preso il K minimo, che indica il fatto che l'inquinante si disperde più lentamente.

Di seguito vengono riportati i grafici delle concentrazioni di inquinanti a Plattsmouth, prima della confluenza (x=72 km).

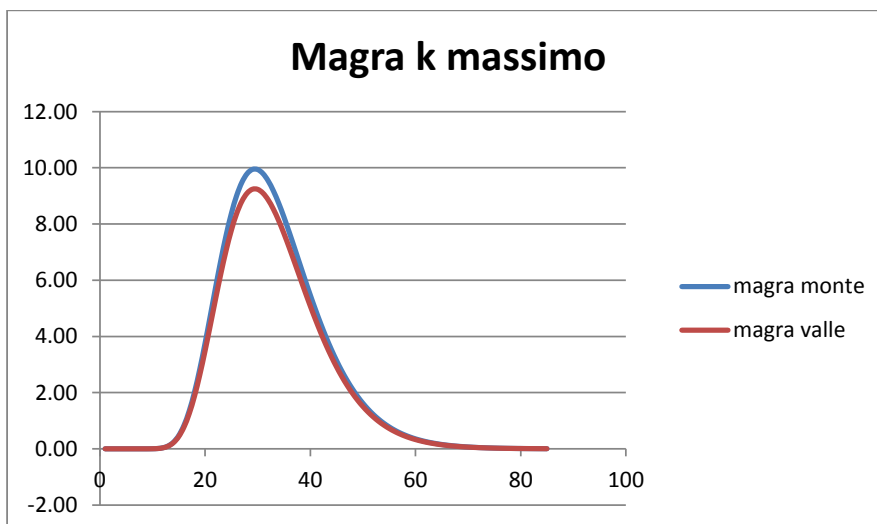




Da questi grafici si possono fare le stesse osservazioni fatte per i grafici relativi a Omaha, con l'unica differenza che le concentrazioni hanno valori inferiori dal momento che la distanza percorsa dall'inquinante è maggiore.

Di seguito vengono riportati i grafici per le concentrazioni di inquinanti dopo la confluenza con il ***Platte River***. Su questi grafici sono anche riportate le concentrazioni ottenute dai grafici precedenti, in modo da poter notare l'abbassamento della curva delle concentrazioni a causa della diluizione del contaminante con l'acqua del Platte River, la quale è pulita.

Le concentrazioni dell'inquinante dopo la confluenza sono state calcolate effettuando un bilancio di massa, ovvero  $Q_{MONTE} C_{MONTE} = Q_{VALLE} C_{VALLE}$ , e ricavando da questa relazione la concentrazione a valle  $C_{VALLE}$ .



Il calcolo della concentrazione di inquinante a Nebraska City si ricava grazie alla seguente formula

$$C(x,t) = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{A\sqrt{4\pi K(t-t_i)}} \cdot \exp\left[-\frac{((x-x_{AFFL})-U(t-t_i))^2}{4K(t-t_i)}\right] \quad (2.3)$$

Dove i valori di massa rilasciata  $m_i$  sono calcolati dalla concentrazione a valle dell'affluente come:

$$m_i = Q C_{VALLE}(t_i) \Delta t \quad (2.4)$$

I tempi  $t_i$  sono i tempi in cui discretizzare la curva delle concentrazioni. Nel caso in esame si è scelto di considerare un intervallo temporale di 85 ore, discretizzato ad intervalli di 1 ora.

Di conseguenza è necessario impostare su Excel una matrice dove sull'asse delle y ad ogni tempo  $t_i$  è associata una massa di inquinante  $m_i$ , mentre sull'asse delle x sono riportati i tempi  $t$  di arrivo della massa di inquinante  $m_i$  relativa ad ogni tempo  $t_i$  a Nebraska City ad intervalli di 5 ore.

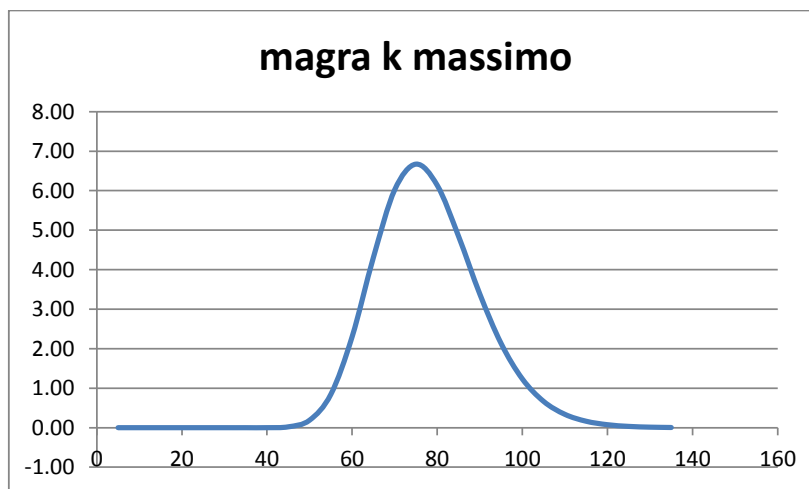
Ne segue che per  $t_i > t$ , la (2.3) non darà luogo a risultati sensati.

Si sommano quindi in colonna i valori delle concentrazioni, ottenendo il valore di concentrazione totale associato ad ogni tempo  $t$ .

Si riporta di seguito un estratto di tabella utilizzata su Excel per il calcolo sopra descritto.

		t [s]	18000	36000	54000
mi [kg]	ti [ore]		5	10	15
0.0	1	3600	0.00	0.00	0.00
0.0	2	7200	0.00	0.00	0.00
0.0	3	10800	0.00	0.00	0.00
0.0	4	14400	0.00	0.00	0.00
0.0	5	18000	#DIV/0!	0.00	0.00
0.0	6	21600	#NUM!	0.00	0.00
0.0	7	25200	#NUM!	0.00	0.00
0.0	8	28800	#NUM!	0.00	0.00
0.0	9	32400	#NUM!	0.00	0.00

La tabella va realizzata per ognuna delle 4 curve in precedenza trovate, ottenendo i seguenti grafici:



Si osserva che a Nebraska City, indipendentemente dal K scelto, si ottengono valori di concentrazione di inquinante inferiori alla soglia di concentrazione massima.

I calcoli svolti in precedenza sono sempre stati eseguiti considerando l'ipotesi dell'equazione 1D. Questa ipotesi è valida solo quando il soluto è ben miscelato su tutta la sezione; di conseguenza è necessario calcolare la lunghezza minima  $L_{MIN}$  necessaria affinché il soluto sia miscelato dalla turbolenza  $\varepsilon_T$  su tutta la larghezza  $w$  del corso d'acqua, utilizzando la seguente formula valida per immissione centrale:

$$L_{MIX1} = 0.1 \frac{w^2}{\varepsilon_t} U \quad (2.5)$$

dove:

$$\varepsilon_t = 0.6 d u_* \quad u_* = \sqrt{g d S}$$

Nella Tabella 2.4 sono riportati i risultati ottenuti dalla (2.5).

Tabella 2.5

		L min (m)	L min (km)
monte	magra	43326.77	43.33
	piena	45400	45.40
valle	magra	11482.03	11.48
	piena	64327.7	64.33

Si osserva che per quanto riguarda il tratto a valle della confluenza si ottengono lunghezza inferiori ai 47 km, ovvero dove si trova la prima località nella quale bisogna rilevare le concentrazioni (Omaha): l'ipotesi 1D è verificata.

Nel tratto a valle invece, essendoci 59 km tra il punto di confluenza e la città di Nebraska City, in caso di fiume in magra l'ipotesi è verificata, mentre non lo è in caso di piena.

Dove:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{3}{8} & \left( \text{se } \frac{H_{DUNA}}{d} \leq 1 \right) \\ \alpha = \frac{3}{2} & \left( \text{se } \frac{H_{DUNA}}{d} > 1 \right) \end{cases}$$

Dalla relazione precedente si ottiene un valore di 1,58, il quale risultando maggiore di 1 implica la scelta di  $\alpha$  pari a  $3/2$ .

Il valore di  $\alpha$  appena ottenuto si sostituisce nella (3.3), ottenendo un valore di  $h_0$  pari a 0,012.

Questo valore a sua volta si sostituisce nella (3.2), ottenendo al variare di  $x$  il grafico riportato in Figura 3.1.

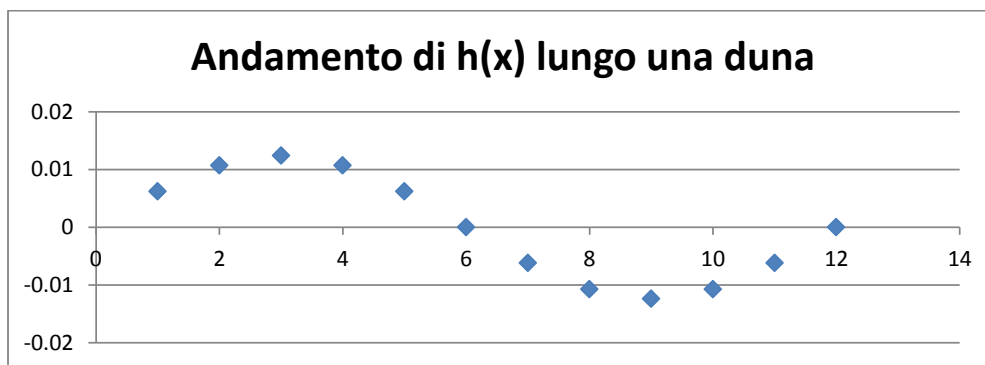


Figura 3.1

Applicando l'andamento sinusoidale del carico in superficie all'equazione del moto di filtrazione è possibile ottenere una stima delle scale tipiche di:

- velocità di filtrazione (superficiale):  $u_0 = K k h_0$  [m/s]
- tempo di filtrazione (superficiale):  $t_0 = n / (k u_0)$  [s]

dove  $n$  (-) è la porosità e  $K$  (m/s) la conducibilità idraulica dei sedimenti.

Si ricavano dalla precedenti relazioni  $u_0$  pari a 9.08 m/s e  $t_0$  pari a 175,24 ore (7,3 giorni).

Queste scale permettono il calcolo delle due proprietà fondamentali che descrivono il processo di scambio:

**FLUSSO**  $q$  [m/s]: rappresenta la portata di acqua scambiata per unità di superficie:

$$q = \frac{u_0}{\pi} \tag{3.4}$$

Si ottiene  $q = 2.89E-07$  m/s

**DISTRIBUZIONE DEI TEMPI DI RESIDENZA**  $R(t)$  [-]: rappresenta l'intervallo dei tempi che una particella di acqua può trascorrere nei sedimenti, prima di tornare nel corso d'acqua:

Dal momento che R è in funzione sia di  $t_i$  che di  $\tau$ , è necessario impostare su Excel una matrice dove sull'asse delle x vengono riportati i tempi  $t_i$ , mentre sull'asse delle y vengono riportati i tempi  $\tau$ , come si osserva nel seguente estratto di tabella utilizzata su Excel per i calcoli.

Tabella 3.1

magra k minimo a Omaha		ti ->	2	3	4
$\tau$ [ore]	$\tau$ [s]	C $\tau$ [ug/l]			
1	3600	0.00	0	0	0
2	7200	0.00	#DIV/0!	6.2113E-236	6.2112E-236
3	10800	0.00	3.4138E-143	#DIV/0!	3.4138E-143
4	14400	0.00	1.44021E-97	1.44023E-97	#DIV/0!
5	18000	0.00	8.73878E-71	8.73899E-71	8.73911E-71
6	21600	0.00	2.01953E-53	2.0196E-53	2.01965E-53
7	25200	0.00	1.93948E-41	1.93956E-41	1.93963E-41
8	28800	0.00	8.08014E-33	8.08057E-33	8.08093E-33
9	32400	0.00	1.93102E-26	1.93114E-26	1.93124E-26
10	36000	0.00	1.24594E-21	1.24603E-21	1.24611E-21

I tempi  $\tau$  variano da 1 ora (inizio sversamento di inquinante a Fort Calhoun) a 29 ore, e ad ogni tempo  $\tau$  è associata la concentrazione di inquinante che si è registrata ad Omaha.

I tempi  $t_i$  sono i tempi di osservazione ad Omaha, che variano da 1 ora a tempi molto grandi come ad esempio 1000 ore, fino a trovare quel valore di  $t_i$  al quale è associata una concentrazione di inquinante inferiore ai valori limite di concentrazione.

Si sommano in colonna i valori delle masse di inquinante, trovando quindi il valori totale di inquinante presente nell'alveo del fiume associato ad ogni ora  $t_i$  dopo l'inizio dello sversamento di uranio a monte di Omaha.

È importante notare come per  $t_i$  inferiori a  $\tau$  (questo problema si riscontra quindi fino a  $t_i = 29$  ore), non bisogna sommare tutti i valori di massa di inquinante presenti su tutta la colonna, ma è necessario sommare solo le masse associate a  $t_i$  inferiori a  $\tau$ , ovvero osservando la Tabella 3.1 si sommano solo i valori di massa di inquinante che si trovano al di sopra della cella #DIV/0!.

Il valore limite di massa di inquinante, pari a  $m_{LIM} = 1,5 \cdot 10^{-7} \text{ Kg/m}^2$ , si raggiunge dopo 460 ore, ovvero dopo 19 giorni.

I valori della massa di inquinante in funzione del tempo  $t_i$  sono riportati nel diagramma di Figura 3.3.

## Esercitazione 4: trasporto solido

### Problema:

- Il Fly River è il secondo corso d'acqua della Papua Nuova Guinea, e riceve un elevato carico di sedimenti provenienti da una miniera di rame sull'Ok Tedi, suo affluente.
- Il trasporto dei sedimenti, in parte contaminati conseguentemente all'attività estrattiva, è stato origine di problemi ambientali a partire dall'apertura della miniera nel 1985.
- Obiettivo dell'esercitazione è stimare la portata media annua [Mt/anno] di sedimenti trasportati (al fondo e in sospensione) dal Fly River.

### Portate e caratteristiche del Fly River:

Dall'analisi della curva di durata delle portate si è scelto di considerare i valori riportati in Tabella 4.1, dove vengono riportate anche le caratteristiche del corso d'acqua.

Si noti che:

- a) i valori di portata più bassa sono stati discretizzati in classi più ampie (in termini di probabilità) di quelli più elevati. Questo perchè le portate alte originano maggior trasporto solido.
- b) fa eccezione il dato di portata più elevata, che corrisponde alla portata di bankfull (alveo principale pieno). Il motivo è che al crescere della portata le caratteristiche idrauliche (profondità, tensioni tangenziali...) cambiano poco, e lo stesso vale per il trasporto solido.

Tabella 4.1

Portata	Probabilità nell'anno	Profondità	Larghezza	Area
$Q_k$ (m <sup>3</sup> /s)	$p_k$ (-)	d (m)	wk (m)	m <sup>2</sup>
986	0.3	4.5	319	1435.5
1916	0.2	7.4	336	2486.4
2530	0.1	8.5	345	2932.5
2844	0.1	9	352	3168.0
3020	0.3	9.5	358	3401.0

### Caratteristiche dei sedimenti:

- L'analisi della curva granulometrica ha rilevato che i sedimenti sono costituiti essenzialmente da materiale sabbioso, con densità relativa  $\rho_s/\rho=2.65$ .
- Le dimensioni dei sedimenti sono sufficientemente omogenee da poter considerare il diametro mediano ( $D_{50} = D = 0.211$  mm) rappresentativo di tutti i sedimenti.
- Unicamente ai fini del calcolo delle resistenze idrauliche verrà invece usato il diametro  $D_{90} = 0.425$  mm, caratteristico della frazione più grossolana.

$$\theta = \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho)gD} \quad \text{con} \quad \tau_0 = \gamma d S$$

Il valore critico  $\theta_C$  è presente in molte formule di trasporto e rappresenta la soglia di inizio movimento dei grani solidi. È un concetto approssimato (non esiste una vera soglia) ma utile ai fini pratici.

$$\theta_C = 0.22 \text{Re}_p^{-0.6} + 0.06 \cdot 10^{(-7.7 \text{Re}_p^{-0.6})}$$

La portata solida adimensionale può essere calcolata tramite le formule riportate di seguito:

$$\Phi = 10(\theta - \theta_c) \theta^{3/2} \frac{U}{u_*} \frac{\rho}{\rho_s} \quad \text{Shields}$$

$$\Phi = 8(\theta' - \theta_c)^{3/2} \quad \text{Meyer-Peter \& Muller}$$

$$\Phi = 1.5 \theta' \left( \frac{\theta_c}{\theta'} \right)^{1/6} \left( \sqrt{\frac{\theta'}{\theta_c}} - 1 \right)^{5/3} \quad \text{Pezzoli}$$

$$\Phi = 17(\theta' - \theta_c) (\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta_c}) \quad \text{Ashida \& Michiue}$$

$$\frac{43.5 \Phi}{1 + 43.5 \Phi} = 1 + \frac{1}{2} \left[ \text{erf} \left( -\frac{0.143}{\theta'} - 2 \right) - \text{erf} \left( \frac{0.143}{\theta'} - 2 \right) \right] \quad \text{Einstein}$$

Si provano tutte, dopodichè si scartano eventuali risultati estremi (molto diversi dagli altri) e si fa una media dei valori rimasti (che danno anche un'idea dell'incertezza di stima).

### **Effetto resistenza:**

Nelle formule più recenti al posto di  $\theta$  compare il parametro  $\theta'$  che include solo le resistenze di attrito:

$$\theta' = \frac{\tau_0'}{(\rho_s - \rho)gD}$$

Dove:  $\tau_0' = \gamma d S'$

$$S' = S \left( \frac{k_s}{k_s'} \right)^{3/2}$$

$$k_s = \frac{U}{d^{2/3} S^{1/2}}$$

$$k_s' = \frac{26}{D_{90}^{1/6}}$$

$$C_{s,a} = \frac{q_b}{11.6 a u_*'}, \quad a = 2 D_{90} \quad \text{Einstein}$$

$$C_{s,a} = 0.015 \frac{D}{a} \left( \frac{\theta'}{\theta_c} - 1 \right)^{1.5} \mathbf{Re}_p^{-0.2}, \quad a = \max[3 D_{90}, 0.01 d] \quad \text{Van Rijn}$$

$$C_{s,a} = 0.65 \frac{\gamma_o \left( \frac{\theta'}{\theta_c} - 1 \right)}{1 + \gamma_o \left( \frac{\theta'}{\theta_c} - 1 \right)} [\gamma_o = 0.0024] \quad , \quad a = 3 D_{90} + 26.3 \theta' D \quad \text{Smith e McLean}$$

$$C_{s,a} = \frac{AZ_u^5}{1 + \frac{A}{0.3} Z_u^5} \quad , \quad a = 0.05 d \quad \left[ Z_u = \frac{u_*'}{w_s} \mathbf{Re}_p^{0.6} S^{0.07}, \quad A = 5.7 \cdot 10^{-7} \right] \quad \text{Garcia e Parker}$$

### Calcolo trasporto solido ed in sospensione:

- Per ogni valore di portata  $Q_k$ , si calcola la portata solida (volumetrica) per unità di larghezza  $[m^2/s]$  di fondo  $q_{b,k}$  e in sospensione  $q_{ss,k}$ .
- Si calcolano le portate solida in massa (sia al fondo che in sospensione):

$$G_{b,k} = \rho_S \cdot q_{b,k} \cdot w_k \quad , \quad G_{ss,k} = \rho_S \cdot q_{ss,k} \cdot w_k \quad [kg/s]$$

- Calcolare la portata solida media annua (sia al fondo che in sospensione) come somma pesata dei contributi delle singole portate:

$$\bar{G}_b = \sum G_{b,k} p_k \quad , \quad \bar{G}_{ss} = \sum G_{ss,k} p_k$$

- Calcolare infine la portata solida totale:

$$\bar{G}_{TOT} = \bar{G}_b + \bar{G}_{ss}$$

I risultati finali sono riportati nelle seguenti tabelle (Tabella 4.3 e 4.4).

**Tabella 4.3: trasporto solido di fondo**

Portata Q	qb	Gb,k	Gb	
m <sup>3</sup> /s	m <sup>2</sup> /s	kg/s	kg/s	Mt/anno
986	2.76E-06	2.34	4.64	0.146
1916	4.24E-06	3.77		
2530	6.24E-06	5.70		
2844	7.09E-06	6.62		
3020	6.85E-06	6.50		



## Esercitazione 5: erosione di un alveo fluviale

### PROBLEMA:

La realizzazione di una traversa in un corso d'acqua innesca un processo di erosione a causa dell'impossibilità per la portata solida presente nel tratto di monte di oltrepassare la traversa. Il tratto interessato, di lunghezza  $L=1$  km, termina con una soglia fissa non erodibile.

Valutare, per il tratto A VALLE della traversa:

- l'entità dell'escavazione al piede della traversa;
- i profili del fondo del fiume dopo 2, 6 mesi e 1, 2, 5 anni dalla costruzione della traversa.

### EFFETTO DELLA TRAVERSA

- Dal punto di vista del trasporto solido, la traversa rappresenta un'interruzione della continuità fluviale.
- Ne consegue che, in assenza di interventi esterni, nella sezione a valle della traversa ( $x=0$ ) si avrà  $q_s=0$ .
- Se il fondo è erodibile, la corrente ristabilisce la sua capacità di trasporto solido erodendo i sedimenti sul fondo.
- Il risultato è un progressivo abbassamento del fondo, con riduzione della pendenza, finché il fiume non assume una nuova pendenza di equilibrio  $S_{eq}$ .

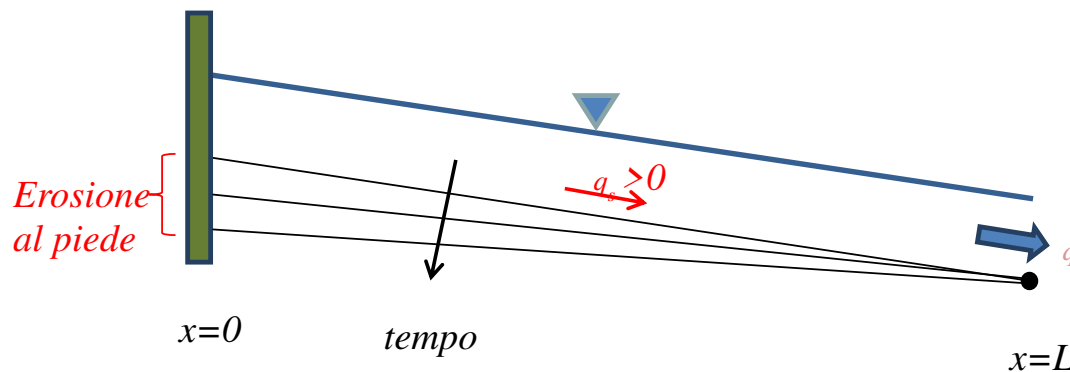


Figura 5.1

### FIUME:

- $q = 0.3 \text{ m}^2/\text{s}$  (portata per unità di larghezza)
- $S_0 = 5 \cdot 10^{-3}$  (pendenza iniziale)
- $k_s = 20 \text{ m}^{1/3} \text{ s}^{-1}$  (coeff. Strickler)
- $L = 1 \text{ km}$  (lunghezza tratto interessato)
- $\eta = 0$  per  $x = L$  (soglia non erodibile)

**Fase liquida**  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial U d}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial U d}{\partial t} + \frac{\partial U^2 d}{\partial x} + \frac{1}{2} g d \frac{\partial d}{\partial x} = g d (S - J) \end{array} \right.$  (De Saint Venant)

$\begin{array}{l} \text{Pendenza} \\ \text{fondo} \end{array}$ 
 $\begin{array}{l} \text{Pendenza} \\ \text{carico tot} \end{array}$

$$U = k_s d^{2/3} S^{1/2}$$
 oppure (Chezy)

$$q = U d = k_s d^{5/3} S^{1/2} \longrightarrow \text{Noto } S, \text{ trovo } d$$

Da quest'ultima formula è possibile ricavare la profondità  $d$  della corrente nota la pendenza dell'alveo  $S$ , la quale si ricava grazie alle formule descritte di seguito.

La **portata solida** invece si ricava utilizzando la formula di Meyer-Peter e Muller:

$$q_s = \sqrt{\Delta g D^3} 8(\theta' - \theta_{cr})^{3/2}$$

Dove:

$$\Delta = \frac{\rho_s}{\rho} - 1$$

$$\theta' = \frac{\tau_0'}{(\rho_s - \rho) g D} \quad \text{con} \quad \tau_0' = \gamma d S' \quad \text{e} \quad S' = S \left( \frac{k_s}{k_s'} \right)^{3/2}$$

$$k_s = \frac{U}{d^{2/3} S^{1/2}}$$

$$k_s' = \frac{26}{D_{90}^{1/6}}$$

$$\theta_c = 0.22 \text{Re}_p^{-0.6} + 0.06 \cdot 10^{(-7.7 \text{Re}_p^{-0.6})} \quad \text{con} \quad \text{Re}_p = \frac{\sqrt{\Delta g D} D}{\nu}$$

Per la risoluzione dell'**equazione di Exner** si procede con una tecnica di calcolo alle differenze finite, discretizzando la lunghezza  $L=1000$  m con degli intervalli  $\Delta x$  di 100 m.

Questo metodo consiste nell'utilizzare una formula numerica grazie alla seguente formula esplicita

$$\eta_i^{t+1} = \eta_i^t - \frac{\Delta t}{(1-n)\Delta x} [(q_s)_{i+1}^t - (q_s)_i^t]$$

	<b>300</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>400</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>500</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>600</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>700</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>800</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>900</b>	0.39	0.39	0.39
	<b>1000</b>	0.39	0.39	0.39
<b>S'</b>	<b>0</b>	9.39E-04	9.19E-04	9.01E-04
	<b>100</b>	9.39E-04	9.29E-04	9.20E-04
	<b>200</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>300</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>400</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>500</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>600</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>700</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>800</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>900</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
	<b>1000</b>	9.39E-04	9.39E-04	9.39E-04
<b>θ'</b>	<b>0</b>	0.15	0.14	0.14
	<b>100</b>	0.15	0.15	0.14
	<b>200</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>300</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>400</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>500</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>600</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>700</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>800</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>900</b>	0.15	0.15	0.15
	<b>1000</b>	0.15	0.15	0.15
<b>qs</b>	<b>0</b>	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00
	<b>100</b>	6.69E-05	6.59E-05	6.49E-05
	<b>200</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>300</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>400</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>500</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>600</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>700</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>800</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>900</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
	<b>1000</b>	6.69E-05	6.69E-05	6.69E-05
<b>ηt+1</b>	<b>0</b>	4.99	4.98	4.97
	<b>100</b>	4.50	4.50	4.50
	<b>200</b>	4.00	4.00	4.00
	<b>300</b>	3.50	3.50	3.50