



Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2301A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Cavallo Federico

MATERIA: Idraulica Ambientale - Appunti - Prof. Ridolfi

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

IDRAULICA AMBIENTALE

13 Novembre 2017

Programma:

Esame Orale

- i) Turbolenza
- ii) Trasporto nei fluidi
 - Diffusione molecolare
 - Diffusione turbolenta
 - Dispersione
- iii) Trasporto nei fiumi
- iv) Trasporto solido fluviale
- v) Morfodinamica fluviale
- vi) Loghi (canali)
- vii) Semiman

Bibliografia da usare nella carriera

RICHIAMI

• $\vec{U} = (u \ v \ w)$

• $\vec{U}^T = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

• A : matrice = $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$ si possono chiamare anche $TENSORI$

ordine 0: scalari
ordine 1: vettori
ordine 2: matrici
ordine n: ...

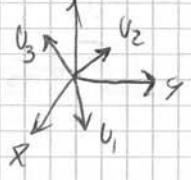
• $A_{ij} = A_{ji}$: Tensore Simmetrico (∇^2)

• $A_{ij} = -A_{ji}$: Tensore Antisimmetrico

• $A_{ij} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}) + \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji})$ Si può spezzare così qualunque matrice

• Da ogni matrice otteniamo gli autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ es (3×3)
 A ogni autovalore λ_i si associa un autovettore \vec{u}_i . Se assumo come SR questi 3 autovettori la matrice si semplifica enormemente.

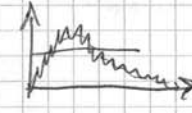
es. Partendo dal solito x, y, z \rightarrow es. tensione sferica $\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} \end{pmatrix}$, che è piena.
 Se usavo $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \rightarrow \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$



e scendo a $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ come nuovo SR principali \rightarrow ottengo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ (1)

Il matematico serve $\lim_{T \rightarrow \infty}$, ma noi non abbiamo un T infinito.


Per fortuna noi misuriamo con degli strumenti che hanno una sensibilità. Quindi non misuro le oscillazioni più piccole. Quindi posso fermarmi quando le oscillazioni non ancora misurate sono al di sotto della sensibilità dello strumento.

E se l'andamento cambia nel tempo $u(t)$?  non si può prendere la media. grandi $T \rightarrow$ medio troppo
piccoli $T \rightarrow$ non tolgo la turbolenza

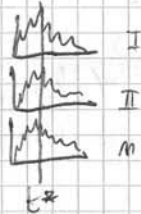
\rightarrow Nel moto vna non si può fare.

• Kolmogorov (uno dei più grandi matematici del '900)

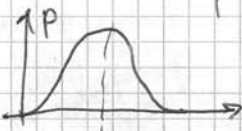
Non bisogna fare la media. Si fa la 1^a prom e ha un certo andamento

Poi lo scrivi e c'è un'altra  leggermente diversa.

Ne faccio n realizzazioni



\rightarrow ad un certo tempo ^{fisso} avrà i vari valori di u nelle varie realizzazioni. Avrà una popolazione di valori. \rightarrow posso fare una distrib di probabilità di valori di u a quel t_*



media d'insieme

$$\langle u(t_*) \rangle = \bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t_*) \cdot p(u(t_*)) du(t_*)$$

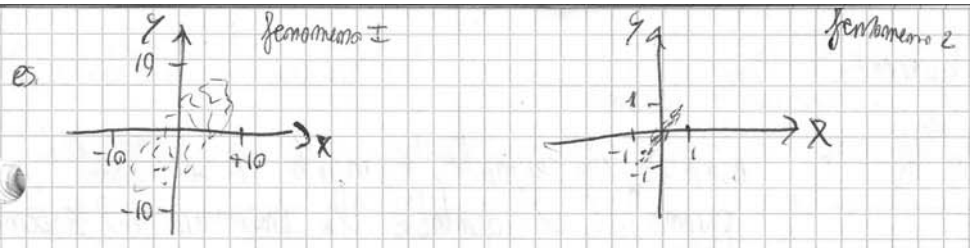
Se lo faccio per ogni valore di t ottengo proprio quello che stiamo cercando



e la turbolenza è il residuo:

$$[u(t) - \langle u(t) \rangle]$$

(3)



Se faccio $\langle xz \rangle$ è più piccolo nel z , ma solo perché i valori sono più piccoli.

Ma se normalizzo i valori allora faccio riferimento a una scala.

Il modo ^{di convenire} per la scelta quadratica medio $\langle x(t)y(t+z) \rangle$ e vedo se

i due fenomeni sono correlati o meno $\rightarrow \sigma_1, \sigma_2$
 \rightarrow cross correlazione
 \rightarrow correlazione $\rho_{xy}(z)$

se lo faccio sul medesimo campione ho l'autocorrelazione a tempo diversi $\rightarrow \rho_{xx}(z)$

Dipendenza: legame (lineare o non) tra due variabili.

La correlazione vale per individuare ^{SOLO} i legami LINEARI ($y = ax + b$)

La Teoria dei Legami non tiene l'ha brava Shannon

Correlazione non vuol dire causalità

15 Novembre 2017

Se faccio l'autocorrelazione ho $\frac{\langle x(t)x(t+z) \rangle}{\sigma_x^2}$ $\sigma_x^2 = \langle x^2(t) \rangle$ è la media d'insieme

e quindi la cross correlazione si può anche scrivere $\rho_{xy}(z) = \frac{\langle x(t)y(t+z) \rangle}{\sqrt{\langle x^2(t) \rangle \langle y^2(t+z) \rangle}}$

Quando è che ρ_{xx} è max? è quando $z=0 \rightarrow$ quindi $\rho_{xx} = 1$

La z mi permette un po' le cose, e ad esempio è $= -1 \rightarrow$ anche correlati

$$-1 \leq \rho_{xx}(z) \leq 1$$

AUTOCORRELGRAMMA



per il seno la funzione di ρ_{xx} è periodica così

(5)

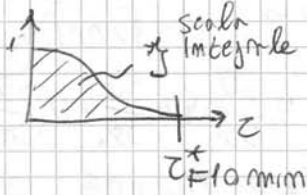
Concetto di Ergodicità

Shamsky anni 50

dimostra che $\bar{\cdot} = \langle \cdot \rangle$ quando $T \ll \infty$

media temporale
media d'insieme

con un certo periodo la memoria si spegne
sistemi meccanici, idraulici, elettronici



fare una media d'insieme è come fare tante medie temporali.

Faccio un calcolo di 3 ore, e ogni 10 mm è come se il sistema si rinnovasse
→ anziché fare tante realizzazioni è come se nella stessa realizzazione avessi tante realizzazioni → misuro tante volte il tempo di come la memoria

Quando accade questo il sistema si dice Ergodico

Lo Spettro

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega z} p(z) dz$$

trasformata di Fourier

(decomposizione di una funzione in tante funzioni sen e cos)
 $f(t) = \sum a_n \sin(\omega_n t)$

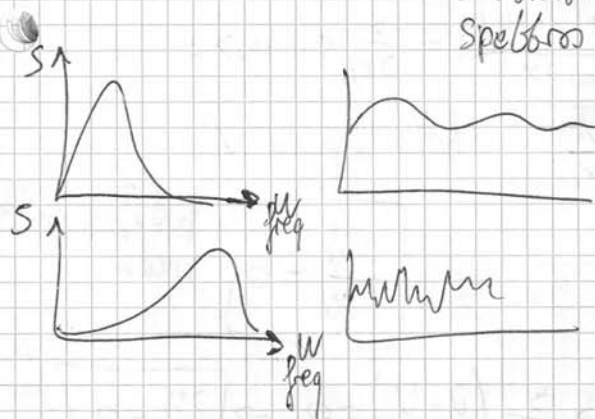
è legato all'autocorrelazione

è tutto cambiato qui ↑

PERIODOGRAMMA

proprio questo

se lo faccio nel cambio si chiama Spettro



segnale che cambia più lentamente autocorrelazione ↑

segnale che cambia più velocemente autocorrelazione ↓

Per Navier-Stokes

① $\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} \leftrightarrow \dots = \frac{\partial U}{\partial t}$ ✓

③ $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial (P+p)}{\partial x_i} \leftrightarrow \dots = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i}$ ✓

④ $\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \leftrightarrow \dots = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x_j \partial x_j}$
stesso procedimento

⑤ $-g \delta_{i3}$ ✓

② $\tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \leftrightarrow \dots = (U_j + u_j) \frac{\partial (U_i + u_i)}{\partial x_j} \rightarrow \dots = \dots$

① $\sqrt{U} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$

② $\frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{\partial U_j}{\partial x_j} \rightarrow = 0$

③ $U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = 0 \rightarrow = 0$

④ $\langle U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \rangle = 0$ Nam è detto

$= \langle \frac{\partial U_j U_i}{\partial x_j} \rangle = \langle \frac{\partial U_j U_i}{\partial x_j} \rangle$

è la combinazione delle due barbe = 0

$= \frac{\partial \langle U_j U_i \rangle}{\partial x_j} - \dots$

$\rightarrow = 0$ Nam è detto \rightarrow Rimane

Eq. Navier-Stokes

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle U_j U_i \rangle}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - g \delta_{i3}$$

il modo medio dip dalla barba sinistra

$\langle U_j U_i \rangle$ è la cross correlazione che ci somma con le componenti barbalemente \rightarrow e non è subito zero, ma esiste

$\frac{\partial \langle U_j U_i \rangle}{\partial x_j}$ se fossero scambiabili = 0 facile ⑤

Matematicamente si può risolvere? Incognite: u_1, u_2, u_3, p

Eq Moto Medio $\rightarrow 3$ eq
 " combinatoria $\rightarrow 1$ eq

ma $\langle u_i u_j \rangle$? è un tensore di incognite
 mancano le eq.

Ci sono eq. che descrivono $\langle u_i u_j \rangle$?

cioè $\frac{d\langle u_i u_j \rangle}{dt} = f(u, p)$?

Se ci parliamo mascome cose in più $f(u, p, \langle u_i u_j u_k \rangle)$

mascome sempre nuove variabili

Problema di chiusura della gerarchia

mascome sempre di variabili, proprio perché ci sono cose nelle gerch.

Come se ne esce? In maniera ingegneristica (matematicamente non si può)

Non guarda $\langle u_i u_j u_k \rangle$

Invece dei modelli di chiusura

che mi descrivono ciò che m'incanto in funzione di ciò che ho medio

$$\frac{d\langle u_i u_j \rangle}{dt} = f(u, p)$$

la buona è come la giusta

tutti i modelli es. autoconsistenti ecci...

Si cerca quello migliore perché quello perfetto non lo si trova

(11)

④ dove $E_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ è la ^{il tensore della} ~~celente~~ di deformazione del fluido.

⑤ $-2\nu E_{ij} E_{ij}$ \rightarrow è sempre < 0 \rightarrow rba energia

↓
 sono le Tens. Viscose
 fanno fatica per muovermi

⑥ $\langle u_i u_j \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$
 cross correlaz
 turb
 ↓ grad velocità \rightarrow è max dove c'è $\frac{d\langle u \rangle}{dx}$ max

↓
 disallo $< 0 \rightarrow$ è l'em che m ad aumentare la turbolenza

QUINDI
 c'è il modo medio \rightarrow per crearla molto energia ^(pompa, sorgente)
~~di alta verso il basso~~
 \downarrow
 di questa pompa è perso

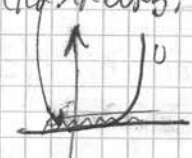
(Molti) \rightarrow tramite tensioni viscose \rightarrow CALORE (Attriti)
 e tempo va nella turbolenza
 va a creare la turbolenza

↓
 c'è tipo va passato che rba energia al
 modo medio

ed è max dove c'è $\frac{d\langle u \rangle}{dx}$ più grande

Se non varia la u
 il grad è zero, e la turb non c'è
 è sopra certe quote
 anche in aereo

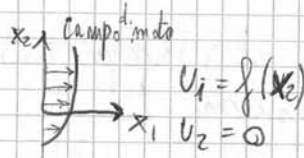
Nei buffer layer
 che è dove si crea la turb.



Ma come fa a robare e ad apparire?

Esistono tanti meccanismi → il + imp è il VORTEX STRETCHING

Prendiamo E_{ij}



campo di moto
 $U_i = f(x_2)$
 $v_2 = 0$

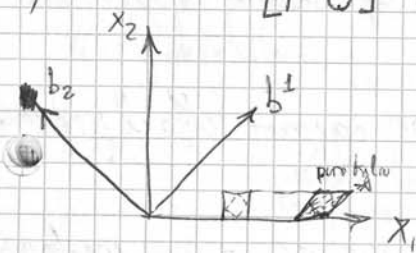
caratterizziamo:
 $E_{ij} \Rightarrow \left. \begin{aligned} E_{11} = E_{22} &= 0 \\ E_{12} = E_{21} &= \frac{1}{2} \frac{dU_1}{dx_2} = \Gamma \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix}$

2) → autovalori $\det \begin{vmatrix} -\lambda & \Gamma \\ \Gamma & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \Gamma \\ \lambda_2 = -\Gamma \end{cases}$

3) → autovettori $\begin{bmatrix} 0 & \Gamma \\ \Gamma & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = \Gamma \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -\Gamma \rightarrow \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

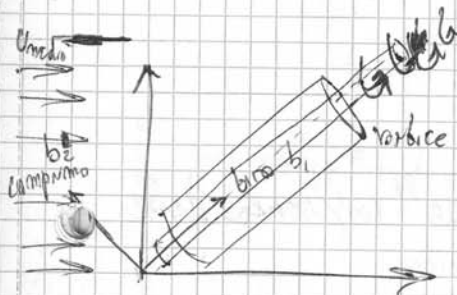


se cambiamo il SR
 → gli b_1 e b_2

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & -\Gamma \end{pmatrix}$$

↓ non solo compress e dilataz
 ma sforzi

prima si deforma solo, ora
 si comprime o dilata solo.



→ la U bim il vortice (lungo b_1) e quindi si
 comprime ai lati (lungo b_2)

↑
 aumenta la U di rotazione!

che è una U piccola

↓
 e crea via via vortici a scale
 più piccole!

SCALE DI VORTICI
 CASCATA DI VORTICI

mentre il vortice allungato con b_2 si allunga e rallenta. Il movimento è pieno di vortici, due vorrebbe andare avanti ma deve dare energia a questi vortici.

↳ la turb è l'insieme contemporaneo di tutti questi vortici

diventano non benconformate, e se si prova a formare un vortice ancora più piccolo questo viene impedito dalla turbolenza

● "Microscala di Kolmogorov" η

→ Più ho la $v \uparrow$, più diminuisce la dimensione dei vortici più piccoli

→ Dato che servono dei vortici (3D), questo spiega perché la turbolenza non si forma nelle 2D

→ Nei fluidi perfetti ($\nu=0$) le scale di vortici proseguono all'infinito, fino all'infinitesimo \rightarrow nelle stelle

● Invece se ν ferma i vortici a una scala che è più grande della scala a cui il fluido diventa viscoso \rightarrow resta turbolento.

Quanto vale la scala più piccola?

$\eta = \eta(\epsilon, \nu)$
flusso di energia
viscosità

uso il Teo π
 $\eta = A \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}}$

"K41" nome della formula di Kolmogorov

per ν più grande deve aumentare del cubo l'energia

da Esperimenti $A \approx 1$

\rightarrow Negli oceani $\eta = 0.1(10^{-1})$ mm

Es) Se in un fulmine ho $\epsilon = 100$ Watts in 1 kg d'acqua ($\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$)

$\rightarrow \eta = 10^{-2}$ mm

Ma se le scale intermedie non usano dalle ec, e non servono ancora la ν , ma è che sono univocali, ed è solo dalla ϵ immessa?

Si \rightarrow si chiamano \rightarrow SCALE INERZIALI

posso valutare le scale intermedie guardando quella in un tubo. Cambia solo la ϵ immessa

Sono fenomeni accomunati da tre caratteristiche:

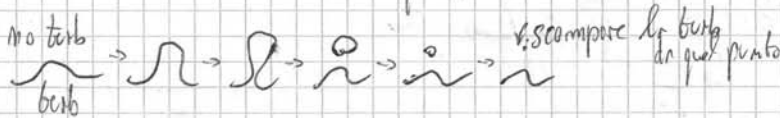
1) Intermittenza

in un punto se sono di qui dalla turb. la vedo, se sono al di là non la vedo più.

$$r_i = \frac{t_{turb}}{T_{tot}}$$

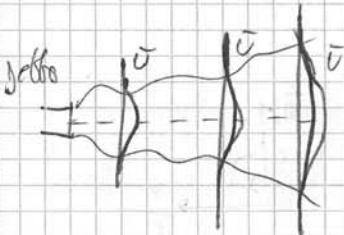
2) Inglebamento

sul fronte c'è sempre un "combattimento" tra il fronte turb che si vuole espandere e quello tranquillo che vuole mantenere il flusso tranquillo

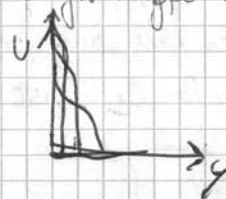


3) Auto similitudine

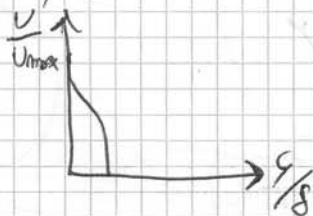
quando vedo fenomeni a scale diverse mi chiedo: Stessi fenomeni a scale diverse o fenomeni diversi?



Stesso fronteggiamento cinematico



se il rapporto $\frac{y}{\delta}$ alla scala dove mi si chiude il profilo delle velocità è $\frac{y}{\delta}$, e lo u lo divide per U_{max}



Tutti i profili cadono nello stesso profilo morfologico.

Per le scie bene che il getto si apre come $\ln \delta \propto \sqrt{x}$



21 Novembre 2017

è possibile definire

inoltre mai il \ln q viene scelto q^2

$$\langle q \rangle = \frac{1}{2} (\langle u \rangle^2 + \langle v \rangle^2 + \langle w \rangle^2)$$

che è l'energia turbolenta
 lungo tutto le 3 componenti

$$\frac{\partial \langle q \rangle}{\partial t} = U \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial x} - V \frac{\partial \langle q \rangle}{\partial y} - \langle uv \rangle \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[\langle qv \rangle + \frac{1}{\rho} \langle pv \rangle \right] - \epsilon$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle q \rangle$$

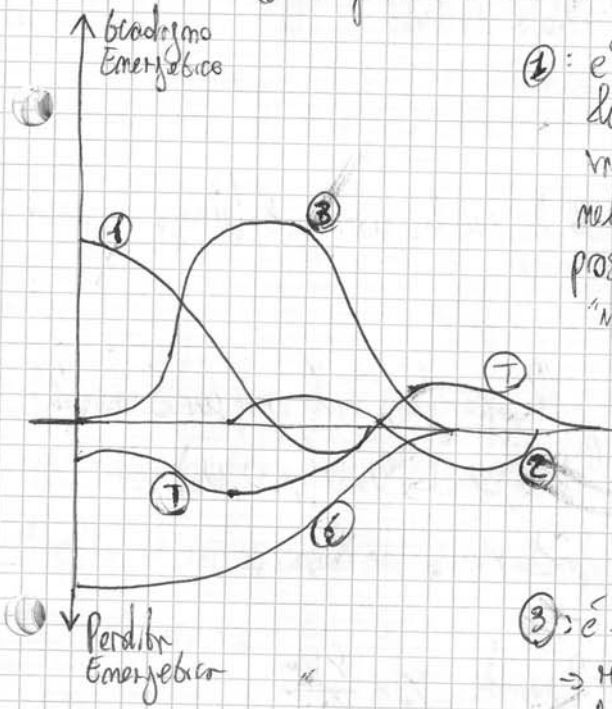
termine che prende energia dal moto medio

trasporto

termine che cede energia agli altri vortici

Questa formula indica come l'Ec cambia nel getto

Condizione: \oplus il flusso è stazionario $\rightarrow \textcircled{A} = 0 \rightarrow$ Bilancio di Energia



$\textcircled{1}$: è la variazione di energia che c'è muovendoti lungo x (me lascia sempre un po' in mano che va avanti, se si spostano verso x) \rightarrow è lei che nella zona centrale dà energia al getto, e proseguendo si esaurisce e il getto va a zero "inframmenti di energ. dalla prona"

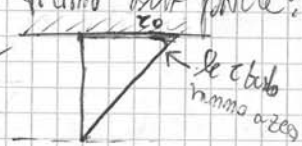
$\textcircled{3}$: è legato al vortice stretching, alle crossvelocità \rightarrow ruba energia al moto medio dove cioè il gradiente di moto medio $\frac{\partial U}{\partial y}$ più alto. Ecco perché al centro $\textcircled{3}$ è nulla (manca gradiente)

normalizzato $\frac{U}{U_x} = f(\eta)$ $\frac{U}{U_x}$ η passo di normalizzare in η

Se poi scuro $\frac{U}{U_x} = f\left(\frac{y}{\sqrt{\nu/x}}\right)$
 → Normalizzo la lunghezza e la velocità
 per tornare la scala a cui devo risolvere il problema con la U_x

Ma com'è f ?

Considero uno strato ancora più piccolo dell'inner layer vicino alla parete:
 il SOTTOSTRATO VISCOSO → la turbolenza qui non c'è e esiste solo la viscosità



qui le $\tau = \mu \frac{dU}{dy}$

dato che la $\frac{U}{U_x}$ \rightarrow zero

e dato che le τ saranno in uno strato così piccolo, possiamo assumere che non ci sia più un gradiente e sia $\tau = \text{cost}$ (es. Sp. della testa e piedi)

e approssimo τ con $\tau_0 = \text{cost}$

$\Leftrightarrow U = \frac{\tau_0}{\nu} y + c \quad y=0 \rightarrow U=0 \rightarrow c=0 \rightarrow U = \frac{\tau_0}{\nu} y$ profilo della velocità nel sottostato viscoso

$\frac{U}{U_x} = \frac{\tau_0 y}{\nu U_x} = \eta \rightarrow \frac{U}{U_x} = f(\eta)$

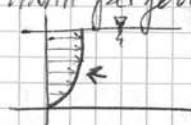
Lo strato che sta fuori dall'inner layer lo chiamo OUTER LAYER

Qui non cambia nulla la viscosità ν , quindi ho $U = U(y, u_x, \delta)$

Applico il Teo Π , scegliendo U_x ed come gr. fond, e ho $\frac{U}{U_x} = F\left(\frac{y}{\delta}\right)$

e chiamo $\xi = \frac{y}{\delta}$ quindi bene che $\frac{U}{U_x} = F(\xi)$ si normalizza rispetto alla scala

In molti problemi ~~per~~ ^{per} memorizzare nell'auto loga, dati sperimentali si discostano ^{un po'} dall'eq della retta uso comunque l'equazione della retta, che è una buona approssimazione, anche se non perfetta.
 → Ecco perché uso il profilo logaritmico



Per $Re < 10^3$ è dove c'è la parte più interessante da analizzare.

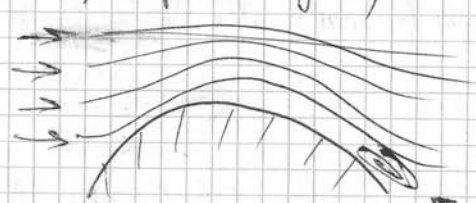
Nel buffer logar è dove nasce la turbolenza, perché è il punto in cui c'è il gradiente più alto.

E se c'è la scabrezza? Se la scabrezza è immersa nel sottostato viscoso la turbolenza non ha rete, è come se non esistesse

se U ha $Re \downarrow$ e si inizia a bucare, e il momento solo più di Re ma anche da $\frac{e}{\delta}$. Se U cambia o cresce il s.r. viene spazzato via e turbolenza solo più di $\frac{e}{\delta}$ e meno di Re_{crit} . → scompare la viscosità e diventa $\frac{U}{u_x} = c \ln \frac{y}{y_0} + c$
scelta della scabrezza

Viene distribuito il s.r. nel buffer logar, ma rimane la formula logaritmica che utilizza la scabrezza nell'auto logar (es. nei fiumi)

E se la parete fosse curva?



Nascono fenomeni di separazione

alle si creano dei vortici e nasce una scia

Tanto più il più il corpo è tozzo tanto più si formano prima. Se è aerodinamico si forma dopo.



è interessante che ^{generale} che si stacca un vortice si stacca una da una parte e un'altra e se non si proietta bene questo provoca una vibrazione che può essere dannosa

(25)

LES: Large Eddy Simulation

Uso solo alcune scale (quelle che interessano) (quelle che ingegneri comuni (interessano))

es. i valori massimi → grandi vortici

↓ si sommano bene quelli grandi e
 tempo cambia di quelli più piccoli solo per
 l'emergenza che alternano a quelli grandi.

→ mi basta molti ordini di grandezza di vortici

var modelli → Boussinesq
 → R-E
 → ...
 → germonno

ma devo sapere bene quale modello scegliere → capire bene.

(Si usa nel caso di dinamica degli inquinanti)

Come mai la superficie del fiume non è mai piatta? fig. 7-8

La bolla che scoppia, prima che scoppi nasce o uscirlo, e scoppiando alza leggermente il livello del fiume ~~dentro~~ sopra di lei

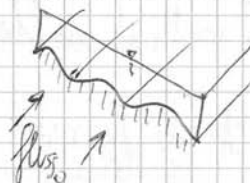
Se il fondo è trasparente, questo meccanismo solleva particelle solide e le lascia cadere più avanti → TRASPORTO SOLIDO
 es. fondo fiume, sabbia duna... ed ecco che il fondo diventa granulato



● Talvolta nel fiume si formano dei Colonnati Vortici (cilindrici)



e trasportano sabbia e l'accumulano in queste "creste" di sabbie di sabbia



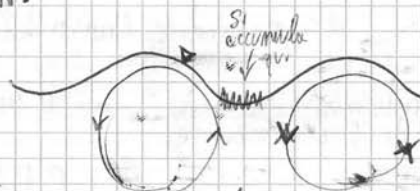
Si formano anche nei mari:

Danno il ϕ della lunghezza

● delle onde.

Sono lunghi anche km.

e per diffusione portano l'acqua ossigenata più in profondità. E accumulano materiale dalle prante in mezzo ai due vortici successivi.

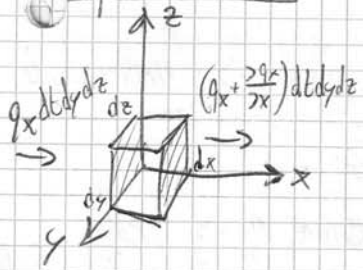


CELLE (VORTICI)
 DI LANGMUIR

E accumula
 (22) I

Prendiamo un'eq su come la conc si diffonde nello spazio $C=C(x,y,z,t)$

Eq. di Bilancio



Immagino un flusso q_x nella direzione x .

In dt tempo entra $q_x dt dy dz$

Dall'altra faccia esce $(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dt dy dz$

La stessa di prima, più $dm \frac{\partial q}{\partial x} dx \rightarrow$ esce $(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx) dt dy dz$

lungo x) la differenza è: $-\frac{\partial q_x}{\partial x} dt dy dz dx$

lungo y) " : $-\frac{\partial q_y}{\partial y} dt dx dz dy$

lungo z) " : $-\frac{\partial q_z}{\partial z} dt dx dy dz$

massa = conc. Volume $\rightarrow m = C dx dy dz$

Nel dt cambia solo la C (non il volume) $\rightarrow \frac{\partial m}{\partial t} = \frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz dt$

E sono uguali

$$\rightarrow -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) dt dy dz dx = \frac{\partial C}{\partial t} dx dy dz dt$$

Quindi

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\text{div } q$$

ma se $q = -D \nabla C$

↓ sostituisco

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \cdot \nabla^2 C \Rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

Questa eq funziona ovunque c'è la diffusione (al posto di C la Temp, le molecole, l'energia, le migrazioni per la velocità)

Osservazioni:

1) È lineare \rightarrow vale psde \rightarrow perché D sia una costante

Se la C ha conc. influenza le vibrazioni tra le molecole, e

D dipende da $C \rightarrow$ ed è non lineare

$$D = D(T, \text{tipod. fluido})$$

Usiamo il Teorema di $C = C(x, t, D, M)$ 5 dimensioni e 3 grandezze

$\begin{matrix} L & T & L^2 & M \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ x, t, D, M \end{matrix}$
 dall'eq dalle c.i.

scelgo t, D, M e bravo

$$\frac{C}{M/\sqrt{4\pi Dt}} = g\left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}}\right)$$

quindi ho

$$C = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot g(m_b)$$

com'è fatto g?

devo trovare un'eq che cambino $\frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ mantenendo cost, che chiamo $m_b = \frac{x}{\sqrt{4Dt}}$ confrontando l'eq di partenza

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{\partial g}{\partial m_b} \cdot \frac{\partial m_b}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial C}{\partial x^2} = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{dg}{dm_b^2} \cdot \frac{1}{(4Dt)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{M}{\sqrt{4\pi D}} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \cdot g(m_b) + \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{\partial g}{\partial m_b} \cdot \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} \left(-\frac{1}{2}\right)$$

e sostituisco nell'eq e bravo:

$$-\frac{1}{2t^{3/2}} \cdot g(m_b) - \frac{1}{2t^{3/2}} \cdot \frac{dg}{dm_b} \cdot \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} = \frac{D}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot \frac{d^2g}{dm_b^2} \rightarrow$$

$$\frac{d^2g}{dm_b^2} + 2m_b \frac{dg}{dm_b} + 2g(m_b) = 0$$

eq. differenziale alle derivate ordinarie

componente non lineare

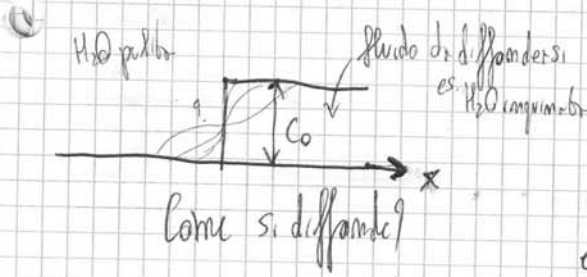
... ma si riesce a risolvere analiticamente?

$$\frac{d}{dm_b} \left[2m_b g(m_b) + \frac{dg}{dm_b} \right] = 0 \rightarrow 2m_b g(m_b) + \frac{dg}{dm_b} = \text{cost} \rightarrow \text{che sappiamo essere uguale a zero}$$

e alla fine bravo che: $g(m_b) = c_0 \cdot e^{-m_b^2}$

$$c(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) / \sqrt{4\pi Dt} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi$$

$d\xi$ sarebbe la dx del grafico e la brava



è una funzione gradino (funz. di Heaviside)

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

la mia funz. è:

$$c(x,t) = c_0 \sigma(x)$$

Quindi

$$c(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_0 \sigma(x)}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi =$$

chiamo $u = \frac{x-\xi}{\sqrt{4Dt}}$

$$\Rightarrow = \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du$$

Spezzo l'int. \rightarrow

$$= \int_{-\infty}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du$$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ \downarrow da tavola degli integrali

$$= \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \int_0^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}} e^{-u^2} du \right]$$

chiamo funzione di errore $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\xi^2} d\xi$

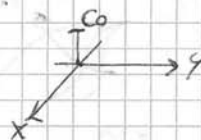
e quindi ho

$$c(x,t) = \frac{c_0}{2} \left[1 + \text{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) \right] \quad 0 < \text{erf} < 1$$

per i casi bi e tri dimensionali:

2D) $\frac{\partial C}{\partial t} = D \left[\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right]$ supponiamo di avere $\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$ ②

per risolverla uso il metodo di separazione delle variabili



$C(x, y, t=0) = M \delta(x) \delta(y)$ no

$C(x, y, t) = C_1(x, t) \cdot C_2(y, t)$ si

La sostituisco nella ② e ho:

$C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \rightarrow$

$\rightarrow C_1 \left[\frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] + C_2 \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] = 0$

A
B
quando $C_1 = C_2 = 0$ no
• A = 0
• B = 0

$\rightarrow \begin{cases} \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \\ \frac{\partial C_2}{\partial t} = D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \end{cases}$ che sono quelle che ho già

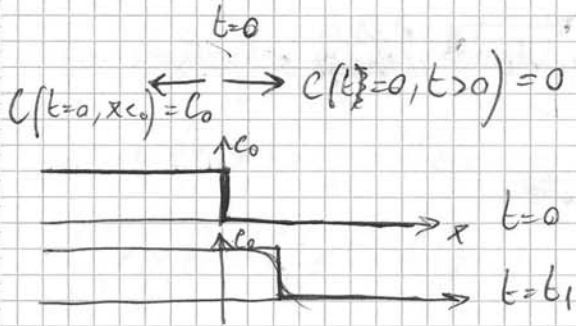
Quindi $C(x, y, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} e^{-\left[\frac{x^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t} \right]}$

Analogamente in 3D)

$C(x, y, z, t) = \frac{M}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} e^{-\left[\frac{x^2}{4D_x t} + \frac{y^2}{4D_y t} + \frac{z^2}{4D_z t} \right]}$

se D è uguale \rightarrow sfera propagazione
 se D è diverso \rightarrow ellissoide

Esempio - monodimensionale



La formula è

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

cambia SR e usa un sistema di riferimento in movimento (siamo sicuri) insieme

Come troviamo $C = C(x, t)$

$$\xi = x - ut$$

$$\tau = t$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \tau}$$

$$\{x, t\} \rightarrow \{\xi, \tau\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

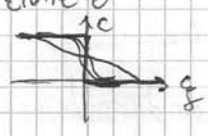
$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau} = -u \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \tau}$$

e bravo

$$-u \frac{\partial C}{\partial \xi} + \frac{\partial C}{\partial \tau} + u \frac{\partial C}{\partial \xi} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$

la soluzione è

$$\frac{\partial C}{\partial \tau} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2}$$



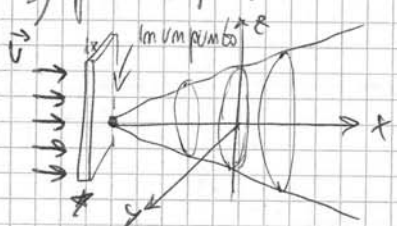
e quindi

$$C(\xi, \tau) = \frac{C_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{\xi}{\sqrt{D\tau}} \right) \right]$$

in x, t

$$C(x, t) = \frac{C_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - ut}{\sqrt{D\tau}} \right) \right]$$

3) pannello di una sostanza emessa puntualmente in un campo di moto U di velocità costante U per unità di tempo



e^9

regime Euleroamente $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$C = C(x, y, z)$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

\Rightarrow trascurabile lungo x

$z = \frac{x}{U}$

$$\frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)$$

* segue questa sostanza ^{spessa dx} che scorre lungo x . Quando la sorgente è in mezzo alla sostanza

$$dt = \frac{dx}{U} \rightarrow M = \dot{M} dt = \dot{M} \frac{dx}{U}$$

tempo che impiega a scendere di dx

massa emessa in quell'intervallo "nella sostanza"

proseguendo man mano affiora più a quella che ha nella sostanza e quella che cioè si diffonde

$$C(y, z) = \frac{M}{4\pi D t} e^{-\left[\frac{y^2}{4Dt} + \frac{z^2}{4Dt}\right]} = \frac{\dot{M} dt}{4\pi D t} e^{-[-]} = \frac{\dot{M} dx}{4\pi D t U} e^{-[-]} \rightarrow$$

$$\rightarrow C(x, y, z) = \frac{\dot{M}}{4\pi D U} e^{-\left[\frac{y^2}{4Dx/U} + \frac{z^2}{4Dx/U}\right]}$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \right)$$

solo diffusione

Veste in 3D assomiglia a una gaussiana.

Separiamo il momento di Taylor:

$$\frac{d}{dt} \overline{x^2} = \overline{\frac{dx^2}{dt}} = 2 \overline{x \frac{dx}{dt}} = 2 \overline{x \dot{x}} = 2 \overline{v_x \int_0^t v_x(t') dt'} = 2 \int_0^t \overline{v_x(t) v_x(t')} dt'$$

x è l'ant della v parte $v_x(t')$ nell' \int
 come $v_x \times$ nel tempo = v

$$= 2 \int_0^t \overline{(v_x(t) - v_x(t')) dt'} \rightarrow \text{ricorda il numeratore dell'autocorrelazione}$$

autocorrelazione
 $R_x(\tau) = \frac{\langle v_x(t) v_x(t+\tau) \rangle}{\langle v_x^2 \rangle}$

$$= 2 \overline{v_x^2} \int_0^t R_x(t-t') dt' = 2 \overline{v_x^2} \int_0^t R_x(\tau) d\tau$$

conclusione che c'è tra
 le velocità non meno che
 le sbo campionando

Finché c'è un legame che collega un fenomeno che si diffonde e non è mai elemento una. Poi dipende da J , cioè dal percorso che ha fatto fino a lì è importante per capire dove si trova.

Ma quindi $t \rightarrow J$ → non Fickiano
 $t \gg J$ → Fickiano
 allora ~~per~~ ~~non~~ ~~è~~ ~~che~~ ~~vale~~ ~~ma~~ ~~è~~ ~~che~~ ~~vale~~

$$\langle c \rangle = \bar{c}$$

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \epsilon \left[\frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \langle c \rangle}{\partial z^2} \right]$$

ma è dovuto al campo di moto, che non è isotropo ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) ma cambia anche nello spazio (vicino alla parete, lontano dalla parete).

stacciamolo bene

$$\frac{\partial \langle c \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon_x \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial x} + \epsilon_y \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial y} + \epsilon_z \frac{\partial \langle c \rangle}{\partial z} \right)$$

EQUAZIONE DELLA DIFFUSIONE TURBOLENTA

i) che vale per $t \gg J$
 scala integrale lagrangiana II) Ma quando vale J_{int} si può calcolare. Perché indifferente non va subito a zero? Perché i vortici più grandi hanno una grande inerzia, e sono loro che contengono la memoria. Ma sa quando è grosso, è quello delle condizioni al contorno. Supera la memoria quando allargandosi inizia a vedere e sembra tanti vortici grandi indipendenti. per superare la memoria in un fiume deve allargarsi oltre la sua profondità (es. 5 cm). Si supera quando la macchina vede tante scale.

III) $\sigma^2 = 2\lambda t$
 $\lambda^2 = 2 \left(\overline{u^2} J \right) t \rightarrow \lambda \propto \epsilon$

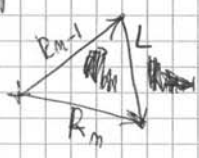
RANDOM WALK

raggiamento che sta alla base di Fick



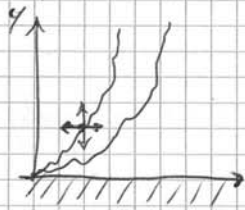
"Passeggiatore a caso": ogni passo è in una direzione casuale

In media non si sposta di molto il bancambro, ma col tempo tende ad esplorare zone più distanti



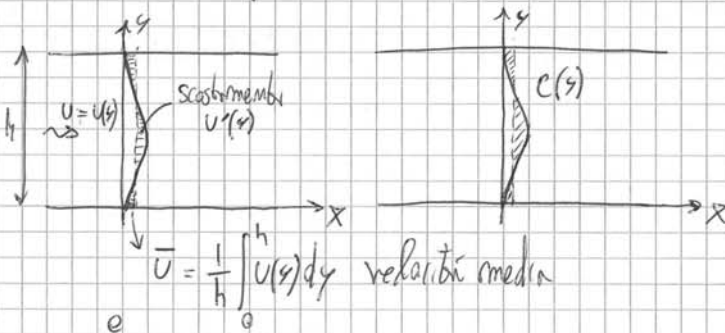
$\vec{R}_n = \vec{R}_{n-1} + \vec{L}$ come si cresce R_n^2 la varianza modulo $R_n^2 = \vec{R}_n \cdot \vec{R}_n$

Ma c'è anche la diffusione molecolare (II) che sposta le particelle lungo le direzioni in funzione del gradiente di velocità



L'effetto congiunto cosa dà?

Teoria di Dispersione di Taylor - Molo laminare



$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u(y) dy$ velocità media

$u'(y) = u(y) - \bar{u}$ solo lo scostamento (il gradiente?)

Idem nella concentrazione

$\bar{c} = \frac{1}{h} \int_0^h c(y) dy \rightarrow c'(y) = c(y) - \bar{c}$ scostamento della concentrazione

audio 1.30.00

cambia lungo x



cambia ma quando si scosta dalla media, non la media per vedere la diluizione

prendiamo l'eq

di conservazione/diffusione e sostituisco $\bar{c} = \bar{c} + c'$ rispetto alla $(u \frac{\partial c}{\partial x})$ che è $\uparrow \uparrow$

$$\frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial t} + (\bar{u} + \bar{u}') \frac{\partial (\bar{c} + c')}{\partial x} = D \left[\frac{\partial^2 (\bar{c} + c')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\bar{c} + c')}{\partial y^2} \right]$$

Voglio far sparire la c' per vedere solo gli scostamenti

$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \tau} \\ \frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} - u \frac{\partial}{\partial x} \\ \tau = t \end{cases}$

(45)

$\frac{\partial^2 c'}{\partial y^2}$

Se lo imbrogio

$$c(x) = \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \int_0^y u'(y) dy dy + \text{cost}$$

come vanno lungo y gli scambiatori della come media

Taylor ragiona sul flusso di massa $\dot{M} = \int_0^h u c' dh$ (è la come che si sta allungando)

$$\rightarrow \dot{M} = \int_0^h u c' dh = \int_0^h \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \int_0^y u'(y) dy dy + \text{cost}$$

\leftarrow su tutta la variabile $\int_0^h u'(\bar{c} + c') dh$
 $\rightarrow = 0$ se $u=0$

gradi come profilo di
 lungo x velocità

$$\rightarrow \dot{M} = -h k \frac{\partial \bar{c}}{\partial x}$$

coeff di dispersione per shear

$$\text{dove } k = -\frac{1}{hD} \int_0^h \int_0^y u'(y) dy dy$$

$\Delta \uparrow k \downarrow$ si miscelano meglio \rightarrow scambi piccoli \rightarrow tende alla media

Data il profilo di velocità (es. parabola, fuzione...)
trovo k.

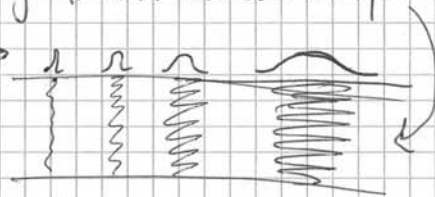
E' questo

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{v} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = k \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2}$$

come con xet

Come cambia la varianza? $\sigma^2 = 2kz$ si allarga linearmente col tempo

Come "la \bar{c} " come una grossiana \rightarrow



Dopo quanto tempo le particelle hanno visto tutto il profilo di velocità?

Dopo $t \approx \frac{h^2}{D}$

\rightarrow che è un'ipotesi alla base di tutte queste formule, che valgono per $t > \frac{h^2}{D}$

OSSERVAZIONI

i) Nella dispersione D è funz. del tempo, quando m è una costante

Se chiamo $T = \int_0^t D(t) dt \rightarrow \frac{\partial C}{\partial T} = \frac{\partial C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$

ii) Caso ANISOTROPO \rightarrow tempo alterato dall'influenza di D

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

Chiamo $\xi = x \sqrt{\frac{D}{D_x}} ; \eta = y \sqrt{\frac{D}{D_y}} ; \zeta = z \sqrt{\frac{D}{D_z}}$

$$\rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial \zeta^2}$$

iii) Se ha $U=U(C) \rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + U(C) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

$\rightarrow U(C) \approx C$ da sviluppo in serie

$$\rightarrow \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad \text{Eq. di Burgers} \quad \text{E' NON LINEARE}$$

Chiamo $\psi = -2D \frac{\partial \phi}{\partial x}$ (Trasformazione di Cole-Hopf)

e sostituendo

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

iv) Finora si è usata come condizione che non avvengono reazioni chimiche

\rightarrow sistemi NON reattivi \rightarrow la C si conserva $M = \int_{-\infty}^{+\infty} C dx$

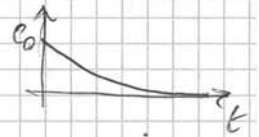
Alcuni altri casi: Reazione di decadimento

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -kC$$

\uparrow quanto ce n'è
 \uparrow quanto si perde

g. inverso

$$C(t) = C_0 e^{-kt}$$



L'eq diventa

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - kC$$

\uparrow termine diffusivo
 \leftarrow termine di decadimento

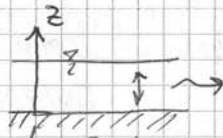
Se invece sostituisco $C(t) = C' e^{-kt}$
 \uparrow come iniziale

l'eq diventa $\rightarrow \frac{\partial C'}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2}$

Quindi $\epsilon_i \propto U_* d \rightarrow \boxed{\epsilon_i = \alpha U_* d}$ vale per qualsiasi corrente
(atm, marina, ...)

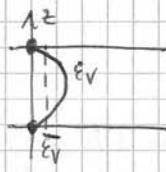
1) Quanto vale α ?

Per ϵ_v uso l'analogia di Reynolds spostando la massa e le velocità: quantità di moto. Se brava il profilo di velocità (es. da Millikan) brava quanto deve essere ϵ_v per creare quel profilo. Le particelle spostandosi



$$\epsilon_v = K d U_* \left(\frac{z}{d}\right) \left[1 - \frac{z}{d}\right]$$

0,14 \checkmark andamento parabolico



$$\boxed{\bar{\epsilon}_v = 0,067 \cdot d U_*}$$
 ϵ_v medio

Per ϵ_T invece non conosco il profilo delle velocità, perché dipende da tanti fattori. Da esperimenti si è ricavata una tabella (la 5.1) che riportano dei valori per $\frac{\epsilon_T}{d U_*}$ in base ai vari tipi di fiumi o di canali.

In generale $\boxed{\epsilon_T \approx 0,15 d U_* \pm 50\%}$ \rightarrow ma così che conta è l'ordine di grandezza, quindi va bene.

Per ϵ_L (longitudinalmente) non c'è solo lei, ma anche la dispersione: c)

I) La diffusione turb. longitudinale si somma alla dispersione

II) Mi aspetto che $\epsilon_L \sim \epsilon_T \rightarrow \epsilon_L \sim 0,15 d U_*$, ma so che $K = 5,93 d U_*$, quindi trascuro la dispersione.

CARATTERISTICHE DEL FIORE

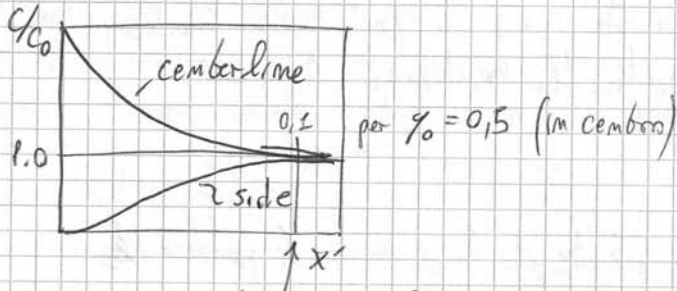
I) è irregolare

II) fa molte curve

III) Le sponde sono irregolari

$$\frac{C}{C_0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi x'}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left\{ e^{-\frac{(y'-2m-y_0)^2}{4x'}} + e^{-\frac{(y'-2m+y_0)^2}{4x'}} \right\}$$

dove $x' = \frac{x E_T}{U W^2}$; $y' = \frac{y}{W}$; $C_0 = \frac{\dot{M}}{d U W}$; $y_0 =$ posizione in cui mette la sostanza (cembro, da una sponda dell'altro)



$x' > 0,1 \rightarrow$ il fiume ha ovunque la stessa concentrazione C_0 e finisce la fase B $\rightarrow L = 0,1 \frac{U W^2}{E_T}$

Se la fonte su una sponda è come se avessi un fiume ~~lungo~~ il doppio con al centro la sua sponda. Quindi è come se facessi riferimento a $W = 2W$

\rightarrow quindi $x' = \frac{x E_T}{U 4W^2} \rightarrow x' > 0,4 \rightarrow L = 0,4 \frac{U W^2}{E_T}$

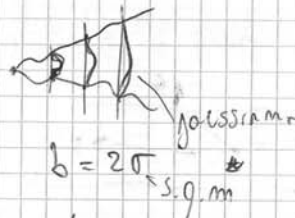
\downarrow aumento di valle

Esempio 1

Industria che scarica $10 \cdot 10^6$ l/di con $C = 200$ ppm nel cembro di un fiume con $d = 10$ m, $U = 0,6$ m/s e $U_* = 0,06$ m/s. Quanti è la C 300 m a valle?

$$\dot{M} = C \cdot Q \cong 28 \text{ m}^3/\text{s ppm}$$

$$E_T = 0,6 \cdot U_* d = 0,36 \text{ m}^2/\text{s}$$



$$b = 4 \sqrt{2 E_T \frac{x}{U}} \cong 76 \text{ m fronte di allungamento.}$$

Al cembro (nel picco) vale $C_{max} = \frac{\dot{M}}{d U} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi E_T \frac{x}{U}}} \cong 0,1 \text{ ppm}$

il completo miscelamento c'è per $x' = 0,3 \rightarrow L = 1,2 \text{ km}$
 $x' = 0,3$

Se facciamo una curva



ci sono le curve secondarie che fanno le eliche

$$E_T = \frac{250^2 d^3}{R^2 U_x} = 0,056 \text{ m}^2/\text{s}$$

↓ adesso

$L \approx 180 \text{ m}$ molto più piccole

La fase c

Sappiamo che $k = 5,93 U_x d$ (Elder)

Ma nelle tabelle dei valori $\frac{k}{U_x d}$ sono ordini di grandezza diversi.

Questo perché Elder guardava canali rettilinei, nei fiumi invece il profilo cambia . Se faccio il calcolo della velocità media in ogni punto del fiume, è lì che trova le U_x , in quanto in una sezione media ^{il profilo medio del}

Alcune formule:

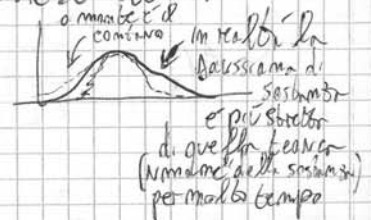
$$k = \frac{0,011 U_x^2}{d}$$

5 Dicembre 2017

Osservazioni:

- Dead zone: zone in cui le sostanze tendono a ristagnare. Dato da:

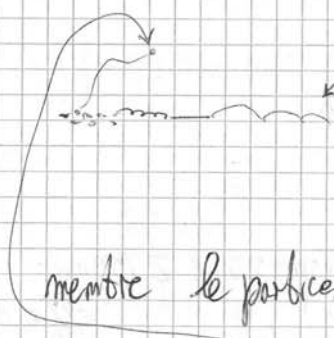
- irregolarità delle sponde a valle



- vegetazione riparia In questa zona la vegetazione rallenta il flusso, quindi le sostanze permangono lì più a lungo

- zone ipotoniche: porzione di sedimenti immediatamente a contatto con il fiume

Due meccanismi: 1) Le particelle rotolano sul fondo
 zona spessa \rightarrow ϕ particelle



TRASPORTO SOLIDO AL FONDO

\rightarrow è quello della risacca dell'onda che sfrange sulla babbia

mentre le particelle più fini rimangono in sospensione

TRASPORTO SOLIDO IN SOSPENSIONE

Il più importante (in litri) è quello al fondo.

La maggior parte del materiale trasportato è in parte quello organico, per la maggior parte materiale sciolto.

In generale quindi c'è una ρ_s , una $\gamma_s = 2,1 \div 2,8 \frac{\text{ton}}{\text{m}^3}$.

Scandimento in:

massi e ciottoli	$\phi > 64 \text{ mm}$
ghiaia	$2 < \phi < 64$
sabbia	$0,062 < \phi < 2$
limo	$0,004 < \phi < 0,062$
argilla	$\phi < 0,004$

vedi tab. sul par. 6 per def. molto più dettagliate

dove ϕ è il diametro al secco.

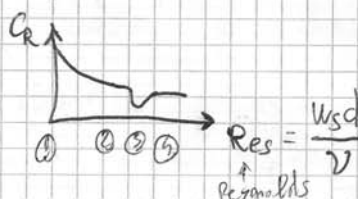
Torbidità negli altri c'è il "caricamento degli altri".

La velocità di trasporto dipende dalla velocità \rightarrow nelle zone mantene si trasportano i più fini e rimangono i ciottoli grossi che "schermano" quelli più fini al di sotto. Quando arriva la piena rompe lo schermo e trasportate grosse quantità di fango (che per lei è più facilmente erodibile).

La velocità di sedimentazione è rallentata dalla forza resistente, che vale $F_R = \frac{1}{2} \rho C_R A W_s^2$ per una sfera, e lei vale $F' = \frac{\pi}{6} d^3 (\gamma_s - \gamma)$. Si eguagliamo dopo un certo tempo.

La differenza tra due da la velocità di caduta $W_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho C_R} g d}$

Nel caso di una sfera



57

Sostituisco \rightarrow
$$\frac{U_{cr}^2}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d} = \frac{2 K_s (b \gamma \phi \cos \alpha - \sin \alpha)}{C_s K_1 + C_L K_2 b \gamma \phi}$$

$\begin{matrix} \text{obliquo} & \text{più grande} & & & & & \text{caso} & \text{impeturbato} \\ \text{in} & \text{si} & & & & & & \\ \text{cubica} & \text{stacca} & & & & & & \end{matrix}$

$\underbrace{C_s K_1 + C_L K_2 b \gamma \phi}_{\text{per particelle circa sferiche}} \approx A \rightarrow \text{costante}$

\rightarrow si cerca la U_{cr} e lo si confronta con quella del flusso
 se $U_{cr} > U_f$ allora si muove particelle con quel d

la prima formula è quella di Brauns (1735)

$$U_{cr} \propto \sqrt{d}$$

• Ney
$$U_{cr} = 6,263 \sqrt{d} (0,6 \cos \alpha - \sin \alpha) \quad [m/s]$$

• Carstens
$$U_{cr} = \sqrt{3,61 (b \gamma \phi \cos \alpha - \sin \alpha) \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1\right) g d}$$

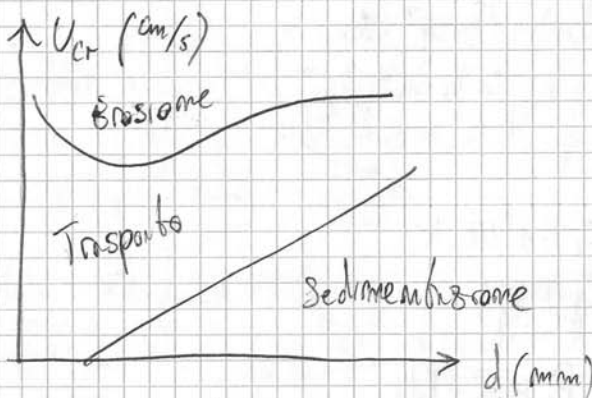
Ma cos'è U_f ?



a che altezza sono? Tipicamente sono a un'altezza di sopra le particelle

Non posso riferirmi alla U_{media} ? Trovando una U_{cr} ... si calcola un risultato

• Diagramma di Hjulstrom



Si osserva, in base alla U del fiume, le particelle di quale diametro sedimentano, o vengono trasportate, o erose.

• Tabelle di Fashen & Sebes

Tendenze
 =
 =
 =
 =
 =
 =
 =

valore U_{cr}
 in base alla natura

La U_{cr} aumenta se la gr. particelle in sospensione

$$\Rightarrow T = \rho U_x d^2 \Gamma'(\cdot) + K_S (\rho_s - \rho) g d^3 \text{sen} \alpha$$

Sabbivento

$$R = \left[K (\rho_s - \rho) g d \cos \alpha - \rho U_x d^2 \Gamma''(\cdot) \right] b y d$$

ossia

$$\frac{\rho U_x}{(\rho_s - \rho) g d \cos \alpha} = \frac{K_1 (b_{y2} - b_{y1})}{\Gamma'(\cdot) + \Gamma''(\cdot) b y d} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho) d \cos \alpha} = \dots$$

Logico in pratica $\rightarrow d \geq 0 \rightarrow \cos \alpha = 1; \text{sen} \alpha = 0, b y d = 0$, et cetera

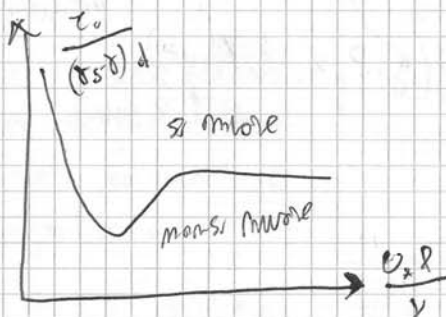
$$\frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho) d} = f\left(\frac{y}{d}, \frac{U_x d}{\nu}\right)$$

sommergenz
No di Reynolds delle particelle

in pratica

$$\frac{y}{d} \approx \sigma(\rho_s^3 \gamma(\alpha))$$

$$\hookrightarrow \frac{\tau_0}{(\rho_s - \rho) d} = f\left(\frac{U_x R}{\nu}\right) \quad \text{si può graficare}$$



Parametri di Meier & Muller

$$\frac{R_{i'}}{d} = 0,04 \frac{P_s - P}{P} = 0,25 \frac{q_s^{2/3}}{d^{3/2} \sqrt{g p^2}}$$
particelle solide in peso

Consideriamo il fatto che l'area non è mai piana, ma ha due pendenze
 → il fondo ha una forma



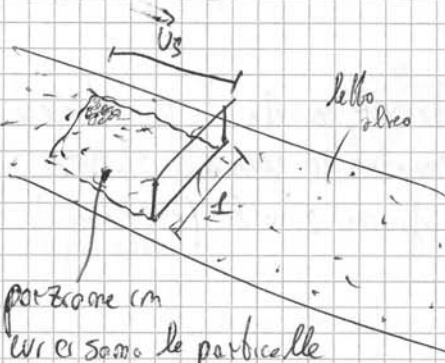
$$\frac{i'}{i} = \frac{C_{b-s}}{C'_{b-s}}$$
oppone resistenze
coeff. di scivolamento

$$i' = \frac{26}{d^{1/6}}$$

→ per geometria più grande → influenza le resistenze

i' : pendenza motore dovuta a i giorni

TEORIA DI Kalinšek (1971)



q_s che in 1 sec passa attraverso una sezione di canale.

particelle in cui ci sono le particelle che saranno sollevate e passeranno attraverso la sezione di canale

$$N^{\circ} \text{ particelle} = \frac{U_s \cdot d}{K_1 \cdot d^2} \text{ in quell'arco.}$$

Le particelle messe effettivamente in movimento sono circa il 35% del totale

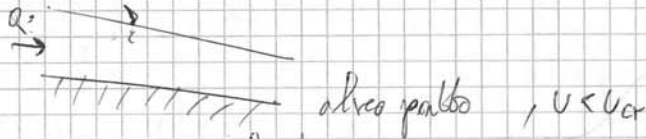
$$P \cdot N = \frac{P \cdot U_s}{K_1 \cdot d^2} \rightarrow Q_s = K_3 d^3 (P N) \rightarrow Q_s = K_3 d^3 \frac{P U_s}{K_1 d^2}$$

adimensionalizzato

$$\frac{q_s}{U_s d} = K_0 P \frac{U_s}{U_x}$$

ci serve solo \bar{U}_s

Le Microforme sono quelle sul fondo



Quando $u \uparrow$ il fondo inizia ad avere delle piccole ondulazioni (ripples)

Se cresce ancora si formano ondulazioni ancora più lunghe (DUNE) $\lambda_{DUNE} \approx 2.5 - 3.5 d_{50}$

Se cresce ancora e $F_r \rightarrow 1$ le dune tendono a scomparire

Se $F_r > 1$ si formano nuove forme (ANTIDUNE) (solo in acqua)

Se $F_r \uparrow$ ancora \rightarrow ANTIDUNE con vischi sulla superficie

per $d_{50} \approx 5 \text{ mm}$

vedo bene appunti p. 75

12 Dicembre 2017

- miscelata di nardo -

Particella solida in sospensione ρ_{ss}

- Reynolds (barico)

- von Rign

- Einstein, formula

$$(\tau_{ov})_{ss} = 0,025 \left(\frac{u_s^2}{g \Delta d_{50}} \right)$$

Con che legge decresce la ρ_{ss} ?
 istante per istante \rightarrow velocità istantanea delle particelle \rightarrow nelle br di τ_{ov}

$$\frac{\partial \tilde{c}}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{c} \tilde{u}_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{c} \tilde{u}_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\tilde{c} \tilde{u}_z)}{\partial z} = 0$$

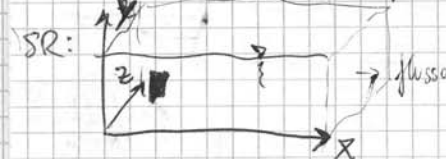
come part. solido $c = \frac{v_s}{v_s + v_{H_2O}}$

secondo la conservazione

parto dall'eq della diffusione + conservazione $D \left[\frac{\partial c}{\partial x} + \dots \right]$ è bilanciabile risp alla conservazione velocità di sedimentazione

La u_s è la stessa del fluido? Dipende, ma noi assumiamo di sì \rightarrow

$$\begin{cases} \tilde{u}_{sx} = \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_{sy} = \tilde{u}_y - w_s \\ \tilde{u}_{sz} = \tilde{u}_z \end{cases}$$



(65)

Non guardiamo la stessa cosa ma usando $\langle U, C \rangle$, dobbiamo trovare $(E_s)_y$, che moltiplicando per un fattore correttivo β_E il termine E_y della sosp. solida

$$(E_s)_y = \beta_E E_y$$

Sostituisco nell'eq:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial U C}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left[W_{SC} - \beta_E E_y \frac{dC}{dy} \right] = 0$$

ora ho tutta scelta nelle variabili medie

Se suppongo di essere in moto permanente $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, se guardo il moto uniforme allora $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ quindi

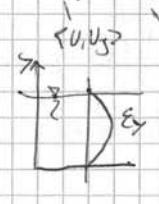
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[W_{SC} - \beta_E E_y \frac{dC}{dy} \right] = 0$$

$$W_S - \beta_E E_y \frac{dC}{dy} = \text{cost} \leftarrow = 0 \text{ dato che in generale le particelle che escono sono pari a quelle che entrano}$$

Se la $E_y = \text{cost}$ vuol dire che la turbolenza lungo y è costante. (un' approssimazione) che però farebbe $\rightarrow \frac{C}{C_0} = e^{-\left[\frac{W_S}{E_y} (y-a) \right]}$ dove $C_0 = C(y=a)$

L'andamento è  effettivamente vedo che è decrescente

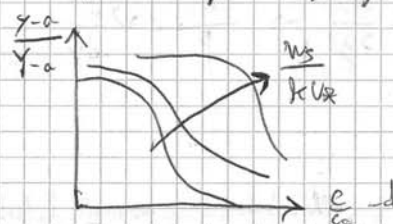
Se (piuttosto) $\beta_E = 1$ vuol dire che $E_y \approx E_s$. Ricordo i rapporti sulla E_s .

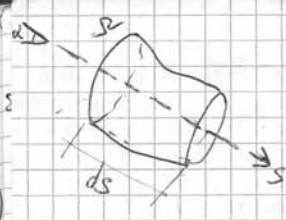
e vedo che $E_y = K U_{*y} \left[1 - \frac{y}{Y} \right]$  $\langle U, U_s \rangle$ $\langle U, C \rangle$

cost. di $\approx 0,4$

Se sostituisco bene

$$\frac{C}{C_0} = \left(\frac{Y-y}{Y} \right)^{\frac{a}{Y-a}} \frac{W_S}{K U_*}$$

e vedo che i profili sono 




$$\vec{F} = m \vec{A} \Rightarrow A_s = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s}$$

$$dm = \rho \cdot r \cdot ds$$

$$\vec{F}_s = \rho g r ds - \tau_0 ds = \rho r ds \frac{\partial z}{\partial s}$$

forze superficie
 sulle due r

$$p r - \left(p r + \frac{\partial p r}{\partial s} ds \right) = - \frac{\partial p r}{\partial s} ds$$

sul contorno laterale


$$p \frac{\partial r}{\partial s} ds$$

$$\tau_0 p ds$$

Sommiamo:

$$- \rho g r \frac{\partial z}{\partial s} ds - \frac{\partial p r}{\partial s} ds + p \frac{\partial r}{\partial s} ds - \tau_0 p ds = m \vec{A} \Rightarrow$$

$$- \rho \frac{\partial p}{\partial s} ds - p \frac{\partial r}{\partial s} ds$$

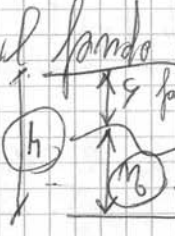
$$- \rho g r ds \frac{\partial z}{\partial s} - r \frac{\partial p}{\partial s} - \tau_0 p ds = \rho r ds \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial s} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\tau_0}{r} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\tau_0}{r} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\tau_0}{r} = 0$$

No due incognite $\{s, t\} \parallel \{y, U\} \rightarrow$ servono 2 eq: quello di continuità

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

Eq di de Saint Venant
 Posso tenere conto del fatto che il fondo si muove? In pratica il fondo era fisso ($z_0 = \text{cost}$). Ora


$$Y = h - m_0 \Rightarrow h = Y + m_0 \Rightarrow m_0 = \frac{\partial z_0}{\partial s}$$

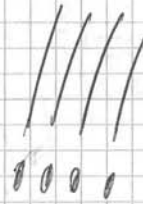
Quindi le eq. diventano:

$$\begin{cases} \text{eq. continuità} \rightarrow \text{uguale} \\ \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\tau_0}{r} = -J \end{cases} \Rightarrow J = \frac{Q^2}{r^2 z^2 Q}$$

Le equazioni che ci servono quindi sono:

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{\Omega} \right) + g \Omega \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Q^2 g}{\Omega^2 \Omega} = 0 & \text{(I)} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0 & \star \\ \frac{\partial Q_s}{\partial x} + \frac{\partial m_b}{\partial t} b g (1-m) = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

eq. della continuità

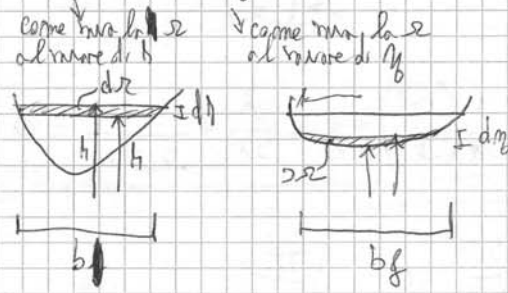


L'eq di continuità va usata in maniera leggermente diversa, perché

$$\Omega = \Omega(x, m_b(x, t), h(x, t))$$

cambiar il fondo
cambiar il livello

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial m_b} \frac{\partial m_b}{\partial t}$$



$$\star \quad b \frac{\partial h}{\partial t} - b g \frac{\partial m_b}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{(II)}$$

Come ricavare la portata solida in ingresso?

Ripartendo sul $\phi = f(\sigma', \sigma_{cr})$

$$\phi = \frac{q_s}{\sqrt{g s d} \cdot d} \quad ; \quad \sigma = \frac{\tau_0}{(\gamma_s - \gamma) d}$$

$\downarrow = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$

Relazioni di Meyer-Peter e Mellor

$$\phi = 8 (\sigma' - \sigma_{cr}) \quad \rightarrow \quad q_s = \sqrt{g s d} \cdot d \cdot 8 (\sigma' - \sigma_{cr})^{3/2}$$

$$Q_s = b g \cdot q_s$$

è la relazione di chiusura che ci dà la portata solida.

Secondo questo modello (1D) la larghezza b non cambia. Se cambiasse avrei un'eq in più che spiega come cambia la larghezza (2D).

19 Dicembre 2017

Una che abbiamo trovato le equazioni, ci chiediamo se esiste un caso $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$? e anche uniforme?

$\frac{\partial z}{\partial t} = 0$) Moto permanente I)

eq. Exner $\frac{dq_s}{dx} = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}(q_s b f) = 0 \rightarrow q_s \cdot b f = \text{cost} \quad (1)$

eq. continuità $\frac{dQ}{dx} = 0 \rightarrow Q = \text{cost} \quad (2)$ la portata diventa un invariante

eq. qte di moto $\frac{dh}{dx} g + \frac{Q^2}{\omega^2 x^2} + \frac{Q^2}{\omega^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$

Se assumiamo un alveo cilindrico II) $b f = \text{cost}$

$\rightarrow q_s = \text{cost}$ la portata solida per unità di lunghezza è costante

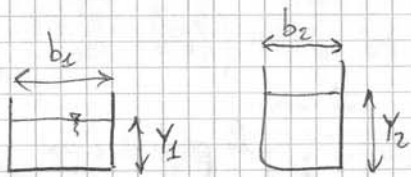
$q_s = f(\theta, \theta_{cr}) \rightarrow \theta = \text{cost} \rightarrow \frac{\tau_0}{(\theta_s - \theta) d} = \text{cost} \rightarrow \tau_0 = \text{cost} \rightarrow$

$\rightarrow \tau_0 = \gamma R_j = \text{cost} \rightarrow \gamma \frac{Q^2}{\omega^2 x^2} = \text{cost} \rightarrow \frac{\gamma Q^2}{\omega^2 x^2} = \text{cost} \rightarrow Y = \text{cost}$

molte

$\rightarrow \tau_0 = \gamma R_j \rightarrow \underline{j = \text{cost}}$

Quindi può esistere un moto uniforme anche su un letto erodibile



esistono più possibilità di moto uniforme

Come sono correlate b e Y ? Cioè, se allargo un fondo stretto (da b_2 a b_1) come reagisce il fiume?

Sì Y...

\rightarrow Nelle alluvioni bisogna sbrinare il fiume anziché allargarlo

Impango: $Q_{s1} = Q_{s2} \quad e \quad Q_1 = Q_2$ (ma occorre perché non considero le forme di fondo)

$b_1 q_{s1} = q_{s2} \cdot b_2$

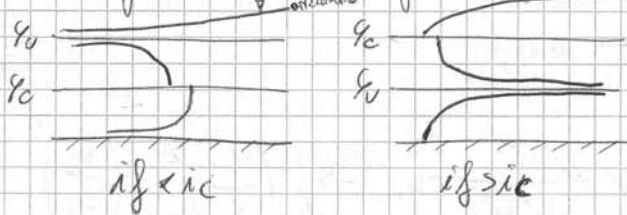
$q_s = 2(\theta - \theta_{cr})^{3/2}$

Se assumo un trasporto solido molto significativo $\theta \gg \theta_{cr}$

$q_s \propto \theta^{3/2}$

(73)

Ci sono poi i casi di moto permanente non uniforme $\frac{\partial}{\partial t} = 0$



$$q_s = 8(\sigma - \sigma_{cr})^{\frac{3}{2}}; \hat{\sigma}_{cr} = \sigma_{cr} \left[1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx} \right]$$

↑ correzione della σ_{cr} per l'effetto della pendenza

per il moto permanente

$$q_s = 8 \left(\sigma - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx} \right) \right)^{\frac{3}{2}} = \text{cost} \rightarrow \sigma - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx} \right) = \text{cost}$$

Il moto uniforme è caratterizzato da $q_s = \text{cost}$ e $\frac{dm_b}{dx} = 0$

in moto unif

$$\rightarrow = \sigma_u - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} i g \right)$$

$$\sigma - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} \frac{dm_b}{dx} \right) = \sigma_u - \sigma_{cr} \left(1 + \frac{1}{u} i g \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{dm_b}{dx} = \frac{u}{\sigma_{cr}} (\sigma - \sigma_u) i g \rightarrow \frac{dm_b}{dx} = \frac{u \sigma_{cr}}{\sigma_{cr}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_u} - 1 \right) i g$$

dato che $\sigma = \frac{\rho g}{(\gamma_s - \gamma) d} = \frac{\gamma R S}{(\gamma_s - \gamma) d} = \frac{\gamma R \frac{Q^2}{\sigma_{cr}^2 R^3}}{(\gamma_s - \gamma) d} \rightarrow \sigma \propto \left(\frac{1}{Y} \right)^2$

Quindi $\frac{\sigma}{\sigma_u} \propto \left(\frac{Y_u}{Y} \right)^2$

sostituendo

$$\rightarrow \frac{dm_b}{dx} = \frac{u \sigma_u}{\sigma_{cr}} \left[\left(\frac{Y_u}{Y} \right)^2 - 1 \right] i g$$

è il fattore di correzione alla pendenza $i g$ per quanto mi discosta dal moto uniforme

Se $Y > Y_u \rightarrow \frac{Y_u}{Y} < 1 \rightarrow [] < 0 \rightarrow \frac{dm_b}{dx} < -i g$ la pendenza aumenta

Se $Y < Y_u \rightarrow \frac{Y_u}{Y} > 1 \rightarrow [] > 0 \rightarrow \frac{dm_b}{dx} > -i g$ la pendenza diminuisce

9 febbraio 2018²

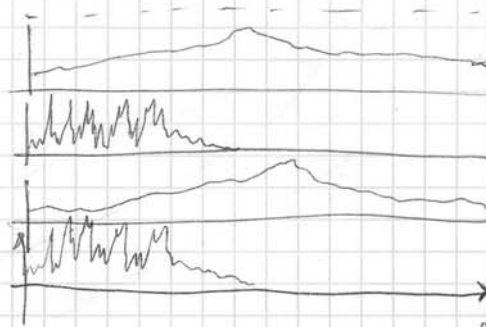
Lago, ossia Fluidi Stratificali

Si riparte una tavola con molti dati (due immagini caricate sul portale)

da un lago in autunno

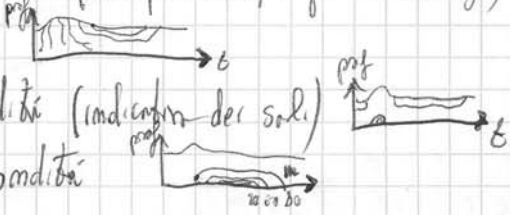
lago - - - - - lago

- 1) Mesi dell'anno
- 2) Dati del vento
- 3) Dati sulla Radiazione Solare
- 4) Pioggia in ingresso
- 5) Temperatura dell'acqua in ingresso
- 6) [] di sali dell'acqua in ingresso



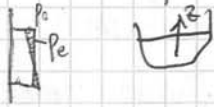
segue l'immagrinamento
 con un tipo di dati all
 (meteo termica
 siamo in corso delle
 piogge → viene smossa
 l'acqua è presente per
 acquiferi vicini di S-R (effetto
 pistone per il carico pressurizzato)

- 7) Profondità media del lago → aumenta con le piogge (costa poco l'acqua piovuta sul lago)
- 8) Iso termie dell'acqua alle diverse profondità
- 9) [] di cloruro di sodio alle diverse profondità (indicim dei sali)
- 10) % di ossigeno disciolto alle diverse profondità



In inverno il lago è pressoché omogeneo (T, [] sali, % Ossigeno)
 → c'è qualcosa che miscela e uniformizza il tutto → l'aria è fredda,
 pesa di più dell'acqua calda, sprofonda e si formano grosse celle convettive
 che spostano acqua calda dal fondo alla superficie e acqua fredda dalla superficie
 al fondo. che interessano tutto il lago. Tutto il lago è circa a 15°
 (dip. dalla T esterne). → lago è molto ricco di ossigeno per il rimescolamento
 e i sali sono distribuiti. Ma ci sono piogge → acqua immiscibile e
 ricca di sali (più pesante) e più fredda (+ pesante) e si accumula e si
 posa sul fondo. In tali condizioni riescono comunque a rimescolare i sali

1) La densità ρ cambia con la profondità della stratificazione $\rho = \rho_0 + \rho_e(z)$
 e con base delle equazioni variazioni (forme, inegalit...



La variazione della densità si indica $\epsilon = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_e}{dz}$
 diminuisce al crescere di z
 → cal - termo positivo

a) Supponendo un fluido in quiete $\epsilon = 0$ la sferetta è in equilibrio
 tra la forza peso e la spinta di Archimede $\rho = \rho_0$ (stato per fluidi)
 $\downarrow = \uparrow = 0$ quiete

Se la sposta lentamente senza creare movimenti la situazione non cambia.
 $p(z) = \rho_0 g (H - z)$

Se suppongo di avere una velocità u che muove le particelle quando queste hanno a sbattere (cambiano una parete, altre particelle), quello che avviene è la pressione $\frac{u^2}{2g} = \frac{p}{\rho} \rightarrow p \propto \rho u^2$. In dabo che la sup libera ha $p=0$ si alza il livello creando un intormentimento.

È il motivo per cui le onde sono più alte vicino al molo.
 Una studiando la massa fluida le pressioni che si generano così quando cambiano rispetto a quelle che già esistono sempre? $\frac{\rho_0 u^2}{\rho_0 g H} \rightarrow \frac{u^2}{g H} \rightarrow Fr = \frac{u}{\sqrt{g H}}$

Un nuovo significato del numero di Froude.
 Se $Fr \ll 1$ è trascurabile sull'intera massa fluida, se $Fr \geq 1$ allora le pressioni che si generano così sono pari o addirittura più importanti della pressione idrostatica preesistente.

b) Se $\epsilon \neq 0$ c'è una differenza di massa tra le particelle inferiori e superiori $\rho > \rho_0$ la diff di massa è $\epsilon \rho_0 z \rho$

Se ho una spinta il fluido reagisce in maniera diversa a seconda della sua massa, come tante sfere legate di dimensioni diverse (79)

$$F_i = \frac{N^{-1}}{H/U}$$
 - scala tipica di come riesce la massa di fluido per il fatto che è stratificato
 è il N° di Froude INTERNO
 - scala tipica dei temp. del problema

Se $F_i \gg 1$ la stratificazione è molto più ampia del fenomeno che sto osservando \rightarrow trascurabile per il fenomeno

Se $F_i \leq 1$ allora bisogna tenerne conto perché l'oscillazione sembra dentro il problema.

Come si esaurisce? \rightarrow per la viscosità ν (Nei fluidi senza viscosità durano quasi per sempre (simon per plasma e em. elettrodin.)

Dopo quanto si esaurisce? $\frac{H}{\nu}$ circa
 la scala temporale tipica della dissipazione è $\frac{H^2}{\nu} \rightarrow b_r$
 N° di bratschoff

$$b_r = \frac{N^2 H^4}{\nu^2}$$

Se $b_r \gg 1$ allora vedere tutte le onde

Se $b_r \ll 1$ l'onda si smorza prima di un suo periodo (quasi statica)

Per le masse d'acqua estese (lago maggiore in sc) occorre ricordare che nota anche per la rotazione barotropica

$$\Omega = \Omega_0 \cdot \sin \alpha$$
 velocità di rotazione del lago su se stesso

$$\approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$
 latitudine
 scala tipica di rotaz

Posso vedere il rapporto tra $\frac{\Omega^{-1}}{L/U} = Ro$ N° di Rossby
 - scala temp. tip. del problema
 se $Ro \gg 1$ lago in movimento
 se $Ro \leq 1$ me devo tenere conto per le acc. che moscano da queste rotazioni