NUMERO: 2291A ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Gaeta Annamaria

MATERIA: Analisi I Teoria + Esercizi - Prof. Adami

1) Logica delle proposizioni : e, o, 7, ⟹ (implica), P ⟺ Q (doppia implicazione) "se e solo se"
questi sono i connettivi → (non)
: = P ⟹ Q e Q ⟹ P
= (7P o Q) e (7Q o P)

TEORIA DEGLI INSIEMI E FUNZIONI

P	Q	P ⟺ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

LA TAVOLA DELLE VERITÀ

P ⟺ Q = "P e Q sono equivalenti"

Osservazione: "Ex falso quod libet"

P ⟹ Q = "ogni volta che P è vera, anche Q è vera"

2) Logica dei predicati : P(x), ∀, ∃ quantificatori

3) Teoria ingenua degli insiemi: appartenenza, inclusione, ∅

PREMESSA: proprietà dei connettivi logici

1) (P e Q) e R = P e (Q e R) PROPR. ASSOCIATIVA

Dimostrazione con la tavola della verità (P o Q) o R = P o (Q o R)

2) (P e Q) o R = (P o R) e (Q o R) PROP. DISTRIB. dello o rispetto la e

Dimostra con la tavola della verità

P	Q	R	(P e Q) o R	(P o R) e (Q o R)
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F

(P o Q) e R = (P e R) o (Q e R)

Dim. tavola della verità. PROPR. DISTRIB. della e rispetto la o

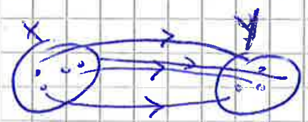
3) 7(P e Q) = 7P o 7Q
7(P o Q) = 7P e 7Q

Esempio $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ piano cartesiano

LE FUNZIONI

DEF.

Siano X e Y due insiemi. Una applicazione, o meglio funzione (sinonimi) dall'insieme X nell'insieme Y è una legge (prescrizione, regola) che associa a ogni elemento di X un elemento di Y



Esempio $X = \{$tutti gli esseri umani$\}$

$Y = \{$donne$\}$

$f: X \to Y$ (= funzione da x a y)

persona $\mapsto$ madre

Esempio $X = \{$genitori$\}$

$Y = \{$tutti gli esseri umani$\}$

$f: X \to Y$

persona $\to$ figlio non è una funzione

persona $\to$ figlio primogenito

Esempio $X = \{$studenti classe$\}$ $Y = \mathbb{N}$

$f: X \to \mathbb{N}$

studente $\to$ n° scarpe

X si dice DOMINIO di f, dove f

Y si dice CODOMINIO di f

DEF.

Data una funzione $f: X \to Y$, l'insieme degli elementi $\{y \in Y, \text{ t.c. } \exists x \in X,\ f(x) = y\}$ si dice IMMAGINE di f e si indica con $\text{Im} f$, $f(X)$, $\text{Ran}\, X$, $\text{Ran}\, f$. Ci sono casi che l'immagine sia più piccola del codominio.

Idea: l'insieme contiene gli elementi del codominio che sono effettivamente raggiunti da f.

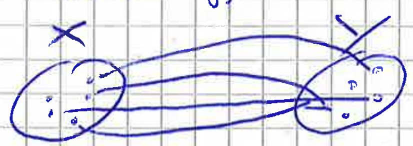
Esempio $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$n \to 2n$

$\text{Im} f$ = numeri pari

DEF.

Data una funz. $f: X \to Y$, sia $x \in X$. Allora $f(x) \in Y$ si dice IMMAGINE di x (tramite f)



esempio $f^{-1} \circ f$ $\quad (f : X \to Y$ iniett.$)$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}[f(x)] =$

$[f^{-1}(y) =$ l'unico se $x \in X$ t.c. $f(x) = y]$

$= x$

Sia A un insieme $\mathcal{P}(A)$ = insieme delle parti di $A = \{B, B \subset A\}$

quindi raggruppa tutti i sottoinsiemi di A

esempio $A = \{0, \Delta\} \Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{A, \emptyset, \{0\}, \{\Delta\}\}$ → insieme di cui l'unico elemento è il pallino

è vuoto, non appartiene ad A perché esiste ed è un oggetto ben preciso

Attenzione $\quad \emptyset \subset A, \quad \emptyset \subset \mathcal{P}(A)$

$\emptyset \notin A \quad \emptyset \in \mathcal{P}(A)$

è un sottoinsieme ma non è un elemento di A → è un sottoinsieme da sempre

esercizio $A = \{0, \Delta, \emptyset\}, \quad \mathcal{P}(A) = \{A, \{0\}, \{\Delta\}, \{\emptyset\}, \emptyset\}$

uno è l'elemento
un altro è l'insieme che contiene quell'elemento.

Ogni insieme è sottoinsieme di se stesso !!!

$A = \{\Delta, \{0\}\} \quad \mathcal{P}(A) = \{A, \emptyset, \{\Delta\}, \{\{0\}\}\}$

2. SUCCESSIONI RICORSIVE:

$$\begin{cases} x_0 = a \in \mathbb{R} \text{ elemento iniziale} \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

3. DIMOSTRARE $\quad (n+1)\frac{n}{2} = 1+2+\dots+n = \sum_{j=1}^{n} j$

la variabile che varia tra 1 e n

GLI INSIEMI NUMERICI

[ESERCIZIO Scrivere $\sum_{j=1}^{n} j^2 = 1+4+9+\dots$]

L'insieme T per cui vale la formula contiene lo zero: se considero 1 devo calcolare "la somma dei primi zero numeri", partiamo da $n=1$

$1 = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ la formula è verificata

se contiene n (ossia, se la formula è vera per n) allora T contiene anche $n+1$ (PASSO INDUTTIVO). Supponiamo quindi che

$$\sum_{j=1}^{n} j = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{IPOTESI INDUTTIVA}$$

e calcoliamo $\sum_{j=1}^{n+1} j = \underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + n+1 = \frac{n(n+1)}{2} + n+1 =$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)\left[(n+1)+1\right]}{2}$$

ESERCIZIO $\quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Dimostrare per induzione

FORMULA DI BERNOULLI

Sia $x > -1$, $h > 0$. Allora,

$$(1+x)^h \geq 1+hx, \quad h \in \mathbb{N}$$

DIMOSTRAZ: $h=1 \Rightarrow (1+x) = 1+1\cdot x$

Supponiamo che la formula valga per un $h \in \mathbb{N}$, mostriamo che vale per $h+1$.

$(1+x)^{h+1} = (1+x)^h (1+x) \geq (1+hx)(1+x)$ → perché è come se lo avessi moltiplicato ad entrambi i membri $(1+x)$

$= 1+hx+x+hx^2 \geq 1+hx+x = 1+(h+1)x$

perché x^2 è sempre positivo

Sviluppi decimali: $\forall x \in \mathbb{Q}\ \exists n \in \mathbb{N},\ \beta_1, \dots \beta_m \in \{0, 1, \dots, 9\}$ t.c.

$$x = m,\beta_1\beta_2 \dots \beta_m$$

1. La parte decimale di un numero razionale è PERIODICA (o finita)
   $2 = 2{,}000 = 2{,}\bar{0}$

2. Lo sviluppo decimale di un numero razionale non è in generale unico

$\frac{1}{3} = 0.333\dots3 = 0.\bar{3}$

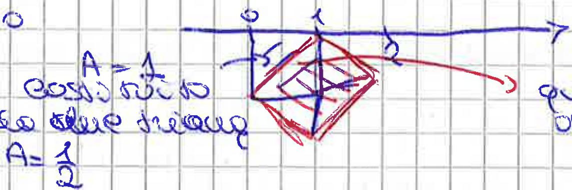
$1 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 0.999\dots9 = 0{,}\bar{9}$

In generale i numeri razionali che ammettono sviluppo decimale finito (ossia, che si concludono con "zero periodico", ammettono anche uno che si conclude con "nove periodico": quest'ultimo non viene mai usato).

$\mathbb{R}$ NUMERI REALI

Non è possibile risolvere alcune semplici equazioni restando in $\mathbb{Q}$.

$\boxed{x^2 - 2 = 0}$ → esempio



→ questo diagonale è sol. dell'equaz.

TEOREMA: Non esiste nessun numero razionale $\alpha \in \mathbb{Q}$ t.c. $\alpha^2 = 2$

Dimostrazione per assurdo: Suppongo per assurdo che esista $\exists x \in \mathbb{Q}$ t.c. $x^2 = 2$. Esistono quindi $p \in \mathbb{Z}$, $q > 0$, $q \in \mathbb{N}$ t.c. p e q non hanno divisori in comune e

$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow$ p è pari $\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $p = 2k$

Quindi, $2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(2k)^2}{q^2} = \frac{4k^2}{q^2}$ moltiplico il primo e l'ultimo membro per $q^2 \neq 0$

$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ pari $\Rightarrow q$ pari $\Rightarrow$ è falso che p e q siano primi tra loro cioè non abbiano divisori comuni

Esercizio: Dimostrare che non esiste $\nexists x \in \mathbb{Q}$ t.c.

1. $x^2 = 3$
2. $x^2 = 6$
3. $x^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{5})^2$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 300

Definizione rigorosa di $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è l'unico insieme con le seguenti proprietà:

1) Sono definite in $\mathbb{R}$ somma ("+") e prodotto ("·") che sono associative, commutative, con elemento neutro e con inverso di ogni elemento, eccetto lo zero per il prodotto.

2) È totalmente ordinato: $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ o $x \geq y$. Inoltre,

$x \leq y$ e $x \geq y \Rightarrow x = y$

3) L'ordinamento si comporta nel seguente modo rispetto a somma e prodotto.

- $\forall \underbrace{x, y, z}_{\text{terna di numeri reali}} \in \mathbb{R}$, $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $z \geq 0$, $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$
- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $z < 0$, $x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$

4) È completo. Ossia, vale l'assioma di Dedekind.

Osservazione: qualunque allineamento decimale identifica un numero reale. L'ambiguità vista per i numeri di $\mathbb{Q}$ resta, ma soltanto per i razionali.

$\mathbb{R}$ è numerabile? Supponiamo che lo sia. Allora esiste una lista che comprende tutti i numeri reali

$x_1 = \overbrace{m_1}^{\text{int.}} . \overbrace{a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,3} \cdots a_{1,k} \cdots}^{\text{parte decimale}}$

$x_2 = m_2 . a_{2,1}\, a_{2,2}\, a_{2,3} \cdots a_{2,k} \cdots$

$\vdots$

$x_j = m_j . a_{j,1}\, a_{j,2}\, a_{j,3} \cdots a_{j,k} \cdots$ ← x generico

con $a_{ij} \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

Consideriamo il numero reale $\bar{x} = \overbrace{m_1 + 1}^{\text{parte intera}} . \overbrace{\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k \cdots}^{\text{parte decimale}}$

$$\beta_i = \begin{cases} 3 & \text{se } a_{ii} \neq 3 \\ 5 & \text{se } a_{ii} = 3 \end{cases} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta_i \neq a_i$$

La sua parte decimale non è ambigua perché non contiene né 0 né 9.

Inoltre, $\bar{x} \neq x_1$ perché è diversa la parte intera

$\bar{x} \neq x_2$ perché $\beta_2 \neq a_{2,2}$

In generale, $\bar{x} \neq x_k$ $\forall k \geq 2$ perché $\beta_k \neq a_{k,k}$ (per costruzione) e perché $\bar{x}$ ha uno sviluppo decimale unico. Quindi $\bar{x}$ non appartiene all'elenco $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ non è numerabile.

Estremo superiore

$A \subset \mathbb{N}$ finito (ossia il num degli elementi di A, $\#A$, è finito)

$A = \{5, 17, 1, 10^{10^{10}}, e\}$ — min: 1, max: $10^{10^{10}}$

Se A non è finito esiste un minimo, ma non esiste il massimo

Definizione $A \subset \mathbb{R}$. $\bar{x} \in A$ si dice MINIMO di A e si indica min A, $\min_{x \in A} x$

se, $\forall x \in A$, $\bar{x} \le x$.

$A \subset \mathbb{R}$. $\bar{x} \in A$ si dice MASSIMO di A e si indica con max A, $\max_{x \in A} x$

se, $\forall x \in A$, $\bar{x} \ge x$ — ESTREMO SUPERIORE

Osservazione $A \subset \mathbb{R}$ t.c. $\bar{x} = \min A$. Allora il minimo è unico.

Dimostrazione: supponiamo che ci sia $\tilde{x} = \min A \Rightarrow \boxed{\tilde{x} \le \bar{x}}$ x tesi

ma $\bar{x}$ è un minimo di A $\Rightarrow \boxed{\bar{x} \le \tilde{x}} \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \tilde{x}}$

• $a, b \in \mathbb{R}$

$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \le x \le b\}$ INTERVALLO REALE A ESTREMI INCLUSI

$(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x < b\}$ ESTREMI ESCLUSI

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a \le x < b\}$ UNO COMPRESO L'ALTRO NO

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } a < x \le b\}$ " " " "

• $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \ge a\}$

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x > a\}$ x è più grande strettamente di a

$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x < b\}$ x è più piccolo strettamente di b

$A = [0, 1]$ max A = 1 min A = 0

$A = (0, 1)$ non ha il minimo, non ha il massimo

1) $0 \ne \min A$ perché $0 \notin A$

2) Supponiamo che $\bar{x} \in (0, 1)$ sia il min A. Allora $\bar{x} > 0$

Ma $\tilde{x} = \frac{\bar{x}}{2}$ (lo diminuisco strettamente) $\Rightarrow 0 < \tilde{x} < \bar{x} \Rightarrow \tilde{x} \in A \Rightarrow \bar{x} \ne \min A$

vale lo stesso per il massimo

1 è il più piccolo tra i numeri che "maggiorano" gli elementi dell'insieme.

ξ si dice **ESTREMO SUPERIORE** di A. $\xi = \sup A$, $\xi = \sup\limits_{x \in A} \{x\}$

In $\mathbb{R}$, tutti i sottoinsiemi limitati superiormente ammettono estremo superiore.

Dare un esempio di insieme fatto di numeri razionali che non ammette estremo superiore. => esempio

Analogamente, A limitato inferiormente,

$\exists\, \eta \overset{def}{:=} \max \text{Min}(A)$

$= \max \{y \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \forall x \in A,\ y \leq x\}$

η si dice **ESTREMO INFERIORE** di A.

$\eta = \inf A$, $\eta = \inf\limits_{x \in A} \{x\}$

Definizione: A non limitato superiormente, $\sup A = +\infty$

A non limitato inferiormente, $\inf A = -\infty$

Inoltre si pone $\sup \emptyset = -\infty$ $\inf \emptyset = +\infty$

Esempio: $A = \{1\}$ $\sup A = \cancel{\max} \inf A = 1$

$A = [0;1)$ $\text{Magg } A = [1;+\infty)$ $\text{Min } A = (-\infty;0]$

$A' = (0,1]$ $\text{Magg } A' = [1;+\infty)$ $\text{Min } A' = (-\infty;0]$ } uguali anche se cambia l'insieme di partenza.

ELEMENTI DI LOGICA

P	Q	P e Q	Q e P
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

quindi, P e Q = Q e P

"e" è un connettivo logico COMMUTATIVO

esercizio: Dimostrare che P o Q = Q o P

esempio: "$P \Rightarrow Q$" = "$Q \Rightarrow P$" ?

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

sono diverse "$P \Rightarrow Q$" $\neq$ "$Q \Rightarrow P$"

"$P \Rightarrow Q$" = "$\neg Q \Rightarrow \neg P$" ?

$P \Rightarrow Q = \neg P \text{ o } Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P = \neg(\neg Q) \text{ o } \neg P = Q \text{ o } \neg P = \neg P \text{ o } Q$ (questo metodo per dimostrar. per assurdo)

$P \Rightarrow Q$, P si dice "CONDIZIONE SUFFICIENTE" affinché Q

Q si dice "CONDIZ. NECESSARIA" affinché P

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ è detto "CONTRONOMINALE" di $P \Rightarrow Q$

osservazione: Socrate è mortale = Q
Socrate è un uomo = P

$P \Rightarrow Q$ non è suff. per dire che Q è vero. Invece:

1. P = Socrate è un uomo
2. $P \Rightarrow Q$ se Socrate è un uomo allora è mortale

$\Downarrow$ Q

Ossia, $\boxed{P \text{ e } (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q}$ è vero

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \text{ e } (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q = \neg(P \text{ e } (P \Rightarrow Q)) \text{ o } Q$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

tautologia è un'affermazione vera per definizione, quindi fondamentalmente priva di valore informativo.

esempio: Questo dolcetto è un cane. Se è un cane, abbaia. Questo dolcetto abbaia.] QUATERNIO TERMINORUM o "PARALOGISMO"

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 300

TEORIA (INGENUA) DEGLI INSIEMI

è un concetto primitivo

oggetti: insiemi contengono elementi. Un insieme è definito dagli elementi che contiene.

esempio: $A = \{\underbrace{1, 2, 3, 4, 6}_{\text{elementi}}\} \rightarrow$ parentesi graffe

oppure $A = \{n \text{ naturale t.c. } n \leq 6, n \neq 5\} = \{n \text{ divisore di } 12\}$

oppure

diagramma di Eulero - Venn

RELAZIONE DI APPARTENENZA

$x \in A$ = "x è un elemento dell'insieme A" = "x appartiene ad A"

INCLUSIONE TRA INSIEMI

A, B due insiemi:

$A \subset B$ = "A è incluso in B" = "A è sottoinsieme di B"
o contenuto

DEFINIZ. si dice $A \subset B$ se $x \in A \Rightarrow x \in B$

PROPOSIZ. $A \subset B$, $B \subset A$

$\Downarrow$

$A = B$

DIMOSTRAZ. $\underline{x \in A} \Rightarrow$ (siccome $A \subset B$) $\underline{x \in B}$
$\underline{x \in B} \Rightarrow$ (siccome $B \subset A$) $\underline{x \in A}$
$x \in A \Leftrightarrow x \in B \Rightarrow$ A e B hanno gli stessi elementi

insieme vuoto: $\emptyset$

PROPOSIZ. $\forall A$ insieme, $\emptyset \subset A$

DIMOSTRAZ. dobbiamo mostrare che $\underbrace{\underbrace{x \in \emptyset}_{\text{falso}} \Rightarrow x \in A}_{\text{ex falso quodlibet}}$

esempio

R = {insiemi che non contengono se stesso come elemento}

$R \in R$?

se $R \in R$, allora $R \notin R$

se $R \notin R$, allora $R \in R$

esercizi Trovare sup e inf di

1. $\{n^2+4n-3 < 10, n\in\mathbb{N}\} = \{x=n^2+4n-3, n\in\mathbb{N}\} \cap (10,+\infty)$
inf $=10$ sup $=+\infty$

2. $\{x = \frac{t+3}{t-2}, t\in\mathbb{R}\}$

3. $\{x = \sin n, n\in\mathbb{N}\}$

4. $\{x = \sin n^2, n\in\mathbb{N}\}$

5. $\{x = \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right), n\in\mathbb{N}\}$

6. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right] = [-1,1) \cap \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cap \dots$
inf $=0$ sup $=0$

VALORE ASS.
INTORNI
SUCCESS. REAL

valore assoluto o modulo

$x\in\mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x\geq 0 \\ -x, & \text{se } x<0 \end{cases}$

tutto ciò che è all'interno del modulo !!

esercizio $\left|\frac{x^2-ex+\pi}{1+4x-\log\arctg\cos x^{8\pi}}\right| = \begin{cases} \frac{x^2-ex+\pi}{\dots}, & \text{se } \frac{x^2-ex+\pi}{1+4x\dots} \geq 0 \\ -\frac{x^2-ex+\pi}{\dots}, & \text{se } \frac{x^2-ex+\pi}{\dots} < 0 \end{cases}$

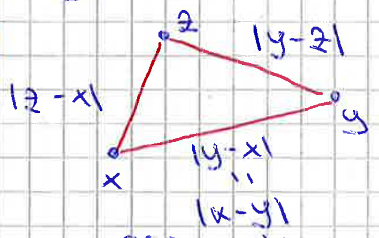
PROPRIETÀ:

• DISUGUAGLIANZE TRIANGOLARI:

1. $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ — vale sul piano, nello spazio

$|x-y| \leq |x-z|+|z-y|$

esempio sul piano:



per il teorema dei triangoli: un lato è minore della somma degli altri due

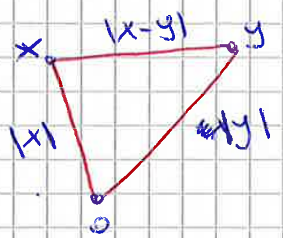
Sulla retta: x, y, z sono allineati

$|x-y| = |z-x|+|y-z|$

$|x-y| < |z-x|+|y-z|$

2. $\underbrace{\big||x|-|y|\big|}_{\text{sempre è positivo}} \leq |x-y|$

esempio nel piano:



in ogni triangolo ogni lato è maggiore della differenza degli altri due

Successioni reali

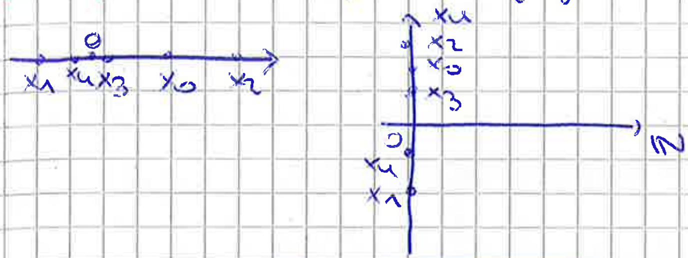
sequenze di numeri reali in generale

una funzione $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è detta una SUCCESSIONE REALE

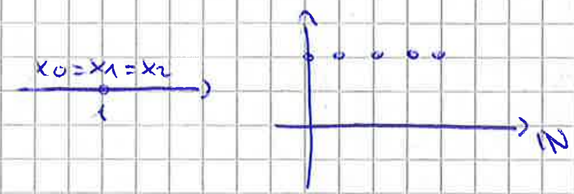
simboli: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \to x_n = a_n$

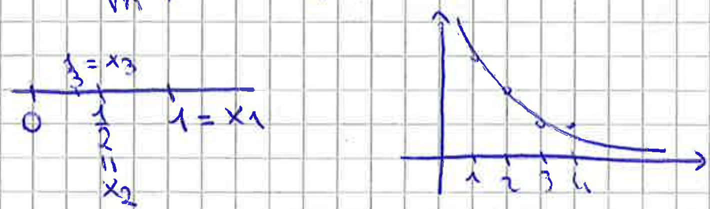
esempio due rappresent grafiche



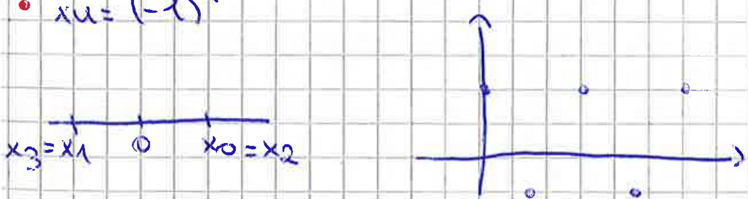
• $x_n = 1$ SUCCESS. COSTANTE



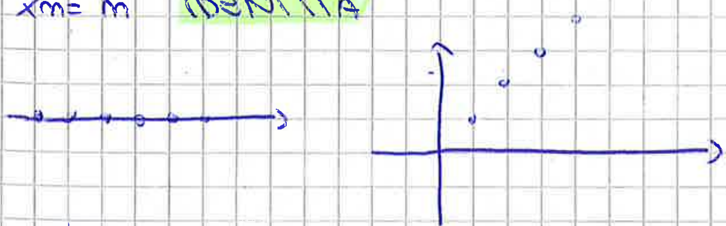
• $x_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$



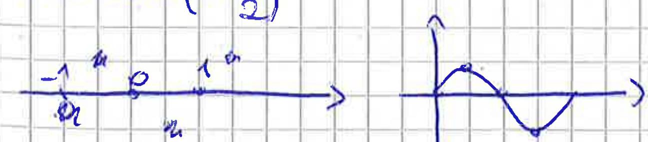
• $x_n = (-1)^n$



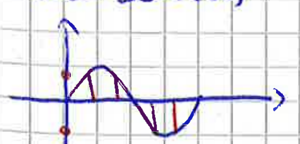
• $x_n = n$ IDENTITÀ



• $x_n = \text{sen}(n \frac{\pi}{2})$



• $x_n = \text{sen}(n)$



• $x_n = \text{sen}(n^2)$?

Quiz 1

1. $x^4 - x^2 \geq 0$ D: $\mathbb{R}$ $x^4 = t^2 \to x^2 = t$

$t^2 - t \geq 0$

$t(t-1) \geq 0$ $t \geq 0$, $t \geq 1$

$t \leq 0$ vel $t \geq 1$

$x = \pm t$

$x \leq 0$ vel $x \leq -1$ vel $x \geq 1$ c

$\Rightarrow x^2(x^2-1) \geq 0$ $x \geq 0$, $x^2 \geq 1$

$x \leq -1$ vel $x \geq 1$

PREREQUISITI

2 b LOGICA

3 TEORIA DEGLI INSIEMI

3.1. $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ quindi b $A \cap B = \emptyset$ e $A \cap C = \emptyset$

3.2. $P(P(P(\emptyset))) \setminus \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}\}$

contiene 0 elementi a perché $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$ a cui togli insieme costituito da $\emptyset$

4 INSIEMI NUMERICI E FUNZIONI

4.3. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 2x - 1$ e perché

$g \circ f = g(f(x))$ è a quando il C di $f(x)$ è e D di $g(x)$

$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 1$

5 MASSIMI MINIMI ed ESTREMI

5.1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ $\inf(\Omega) = 3$ $\sup(\Omega) = 10$ b $\forall \omega \in \Omega$ si ha $3 < \Omega < 10$

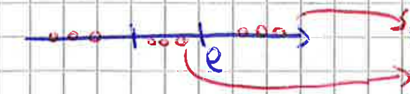
perché inf e sup non devono per forza appartenere all'insieme

Le successioni

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \to x_n \; (a_n, b_n, y_n)$

PROPRIETÀ: comportamento asintotico

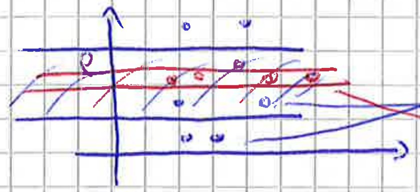
"Idea di convergenza": una succ. "converge" a un punto $\ell \in \mathbb{R}$ se, preso un qualunque intorno di ℓ, gli elementi della successione giacciono in quell'intorno definitivamente



prima possono stare fuori
dopo invece no, stanno in quell'intorno

Due idee:

1. Tutto quello che succede in un intorno
2. Arbitrarietà dell'intorno (anche se è molto piccolo)



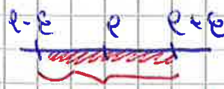
prima possono stare fuori
dopo nell'intorno
Anche se stringiamo l'intorno (stringiamo all'intorno)

SUCCESSIONI CONVERGENTI E LORO ALGEBRA

DEF. Si dice che la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$

Osservazioni: $|x_n - \ell| < \varepsilon$ significa che la distanza di x_n da ℓ è $< \varepsilon$



intorno sferico di raggio ε

$|x_n - \ell| < \varepsilon \iff \ell - \varepsilon < x_n < \ell + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0$ vuol dire che l'intorno in cui cade la successione può essere piccolo

Il definitivamente → da un certo $\bar{n}$ in poi ed $\bar{n}$ dipende da ε

Esempio: dimostrare che $x_n = \frac{1}{n}$ converge a 0

Dato $\varepsilon > 0$ trovare $\bar{n}$ t.c. $n > \bar{n}$ $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

Sia $\varepsilon > 0$. Vediamo per quali valori di n è verificata la disuguaglianza $\frac{1}{n} < \varepsilon$

$\iff n > \frac{1}{\varepsilon}$ abbiamo moltip. per n e diviso per ε

Allora scelgo $\bar{n} = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ → la parte intera

$n > \bar{n} \Rightarrow n \geq \bar{n} + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$ strett. maggiore osservazione (teorema della permanenza del segno)

$x_n \to \ell > 0$

allora, x_n è definitivamente positiva ($\exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow x_n > 0$)

DIMOSTRAZ.: per la definiz. di limite,

$\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \ell| < \ell$

$\Leftrightarrow$ $0 < x_n < 2\ell$

ho preso $\varepsilon = \ell$ nella definizione

se $x_n \to \ell < 0$, allora x_n è definitivamente negativa

COROLLARIO: • $x_n \geq 0$ $\forall n$ e convergente a ℓ
allora $\Rightarrow$ $\ell \geq 0$
• $x_n > 0$ $\forall n$ e convergente a ℓ
allora $\Rightarrow$ $\ell \geq 0$

uno o l'altro

esempio $x_n = \frac{1}{n} > 0$, $x_n \to 0$

esercizio • $x_n = \frac{1}{2n}$ è convergente? Si, a zero. Come esercizio di prima
$\varepsilon > 0$, trovare $\bar{n}$.

• $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall \alpha > 0$ tende a 0. Come questo

• $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ *

• $x_n = (n+1)^2 - (n)^2 = 2n+1$ non tende a zero ma diverge

$$* \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$ tende a zero

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geq \sqrt{n} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

converge a 0 perché è una succes. costante

0 per il

questa tende a 0 perché come $\frac{1}{n^\alpha}$

TEOREMA del confronto o dei due carabinieri

x_n, y_n, z_n tre successioni t.c.

$x_n \to \ell$, $z_n \to \ell$, $x_n \leq y_n \leq z_n$, definitivamente

per le succes. è sempre così

allora, $y_n \to \ell$

Il viceversa è falso: $(-1)^n$ è limitata ma non convergente

esempio $x_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$

TEOREMA: $x_n \to \ell$, $y_n \to k \Rightarrow x_n + y_n \to \ell + k$

DIMOSTRAZ.: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario

$x_n \to \ell \Rightarrow \exists n_1,\ n > n_1 \Rightarrow |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$

$y_n \to k \Rightarrow \exists n_2,\ n > n_2 \Rightarrow |y_n - k| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\bar{n} = \max(n_1, n_2)$; $n > \bar{n}$ → per la 1° disug. triang.

$|(x_n + y_n) - (\ell + k)| = |x_n - \ell + y_n - k| \le$

$\le |x_n - \ell| + |y_n - k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Applichiamolo all'esempio

$x_n = \underbrace{1}_{\text{tende a 1 perché costante}} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{tende a 0}} \Rightarrow x_n \to 1 + 0 = 1$

esempio $x_n = \frac{3n+4}{2n+1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$= \frac{3n + 3/2}{2n+1} + \frac{5/2}{2n+1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} =$

$= \frac{3}{2}\frac{\cancel{2n+1}}{\cancel{2n+1}} + \frac{5}{4n+2} + \underbrace{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}_{0}$

$\frac{3}{2} \to \frac{3}{2}$

$\underset{\downarrow\, 0}{0} \le \underset{\downarrow\, 0 \text{ per il th dei carab.}}{\frac{5}{4n+2}} \le \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{n} \to 0$ (ragionamento come i primi esempi)

$x_n \to \frac{3}{2}$

Il fatto che $\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{n} \to 0$ può essere anche ottenuto applicando il seguente teorema.

Le successioni

$\{x_n\}$ successione

x_n converge a $\ell \in \mathbb{R}$ se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$ } successioni convergenti

Algebra dei limiti

• **Teorema della somma**

$\{x_n\}, \{y_n\}, \ x_n \to \ell, \ y_n \to k$

$\Rightarrow x_n + y_n \to \ell + k$

1. la successione somma $\{x_n + y_n\}$ è anch'essa convergente
2. Il limite della successione somma è la somma dei limiti: $x_n + y_n \to \ell + k$

Analogo anche per i termini riguardo al prodotto $(k \cdot \ell)$ e quell'altro $(\ell \cdot k)$

• **Teorema del rapporto**

x SUCC. DIVERG. ALGEBRA RELATIVA RAPP TRA POLINOMI

$\{x_n\}, \{y_n\}, x_n \to \ell, \ y_n \to k \neq 0,$

$y_n \neq 0 \ \forall n$ (basterebbe $y_n \neq 0$ definitivamente)

allora $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ è convergente e $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{\ell}{k}$

Dimostrazione: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario

$x_n \to \ell \Rightarrow \exists n_1, \ n > n_1 \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon'$ ε' sarà definito in seguito

$y_n \to k \Rightarrow \exists n_2, \ n > n_2 \Rightarrow |y_n - k| < \varepsilon'$

$\bar{n} := \max(n_1, n_2)$

Applico I disug. triangolare

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{\ell}{k}\right| = \left|\frac{x_n k - \ell y_n}{y_n k}\right| = \left|\frac{x_n k - x_n y_n + x_n y_n - \ell y_n}{y_n k}\right| =$$

$$\leq \frac{|x_n||k - y_n| + |y_n||x_n - \ell|}{|y_n||k|} \ *$$

Tesi: $\cancel{|y_n| \leq \frac{1}{m}} \Rightarrow |y_n| \geq m > 0 \ \forall n$

con $\varepsilon = k$, il modulo della succ. converge al mod.

Per definizione di limite, $\exists \ \nu$ t.c. $n > \nu \Rightarrow |y_n| > \frac{|k|}{2}$ in quanto $|y_n| \to |k|$

$A := \left\{|y_0|, |y_1|, \dots, |y_\nu|, \frac{|k|}{2}\right\}$

A è un insieme finito (ha $\nu + 2$ elementi), quindi ammette un minimo

$\exists \ m := \min A > 0$ in quanto tutti gli elementi dell'insieme A sono positivi.

Inoltre, $|y_n| \geq m$

$x_n = \dfrac{n^e + 5}{n^\pi - n - 10^{1000}} =$ non è un polinomio

$= \dfrac{n^e}{n^\pi} \cdot \dfrac{1 + \frac{5}{n^e}}{1 - n^{1-\pi} - \frac{10^{1000}}{n^\pi}} \Rightarrow x_n \to 0$

$n^{e-\pi} = \dfrac{1}{n^{\pi - e}}$, $e - \pi < 0$, $\pi - e > 0$; $n^{1-\pi} = \dfrac{1}{n^{\pi - 1}}$

Metodo: $x_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$, $\deg P < \deg Q \Rightarrow x_n \to 0$

Esempio: $x_n = \dfrac{n^{10^{100}} + 1 + n^{10000} - e}{n^{10^{100}} + n^{1000000} + \pi} =$

$= \dfrac{n^{10^{100}}}{n^{10^{100}}} \cdot \dfrac{1 + n^{10^4 - 10^{100}} - e\,n^{-10^{100}}}{1 + \frac{n^{1000000}}{n^{10^{100}}} + \frac{\pi}{n^{10^{100}}}} = 1$ non è una succes. converg.

Supera qualunque punto della retta reale eppure tende ad infinito. Definitivamente assume valori superiori a qualunque numero reale finito.

DEF Si dice che la successione $\{x_n\}$ DIVERGE POSITIVAM. o "tende a $+\infty$" se $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow x_n > K$

Si dice che DIVERGE NEGATIV. o "tende a $-\infty$" se $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow x_n < K$

Esempio: $x_n = n \to +\infty$

$x_n = -n \to -\infty$

$x_n = (-1)^n \cdot n$ non diverge né a $+\infty$ né a $-\infty$, non converge

$x_n = (-1)^n$ "

Proposizione: x_n una successione t.c. $|x_n| \to +\infty \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to 0$

DIMOSTRAZIONE: sia $\varepsilon > 0$ arbitrario — per la def di limite con $\frac{1}{x_n}$ successione - limite

$|x_n| \to +\infty \Rightarrow \exists \bar{n}$ t.c. $n > \bar{n} \Rightarrow |x_n| > \dfrac{1}{\varepsilon} \iff \left|\dfrac{1}{x_n} - 0\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \to 0$

Le successioni

Sia $\{x_n\}$ una successione regolare se converge o diverge

esempio: reali finali, palle

esercizio: dimostrare che il prodotto di una successione infinitesima (?) per una limitata è una successione infinitesima.
Dimostrare che se $x_n \to \ell \Rightarrow y_n := x_{n+1} \to \ell$.

Problema "bancario"

Investo in banca 1 a un tasso d'interesse annuo t. A fine anno $1 \mapsto 1+t$. Dopo 6 mesi $1 \mapsto 1+\frac{t}{2}$. Dopo 12 mesi $1+\frac{t}{2} \mapsto 1+\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\underbrace{\left(1+\frac{t}{2}\right)}_{\text{il nuovo capitale investito}}$

$=\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(1+\frac{t}{2}\right) =$ → interesse pagato a fine anno

$=\left(1+\frac{t}{2}\right)^2 = 1+t+\frac{t^2}{4}$ → interesse pagato ogni 6 mesi

Se l'interesse viene pagato mensilmente: → secondo mese $1+\frac{t}{12}+\frac{t}{12}\left(1+\frac{t}{12}\right) = \left(1+\frac{t}{12}\right)^2$

$1 \xrightarrow{1\text{ mese}} 1+\frac{t}{12} \xrightarrow{\text{dopo 2 mesi}} \left(1+\frac{t}{12}\right)^2 \longmapsto \left(1+\frac{t}{12}\right)^{12} > \left(1+\frac{t}{12}\right)^2$

Se l'interesse viene pagato giornalmente → capitale più grande

SUCCESSIONI MONOTONE.

$1 \longmapsto \left(1+\frac{t}{365}\right)^{365} > \left(1+\frac{t}{12}\right)^{12}$

Intervalli sempre più piccoli viene pagato a fine anno

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$$

come vedremo, la success. $x_n=\left(1+\frac{t}{n}\right)^n$ cresce al crescere di n. con $t>0$

DEF. una successione $\{x_n\}$ si dice MONOTONA CRESCENTE / DECRESCENTE se
$n > m \Rightarrow x_n \geq x_m$
$x_n \leq x_m$

x_n monotona STRETTAMENTE CRESCENTE / DECRESCENTE se

se $n > m \Rightarrow x_n > x_m$
$x_n < x_m$

TEOREMA: $\{x_n\}$ monotona crescente $\Rightarrow \{x_n\}$ è regolare e

$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ → che può essere un numero o $+\infty$

esempi $x_n = n^\alpha$, $\alpha > 1$ monotona crescente $(\to +\infty)$

$0 < \alpha < 1$ " " $(\to +\infty)$

$\alpha < 0$ " decrescente $(\to 0)$ infinitesima

$\alpha = 0$ costante $(\to 1)$

$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è monotona?

È necessario il binomio di Newton.

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \underbrace{\binom{m}{j}}_{\text{coefficiente binomiale}} a^j b^{m-j}$

$$\binom{m}{j} \overset{def}{=} \frac{m!}{j!(m-j)!} = \frac{m(m-1)\cdots(m-j+1)}{j!}$$

Dimostrazione per induzione

$m = 0$ $(a+b)^0 = 1$

$$\sum_{j=0}^{0} \binom{0}{j} a^j b^{0-j} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = \frac{0!}{0!(0-0)!} \, 1 \cdot 1 = 1$$ quindi è proprio uguale

da m a $m+1$ perchè è data per scontata per m

$(a+b)^{m+1} = (a+b)\boxed{(a+b)^m} =$ (ipotesi induttiva) — perchè $(a+b)^m = \sum_{j=0}^{m} \ldots$

$= (a+b)\boxed{\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m-j}}$ prop. distributiva

$= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{j+1} b^{m-j} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m+1-j} =$

$k := j+1$ per la mia semplificazione $\Rightarrow j = k-1$

$= \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m+1-j}$ — ora c'è il +1 perchè ho [illegible] — perchè ho estratto [illegible] per $j=0$

$= \underbrace{\binom{m}{m} a^{m+1} b^0}_{k=m+1} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} a^j b^{m+1-j} + \binom{m}{0} a^0 b^{m+1}$] questo l'ho estratto dalla 2° sommatoria perchè l'ho riscritta da j che va da 1 a m e non da 0

oss. $\binom{m}{m} = \frac{m!}{m!(m-m)!} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$ $\quad \binom{m}{0} = \frac{m!}{0!(m-0)!} = 1 = \binom{m+1}{0}$

Quindi

$$= \underbrace{\binom{m+1}{m+1}}_{\text{è } 1} a^{m+1} + \sum_{j=1}^{m} \Big[\underbrace{\binom{m}{j-1} + \binom{m}{j}}_{\binom{m+1}{j}}\Big] a^j b^{m+1-j} + \underbrace{\binom{m+1}{0}}_{\text{è } 1} b^{m+1} \quad *$$

TEOREMA: $\{x_n\}$ è limitata da 3 $\quad 2 < x_n < 3$

DIMOSTRAZ: $x_n = \sum_{j=0}^{n} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \frac{1}{j!}$

$\uparrow 1 \quad \uparrow 1 \quad \uparrow 1$ approssimo

$x_n < \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} = 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!}$

$j! \geq 2^{j-1}$ (dimostrare per induzione)

$1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j!} \leq 1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{j-1}} = (k = j-1)\ 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} =$ → lo ho messo qui perché è che toglievo ora

$= 1 + \frac{1 - (1/2)^n}{1 - \frac{1}{2}}$ somma geometrica $< 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3$

Quindi x_n è monotona strett. crescente e limitata da 3 $\Rightarrow$

$\exists \lim : e := \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828$

* la succ. è strett. monotona per proprietà precedente, quindi $n \geq 2$, $x_n > 2$

- $\left(1+\frac{m}{n}\right)^n \to ?$ $\quad m\in\mathbb{Z}$
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \to ?$
- $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \to ?$

- $p>0$, $x_n := \sqrt[n]{p}$

se $p\geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{p} \geq 1$

(altrimenti, elevando all'n-esima potenza otterrei $p\leq 1$)

$\sqrt[n]{p} = 1+h_n, \quad h_n \geq 0$

→ ricordando Bernoulli

$p=(1+h_n)^n > 1+nh_n \Rightarrow \underset{\downarrow 0}{0}\leq \underset{\downarrow 0}{h_n} < \underset{\downarrow 0}{\frac{p-1}{n}}$ (per i due carab.)

$\boxed{\sqrt[n]{p} = 1+h_n \to 1+0 = 1}$

- $\sqrt[n]{p}$, $p<1$
- $\sqrt[n]{n}$

$\sqrt[n]{n} = 1+h_n \Rightarrow n=(1+h_n)^n \geq 1+h_n n \Rightarrow \underset{\downarrow 0}{0} \leq h_n \leq \underset{\downarrow 1}{\frac{n-1}{n}}$ non si può applicare il teorema dei due carab.

Osserviamo $(1+h_n)^n = \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} h_n^j}_{\text{applicando Newton}} = \underbrace{1+nh_n}_{\text{fin qui Bernoulli}} + \frac{n^2}{2}h_n^2 + \dots > \frac{n^2}{2}h_n^2$

Quindi, se $\sqrt[n]{n} = 1+h_n \Rightarrow n=(1+h_n)^n > \frac{n^2}{2}h_n^2 \Rightarrow$

$\underset{\downarrow 0}{0} < h_n < \underset{\downarrow 0}{\sqrt{\frac{2n}{n^2}}} = \underset{\downarrow 0}{\sqrt{\frac{2}{n}}}$

$\Rightarrow \boxed{\sqrt[n]{n} \to 1}$

- $\sqrt[n]{n^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$ utilizzando binomio di Newton

Questi casi i teoremi sul calcolo dei limiti non ci aiutano perché questi sono i casi indeterminati (come $\frac{0}{0}$)

oss. Per dimostrare che una success. non converge, è sufficiente estrarre due sottosuccess. che convergano a limiti distinti.

1. $x_n = (-1)^n$ è stata costruita così.
2. $x_n = \sin\left(\frac{3^{17}}{10^{10}+1}\pi n\right)$ Dimo. che non converge

esempi

3. $x_n = \sin n$ non converge → estraz. delle sottosuccess, metodo grafico (complicato) oppure il seguente:

Consideriamo (*) $x_{n+1} = \sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1$

Supponiamo che $x_n = \sin n \to \lambda \in [-1;1]$

allora, $x_{n+1} \to \lambda$ (per il teorema visto)

$\exists$ una success. n_k t.c. $\cos n_k \to \sqrt{1-\lambda^2}$ o $\cos n_k \to -\sqrt{1-\lambda^2}$

Restringiamo (*) a $x_{n_k+1} = \sin n_k \cos 1 + \cos n_k \sin 1$

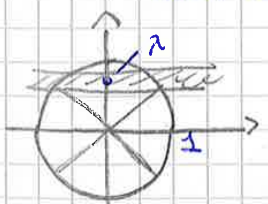
$\lambda \qquad \lambda\cos 1 \qquad +\sqrt{1-\lambda^2}\sin 1$ a oppure $-\sqrt{1-\lambda^2}\sin 1$ b

a) $\sqrt{1-\lambda^2}\sin 1 = \lambda - \lambda\cos 1$ elevo al quadrato

$\Rightarrow \sin^2 1\,(1-\lambda^2) = \lambda^2 - 2\lambda^2\cos 1 + \lambda^2\cos^2 1$

$\Rightarrow \sin^2 1 - \lambda^2(\sin^2 1 + \cos^2 1) = \lambda^2 - 2\lambda^2\cos 1$

$\sin^2 1 = 2\lambda^2(1-\cos 1)$



circonf. goniom. (r=1)

$\lambda^2 = \frac{\sin^2 1}{2(1-\cos 1)} < 1$ se il seno converge, c'è solo una limitazione su λ (non va bene quindi)

Ripetendo il ragionamento con x_{n+2} si ottiene

$\lambda^2 = \frac{\sin^2 2}{2(1-\cos 2)} \neq \frac{\sin^2 1}{2(1-\cos 1)}$ ⇒ seno non converge

osserv. $\forall y \in [-1;1]$, $\exists$ una sottosuccess. di $\sin n$ che converge a y.

Quindi è diverso dire $\sin(n\pi)$ $\sin(n)$ $\sin(n\frac{\pi}{2})$

esercizio: È pur esso vero che se tutte le sottosucc. di $\{x_n\}$ convergono a ℓ, anche la success. x_n converge a ℓ? E se $\ell = \pm\infty$? SI!

Limiti di funzioni

Le successioni sono un caso partic. di funzioni

$E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$

esempio: $E = [-1,1]$, $f: E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$

In questo caso la variab. x non può crescere indefinitamente, perché il suo modulo non può eccedere 1. Quindi non ha senso chiedersi il comport. asintotico di f "per grandi valori di x".
Ma al contrario di quello accade con $\mathbb{N}$, se $E = [-1,1]$, x può avvicinarsi arbitrariamente ad ogni punto di E. In altre parole, se $x_0 \in E \Rightarrow$
$\forall U \in V_{x_0} \ \exists\, x \in U$ t.c. $x \in E$, $x \neq x_0$

↳ intorno
↳ un intorno

Questa è la traduzione matematica della possibilità di avvicinarsi indefinitamente a x_0, e si realizza nella seguente definizione.

DEF. Sia $E \subset \mathbb{R}$. x_0 si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE di E se

$\forall U \in V_{x_0}$, $\exists\, x \in E \setminus \{x_0\}$

OSS. Se x è punto di accumul. di E, allora

$\forall U \in V_{x_0}$, $\exists$ infiniti punti $x \in E \setminus \{x_0\}$

NOTAZIONE L'insieme dei punti di accumulaz. di un insieme $E \subset \mathbb{R}$ si dice INSIEME DERIVATO di E e si indica con ∂E (si dice derivato di E)

Es. $E = \mathbb{N}$ $\quad \partial E = \emptyset$ perché $\mathbb{N}$ è costituito da punti isolati

→ intorno da 3,5 e 4,5, non è costit. da elem.

$E = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ $\quad \partial E = \{0\}$

$E = \mathbb{R}$, $\partial E = \mathbb{R}$ perché tutti i punti $\mathbb{R}$ sono punti di accumulaz.

$E = \mathbb{Q}$, $\partial E = \mathbb{R}$

Sia infatti $x_0 \in \mathbb{R}$ e $U \in V_{x_0}$

$\exists\, \delta > 0$ t.c. $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset U$

Per densità, $\exists\, z \in \mathbb{Q}$ t.c. $z \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$

periodo di ciascuno 2

$E = \{\operatorname{sen}(n\frac{\pi}{8}), n \in \mathbb{N}\} = \{0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{8}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{8}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{8}\pi, \pi, \frac{9}{8}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{11}{8}\pi, \frac{3}{2}\pi,$
$\frac{13}{8}\pi, \frac{14}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi, 2\pi\}$ è un insieme finito $\Rightarrow$ non ha punti di accumulazione !!!!!

Successioni: sottosuccessioni

Ogni successione ammette una sottosucc. monotona (wiki)

BW I: Ogni succ. limitata ammette una sottosucc. convergente

BW II: Ogni insieme limitato e infinito ha un punto di accumulazione.

def. $E \subset \mathbb{R}$; $\bar{x} \in \mathbb{R}$ si dice PUNTO DI ACCUM. di E se comunque si prende

$\forall U \in \mathcal{U}_{\bar{x}},\ U \cap E \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$

def. ∂E = insieme dei punti di accum. di E.

$\overline{\partial E}$ = "insieme derivato esteso" = $\begin{cases} \partial E & \text{se } E \text{ è limitato} \\ \partial E \cup \{+\infty\} & \text{se } E \text{ è limitato inf ma ill. sup} \\ \partial E \cup \{-\infty\} & \text{se } E \text{ è illim. inf ma lim. sup} \\ \partial E \cup \{\pm\infty\} & \text{se } E \text{ è ill. inf e sup.} \end{cases}$

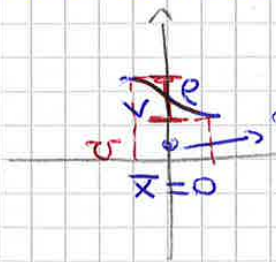
def. sia $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$,

$\bar{x} \in \overline{\partial E}$, $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. $\forall I_\varepsilon^{(\ell)}\ \exists I_{\delta_\varepsilon}^{(x_0)} \mid \forall x \in E \cap (I_{\delta_\varepsilon}^{(x_0)} - \{x_0\}) : f(x) \in I_\varepsilon^{(\ell)}$

Si dice che "f tende a ℓ per x che tende a $\bar{x}$", e si scrive

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$ se: (1)   DEF di limite in cui si utilizzano gli INTORNI.

$\forall V \in \mathcal{U}_\ell\ \exists U \in \mathcal{U}_{\bar{x}}$ t.c. $f(E \cap U \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$



questo è l'intorno di $\bar{x}$ che non ci sta nell'intorno U

intorno di $\bar{x}$ i cui punti vengono mandati dal grafico nell'intorno dell'immagine!

LIMITI DI FUNZ. PER SUCCESSIONI, PRIMI TEOREMI

La definizione appena data copre tutti i casi, compresi $\bar{x} = \pm\infty$, $\ell = \pm\infty$.
Ricordando la definizione di intorno, possiamo specificare la definizione (1) in vari casi:

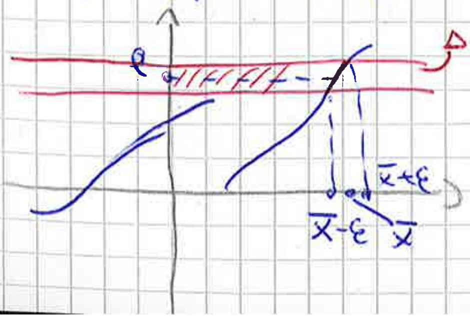
a) $\ell \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in E \setminus \{\bar{x}\}$, $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ DEF METRICA di limite

si ha $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

In questo caso si recupera la definizione (1) scegliendo

$V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon)$, $U = (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$



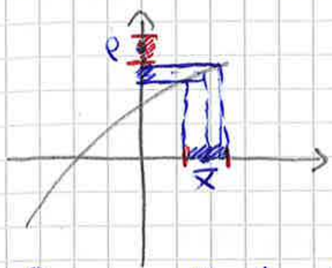
una strisciolina di raggio ε

$\boxed{\Leftarrow}$ Supponiamo per assurdo che non sia vero che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

PRIMO CASO: $\bar{x}, \ell \in \mathbb{R}$.

$\neg[\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. $0 < |x - \bar{x}| < \delta$ e $x \in E \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$

ossia $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ t.c. $\forall \delta > 0$ $\exists x_\delta \in E$ t.c. $0 < |x_\delta - \bar{x}| < \delta$ e $|f(x_\delta) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$



quindi c'è un intorno di $\bar{x}$ non all'interno di quello di ℓ

dipende dalla scelta.

Prendiamo $\delta = \frac{1}{n}$. Allora, $\exists x_n \in E$ t.c. $0 < |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n}$ e

$|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$

Al variare di n costruisco una successione $\{x_n\} \subset E \setminus \{\bar{x}\}$

$x_n = \underbrace{x_n - \bar{x}}_{< \frac{1}{n} \to 0} + \bar{x} \Rightarrow x_n \to \bar{x}$

ma $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon} \Rightarrow f(x_n) \not\to \ell$

$P \Rightarrow Q$

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

ma si può negare la tesi.

Assurdo: devo dimostrare $f(x) \to \ell \Leftarrow f(x_n) \to \ell$ $\forall \{x_n\}$ t.c. ...

quindi ho negato l'ipotesi avendo negato la tesi (ecco perché assurdo)

SECONDO CASO: esercizio. Abbiamo solo che $\bar{x}$ e ℓ non è finito (per esempio caso infinito)

$\neg[\forall \varepsilon > 0, \exists k > 0$ t.c. $x > k$ e $x \in E \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon]$

ossia $\exists \bar{\varepsilon} > 0$ t.c. $\forall k > 0$ $\exists x_k \in E$ t.c. $x_k > k \Rightarrow |f(x_k) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$

$k = \frac{1}{n}$, $\exists x_n \in E$ t.c. $x_n > k \Rightarrow |f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon}$

Al variare di n, costruisco una success. $\{x_n\} \subset E \setminus \{\bar{x}\}$

$x_n = x_n + \bar{x} \to \bar{x}$ ma $|f(x_n) - \ell| \geq \bar{\varepsilon} \Rightarrow f(x_n) \not\to \ell$ Assurdo perché ho negato sia solo l'ipotesi ma anche la tesi.

$< k$

$\frac{1}{n}$

$\to 0$

Concetti di funzione

ISOCRONISMO delle "piccole oscillazioni" cioè le oscillazioni hanno un periodo più grande quando sono più grandi

$$T(\alpha) > T\left(\frac{\alpha}{2}\right) > T\left(\frac{\alpha}{n}\right) \to \pi\sqrt{\frac{l}{g}} > 0$$

$T(A)$: funzione "periodo di oscillaz. del pendolo" in funzione dell'ampiezza

1. $T(A) \to \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $A \to 0$
2. Isocronismo
3. $v_{ist} = \lim_{\Delta t \to 0} \underbrace{\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{\text{velocità istantanea}}$

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\forall V \in U_l \ \exists U \in U_{\bar{x}}$ t.c. $f(U \cap E \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$

esercizi: dimostrare che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$

1. $\lim_{x \to \bar{x}} x^2 = \bar{x}^2$ $\quad \bar{x} \in \mathbb{R}$

È facile se ci si restringe a $V = (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ e $U = (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta)$

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.

$\delta(\varepsilon)$ da fissare in seguito.

$0 < |x-\bar{x}| < \delta \Rightarrow |x^2 - \bar{x}^2| = |x-\bar{x}||x+\bar{x}| \le \delta(|x|+|\bar{x}|) \le \delta(1+2|\bar{x}|) < \varepsilon$

(1)

1°: $\delta < 1 \Rightarrow |x| < |\bar{x}| + 1$ $\quad$ 2° disug. triang.

cioè $\delta(|\bar{x}|+1+|\bar{x}|) = \delta(1+2|\bar{x}|)$

per questo consid. 1° (dopo 1° scrivo questo)

Allora deve essere $\delta < \frac{\varepsilon}{1+2|\bar{x}|}$ (2)

TEOREMI DI BASE SU LIMITI DI FUNZIONI: DESTRO E SINISTRO

Da (1) e (2), abbiamo

$$\delta := \min\left(\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{2(1+2|\bar{x}|)}\right) > 0$$

Quindi, se $0 < |x-\bar{x}| < \delta \to |x^2 - \bar{x}^2| < \varepsilon$

2. $\lim_{x \to \bar{x}} x^n = \bar{x}^n$, $\quad n \in \mathbb{N}$ $\quad (\bar{x} \in \mathbb{R})$

Sia $\varepsilon > 0$, $\delta(\varepsilon)$ da fissare in seguito

$0 < |x-\bar{x}| < \delta \Rightarrow |x^n - \bar{x}^n| = |x-\bar{x}||x^{n-1} + x^{n-2}\bar{x} + \dots + \bar{x}^{n-1}|$

Teorema dei due carabinieri

$f, g, h : E \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$

(i) $g(x), h(x) \to \ell \in \mathbb{R}$, $x \to \bar{x}$

(ii) $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ $\forall x \in E \setminus \{\bar{x}\}$ (basta che valga in un intorno di $\bar{x}$)

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

DIMOSTRAZIONE: Sia $\{x_n\} \subset E \setminus \{\bar{x}\}$, t.c. $x_n \to \bar{x}$ → punto di accumul. per E

quindi si ha per la 1° parte del limite di successione:

$g(x_n), h(x_n) \to \ell$, $n \to +\infty$

$\Rightarrow g(x_n) \leq f(x_n) \leq h(x_n)$, per il teorema dei due carab. nelle successioni si ha

$f(x_n) \to \ell$.

Per l'arbitrarietà di $\{x_n\}$ e il teorema (2° parte) dei limiti di funz. per successione si ha che

$\Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

Teorema del confronto

$f, g : E \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$ → punto di acc.

(i) $g(x) \to +\infty$, $x \to \bar{x}$

(ii) $g(x) \leq f(x)$ $\forall x \in E \setminus \{\bar{x}\}$ $\Rightarrow f(x) \to +\infty$, $x \to \bar{x}$

DIMOSTRAZIONE: esercizio

DEF $U \in \mathbb{R}$ è detto **INTORNO DESTRO** (SINISTRO) di $\bar{x}$ se contiene un intervallo del tipo $[\bar{x}, \bar{x}+\delta)$, $\delta > 0$.
$(\bar{x}-\delta, \bar{x}]$

Notazione: $\mathcal{U}_{\bar{x},\pm} = \{U \subset \mathbb{R}$ t.c. U è intorno destro (sinistro) di $\bar{x}\}$

DEF. $E \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$, $f : E \to \mathbb{R}$.
Si dice che $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è **LIMITE DESTRO** (SINISTRO) di f per $x \to \bar{x}$ e si scrive
$\lim_{x \to \bar{x}^{\pm}} f(x) = \ell$, oppure $f(\bar{x}^{\pm}) = \ell$, oppure $f(\bar{x} \pm 0) = \ell$
se $\forall V \in \mathcal{U}_\ell$, $\exists U \in \mathcal{U}_{\bar{x},+}$ t.c. $f(U \cap E \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$

se $\ell \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \ell$ significa
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $0 < x - \bar{x} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$

Osservazione $U_1 \in \mathcal{U}_{\bar{x},+}$, $U_2 \in \mathcal{U}_{\bar{x},-} \Rightarrow U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}_{\bar{x}}$

TEOREMA: $E \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$, $f : E \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \ell$$
$$\Downarrow$$
$$\exists \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$$

DIMOSTRAZ: Sia $V \in \mathcal{U}_\ell$

$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \ell \Rightarrow \exists U_1 \in \mathcal{U}_{\bar{x},+}$ t.c. $f(E \cap U_1 \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$ $*$
$\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \ell \Rightarrow \exists U_2 \in \mathcal{U}_{\bar{x},-}$ t.c. $f(E \cap U_2 \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$ $**$

Definisco $U := U_1 \cup U_2 \in \mathcal{U}_x$

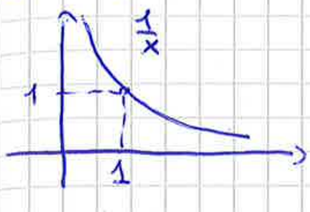
Se $x \in E \cap U \setminus \{\bar{x}\} = E \cap (U_1 \cup U_2) \setminus \{\bar{x}\}$
$= (E \cap U_1 \setminus \{\bar{x}\}) \cup (E \cap U_2 \setminus \{x\})$

Se $x \in E \cap U_1 \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow$ da $*$ $f(x) \in V$
Se $x \in E \cap U_2 \setminus \{\bar{x}\} \Rightarrow$ da $**$ $f(x) \in V$
$\Rightarrow f(E \cap U \setminus \{\bar{x}\}) \subset V$
$\Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

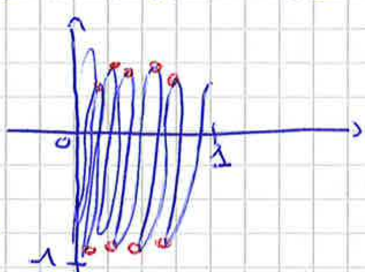
COROLLARIO: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

osserv. $\operatorname{sen} y$ non ha limite per $y \to +\infty$. Compie infinite oscillazioni (tra -1 e $+1$) nell'intervallo tra $[+1; +\infty)$

$\frac{1}{x}$ è l'argomento di sin, varia tra $+1$ e $+\infty$ quando varia ~~tra~~ in $(0,1]$



Quindi, quando x varia in $(0,1]$, $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ compie infinite oscillazioni tra -1 e 1



I punti di massimo vengono raggiunti quando per tutte le x t.c. $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$
ci limitiamo per $x > 0$

accorcia della lunghezza d'onda cioè due massimi consecutivi.

$\Rightarrow$ considero $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} = \dfrac{2}{4n\pi + \pi} \to 0$

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1 \to 1$

Analogamente $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$

Definiamo $x_n = \dfrac{1}{\frac{3}{2}\pi + 2n\pi} = \dfrac{2}{4n\pi + 3\pi} \to 0$

può stare esente

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = -1 \to -1$

Abbiamo trovato due successioni infinitesime tale che le corrispondenti funzioni formano successioni che convergono a limiti differenti

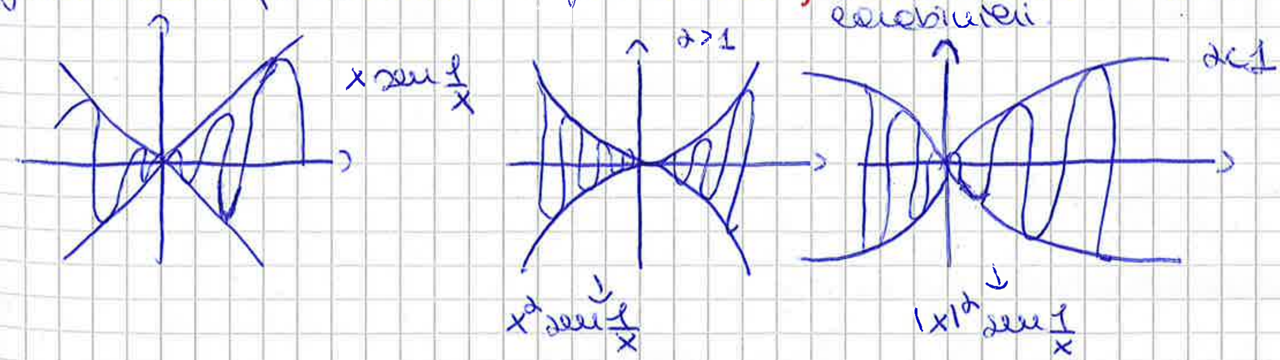
Per il TEOREMA DI RELAZIONE, $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ non ha limite per $x \to 0$

esempio $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\alpha > 0$

$x^\alpha \to 0$, $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1$

$0 \leq \left|x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq x^\alpha$, con $0 \to 0$ e $x^\alpha \to 0$. Per due carab. $x^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \to 0$ per $x \to 0^+$

Infinitesimo per limitato = infinitesimo } eredità delle successioni o dimostrare coi due carabinieri



Perché esiste tale successione?

Siccome $f(x)\to \ell$, $x\to\bar{x}$ per il Th di relazione abbiamo che

$f(x_n)\to \ell$, $n\to+\infty$

Siccome $g(y)\to k$, $y\to \ell$, $g(f(x_n)) = (g\circ f)(x_n)\to k$

Per l'arbitrarietà di x_n il teorema è dimostrato.

OSSERVAZIONE Due punti delicati:

(i) Perché esiste $\{x_n\}$ che soddisfa (i) e (ii)?

(ii) se ho la condizione (ii) del teorema, come faccio ad affermare che x_n è arbitrario?

SOLUZIONE: Si considera l'insieme delle controimmagini di ℓ

$f^{-1}(\ell)=\{x\in E, f(x)=\ell\}$

e si riapplica il teorema per la restrizione di f al dominio

$E\setminus f^{-1}(\ell)$

Applicazione: cambiamento di variabile

$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$ = (senza me limite notevole) $\quad \sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x/2}{x^2}$ = $\frac{1\cdot x^2\cdot\frac{1}{4}}{}$ molt. e div. $\times 4$ $\quad \cancel{2\sin^2\frac{x}{2}}$

$=\lim_{x\to0}\frac{2}{4}\frac{\sin^2 x/2}{(\frac{x}{2})^2} = \lim_{x\to0}\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}$

come

Definiamo $f(x)=\frac{x}{2}$, $g(y)=\frac{\sin^2 y}{y^2}\frac{1}{2} \Rightarrow (g\circ f)(x)=\frac{\sin^2(x/2)}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{1}{2}=g\left[\frac{x}{2}\right]$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}\frac{1}{2}=\lim_{y\to0}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cdot\frac{1}{2}=\lim_{y\to0}\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{\downarrow 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}}_{\downarrow \frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}}$$

$\lim_{x\to\bar{x}}(g\circ f)(x)=\lim_{y\to \ell}g(y)$ con $\ell=\lim_{x\to\bar{x}}f(x)$

Più esplicitamente: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{(\frac{x}{2})^2}$ = cambio variabile $y=\frac{x}{2}$

$=\lim_{y\to0}\frac{\sin^2 y}{y^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

DIMOSTRAZIONI: $\frac{F+f}{G+g} = \frac{F}{G}\left(\frac{1+\frac{f}{F}}{1+\frac{g}{G}}\right) \to 1$ $\frac{f}{F} \to 0$, $x \to \bar{x}$, $f = o(F)$; $\frac{g}{G} \to 0$

$G \neq 0$ perché $g = o(G)$

Se $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F}{G}$ esiste, esso è uguale a $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F+f}{G+g}$

Viceversa, se il $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F}{G}$ non esiste, allora non esisterà il $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{F+f}{G+g}$ segue da una facile applicazione del teorema di relazione

Esempi: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1}$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \frac{(x + o(x))^2}{-\left(\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)} = \frac{(x+o(x))\cdot(x+o(x))}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{x^2 + 2x \cdot o(x) + (o(x))^2}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} \; *$$

Osserviamo che $2x \cdot o(x) = o(x^2)$ (1) Infatti, $\frac{2x\, o(x)}{x^2} = \frac{2\, o(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

$\Rightarrow$ (1) è dimostrato

Inoltre $[o(x)]^2 = o(x^2)$. Infatti, $\frac{[o(x)]^2}{x^2} = \frac{o(x)}{x} \cdot \frac{o(x)}{x} \to 0$, $x \to 0$

$*$ $\frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}$ per il principio di trascurabilità, per $x \to \bar{x} = 0$ i termini $o(x^2)$ possono essere trascurati

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -2$$

OSSERVAZIONI

1) $f\, o(g) = o(fg)$ dove: $\frac{\cancel{f}\, o(g)}{\cancel{f} g} \to 0$

2) $[o(g)]^2 = o(g^2)$ dove: $\frac{[o(g)]^2}{g^2} = \frac{o(g)}{g} \cdot \frac{o(g)}{g} \to 0$

Equivalenze: $f \sim g$, $x \to \bar{x}$ se $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f}{g} = 1$

Esempio: $\sin x \sim x$
$\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$

Casi notevoli del principio di trascurabilità $\boxed{\frac{F+f}{G+g} \sim \frac{F}{G}}$ $\leftarrow$ PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE es. $x = o(x^2)$ per $x \to +\infty$

$\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0$, $x \to +\infty$

Però $x^2 = o(x)$, per $x \to 0$

Infatti, $\frac{x^2}{x} = x \to 0$, $x \to 0$

Questi sono i simboli di LANDAU

Sia $\ell \in \mathbb{R}$,

$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell \iff \boxed{f(x) = \ell + o(1)}_{x\to\bar{x}}$

DIMOSTRAZ: se $f(x) = \ell \Rightarrow \frac{f(x)-\ell}{1} \to 0$, $x \to \bar{x} \Rightarrow f(x) - \ell = o(1)$, $x \to \bar{x}$

$\iff f(x) = \ell + o(1)$ per $x \to \bar{x}$

Se, viceversa $f(x) = \ell + o(1) \Rightarrow f(x) - \ell = o(1) \iff f(x) - \ell = \frac{f(x)-\ell}{1} \to 0$ per $x \to \bar{x}$

$\Rightarrow f(x) \to \ell$ per $x \to \bar{x}$

es. • $f = o(1)$ per $x \to \bar{x}$, significa "f infinitesima per $x \to \bar{x}$"

• $\lim_{x\to\bar{x}} \frac{f}{g} = \ell \in \mathbb{R} \iff \boxed{f(x) = \ell \cdot g(x) + o(g)}$, $x \to \bar{x}$

Importante nello sviluppo di Taylor!

esempio $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \to \boxed{\sin x = x + o(x)}$ $x \to 0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}_{x\to 0}$

$\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$, il $\sin x$ è, per x vicino a 0, uguale a x, e però termini che sono TRASCURABILI rispetto a x

TEOREMA (PRINCIPIO DI TRASCURABILITÀ O DEGLI "O PICCOLO")

$F, f, G, g : E \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$

$f = o(F)$, $g = o(G)$, $x \to \bar{x}$

$\Downarrow$

$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{F(x) + f(x)}{G(x) + g(x)}$ esiste se e soltanto se $\exists \lim_{x\to\bar{x}} \frac{F(x)}{G(x)}$ e i due limiti sono uguali, in caso di esistenza.

quindi le parti meno importanti non le sono, ecco perché vale ciò solo

2) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$(x-1)(x^3+x^2+2x+2) = 0$

$(x-1)(x+1)(x^2+2) = 0 \;\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

o anche con sostituzione $x^2 = t$

	1	0	1	0	-2
1		1	1	2	2
	1	1	2	2	//

	1	1	2	2
-1		-1	0	-2
	1	0	2	//

3) $p(x) = x^4 + 1$

$p(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) = \cancel{x^4} - 2x - \sqrt{2}x$
$x^4 + \cancel{\sqrt{2}x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{x^3\sqrt{2}} - 2x^2 + \cancel{\sqrt{2}x} + x^2 + \cancel{\sqrt{2}x} + 1 = x^4 + 1$ attenzione ai segni!

$p(x) = (x^2+1)(x+1)(x-1) = (x^2+1)(x^2-1) = x^4 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - 1 =$

$p(x) = (x-1)(x^3+x^2+x+1) = x^4 + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + \cancel{x} - \cancel{x^3} - \cancel{x^2} - \cancel{x} - 1$

$p(x) = (x+1)^2(x-1)^2 = (x^2+1+2x)(x^2+1-2x) = x^4 + x^2 - \cancel{2x^3} + x^2 + 1 - \cancel{2x} + \cancel{2x^3} + \cancel{2x}$ $4x^2$

4) $x^2 + 1 > 2|x+1|$ $\quad |x+1| = \begin{cases} x+1 & x \geq -1 \\ -x-1 & x < -1 \end{cases}$ $\quad x < 1-\sqrt{2}$ vel $x > 1+\sqrt{2}$

$\begin{cases} x^2+1 > 2x+2 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+1 > -2x+2 \\ x < -1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x^2 - 2x - 1 > 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2+2x-1 > 0 \\ x < -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1 \pm \sqrt{1+1}}{1} \\ x \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{1-1} \\ x < -1 \end{cases}$

attenzione questo è corretto segno

$\begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 1 > 2x+2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < -1 \\ x^2+1 > -2x-2 \end{cases}$

$-1 < x < 1-\sqrt{2}$ vel $1+\sqrt{2} < x < +\infty$

5) $\frac{2x-1}{5-x} < 2$ $\quad \frac{2x-1-10+2x}{5-x} < 0$ $\quad n > 0 \;\; 4x - 11 > 0 \;\; x > \frac{11}{4}$

$x \neq 5$

$d > 0 \quad 5 - x > 0 \quad -x > -5 \quad x < 5$

$x < \frac{11}{4}$ vel $x > 5$

!! PRODOTTO DEI SEGNI

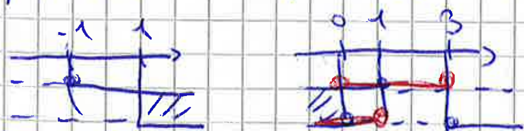
6) $\sqrt{x+1} \geq 1 - x$ $\quad$ D: $x \geq -1$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}$ perché la radice è sempre ≥ 0

$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$ vel $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+1 \geq (1-x)^2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x \geq -1 \\ x > 1 \end{cases}$ vel $\begin{cases} x \leq 1 \\ x+1 \geq 1 + x^2 - 2x \end{cases}$

$x^2 - 3x \geq 0 \quad x^2 - 3x \leq 0$

$x(x-3) \geq 0 \quad x(x-3) \leq 0$

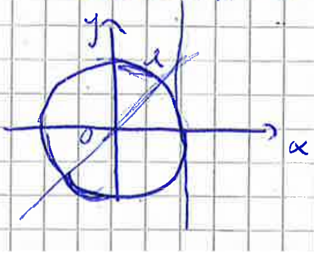
$x \leq 0$ vel $x \geq 3 \quad 0 \leq x \leq 3$



$0 \leq x \leq 1$

$\Longrightarrow x \geq 0$

7) $\operatorname{sen} x > \cos x$
$\operatorname{tg} x > 1$



$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$

$\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$

FUNZIONI

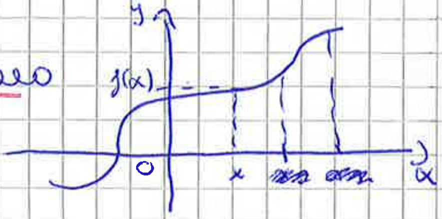
$f: A \longrightarrow B$

dominio codominio

$f: X \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dominio è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

ecc.

ogni funzione può essere rapp. sul piano cartesiano



associa ad un elemento un elemento del codominio] FUNZIONE

l'insieme dei punti del piano

$graf(f) = \{(x;y) \in X \times \mathbb{R} : y = f(x)\}$] GRAFICO di una FUNZIONE

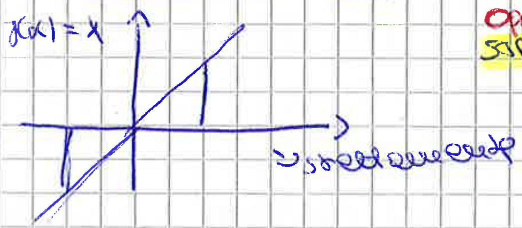
Ad ogni elem. corrisponde una rappresent. (che è biunivoca)

DEF $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

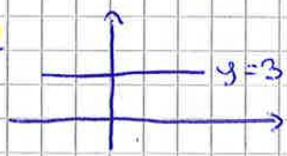
MONOTONA NON DECRESCENTE $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

oppure STRETT. CRESC

$f(x) = x$



→ strettamente

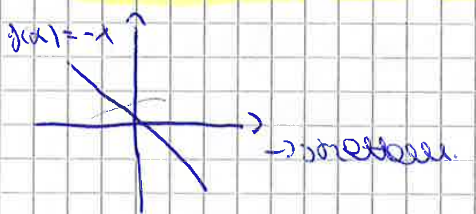


$y = 3$ non è strettam. né cresc. né decresc.

MONOTONA NON CRESCENTE $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

oppure STRETT DECRESC

$f(x) = -x$



→ strettam.

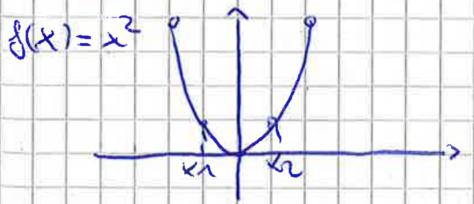
OSSERVAZIONE f STRETT. MONOTONA $\Rightarrow$ INIETTIVA

DEF $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ il codominio è $\mathbb{R}$, non è detto che tutti i valori di $\mathbb{R}$ vengano raggiunti

PARI $x \in X \to -x \in X$ $f(x) = f(-x)$

DISPARI $x \in X \to -x \in X$ $f(-x) = -f(x)$

$f(x) = x^2$



non iniettiva
non suriettiva

non è suri.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

l'immagine del dominio è $\mathbb{R}^+$ che non è il codom.
$[0; +\infty)$

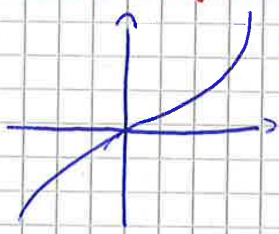
Simm. rispetto l'ordinata $\Rightarrow$ PARI

non è suri.

Hanno lo stesso ordinata x_1 e x_2

non è monotona, perché [illegible] intervallo.

Le radici (funzioni inverse delle potenze)

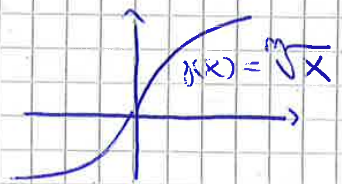
• 

n DISPARI

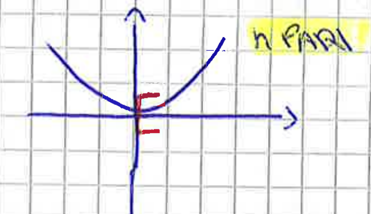
$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
iniettiva, suriettiva

$f^{-1}: \underbrace{f(\mathbb{R})}_{\text{è } \mathbb{R}} \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ → so già esistenza, calcolarlo, [illegible] la funz. [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] del cosa [illegible]

è $\mathbb{R}$ perché la funz. è suriettiva



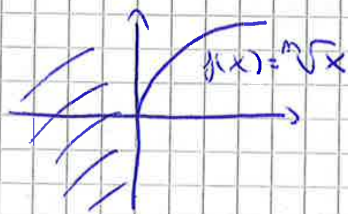
è iniett, suriettiva, strett. crescente, dispari (simm. rispetto O)
→ origine

• 

n PARI

$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no suriettiva in $\mathbb{R}$
no iniett. su tutto $\mathbb{R}$ quindi non posso invertire ⇒ restringo il codominio a $\mathbb{R}^+$, la funz. diventa iniettiva

$f^{-1}: \underbrace{f(\mathbb{R}^+)}_{\mathbb{R}^+} \to \mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ecco perché le radici con indice pari hanno le cond. di esist.



né pari, né dispari, perché il dominio dovrebbe essere simm. rispetto l'origine
strett. cresc.

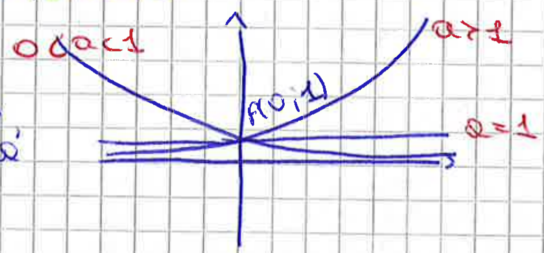
il logaritmo è l'inverso di esp

Gli esponenziali

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ quindi a viene FISSATO, x varia

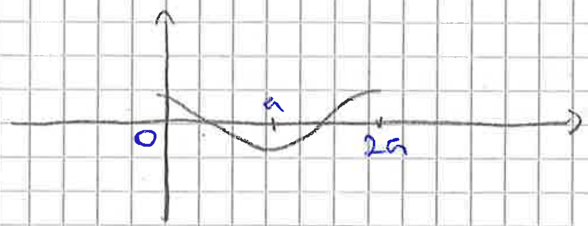
$f(x) = a^x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

3 CASI:
1. $a > 1$ (cresce veloc. a $+\infty$, tende a 0 a $-\infty$, interseca y nel punto $(0,1)$)
2. $0 < a < 1$
3. $a = 1$ caso degenere



1. Iniett, no suriett perché è vero del dominio $\mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ monotona strett. crescente, né pari, né dispari anche se il dominio è simmetrico
2. Iniett, no suriett perché $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, strett. decresc, né pari né dispari
3. No iniett (perché è costante la funz) no suriett perché $f(\mathbb{R}) = \{1\}$

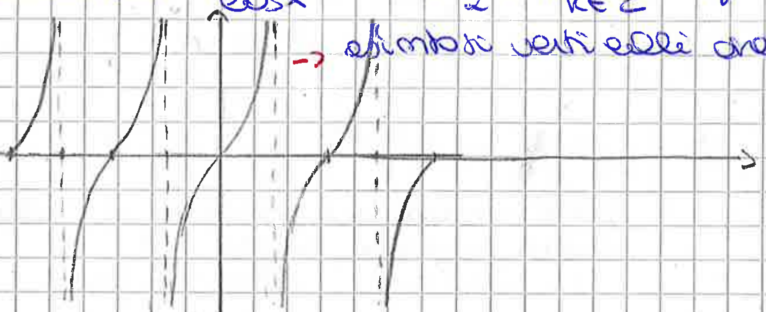
$f(x) = \cos x$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Il minimo in π, il massimo in 0, si annulla in $\frac{\pi}{2}$

PROPRIETÀ: né iniett., né suriettiva perché l'insieme immagine $f(\mathbb{R}) = [-1;1]$ pari (simmetrica rispetto y). Né monotona

$f(x) = \tg x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi_{\ k \in \mathbb{Z}}$ $f: \mathbb{R} \setminus \{x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$



→ asintoti verticali ai punti esclusi dal dominio

periodo $= k\pi$

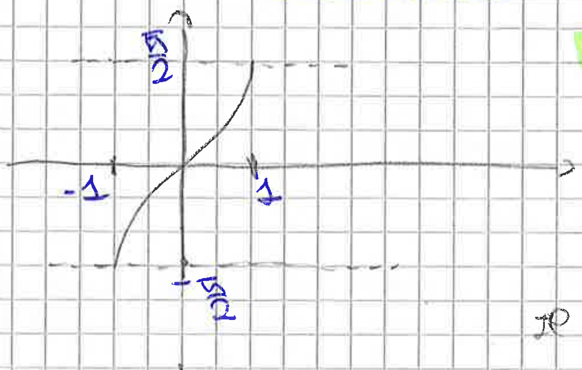
PROPRIETÀ: né iniettiva, sì suriettiva perché tutti i valori in $\mathbb{R}$ vengono raggiunti. No monotona. Dispari (simmetrica rispetto a 0, anche il suo dominio lo è)

Funzioni trigonometriche inverse

Restringere il dominio, in modo che la funzione sia iniettiva

$\operatorname{sen} x : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ quindi invertibile

arcsen: $\operatorname{sen}(\underbrace{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}_{\text{è crescente}}) \to \mathbb{R} \implies [-1;1] \to \mathbb{R}$



PROP: è iniettiva, non è suriettiva, monotona strett. crescente, dispari; non è periodica

arcsen $[-1;1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

Il codominio f^{-1} è l'insieme di dominio!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 300

Quiz di Adoni (correzione)

3.1 $A \cap (B \cup C) = \phi$

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = \phi$

3.2 CARDINALITÀ di un insieme o "#A" è il numero di elementi che costituiscono A.

CARD $(A) = n$ $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$ → numero di elementi

$\mathcal{P}(\phi) = \{\phi\}$ → infatti $n = 0$ $2^0 = 1$ → 1 elemento

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$ → insieme delle parti del vuoto

$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))) = \{\phi, \{0\}, \{\{\phi\}\}\}$

4.3 $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = \sqrt{x}$ (e)

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $g(x) = 2x - 1$

$g \circ f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

è il codominio di f: $f(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$

$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non è possibile perché non si può applicare su tutto $\mathbb{R}$ la $f(x)$ perché il D di f è $\mathbb{R}^+$!!!

$g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$[\frac{1}{2}; +\infty) \to \mathbb{R}$ così sì perché $2x - 1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$

$g \circ f(x) = g(f(x)) = 2(f(x)) - 1 = 2\sqrt{x} - 1$ → D: $x \geq 0$ quindi $\mathbb{R}^+$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{2x-1}$ → D: $2x - 1 \geq 0$, $x \geq \frac{1}{2}$ quindi $[\frac{1}{2}; +\infty)$

5.1 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ $\inf(\Omega) = 3$, $\sup(\Omega) = 10$ (c)

$\exists u \in \Omega : u < 6$ questo coerente che $\inf = 3$

Per dire assurdo: $\forall u \in \Omega \Rightarrow u \geq 6$ ma se $\inf = 3$ ed è il più grande dei minoranti, allora si contraddirebbe l'ipotesi!

2 $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}]$ (a)

$\sup(A) = 1$, $1 \notin A$

$n = 1$ ... $A_1 = \{0\}$ $n = 2$: $A_2 = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ $n = 3$: $A_3 = [-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}]$

Al crescere di n, la prima parte tende a −1 e la seconda a 1
⇒ unione risulta un intervallo aperto $(-1; 1)$

3. $E = \{ x \in [3,5[\, , \, x = \frac{5n-2}{n} \, , \, n \in \mathbb{N}^+ \}$

cioè x è reale

$x_n = 5 - \frac{2}{n}$ crescente

per $n=1$ $x_1 = 5-2 = 3$
per $n \to +\infty$ $x_n = 5$

inf(E) = 3 ma anche è il min   sup(E) = 5 ed anche max(E) = 5 perché la successione tende a 5 ma non viene mai raggiunto !!!

4. $E = \mathbb{N}_+ \cup \{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{1}{m} \, , \, m \in \mathbb{N}_+ \}$

per $m=1$ $x_1 = 1$
per $m \to +\infty$ $x_n = 0$

inf(E) = 0 che non è il minimo   sup(E) = +∞ perché è illimitato superiormente

$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x_n}\right)^{x_n} = e^{a}$

Confronto tra infiniti

TEOREMA: (CRITERIO DEL RAPPORTO)

$\{x_n\}$ $x_n > 0$ $\forall n$

Allora: $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda$

a) se $0 \le \lambda < 1 \Rightarrow x_n \to 0$

b) se $\lambda > 1$ $\forall +\infty \Rightarrow x_n \to +\infty$

esempio $x_n = n$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$
$\downarrow$
$+\infty$

$x_n = \frac{1}{n} \to 0$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} \to 1$ $\Rightarrow$ anche se sono uguali: nel 1° caso $x_n \to +\infty$ nel 2° caso $\frac{1}{n} \to 0$

$\log_a n$, n^b, e^n, $n!$, n^n } successioni fondamentali col e' elevati con essi tendono a $+\infty$ per $n \to +\infty$

$\frac{\log_a n}{n^b} \to 0$ l'infinito sotto è di un ordine superiore a quello sopra $\Longleftrightarrow \frac{n^b}{\log_a n} \to +\infty$

1). $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ $\underbrace{a>1 \; b>0}_{\text{parametri fissi}}$ $\forall$ valore

$\frac{n}{a^n} \to 0$ con esponente 1 cioè $b = 1$ (1)

$x_n = \frac{n}{a^n}$ $\to \lambda > 1$ perché è $x_{m+1} \cdot \frac{1}{x_m}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n} =$

$= \frac{n+1}{a^{n+1}} \cdot \frac{a^n}{n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{a} \to \frac{1}{a}$ essendo $a > 1 \Rightarrow \frac{1}{a} < 1$ quindi caso a $\Rightarrow x_n \to 0$
$\downarrow$
1

$\frac{n^k}{a^n} \to 0$ $k \in \mathbb{N}$ (2)

$\frac{n^k}{a^n}$ vale anche per k $\frac{n^k}{a^{n\frac{k}{k}}} = \left(\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n}\right)^k =$ questo per $k \geq 1$ perché per $k = 0$ $\frac{n^0}{a^n} = \frac{1}{a^n} \to 0$

$= \left(\frac{n}{A^n}\right)\left(\frac{n}{A^n}\right) \cdots \left(\frac{n}{A^n}\right)$ sono k elementi!

$A = a^{\frac{1}{k}} > 1$

Rapporto fra due polinomi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{q(n)}$$

$p(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$ DEG k (grado)

$q(n) = b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_0$ DEG l (grado) (elle)

$a_k, b_l \neq 0$

1. $\underbrace{k > l}_{\text{non sono zero}} \leadsto A = \pm\infty$ $\quad a_k b_l \gtrless 0$
2. $k < l \leadsto A = 0$
3. $k = l \leadsto A = \frac{a_k}{b_l}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{\log_a n} = \pm\infty \quad \text{cioè} \quad *$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log_a n}{n^b} = 0$$ → non esiste se tende $+\infty$ o $-\infty$

CASO 1: $a > 1$ $\quad \log_a n \to +\infty$ per $n \to +\infty$

$x_n = \log_a n \to +\infty$ applichiamo l'osserv. precedente cioè $\frac{x_n}{A^{x_n}} \to 0$

$n^b = a^{\log_a n^b} = a^{b\log_a n} = (a^b)^{x_n} = A^{x_n}$ se $a > 1$: $a^b > 1$ e $a^b = A$

quindi $\frac{\log_a n}{n^b} = \frac{x_n}{A^{x_n}} \to 0$

CASO 2: $0 < a < 1$

$$\left|\frac{\log_a n}{n^b}\right| = \left| -\frac{\log_{1/a} n}{n^b} \right| = \frac{\log_{1/a} n}{n^b}$$ → per la proprietà dei logaritmi

$0 < a < 1$: $\frac{1}{a} > 1$

quindi per il caso 1 $\frac{\log_{1/a} n}{n^b} \to 0$

$$\underbrace{-\left|\frac{\log_a n}{n^b}\right|}_{\downarrow 0} \le \underbrace{\frac{\log_a n}{n^b}}_{\downarrow 0} \le \underbrace{\left|\frac{\log_a n}{n^b}\right|}_{\downarrow 0}$$ } ogni numero si comporta così

per teorema del confronto

3. $\{x_n\}$ NON REGOLARE $\Leftrightarrow \exists \{x_{n_k}\}\ \{x_{n_j}\}$ REGOLARI CON LIMITI DIVERSI

perciò caratterizzazione di $\Rightarrow$

DIMOSTRA ($\Leftarrow$): segue d. teorema 2.

$A \Rightarrow B$

$\neg B \Rightarrow \neg A$

DIMOSTRA ($\Rightarrow$): $\{x_n\}$ non regolare segue d. teorema 3 e 1.

$\exists \{x_{n_k}\}$ regolare, $x_{n_k} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$x_n \not\to \ell$ perché non regolare, allora utilizziamo ...

$\exists \{x_{n_j}\}\ \exists \varepsilon > 0\ |x_{n_j} - \ell| > \varepsilon$ utilizziamo di nuovo teorema 3 e 1 per estrarre una sottosucc. regolare!

$\exists \{x_{n_k}\}$ sottosucc. regolare

$\{x_{n_j}\}$ quindi il limite non può essere uguale per il concetto della distanza

$x_{n_k} \to \bar{\ell} \neq \ell \quad |\bar{\ell} - \ell| \geq \varepsilon \qquad |x_{n_j} - \ell| > \varepsilon$

Abbiamo considerato $\ell \in \mathbb{R}$ ma vale anche se il limite è $\pm\infty$.

4. $\{x_n\}$ t.c. $\forall \{x_{n_k}\} \xrightarrow{\text{sottosucc.}} \exists \{x_{n_{k_j}}\}$

$x_{n_{k_j}} \to \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow x_n \to \ell$

DIMOSTRAZ.: per assurdo.

$x_n \not\to \ell \in \mathbb{R}$ per il teorema $\exists \varepsilon > 0\ \exists \{x_{n_k}\}\ |x_{n_k} - \ell| > \varepsilon$

$\nexists\ x_{n_{k_j}} \to \ell \qquad |\bar{\ell} - \ell| > \varepsilon$

estratta dalla sottosucc. x_{n_k}

esercizi su insiemi estremi

1. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = 3^n - \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_+\}$

$n=1 : x = 3 - \frac{1}{1} = 2$

$n \to +\infty : x \to +\infty$

$\inf(E) = 2$ $\min(E) = 2$ $\sup(E) = +\infty$

2. $E = (0,3) \cup \{x \in \mathbb{R} : x = 4 - \frac{1}{n^2}, n \in \mathbb{N}_+\}$

$n=1 : x = 4 - 1 = 3$

$n \to +\infty : x \to 4$

$\inf(E) = 0$ che non è il min perchè non appartiene

$\sup(E) = 4$ non è il max perchè $x \to 4$, non lo raggiungerà mai

3. $E = \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}_+\}$

$n=1 : x = -1$

$n \to +\infty : x \to 0$

$\inf(E) = -1$ $\min(E) = -1$ $\sup(E) = +\infty$ perchè è il sup.

4. $E = \{x \in \mathbb{R} : x = -\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}_+\}$

$n=1 : x = 1$ considerando $(-1)^n n^2 : n \in \mathbb{N}$

$\sup = +\infty$ $\inf = -\infty$

$n \to +\infty : x \to$ non esiste $\nexists \cdot 0$ $\inf = -\infty$ $\sup = 1$

$\inf(E) = 1$ $\min(E) = 1$

5. $E = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{n}, 0\right)$

$n=1 : E = (-1, 0)$

$n=2 : E = (-\frac{1}{2}, 0)$ $\quad$ chiedo intersez.: $\sup(E) = \inf(E) = 0$

$n=3 : E = (-\frac{1}{3}, 0)$

$n \to +\infty : E = \{0\}$

$n=1 : -1$

$n \to +\infty : 0$

$\inf(E) = -1$ $\sup(E) = 0$

6. $E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, 3n]$

$n=1 : E = [1, 3]$

$n=2 : E = [2, 6]$

$n=3 : E = [3, 9]$

$n \to +\infty : E = (+\infty, +\infty)$

$n=1 : 1$ e 3

$n \to +\infty : +\infty$ e $+\infty$

chiedo unione: $\sup(E) = \cancel{\max(E)} = +\infty$

$\inf(E) = 1$

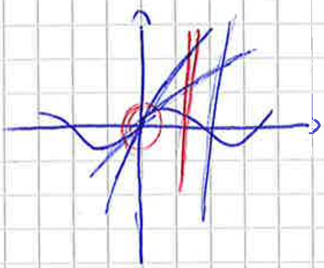
perchè è il + piccolo

Min $= [1; 3]$ $\sup(E) = +\infty$

Discontinuità e continuità

Simboli di Landau: "o piccolo" $\sim$ equivalenza

confronto locale: $\operatorname{sen} x \sim x \sim \operatorname{tg} x$, $x \to 0$



1. $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell_{AR} \iff f(x) = \ell + o(1)$, $x \to \bar{x}$
   $f(x) \sim \ell$, $x \to \bar{x}$

2. $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell_{AR} \iff f(x) = \ell g(x) + o(g(x))$, $x \to \bar{x}$
   $f(x) \sim \ell g(x)$, $x \to \bar{x}$

confronto fra infinitesimi e infiniti $\to$ stesse cose dette

DISCONTINUITÀ

si dice continua se i due limiti sono FINITI e UGUALI

$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \ell_+$ $\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \ell_-$

$\ell_+, \ell_- \in \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$] devono essere

Se $\ell_+ = \ell_-$ allora $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell_+ = \ell_-$

se $\ell_+ \neq \ell_-$ allora $\nexists \lim_{x \to \bar{x}} f(x)$

se esiste ℓ ($\ell^- = \ell^+$), allora la f nel punto o non ha valore o se esiste è diverso dal limite

1) si dice che f ha una DISCONTINUITÀ ELIMINABILE in $\bar{x}$ se:

perché la posso modificare $g(x)$ è definita come $f(x)$ tranne in $\bar{x}$ (assume valore diverso da $f(x)$), dove è uguale al limite.

(i) $\ell_+ = \ell_-$ III SPECIE

(ii) $\bar{x} \in \operatorname{Dom} f$ e $f(\bar{x}) \neq \ell_+ (= \ell_-)$ oppure $\bar{x} \notin \operatorname{Dom} f$

es. $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ $0 \notin \operatorname{Dom} f$

se dominio massimale (o "campo di esistenza") dell'espress. $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

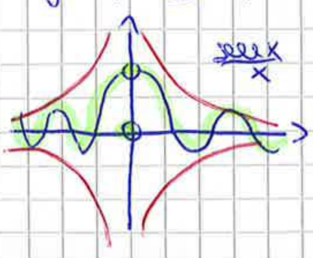
$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

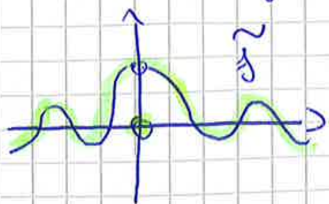
prendo la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} f(x) & \forall x \in D, x \neq \bar{x} \\ \ell & x = \bar{x} \end{cases}$$

è definita anche in zero e realizza $\tilde{f}(0) = \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell_+ = \ell_-$

idea $\to$ discont. eliminab.





© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 300

Limiti di funzioni monotone

$f: E \to \mathbb{R}$ si dice monotona strett. crescente / decrescente se

$\forall x, y \in E$, $x < y \Rightarrow f(x) \lesseqgtr f(y)$

$f(x) \gtrless f(y)$

es. $f(x) = x^{10000001} + x - \pi$ $\quad E = \mathbb{R}$

monotona crescente (strett.)

$x, y \in \mathbb{R}$, $\quad x < y$

3 CASI:

(i) $0 \le x < y$

$x^{10000001} < y^{10000001}$ e $x < y$

Sommando membro a membro $\Rightarrow x^{1000001} + x + \pi < y^{10000001} + y + \pi$

(ii) $0 < x \le y \Rightarrow x < y$

Abbiamo usato il fatto che 10000001 è dispari $\Rightarrow x^{1000001} < 0 \le y^{1000001}$

Di nuovo sommando membro a membro

(iii) $x < y < 0$ (come (i))

Anche qui si usa che 10000001 è dispari

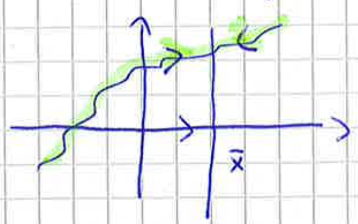
es. $f(x) = x^{100000001} - x - \pi$ è monotona cresc. su $\mathbb{R}$?

TEOREMA: $E \subset \mathbb{R}$, $f: E \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \partial E$,

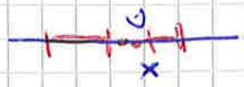
$\bar{x} \in \mathring{E}$, ossia, $\exists U \in V_{\bar{x}}$ t.c. $U \subset E$ allora,

$\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = \ell_- = \sup_{(-\infty, \bar{x}) \cap E} f(x) \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \bar{x}^+} f(x) = \ell_+ = \inf_{(\bar{x}, +\infty) \cap E} f(x) \in \mathbb{R}$



OSS. 2 suppon. $\bar{x} \notin \partial E \Rightarrow \exists\, U \in U_{\bar{x}}$ t.c. $U \cap E = \{\bar{x}\}$



$\forall V \in U_{f(\bar{x})}$, $f(U \cap E) = f(\{\bar{x}\}) = \{f(\bar{x})\} \subset V$

esempi

1) $f(x) = x^n \quad x \in \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \partial E = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \bar{x}} x^n = \bar{x}^n = f(\bar{x})$

$\Rightarrow f$ è continua in $\bar{x}$

$\Rightarrow$ ($\bar{x}$ arbitr.) f è continua su tutti i punti di $\mathbb{R}$

2) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \quad \forall x \in \mathbb{R} = \partial E$

f è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$

3) $f(x) = \cos x \quad$ idem

4) $f(x) = \frac{1}{x}, \quad E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

è continua in E

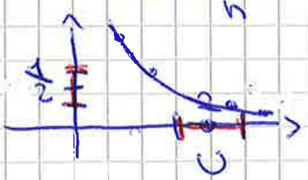
Ho una discont. in 0

Posso dire che f non è continua in 0?

NO: la continuità è definita solo per elementi del dominio, e f è continua su tutti gli elementi del suo dominio.

5) $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto \frac{1}{n}$



$U = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$

$U \cap [\mathbb{N} \setminus \{0\}] = \{2\}$

$f(U \cap [\mathbb{N} \setminus \{0\}]) = \{f(2)\} = \{\frac{1}{2}\}$

f è continua nel punto 2?

Sia $V \in U_{\frac{1}{2}}$ scelto arbitrar.

$f(U \cap (\mathbb{N} \setminus \{0\})) \subset V$

$\Rightarrow f$ è continua in $\frac{1}{2}$

Funzioni monotone

$f: E \to \mathbb{R}$

monotona crescente / decrescente su E se $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ / $f(x) \geq f(y)$

Punto di accumulazione

$\bar{x}$ punto di acc. di E, interno a E, f crescente / decrescente $\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) \leq \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x)$ / $\geq$

se $\bar{x} \in E \Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}^-} f(x) \leq f(\bar{x}) \leq \lim_{x\to\bar{x}^+} f(x)$

Discontinuità

(I) "Eliminabile" $f(\bar{x}+) = f(\bar{x}-) \in \mathbb{R}$

(II) "Tipo salto", I specie $f(\bar{x}+) \neq f(\bar{x}-) \in \mathbb{R}$ $\sigma(\bar{x}) =$ "salto"

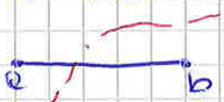
(III) II specie: tutte le altre

$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x}$

TEOREMA: $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ monotona.

Allora, f ammette al più un'infinità numerabile di punti di discontinuità, e tali discontinuità sono tutte di tipo salto.

DIMOSTR.: Supponiamo f crescente. Per monotonia, $\exists f(x+), f(x-)$, $\forall x \in (a,b)$, ed $\exists f(a+)$



Non esistono discont. eliminabili

Supponiamo che $\forall x \in (a,b)$

$f(x-) \leq f(x) \leq f(x+)$ (1)

Se c'è una discont. elimin. in x, allora $f(x-) = f(x+)$, quindi (1) implica $f(x) = f(x-) = f(x+)$

Inoltre, in tutti i punti è definita la funzione "salto":

$\sigma(x) = f(x+) - f(x-) \quad \forall x \in (a,b)$

Ora, sia $x \in (a,b)$

$$f(b) - f(a) = \overbrace{f(b) - f(x+)}^{\geq 0} + f(x+) - f(x-) + \underbrace{f(x-) - f(a)}_{\geq 0}$$

es. (dovuto a [illegible])

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \quad p, q \in \mathbb{N} \text{ primi fra loro} \end{cases}$$

Quali punti di discont.?

Se x è razionale, es $x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}$. In ogni intorno di $x = \frac{1}{2}$ cadono infiniti punti irrazionali sui quali f vale zero $\Rightarrow \frac{1}{2}$ è punto di discont.

Se x è irrazionale, es $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. In ogni intorno di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ cadono infiniti razionali $x = \frac{p}{q}$ t.c. $f(x) = \frac{1}{q}$

Domanda: $\lim_{x \to \frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{q} = 0$? $\quad$ È vero!

x razionale $= \frac{p}{q}$

Prendiamo un intorno finito di $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Quanti sono i numeri razionali $\frac{p}{q}$ in quell'intorno che hanno $q < 1000$? Sicuramente sono un numero finito, sono al più 500. Siccome sono in numero finito, l'insieme

$\{ x = \frac{p}{q} \in [0,1], q < 1000 \}$ è finito, e quindi l'insieme

$\{ | \frac{1}{\sqrt{2}} - x |, x = \frac{p}{q} \in [0,1], q < 1000 \}$ è finito.

$\Rightarrow$ Ammette un minimo, e tale minimo, che chiamo δ, è > 0

Allora, nell'insieme $(\frac{1}{\sqrt{2}} - \delta, \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta)$ non cado punti razionali con denominatore $q < 1000 \Rightarrow \forall x \in (\frac{1}{\sqrt{2}} - \delta, \frac{1}{\sqrt{2}} + \delta)$, $f(x) \leq \frac{1}{1000}$

Il ragionamento può essere generalizzato per qualunque $\varepsilon < \frac{1}{1000} \Rightarrow f$ è continua in $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Ma $\frac{1}{\sqrt{2}}$ è un numero irraz. generico $\Rightarrow f$ è continua in tutti gli irraz.

Di quale specie? (le discont. di f nei punti razionali?)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 300