



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2298A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Zarrelli Mattia

MATERIA: Meccanica Applicata - Prof. Velardocchia

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CAPITOLO 2

DINAMICA

- Seconda legge di Newton
- Conservazione dell'energia
- Teorema quantità di moto
- Teorema momento q. di moto

} Da utilizzare

Diagramma di corpo libero \Rightarrow isolamento del sistema
 soppressione dei vincoli
 rappresentazione delle azioni

Vettore forza = mobile lungo la retta d'azione per corpi rigidi
 • Principio di Trasmissibilità

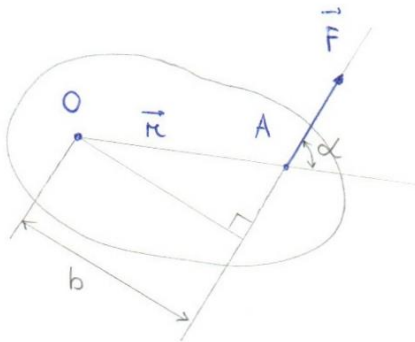
Momento di una forza

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} =$$

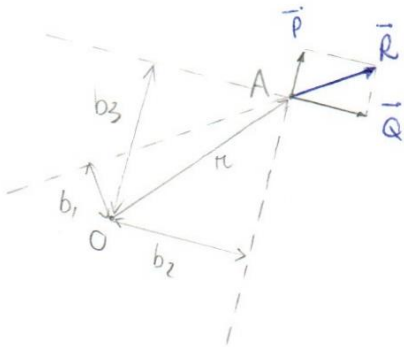
$$= r F \cdot \sin \alpha \cdot \vec{k}$$

$$= b \cdot F \cdot \vec{k}$$

direzione k
 perpendicolare al foglio



Scomposizione momento



$$M_o = R \cdot b_1 = Q \cdot b_3 - P \cdot b_2$$

Forma vettoriale

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{R}$$

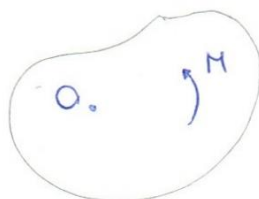
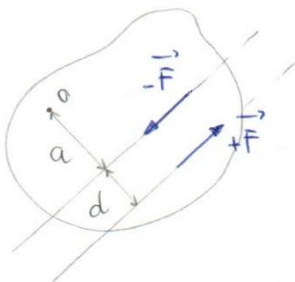
$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$$

$$\vec{M}_o = \vec{r} \wedge \vec{P} + \vec{r} \wedge \vec{Q}$$

Coppia di forze

Forze uguali, opposte, non allineate
 Risultante delle forze = 0

$$\text{coppia} = M = F(a+d) - F/a = \boxed{F \cdot d}$$



M = vettore libero

- + direzione (\perp piano delle F)
- + verso (mano destra)
- + no retta d'azione
- + modulo

Energia cinetica

- energia cinetica particella

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

- energia " corpo

$$E_c = \frac{1}{2} m v_G^2$$

$$[I_G = \text{momento inerzia} \\ \text{baricentrico}]$$

3

- energia cinetica corpo in rotazione intorno al baricentro

$$E_c = \frac{1}{2} I_G \omega^2$$

- " " " " " " a punto
+ dal baricentro

$$E_c = \frac{1}{2} (m v_G^2 + I_G \omega^2)$$

Energia potenziale elastica

$$E_e = \int_0^x kx dx = \frac{1}{2} kx^2$$

segno ⊕

Energia potenziale gravitazionale

$$E_g = mgh$$

segno ⊕

Conservazione dell'energia

$$dL_e + dL_i = dE_c + dE_g + dE_e$$

$$L_e + L_i = \Delta E_c + \Delta E_g + \Delta E_e$$

dipendenza da percorso indipendenza da percorso

Potenza = capacità di una macchina di compiere lavoro o di trasportare energia in un certo tempo.

$$P = \frac{dL}{dt} = F_T \cdot \frac{ds}{dt} = F_T \cdot v$$

sviluppata da forza

$$P = \frac{dL}{dt} = M \frac{d\theta}{dt} = M \cdot \omega$$

sviluppata da coppia

Rendimento = Rapporto tra potenza utile e potenza entrante (< 1)

$$\eta = \frac{P_u}{P_e}$$

Impulso lineare e quantità di moto

$$\sum \vec{F}_e = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Q = quantità di moto

Conservazione q. di moto

$\Delta Q = 0$ in assenza di impulso esterno

Conservazione momento angolare

$\Delta k_0 = \Delta k_G = 0$ in assenza di impulso angolare

Urto elastico

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{1d} + m_2 v_{2d}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1d}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2d}^2$$

Urto anelastico

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_d$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} [(m_1 + m_2) v_d^2] - \left[\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right]$$

CAPITOLO 3

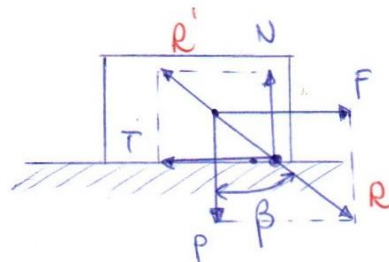
ATTRITO

- 3 Tipi di attrito :
- (1) Attrito secco (superfici non lubrificate)
 - (2) Attrito fluido (con velo lubrificante)
 - (3) Attrito interno dei materiali

Attrito secco → Tiratura : forza tangenziale d'attrito è proporzionale alla forza normale di contatto e non dipende dall'estensione dell'area interessata

Attrito statico

R' = reazione del terreno allo spostamento relativo.

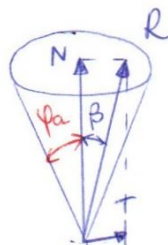


Condizione limite = condizione oltre la quale inizia movimento

$$F_{lim} = T_{lim} = N \cdot \text{Tg } \beta_{lim} = f_a \cdot N$$

β raggiunge un valore limite $\Rightarrow \beta_{lim} = \text{arctg}(f_a) = \phi_a$

Cono di aderenza

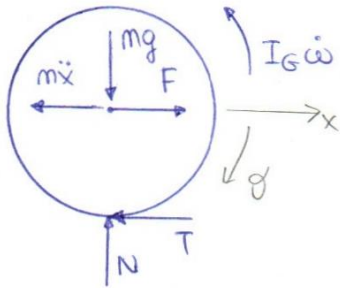


Affinchè sia statico β deve essere minore di ϕ_a cioè R deve rimanere dentro il cono di aderenza.
 $\rightarrow \phi_a = \text{angolo di semiapertura del cono}$

2) Ruota trascinata di un veicolo

7

Non c'è più azione della coppia motrice, ma forza F nel baricentro.

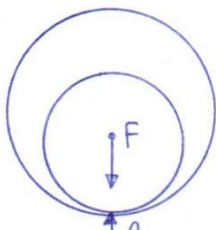


$$\begin{aligned} \curvearrowright - I_G \cdot \dot{\omega} + T \cdot r &= 0 \\ \rightarrow F - m \ddot{x} - T &= 0 \\ \uparrow N - mg &= 0 \\ \ddot{x} &= r \dot{\omega} \end{aligned}$$

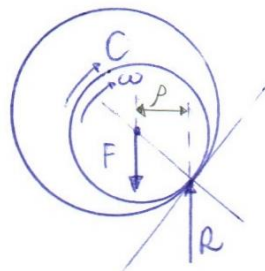
Valgono le stesse considerazioni fatte per la ruota motrice.

3) Perno ad attrito secco

caratteristico accoppiamento perno-boccola



Non c'è moto
 R, F con stessa retta d'azione.



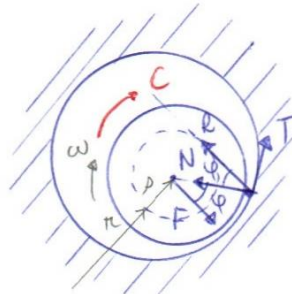
Rotazione del perno con $\omega = \text{cost}$ necessita applicazione di una coppia C costante al perno.
 $\rightarrow R$ dovrà formare con F una coppia resistente spostandosi verso dx di una quantità ψ

equilibrio momenti

$$C = R \cdot \rho = F \cdot \rho$$

equilibrio che vale anche per tutte le altre possibili direzioni di F

R così sarà sempre tangente a un cerchio di attrito di raggio ρ concentrico con il perno di raggio r



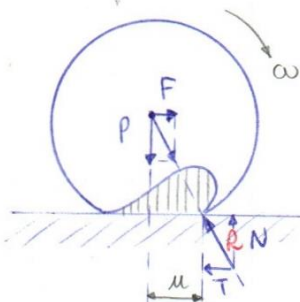
$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$$

$\psi =$ angolo di attrito tra R e N

$$\rho = r \cdot \sin \psi$$

Attrito volvente

Resistenza al rotolamento che dipende dalle piccole deformazioni non perfettamente elastiche dei due corpi a contatto.
Pressioni di contatto sbilanciate in avanti nella direzione del moto.
Reazione R inclinata e non applicata sulla generatrice ideale di contatto che applica opposizione al moto.



$\mu =$ parametro di attrito volvente

$$f_v = \frac{\mu}{r} = \text{coefficiente attrito volvente}$$

$P =$ peso del rullo
 \hookrightarrow forza necessaria per avanzamento

$$F = f_v \cdot P$$

Dall'ipotesi dell'usura dovremo poi determinare azione frenante o momento trasmesso. 9

FRENI

Importanti elementi sono $\begin{cases} \text{Forma delle superfici} \\ \text{Tipo di accostamento} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{accostamento rigido} \\ \text{accostamento libero} \end{cases}$

(1) Freni a pattino piano

(1A) Pattini ad accostamento rigido

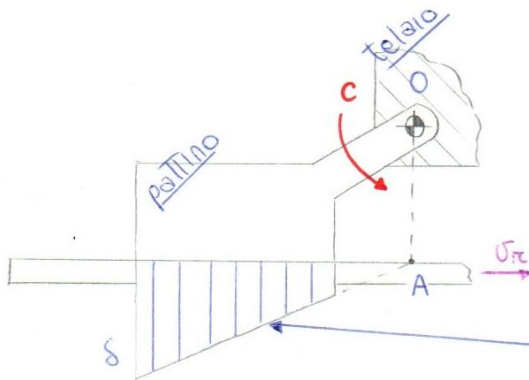
Determinare coppia frenante rispetto a coppia di azionamento (scomposta in moto verticale e orizzontale)

ipotesi di usura: $dV = \delta dA = k' \int p dA v_{rel}$

$\delta = k' \cdot \int p \cdot v_{rel}$ $f, v_{rel}, k' = \text{costanti}$

$p = k \cdot \delta \rightarrow$ pressione direttamente proporzionale allo spessore consumato δ che è proporzionale alla distanza da A =

$p = k \cdot x$
 $\delta = k \cdot x$



Andamento qualitativo di p e δ con generale forma trapezoidale

Calcolare risultante forze normali N e determinare punto di applicazione con ascissa x_0 che coincide con baricentro del diagramma delle pressioni.

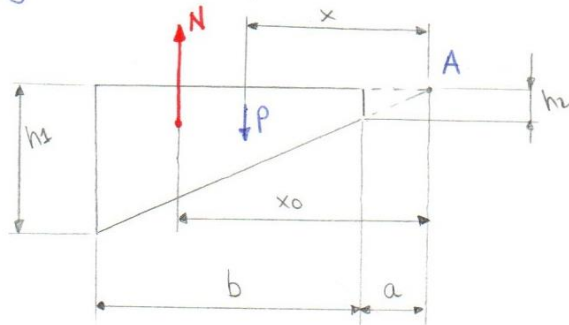
pattino larghezza = 1

$dA = dx \cdot 1 = dx$

$dN = p dA = p \cdot dx = kx \cdot dx$

[x = distanza generica da punto A]

$N = \int_a^{a+b} kx dx = \frac{k}{2} [(a+b)^2 - a^2]$



I momenti generati da N e p intorno ad A dovranno equilibrarsi:

$Nx_0 = \int_a^{a+b} p dx \cdot x = \int_a^{a+b} kx \cdot x \cdot dx = k \int_a^{a+b} x^2 dx = \frac{k}{3} [(a+b)^3 - a^3]$

$x_0 = \frac{k/3 [(a+b)^3 - a^3]}{k/2 [(a+b)^2 - a^2]} = \frac{2 [(a+b)^3 - a^3]}{3 [(a+b)^2 - a^2]} = \text{posizione di N}$

Nella zona di contatto ci sarà analogia distribuzione delle forze Tangenziali, dirette perpendicolarmente a p e proporzionali a N. $\rightarrow T = \mu N$

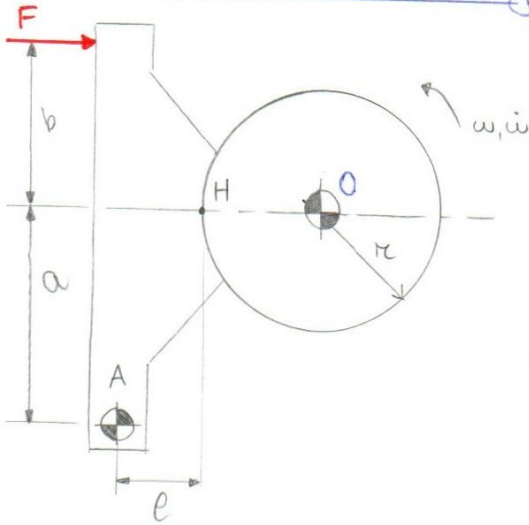
\rightarrow Risultante inclinata di φ rispetto alla normale della superficie con stesso punto di applicazione di N

(2) Freni a ceppi (Tamburo)

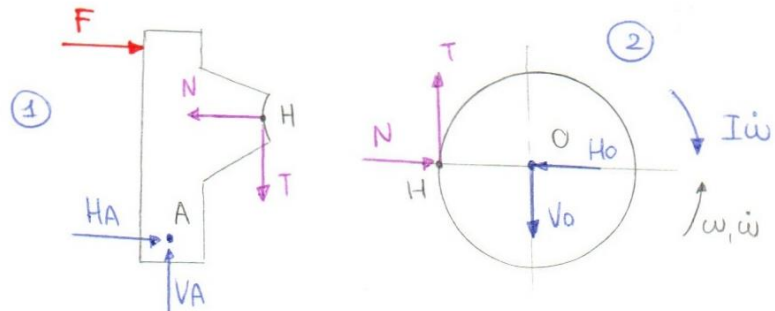
11

una o due ganasce (ceppi) poste all'interno o all'esterno dell'elemento frenante detto Tamburo.

(2A) Ceppi ad accostamento rigido



Rotazione rigida intorno ad A con 2 gdl
 Determinare forza scambiata: adottiamo l'ipotesi che la risultante delle forze elementari scambiate è concentrata nel punto medio della zona di contatto
 → distribuzione uniforme delle pressioni



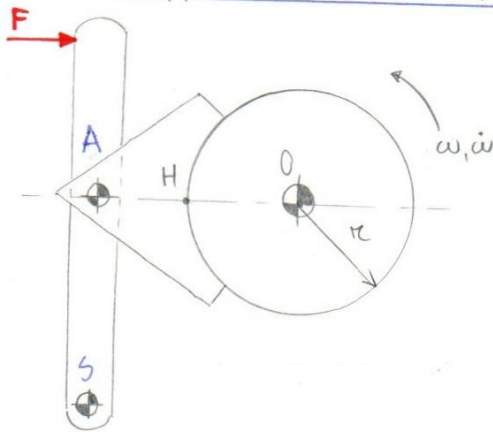
①
$$\begin{cases} T = V_0 \\ N = H_0 \\ I\ddot{\omega} + Tr\epsilon = 0 \end{cases}$$
 momento frenante

②
$$\begin{cases} T = V_A \\ N = F + H_A \\ Nb - Tl - Fh = 0 \end{cases}$$

Infine devo controllare che il freno non si sbricioli e che rispetti determinati limiti:

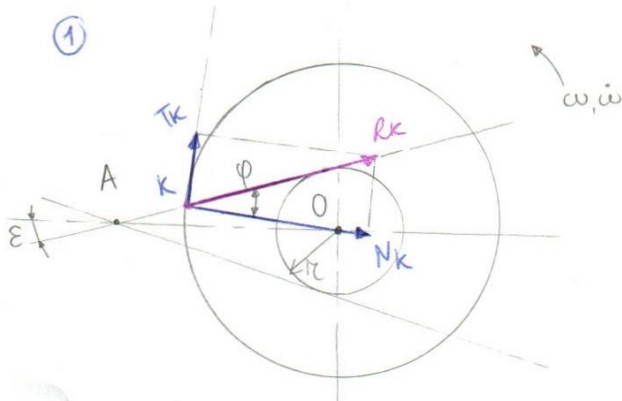
$$p = \frac{N}{A} < 10 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$$

(2B) Ceppi ad accostamento libero



Somma di rotazione intorno a S e A con 2 gdl.
 Non applicabile l'ipotesi precedente. A priori è ignota la retta d'azione.
 Come fatto in precedenza consideriamo il Tamburo come un perno e il ceppo come una boccia e utilizziamo il cerchio d'attito.

- raggio attito = $p = r \sin \varphi$
- Forza scambiata passa per A (cerniera)
- Forza applicata al Tamburo tangente al cerchio d'attito in modo da opporsi al moto



$$\begin{cases} p = r \sin \varphi \\ \varphi = \text{tg} \varphi \end{cases}$$

→ Tutte le grandezze costanti sono inglobate in k poiché assumono il medesimo valore su tutta la superficie di contatto allo stesso istante.

La forza normale N complessiva sarà uguale a F di aumento di conseguenza scriviamo:

$$N = \int_A p dA = \int_A \cancel{k} \cdot \cancel{d}r d\vartheta = k \int_{r_i}^{r_e} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} dr d\vartheta = \boxed{k (r_e - r_i) (\vartheta_2 - \vartheta_1) = F}$$

Troviamo ora la coppia (o momento) frenante

$$C = \int_A dT \cdot r = \int_A \int p dN \cdot r = \int_A \int p dA \cdot r = \int_A \int \cancel{k} \cdot \cancel{d}r d\vartheta \cdot r =$$

$$= \int_{r_i}^{r_e} \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} k r dr d\vartheta = \boxed{\int k \cdot \left(\frac{r_e^2 - r_i^2}{2} \right) (\vartheta_2 - \vartheta_1)}$$

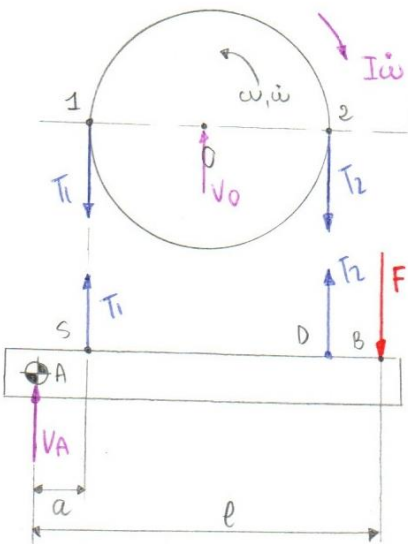
$$C = \int k \cdot \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right) (r_e - r_i) (\vartheta_2 - \vartheta_1) =$$

$$= \int k \cdot F \cdot \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right) = \boxed{\int F \cdot r_{cm}} \leftarrow \text{moltiplicato per le "n" superfici di contatto}$$

(4) Freni a nastro

Elemento frenato è Tamburo su cui viene premuto nastro con grande coefficiente μ .

Dobbiamo considerare $T_2 > T_1$ per poter frenare



$$I \dot{\omega} + (T_2 - T_1) r = 0$$

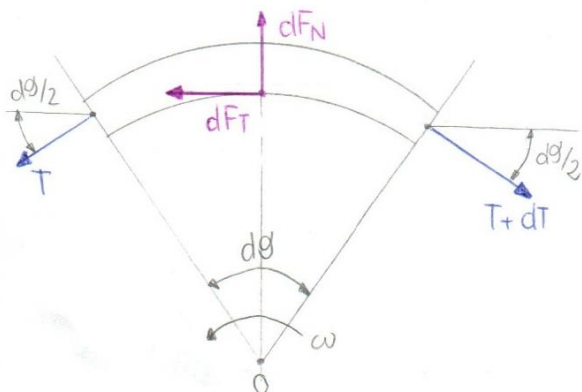
$$\dot{\omega} = \frac{(T_1 - T_2) r}{I}$$

$$\begin{cases} V_A + T_1 + T_2 = F \\ F \cdot l = T_1 \cdot a + T_2 \cdot (a + 2r) \end{cases}$$

Non posso risolvere con le sole equazioni di equilibrio. Devo considerare una singola e generica zona di contatto.

Denominiamo ϑ^* = angolo di avvolgimento nella zona di contatto tra nastro e tamburo.

→ consideriamo dS di nastro sotteso da $d\vartheta$



$$\rightarrow (T + dT) \cos \frac{d\vartheta}{2} - T \cos \frac{d\vartheta}{2} - dF_t = 0$$

$$(T + dT) \cos \frac{d\vartheta}{2} - T \cos \frac{d\vartheta}{2} = \int dF_n$$

$$1) T \left(\sin \frac{d\vartheta}{2} \right) + (T + dT) \sin \frac{d\vartheta}{2} = dF_n$$

CAPITOLU 5

TRASMISSIONE e TRASFORMAZIONE del MOTO

11) I GIUNTI

Componenti meccanici usati per collegare in modo continuativo due alberi tra i quali deve essere trasmesso un momento torcente.

- giunti rigidi → alberi coassiali
- giunti mobili → alberi incidenti / sghembi
- giunti elastici

giunti rigidi : precisione sulla coassialità.
 Uno dei due alberi deve essere libero assialmente

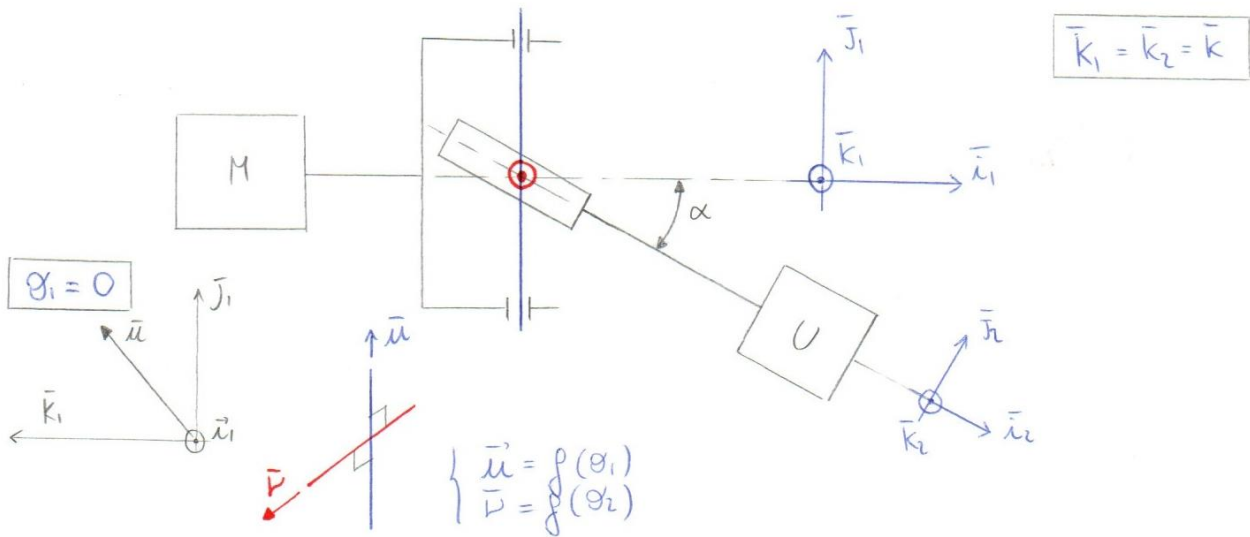
giunti mobili : consentono moto relativo con libertà assiale / radiale / angolare

GIUNTI UNIVERSALI (di Hooke / cardanico) Trasmettono moto rotatorio tra assi concorrenti il cui angolo può essere variato.

giunto omocinetico = le velocità dei due alberi sono istante per istante uguali

giunto costituito da 2 forcelle solidali al proprio albero e connesse tra loro da un elemento detto crociera.

→ giunto non omocinetico



Rapporto di Trasmissione

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\cos^2 \alpha + \text{Tg}^2 \theta_1}{1 + \text{Tg}^2 \theta_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

Valore max con $\theta_1 = 0^\circ, 180^\circ$

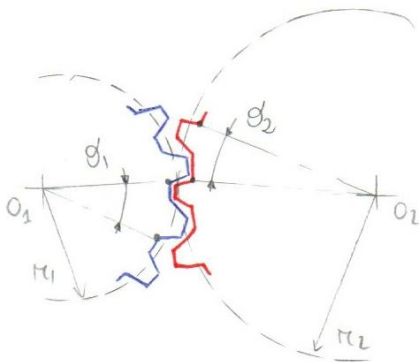
Ciò che normalmente si cerca di trasmettere è una potenza e definiamo di conseguenza un Rendimento attento a un calcolo a regime.

Importante regime e stato omocinetico!

$$\eta = \frac{C_2 \omega_2}{C_1 \omega_1}$$

(4) RUOTE DENTATE

Trasmettere il moto tra assi concorrenti / paralleli / sghembi. Due ruote che si scambiano azioni tramite i denti sono un ingranaggio. Importante è la costanza del rapporto di trasmissione.



linee tratteggiate = circonferenze primitive

numero di denti = z_1, z_2

$$\begin{cases} \theta_1 = 2\pi/z_1 \\ \theta_2 = 2\pi/z_2 \end{cases}$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1}$$

Se non c'è omocinetà definiscono almeno un valore medio (z_1 e z_2 sono elementi di costruzione)

Nel caso di i non omocinetico si presenterebbe una variazione di M_1 e M_2 con conseguente traslazione rigida del punto di contatto.

→ ciò che deve combaciare è il passo = la distanza tra due denti successivi

$$p = \pi \theta \begin{cases} p_1 = r_1 \theta_1 = r_1 \cdot \frac{2\pi}{z_1} \\ p_2 = r_2 \theta_2 = r_2 \cdot \frac{2\pi}{z_2} \end{cases}$$

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{z_2}{z_1} = \frac{i}{i} = 1$$

→ $p_2 = p_1$ Passi devono essere uguali

Ingranaggi cilindrici → a denti dritti = denti si sviluppano // all'asse della ruota
a denti elicoidali = denti si sviluppano in modo elicoidale all'asse della ruota

Ruote cilindriche a denti dritti

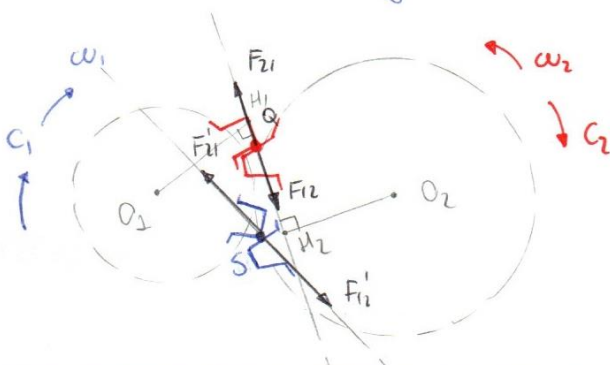
Circonferenze primitive = determinano il comportamento cinematico delle due ruote, sono ideali e si comportano come ruote di frizione.

Inoltre $\begin{cases} p z_1 = 2\pi r_1 \\ p z_2 = 2\pi r_2 \end{cases} \rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \rightarrow i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}$

$\begin{cases} i > 1 & \text{ingranaggio riduttore} \\ i < 1 & \text{ingranaggio moltiplicatore} \end{cases}$

$\begin{cases} i > 0 & \text{Ruote interne con verso concorde di rotazione} \\ i < 0 & \text{Ruote esterne con verso discorde di rotazione} \end{cases}$

• Poitilo a denti rettangolari

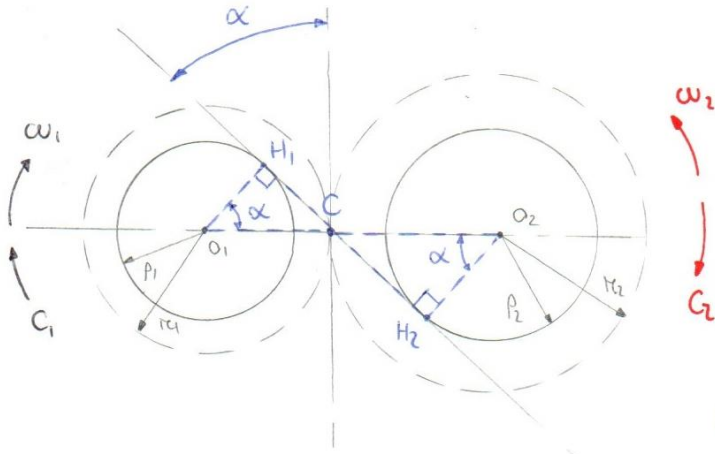


$\begin{cases} H_1 = \text{piede della } \perp \text{ condotta da } O_1 \\ H_2 = \text{piede " " " " da } O_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} C_1 = F_{21} \cdot \overline{O_1 H_1} \\ C_2 = F_{12} \cdot \overline{O_2 H_2} \end{cases} \rightarrow \frac{C_1}{C_2} = \frac{\overline{O_1 H_1}}{\overline{O_2 H_2}}$$

La Retta d'azione è sempre \perp alla superficie del dente. Procedendo cambia il punto di applicazione e anche la retta d'azione di conseguenza.

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\overline{O_1 H_1}}{\overline{O_2 H_2}}$$



Definiamo $\alpha =$ angolo di pressione 19
 come l'angolo tra il piano di azione
 e il piano tangente ai cilindri di base

Osserviamo 2 Triangoli rettangoli
 O_1H_1C e O_2H_2C rettangoli in H_1, H_2

$$\overline{O_1C} = r_1 = p_1 / \cos \alpha$$

$$\overline{O_2C} = r_2 = p_2 / \cos \alpha$$

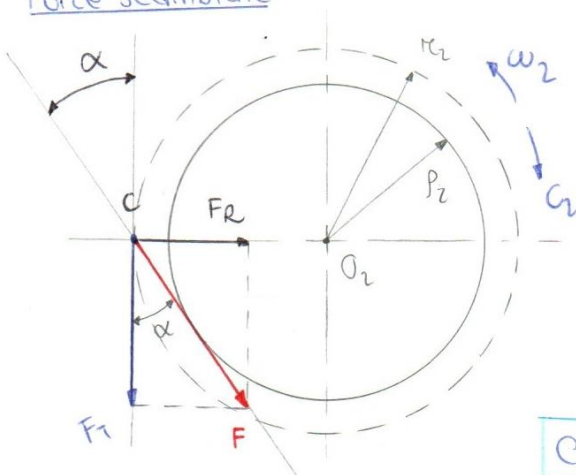
Sapendo che $i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$

$$\rightarrow i = \frac{r_2}{r_1} = \frac{p_2 \cancel{\cos \alpha}}{p_1 \cancel{\cos \alpha}} \rightarrow \boxed{i = \frac{p_2}{p_1}}$$

Il rapporto di Trasmissione trovato
 è sempre costante poiché non
 risente di eventuali variazioni
 dell'interasse (quindi di r_1 e r_2). Il rapporto è dato da p_2 e p_1 che restano
 definite all'atto della costruzione.

⇒ Retta d'azione sempre tangente a cerchi di base
 costanza del Rapporto di Trasmissione
 costanza tra coppie di ingresso e di uscita

Forze scambiate



Abbiamo due componenti rispetto
 alla forza scambiata lungo la retta
 d'azione. Una componente radiale F_R
 e una componente tangenziale F_T .

$$F_T = F \cos \alpha$$

$$F_R = F \sin \alpha$$

Conoscendo p_1 e p_2 che sono le distanze
 dal centro alla retta d'azione possiamo
 legare le forze alle coppie applicate.

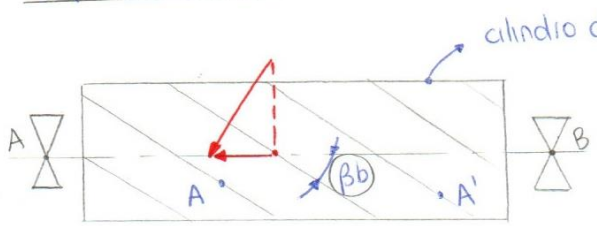
$$\boxed{C_1 = F_T \cdot p_1} = F \cdot \cos \alpha \cdot p_1 = \boxed{F \cdot p_1}$$

Il verso della componente radiale non cambia con il verso di rotazione poiché gli
 ingranaggi hanno la tendenza ad allontanarsi.

Ruote cilindriche a denti elicoidali

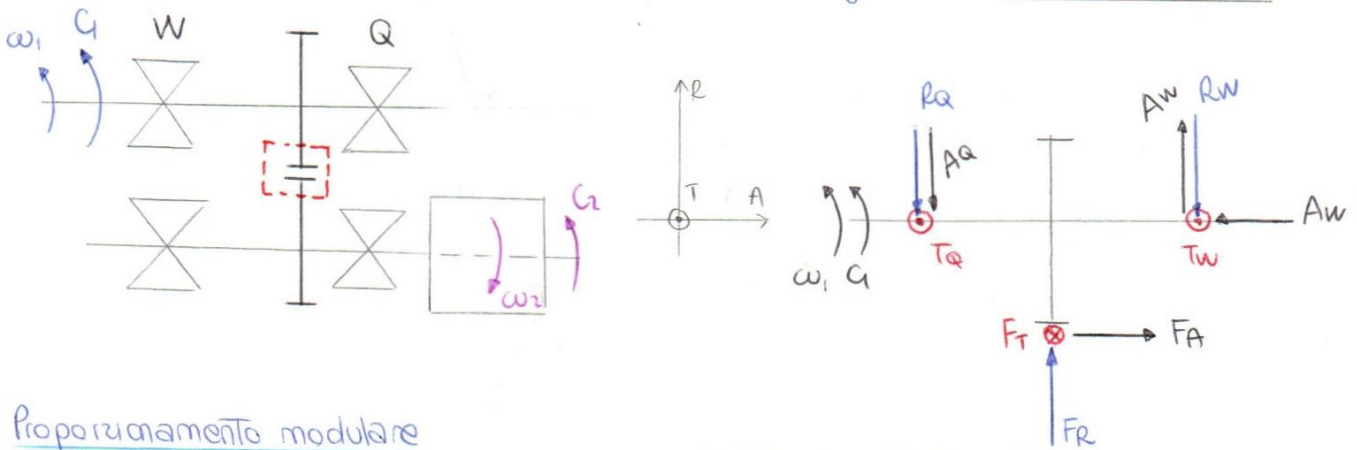
Permettono una trasmissione regolare e silenziosa, largamente impiegate.
 Retta giace su piano che rotola senza strisciare ma forma un angolo β_b con l'asse
 della ruota.

Sul piano frontale varranno di nuovo le considerazioni per le ruote a denti dritti



Reazioni vincolari sui supporti

coppia generata $A \cdot r_A = A_w \cdot \overline{wQ}$



Proporzionamento modulare

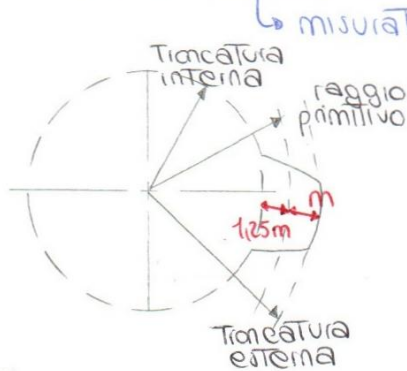
garantisce intercambiabilità delle ruote dentate, e' entiero costruttivo. Le dimensioni dei denti sono funzione del Modulo che e' legato al passo.

$$m = \frac{p}{\pi}$$

$$p = \frac{2\pi m}{z}$$

$$m = \frac{2\pi r}{z}$$

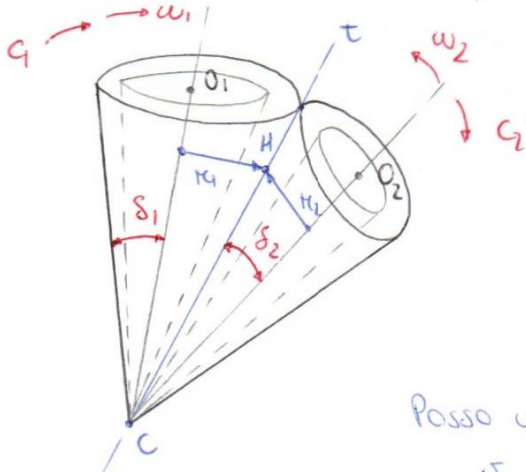
$$m = \frac{2r}{z}$$



- addendum = distanza tra cilindro primitivo e cilindro di Troncatura esterna = 1m
- dedendum = distanza tra cilindro primitivo e cilindro di Troncatura interna = 1,25m
- altezza complessiva dente = 2,25m

Ruote coniche a denti dritti

Trasmettere il moto tra assi complanari non paralleli. Superfici primitive coniche. Si hanno nuovamente 3 componenti della forza scambiata.



→ cono di base = —
conco primitivo = —

- I cono primitivi sono caratterizzati da angoli di semiapertura δ_1 e δ_2
- Consideriamo r_1 e r_2 dei raggi medi

$$\begin{cases} r_1 = \overline{CH} \cdot \text{sen } \delta_1 \\ r_2 = \overline{CH} \cdot \text{sen } \delta_2 \end{cases}$$

Posso uguagliare le velocità Tangenziali in H

$$v_{H1} = v_{H2} = v_H$$

→ $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$ sostituiamo i valori r_1 e r_2

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{CH} \text{ sen } \delta_2}{\overline{CH} \text{ sen } \delta_1}$$

$$i = \frac{\text{sen } \delta_2}{\text{sen } \delta_1}$$

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_6} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_2}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_4}{\omega_5} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} = \frac{\omega_1 \omega_3 \omega_5}{\omega_2 \omega_4 \omega_6}$$

sappiamo però esprimere i con il numero di denti z della ruota

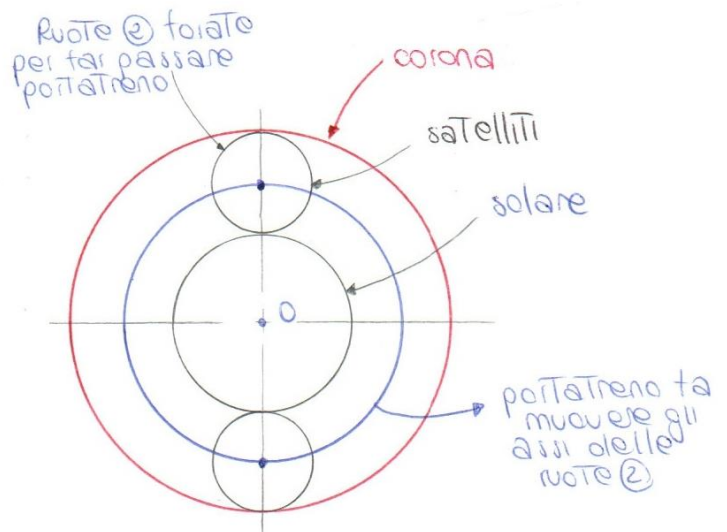
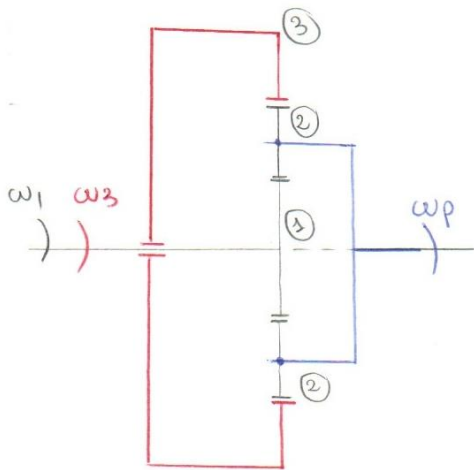
$$i = i_{12} \cdot i_{34} \cdot i_{56} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) = \frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5}$$

Rendimento globale del Rotismo

$$\eta_{16} = \frac{W_u}{W_e} = \frac{C_6 \omega_6}{C_1 \omega_1} \rightarrow C_6 = \eta_{16} \cdot C_1 \cdot i_{16}$$

Come in precedenza con i rapporti di trasmissione il rendimento globale è pari al prodotto dei rendimenti dei singoli ingranaggi. $\eta_{16} = \eta_{12} \cdot \eta_{34} \cdot \eta_{56}$

• Rotismo epicycloidale



Per determinare tutto il sistema che possiede 2 gdl dobbiamo considerare un sistema di riferimento solidale al portatreno. Dobbiamo immaginare il portatreno bloccato: in questo modo il rotismo risulta ordinario.

Calcoliamo un rapporto i_0 fittizio:

$$i_0 = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_2 - \Omega} \cdot \frac{\omega_2 - \Omega}{\omega_3 - \Omega} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{-z_3}{z_1}$$

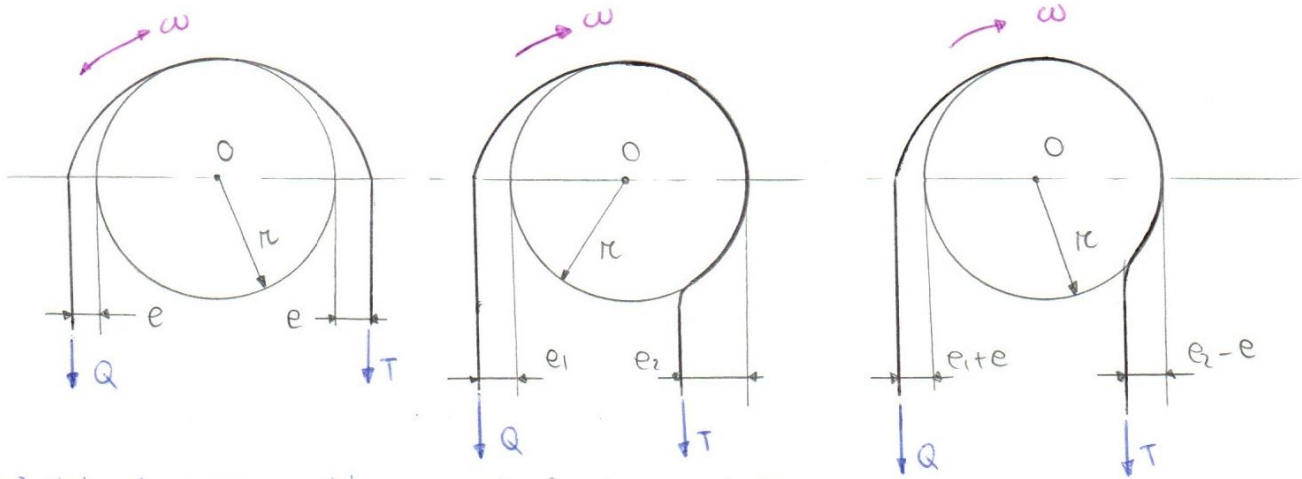
Analizziamo due casi:

$$i_0 = \frac{\omega_1 - \Omega}{\omega_3 - \Omega}$$

Case analysis:

- Case 1: $\omega_3 = 0 \rightarrow -\Omega i_0 = \omega_1 - \Omega \rightarrow \omega_1 = \Omega(1 - i_0)$
 ma $i = \frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{\Omega(1 - i_0)}{\Omega} = 1 - \frac{z_3}{z_1}$
- Case 2: $\omega_1 = 0 \rightarrow (\omega_3 - \Omega) i_0 = -\Omega$
 $-\Omega(i_0 - 1) = \omega_3 i_0 \rightarrow i = \frac{\omega_3}{\Omega} = \frac{i_0 - 1}{i_0}$

Analizziamo 3 casi particolari :



(1) Nel primo caso abbiamo solo rigidezza elastica
 → la cinghia richiede l'applicazione di un momento flettente per assumere la curvatura della puleggia

↳ Tale momento è $T \cdot e = Q \cdot e$

o) $T(e+r) = Q(e+r) \rightarrow T = Q$

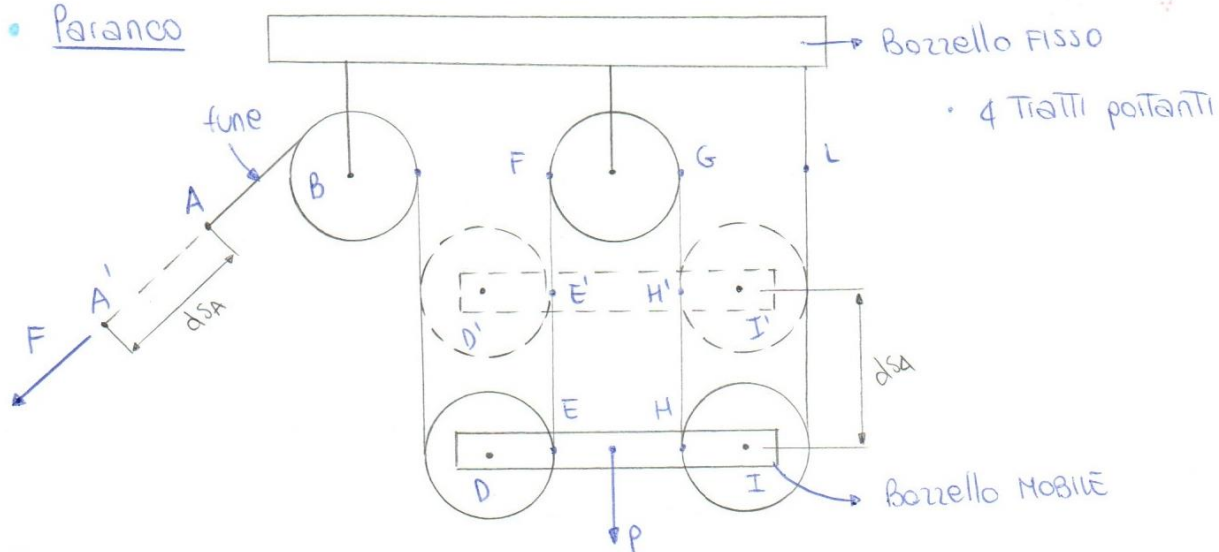
(2) Nel secondo caso abbiamo rigidezza anelastica
 cinghia disposta così con il verso di rotazione indicato.
 e_1 ed e_2 generalmente diversi e determinati da attrito interno. Accade così che il tratto che si svolge mantiene ancora la curvatura prima del tratto rettilineo mentre quello che si avvolge fa l'opposto.

o) $T(r-e_2) = Q(r+e_1) \rightarrow T = Q \frac{r+e_1}{r-e_2}$

(3) Nel terzo caso sommiamo i fenomeni per averne uno più generale.

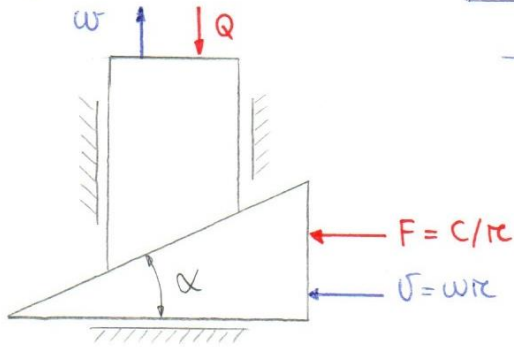
o) $T(r-e_2+e) = Q(r+e_1+e) \rightarrow T = Q \frac{r+e_1+e}{r-e_2+e}$

• Paranco



Durante la trasmissione del moto vite e madrevite scambiano forze distribuite su tutta la lunghezza dei filetti.

→ Possiamo trattarle attraverso lo sviluppo sul piano della loro elica media (lato obliquo di due conei) e consideriamo le forze applicate in un unico punto della superficie di contatto. → sistema dei conei equivalenti

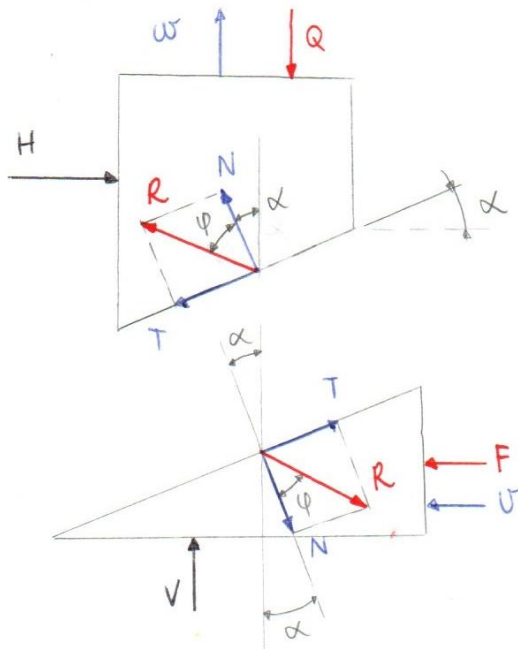


→ caso di madrevite che può ruotare e vite in grado di traslare

madrevite traslerà con velocità periferica del filetto ($v = \omega r_c$) e sarà sottoposta a forza $F = C/rc$

sistema bidimensionale poiché tutte le forze scambiate giacciono sullo stesso piano (profilo rettangolare)

Per analizzare le forze scambiate non consideriamo gli attriti dei vincoli. Vogliamo sollevare carico Q a velocità costante.



↓
consideriamo di conseguenza solo le componenti normali (H, v)

- Tra N e R abbiamo angolo φ di attrito
- Non usiamo equilibrio alla rotazione perché non conosciamo esatti punti di applicazione

$$\begin{cases} Q = R \cos(\alpha + \varphi) \\ H = R \sin(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F = R \sin(\alpha + \varphi) \\ v = R \cos(\alpha + \varphi) \end{cases}$$

Tralasciando vincoli legghiamo Q e F

$$\frac{F}{Q} = \frac{R \sin(\alpha + \varphi)}{R \cos(\alpha + \varphi)} = \text{Tg}(\alpha + \varphi)$$

$$\rightarrow F = Q \cdot \text{Tg}(\alpha + \varphi)$$

A causa delle forze di attrito dobbiamo quindi incrementare la coppia motrice

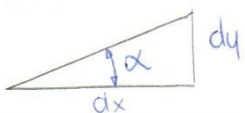
$$C = F r_c = Q \cdot r_c \cdot \text{Tg}(\alpha + \varphi)$$

Rendimento (sempre no attrito dei vincoli)

$$\eta = \frac{Q \cdot \omega}{F \cdot v}$$

ma $F = Q \cdot \text{Tg}(\alpha + \varphi) \rightarrow \eta = \frac{Q \cdot \omega}{Q \cdot v \cdot \text{Tg}(\alpha + \varphi)}$

inoltre esiste relazione tra le velocità ω e v



$$\left. \begin{aligned} dy &= dx \cdot \text{Tg} \alpha \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dx}{dt} \cdot \text{Tg} \alpha \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega = v \cdot \text{Tg} \alpha$$

$$\eta = \frac{v \cdot \text{Tg} \alpha}{v \cdot \text{Tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\text{Tg} \alpha}{\text{Tg}(\alpha + \varphi)}$$

Sappiamo che a regime $\dot{\omega} = 0$ e di conseguenza calcoliamo integrale particolare:

$$\omega = \omega_R = \text{costante}$$

$$\rightarrow C_m = k \cdot \omega_R \rightarrow \boxed{\omega_R = \frac{C_m}{k}}$$

Riprendiamo equazione $C_m - k\omega = I \frac{d\omega}{dt}$ e integriamo

$$\int_0^t dt = \int_0^{\omega} \frac{I}{C_m - k\omega} \cdot d\omega = I \int_0^{\omega} \frac{d\omega}{C_m - k\omega} = \left[-\frac{I}{k} \ln(C_m - k\omega) \right]_0^{\omega}$$

$$\rightarrow \boxed{t = -\frac{I}{k} \ln\left(\frac{C_m - k\omega}{C_m}\right)}$$

Esprimiamo ora l'andamento della velocità nel tempo:

$$t = -\frac{I}{k} \ln\left(\frac{C_m - k\omega}{C_m}\right)$$

$$-\frac{k}{I} \cdot t = \ln\left(\frac{C_m - k\omega}{C_m}\right)$$

$$e^{-\frac{k}{I}t} = \frac{C_m - k\omega}{C_m}$$

$$C_m \cdot e^{-\frac{k}{I}t} = C_m - k\omega$$

$$\boxed{\omega = \frac{C_m}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{I}t}\right)}$$

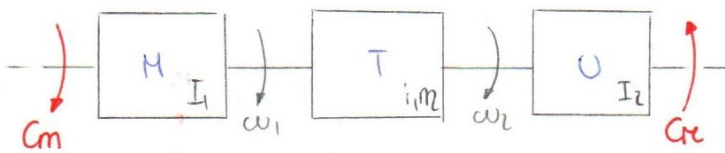
Come si nota nella formula $\omega \rightarrow \omega_R$ solo con $t \rightarrow \infty$ di conseguenza per calcolare le prestazioni dinamiche del sistema si calcola il tempo T^* necessario per raggiungere una percentuale come il 90% di ω_R .

(2) Accoppiamento motore-carico con riduttore (Trasmissione)

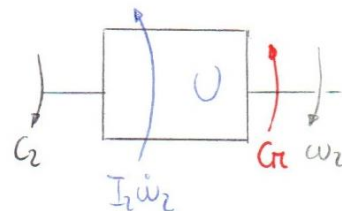
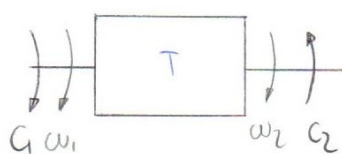
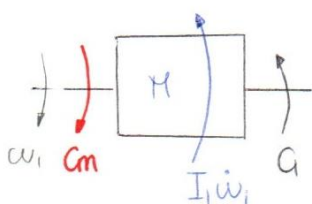
Interponiamo un riduttore di velocità tra motore e utilizzatore.

Il riduttore ha il seguente rapporto di riduzione $i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$

Inoltre il riduttore dissipa una certa potenza con $\eta < 1$.



Suddividiamo ora in 3 sottosistemi: (indichiamo le coppie delle parti rotanti)



(3) Accoppiamento motore-carico con frizione

Motore e utilizzatore accoppiati mediante una frizione. Sistema che si utilizza quando si vuole mantenere in rotazione il motore pur dovendo arrestare o avviare l'utilizzatore. Dividiamo il transitorio in due fasi:

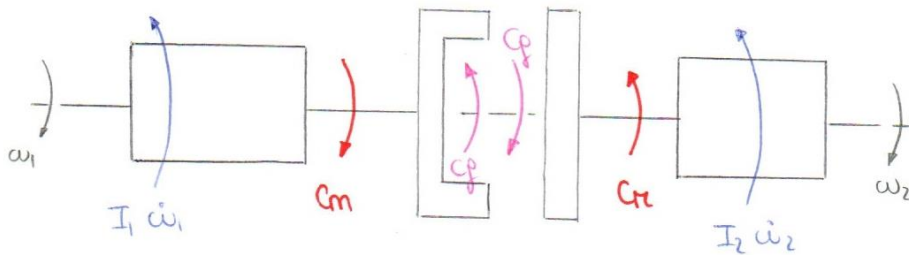
(1) Strisciamento = viene trasmessa una coppia C_f che è pari a:

$$C_f = \eta \rho F \cdot \left(\frac{r_e + r_i}{2} \right)$$

(2) Aderenza = albero condotto e albero motore sono corpo unico e rotano con la stessa velocità angolare.

(1) Strisciamento

Dividiamo in due sottosistemi



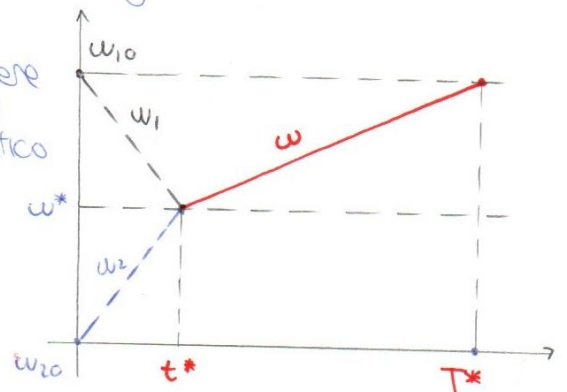
$$\begin{cases} C_m - I_1 \dot{\omega}_1 - C_f = 0 \\ C_f - I_2 \dot{\omega}_2 - C_r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\omega}_1 = \frac{C_m - C_f}{I_1} = \frac{d\omega_1}{dt} \\ \dot{\omega}_2 = \frac{C_f - C_r}{I_2} = \frac{d\omega_2}{dt} \end{cases}$$

$\dot{\omega}_1$ sarà negativa poiché al motore viene applicato un carico e rallenta.
 $\dot{\omega}_2$ sarà positiva poiché da fermo l'utilizzatore inizia movimento.

Integrando le formule trovate tra $t_0 = 0$ e l'istante generico t si ottiene l'espressione di $\omega_1(t)$ e $\omega_2(t)$.

Per risolvere tali integrali è necessario conoscere l'andamento nel tempo delle coppie C_m , C_r (e C_f se non è costante). Nel caso del nostro grafico possiamo dire:

$$\begin{cases} \omega_1(t) = \omega_{10} + \dot{\omega}_1 \cdot t \\ \omega_2(t) = \omega_{20} + \dot{\omega}_2 \cdot t \end{cases}$$



Al termine della fase di strisciamento le due velocità saranno uguali e possiamo determinare la durata t^* dello strisciamento e la velocità ω^* al termine di tale fase.

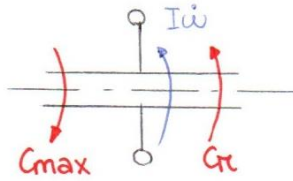
sempre nel nostro caso: $\omega_{10} + \dot{\omega}_1 t^* = \dot{\omega}_2 t^*$

$$t^* = \frac{\omega_{10}}{\dot{\omega}_2 - \dot{\omega}_1} \rightarrow \omega^* = \dot{\omega}_2 \cdot t^*$$

ϑ_1 sarà la corsa angolare durante la quale il motore eroga una coppia $C_{max} > C_r$ mentre 2π indica la periodicità della C_m .

Di conseguenza si devono susseguire due fasi:

(a) $0 < \vartheta < \vartheta_1$

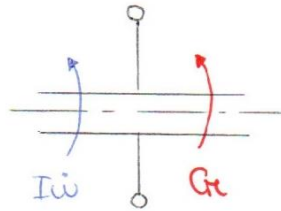


$$C_{max} - C_r = I\dot{\omega}$$

$$\dot{\omega} = \frac{C_{max} - C_r}{I} > 0$$

→ sistema accelera

(b) $\vartheta_1 < \vartheta < 2\pi$

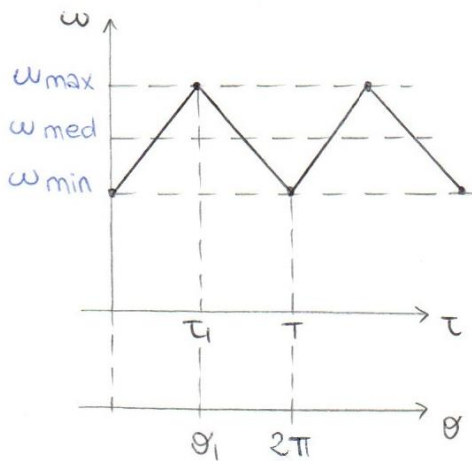


$$C_r + I\dot{\omega} = 0$$

$$\dot{\omega} = -\frac{C_r}{I}$$

→ sistema decelera

Possiamo dunque determinare un andamento della velocità del sistema.



Determiniamo dunque la velocità media

$$\omega_{med} = \frac{\omega_{min} + \omega_{max}}{2}$$

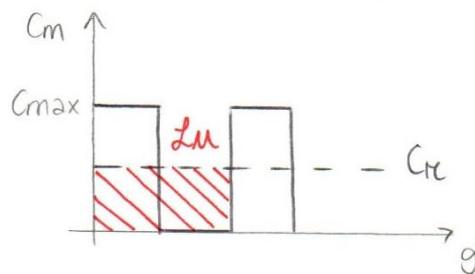
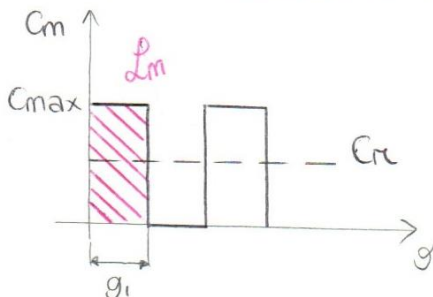
e il grado di irregolarità periodica

$$i = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{med}}$$

Determinata la velocità media e immediata la determinazione della potenza media richiesta dall'utilizzatore:

$$W_{med} = C_r \cdot \omega_{med} = C_r \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Determiniamo quindi il lavoro compiuto dal motore L_m e quello assorbito dall'utilizzatore L_u .



$$L_m = \int_0^{\vartheta_1} C_m d\vartheta = \int_0^{\vartheta_1} C_{max} \cdot d\vartheta = C_{max} \cdot \vartheta_1$$

$$L_u = \int_{\vartheta_1}^{2\pi} C_r \cdot d\vartheta = C_r \cdot 2\pi$$

Se consideriamo il rendimento unitario possiamo determinare la relazione tra C_{max} e C_r uguagliando le energie.

$$\eta = \frac{C_r \cdot 2\pi}{C_{max} \cdot \vartheta_1} \rightarrow C_{max} = C_r \cdot \frac{2\pi}{\vartheta_1}$$