



**Appunti universitari**  
**Tesi di laurea**  
**Cartoleria e cancelleria**  
**Stampa file e fotocopie**  
**Print on demand**  
**Rilegature**

NUMERO: 2289A

ANNO: 2017

# **A P P U N T I**

STUDENTE: Nicola Enrico

MATERIA: Aeroelasticità - Prof. Carrera

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

2/10/2017

# AEROELASTICITÀ

info sul corso:

l' ESAME è scritto, non si può rifiutare il voto, poi si farà una specie di orale in cui si portano le esercitazioni in LAB. Di ogni esercitazione va scritta una relazione, poi vengono consegnate tutte insieme e valutate.

## LIBRI

- Hodges, Pierce "Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity"  
pioniere della aerelasticità, fondo l'ingegneria biomeccanica
- Fung, "An Introduction to the Theory of Aeroelasticity"
- Bisplinghoff, "Aeroelasticity"
- Bisplinghoff, "Principles of Aeroelasticity"
- Bismarck, "Structural Dynamics in Aeronautical Engineering"

## INTRODUZIONE

AEROELASTICITÀ → interazione tra forze diverse su superfici portanti e non portanti

- forze d'inerzia
- forze aerodinamiche
- forze elastiche

l'equilibrio tra forze aerodinamiche e forze elastiche è l'oggetto di studio dell'aerelasticità!

l'AEROELASTICITÀ si divide in 2 grandi macrocategorie:

A. STATICA

vs

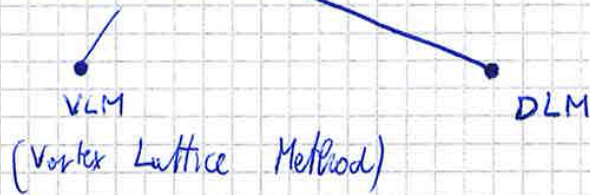
A. DINAMICA

vedremo meglio in seguito questa suddivisione.

①

l'A.I. fa uso di molti METODI INDIRETTI, ad esempio il METODO

AI PANNELLI.



data la  $\omega$  (freq. di oscillazione) si ottengono, tramite il VLM e il DLM, le forze aerodinamiche.

il problema è che la  $\omega$  non è nota!!!

la freq. di oscillazione è infatti una proprietà delle condizioni di equilibrio (ignote)

COND. DI EQUILIBRIO  $\rightarrow$  MATRICI  $\rightarrow$  AUTOVALORI  $\rightarrow$  FREQ. DI OSCILLAZIONE

in questo caso si usano i METODI ITERATIVI!!!

oppure si può anche fare più semplicemente una misurazione empirica delle proprietà aeroelastiche dell'ala in galleria del vento!

$L(t)$   
 $M(t)$   
 $D(t)$



$L(\omega)$   
 $M(\omega)$   
 $D(\omega)$

difficili da ottenere!

queste sono più facili!

- per i problemi di tipo 1) e 2) si usava MATLAB
- per i problemi di tipo 3) si usava MUL2 (un software elaborato dal DIMEAS del Politecnico di Torino)

$$d_{finale} = d_e$$

$\Rightarrow L_e$

RISPOSTA  
AEROELASTICA!

PORTANZA

ALL'EQUILIBRIO

introduciamo alcuni importanti termini della progettazione aeronautica:

- **LOAD ALLEVIATION** → diminuire i carichi aerodinamici agenti sulla struttura alare per poter sottodimensionarla e risparmiare peso
- **AEROSERVOELASTICITÀ** → si considerano anche i comandi di volo (si deve tenere la minima  $L$  necessaria alla sustentazione, al fine di ridurre la  $D$  indotta)
- **SMART WING** → progetto degli ultimi 30 anni, in campo civile consiste nell'utilizzo di PATCH di materiale PIEZOELETTRICO ( $\epsilon \Rightarrow V$ ) per deformare l'ala con un passaggio di corrente e produrre così dei comandi di volo integrati nel cassone alare, senza superfici di controllo e cerniere (wingless)

## INTERAZIONE FLUIDO-STRUTTURA

### MODELLO AD 1 DOF

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

EQ. DI

GOVERNO

forze di motore

f. di richiamo elastica

$x$  è la deformazione (FRECCIA)

### MODELLO AD n DOF

si usano matrici e vettori ora:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F(t)\}$$

SISTEMA MATRICIALE DI n EQUAZIONI

si ricavano le frequenze  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  da un problema agli autovalori ( $\omega$  è la parte immaginaria degli autovalori complessi)

④

tutto il problema si può scomporre in una parte "statica" ed una parte "dinamica", dovuta a fenomeni oscillatori.

$$(k - k_a) \cdot x = 0 + (\bar{F})$$

$k$  tipico dell'ala  
 $k_a$  aerodin. dovuta alla portanza  
 $(\bar{F})$  parte delle forze (aer) dinamiche  
 parte statica

$$x = \frac{\bar{F}}{k - k_a}$$

se  $(k - k_a) \rightarrow 0$ , allora  $x \rightarrow \infty \Rightarrow$  si ha DIVERGENZA

$k_a$  dipende da :

- velocità di volo  $V_\infty$
- pressione dinamica  $q = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2$

$k$  dipende da :

- ala
- materiali

come già accennato un problema aeroelastico è sempre somma di una parte STATICA (stationaria) e di una DINAMICA.

CASO STATICO (n DOF)

$$[K]\{x\} = \{F\}$$

$F(t) \cong F$  non è funzione del tempo

↳ tutti i carichi aerodinamici agenti sul sistema ad n DOF

$$\{F\} = \underbrace{\{F_M\}}_{\text{forze di massa}} + \underbrace{\{F_A\}}_{\text{forze aerodinamiche}} \Rightarrow [K]\{x\} = \{F_M\} + \{F_A\}$$

ma  $[K]$  che  $\{F\}$  dipendono dalla configurazione (il parametro o la  $x$ ), l'aeroelasticità è appunto lo studio della variazione di  $k$  al variare di  $x$ .

$$\{F_A\} = [k_A]\{x\}$$

↳ RIGIDEZZA AERODINAMICA (dipende da  $L$ )

$k_A \geq 0$  vuol dire che la portanza aumenta la rigidità all'aumentare del valore  $x$

$$k_x = F_M + k_A \cdot x$$

$$(k - k_A) \cdot x = F_M$$

1 DOF

$$([K] - [k_A]) \cdot \{x\} = \{F_M\}$$

n DOF

questo è il problema aeroelastico!

la RISPOSTA AEROELASTICA è data da:

$$x = \frac{F_M}{(k - k_A)}$$

può succedere che  $(k - k_A) \rightarrow 0$ , e quindi la  $x \rightarrow \infty$  (DIVERGENZA)  
 nei problemi di statica lineare  $k$  resta costante, mentre  $k_A$  dipende dalla

$$q = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \quad (\text{PRESSIONE DINAMICA})$$



$$F_A(t) = k_A \cdot x + \underbrace{c_A \cdot \dot{x} + m_A \ddot{x}}_{\text{termini che dipendono da } V_{\infty}}$$

$c_A \rightarrow$  SMORZAMENTO AERODINAMICO

$m_A \rightarrow$  INERZIA AERODINAMICA

C'è una  $F_A$  per ogni  $\omega$  di oscillazione dell'ala

$$\{F_A(t)\} = [k_A] \{x\} + [c_A] \{\dot{x}\} + [m_A] \{\ddot{x}\}$$

mettendo questo sistema matriciale in un solutore (MSC NASTRAN o ZAERO) otteniamo le freq. di oscillazione come autovalori del sistema matriciale!

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = k_a x + c_a \dot{x} + m_a \ddot{x} + F_M(t)$$

$$\Rightarrow (m - m_a) \ddot{x} + (c - c_a) \dot{x} + (k - k_a) x = F_M(t)$$

PROBLEMA AEROELASTICO  
DINAMICO AD 1DOF

$$([M] - [M_A]) \{\ddot{x}\} + ([C] - [C_A]) \{\dot{x}\} + ([K] - [K_A]) \{x\} = \{F_M(t)\}$$

" " " " AD  
n DOF

VS

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_M$$

PROBLEMA AEROELASTICO STATICO AD 1DOF

$$[M] \{\ddot{x}\} + [C] \{\dot{x}\} + [K] \{x\} = \{F_M\}$$

" " " " AD n DOF

$k_A$  può essere  $\geq 0$

$c_A$  " "  $\geq 0$

$m_A$  " "  $\geq 0$

$\rightarrow$  è il termine meno importante (7)


### SOLUZIONE AL PROBLEMA DINAMICO

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(c-c_a) \pm \sqrt{(c-c_a)^2 - 4(m-m_a)(k-k_a)}}{2(m-m_a)} = \lambda_{Re} + i \lambda_{Im}$$

se  $(k-k_a) < 0$  allora il problema è INSTABILE STATICAMENTE.

vedremo ora in dettaglio i 2 casi:

CASO RIGIDO



$$M_{ac} + L(x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_G) = 0$$

bilancio al ~~momento~~ momento  
sull'asse elastico o  
(verso positivo adottato per  
convenzione)

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \cdot c_{L\alpha} \cdot \alpha$$

espressione della portanza


$$c_{L\alpha} \approx 2 \cdot \pi$$

espressione del COEFF. ANGOLARE  
DI PORTANZA

CASO DEFORMABILE

$$\alpha = \alpha_R + \theta$$

le equazioni si modificano come segue:



$$M_{ac} + L(x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_G) - K \cdot \theta = 0$$

termine aggiuntivo

EQUAZIONE AEROELASTICA

$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 S \cdot c_{L\alpha} (\alpha + \theta)$$

PORTANZA

$$M_{ac} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 \cdot S \cdot c \cdot c_{M\alpha} \cdot \alpha$$

MOMENTO AERODINAMICO

$$q = \frac{1}{2} \rho V_{\infty}^2$$

PRESSIONE DINAMICA

l'espressione del bilancio del momento attorno all'asse elastico diventa:

$$q \cdot S \cdot c \cdot c_{M\alpha} + q \cdot S \cdot c_{L\alpha} (\alpha_R + \theta) (x_0 - x_{ac}) - W(x_0 - x_G) = K\theta$$

$$V_D = \sqrt{\frac{2k}{\rho_0 S c_{L\alpha} (x_0 - x_{ac})}}$$

VELOCITA' DI DIVERGENZA  
\*\*\*

$$V_D \rightarrow \infty \quad \text{per} \quad x_0 \rightarrow x_{ac}$$

Il meccanismo che provoca la DIVERGENZA e' che la torsione dell'ala provoca una variaz. di incidenza  $\alpha = \alpha_r + \theta$ , che a sua volta provoca una variazione di portanza  $\Delta L = q \cdot S \cdot c_{L\alpha} \cdot \theta$ . ~~Il punto di applicazione della portanza si sposta~~  
~~Il punto di applicazione della portanza si sposta~~ Ipotizziamo che  $c_{mac} = 0$  e  $x_0 = x_{cg}$ . Possiamo che

$$k_{TOT} = k - k_{\alpha} \quad \text{Allora si avra' che:}$$

$$\theta = \frac{\alpha_R q c_{L\alpha} (x_0 - x_{ac})}{k_{TOT}}$$

$$k_{TOT} = q_D S \cdot c_{L\alpha} (x_0 - x_{ac}) - q S c_{L\alpha} (x_0 - x_{ac}) = q S \cdot c_{L\alpha} (x_0 - x_{ac}) \left( \frac{q_D}{q} - 1 \right)$$

si ricavano le relazioni (\*), (\*\*), (\*\*\*)

$$\frac{\Delta L}{L_{rigido}} = \frac{\theta}{\alpha_R} = \frac{q/q_D}{1 - q/q_D} \quad \text{con} \quad q = \frac{1}{2} \rho_0 V_D^2$$

Con questa relazione tra il  $\Delta L$  e la  $L_{rigido}$  posso graficare l'incremento relativo di portanza in funzione del rapporto  $q/q_D$ .

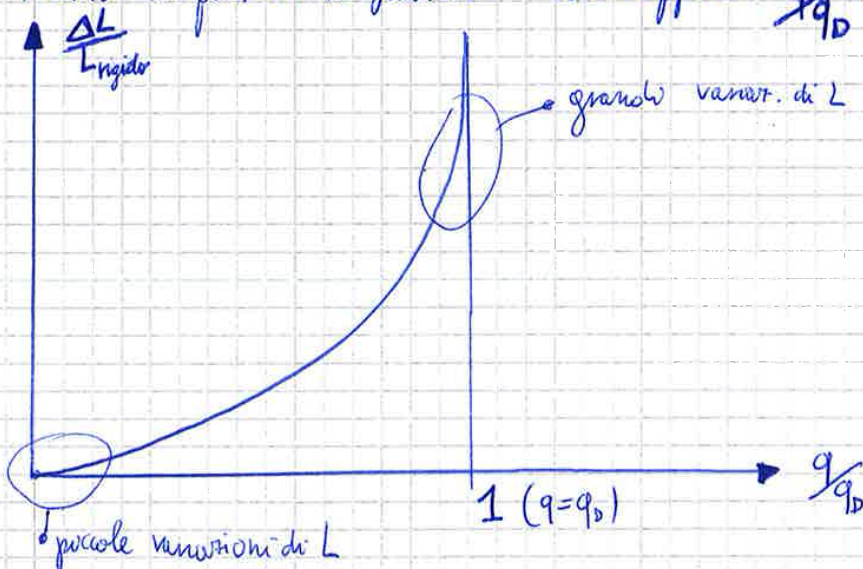


DIAGRAMMA DELLA  
QUALITA' DI VOLO

Invertendo la relazione del grafico si ottiene:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{q_D}{\alpha_R} \left( \frac{1}{q} - \frac{1}{q_D} \right)$$

(10)

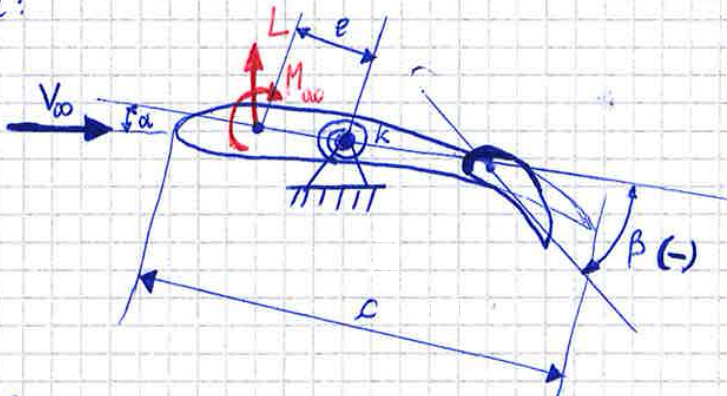
12/10/2017

# INVERSIONE COMANDO DEGLI ALETTONI

Si consideri sempre il modello del profilo alare ad 1 DOF montato in galleria del vento.

L'INVERSIONE DEGLI ALETTONI è l'inversione della risposta all'uso degli alettone. Infatti, a causa di effetti aerostatici, oltre una certa  $q$ , che chiameremo **PRESSIONE DINAMICA D'INVERSIONE**, gli alettone funzionano in maniera opposta a quanto ci si aspetterebbe.

Si consideri lo schema seguente, simile a quello precedente, ma con l'aggiunta di un alettone:



si hanno, come prima, 2 casi:

- CASO RIGIDO ( $\alpha = \alpha_R$ )



$$M_{ac} + L \cdot e = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{-M_{ac}}{e}$$

$$L = q S c_L = q S (c_{L\alpha} \cdot \alpha + c_{L\beta} \cdot \beta)$$

$$M_{ac} = q \cdot c \cdot S \cdot c_{mac} = q \cdot c \cdot S (c_{m0} + c_{m\beta} \cdot \beta)$$

per i profili simmetrici  $c_{m0} = 0$ ,  $c_{m\beta} < 0$  usualmente (depressione ~~negativa~~ dell'alettone  $\Rightarrow$  aumento di portanza).

~~negativa~~

$$C_{MB} < 0 \Leftrightarrow q_R > 0$$

un'ala più rigida ( $k \uparrow$ ) ovviamente avrà una velocità d'inversione più alta.

$$q < q_R \Rightarrow \beta \text{ negativo provoca } \Delta L \text{ positivo}$$

$$q > q_R \Rightarrow \beta \text{ negativo provoca } \Delta L \text{ negativo}$$

$$q = q_R \Rightarrow \beta \text{ provoca } \Delta L = 0$$

Si introduce la EFFICIENZA DELL'ALTEONE:

$$\eta = \frac{1 - q/q_R}{1 - q/q_D}$$

EFFICIENZA DELL'ALTEONE

essa rappresenta il rapporto tra  $\Delta L$  elastico e  $\Delta L$  rigido  $\left( \eta = \frac{\Delta L_{elastico}}{\Delta L_{rigido}} \right)$

ti noti che  $q_D \leq q_R$ , quindi mantenendo  $q < q_D$  si evitano di non andare in DIVERGENZA ed INVERSIONE.

Per un'ala rigida ( $k \rightarrow \infty$ )  $\eta = 1$  ( $q_D = q_R$ ).

il DOF  $h$  è valutato lungo  $\hat{x}_2$ !

consideriamo le seguenti ipotesi:

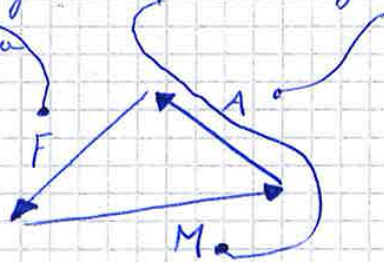
$\theta$  piccolo

$\cos \theta \approx 1$

$\sin \theta \approx \theta$

$\tan \theta \approx \theta$

avremo forze elastiche, forze inerziali e forze aerodinamiche, che si influenzano a vicenda



quindi il nostro sistema matriciale sarà del tipo:

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

ma lo vedremo meglio in seguito.

Qui diamo cos'è fisicamente il FLUTTER.

### FLUTTER (DEFINIZIONE)

Il flutter è definito come "un'instabilità dinamica di un velivolo associata all'interazione di forze aerodinamiche, elastiche e inerziali".

Analizzando le sue cause ed i suoi effetti possiamo dire che è una oscillazione instabile, auto-eccitata e potenzialmente distruttiva (e catastrofica vista l'importanza delle strutture alari in un aereo).

Infatti le strutture più esposte al flutter (ali ed impennaggi orizzontali) sono progettate attualmente con sofisticati sistemi anti-flutter.



noi analizzeremo i flutter lineari!

Questo è ciò che avviene per un sistema discreto (2 DOF). Quando ci sono più DOF conviene utilizzare la meccanica lagrangiana anziché quella newtoniana, la m. lagrangiana associa ad ogni DOF il suo contributo in forze. Applicamo il PLV (Principio dei Lavori Virtuali):

$$\delta L = 0$$

$$\delta L = \delta L_e + \delta L_a + \delta L_m$$

$\delta L_e$  → lav. elastico  
 $\delta L_a$  → lav. delle forze aerodinamiche  
 $\delta L_m$  → lav. delle forze d'inerzia

$$\delta L_e = Q_e \cdot \delta \theta$$

↳ lagrangiana delle forze elastiche

$$Q_e = k \theta$$

$$\delta L_m = Q_m \cdot \delta \theta$$

↳ lagrangiana delle f. d'inerzia

$$Q_m = I_0 \ddot{\theta}$$

$$\delta L_a = Q_a \delta \theta$$

↳ lagr. delle forze aerodinamiche

$$Q_a = k_a \cdot \theta$$

$$\Rightarrow \delta L = (Q_e + Q_a + Q_m) \delta \theta = 0$$

CONDIZ. D'EQUILIBRIO

quindi deve valere:

$$Q_e + Q_a + Q_m = 0$$

Possiamo ottenere le forze elastiche e inerziali con opportune derivazioni dei rispettivi potenziali (principio di Lagrange):

$P \rightarrow$  POTENZIALE DELL'ENERGIA ELASTICA

$$P = \frac{1}{2} k_0 \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} k_n h^2$$

$K \rightarrow$  POTENZIALE DELL'ENERGIA CINETICA

$$K = \frac{1}{2} m \bar{V}_c \cdot \bar{V}_c + \frac{1}{2} I_c \dot{\theta}^2$$

↓  
vel. del centro di massa



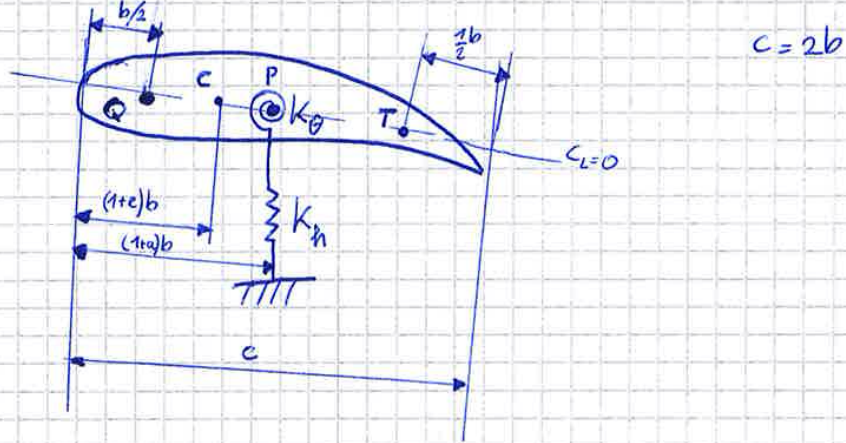
$$Q_h = -L = \frac{\partial W}{\partial h}$$

$$Q_\theta = \frac{\partial W}{\partial \theta} = M \frac{1}{4} + b \left( \frac{1}{2} + a \right) L$$

ora applichiamo le eq. di Lagrange e siamo in grado di scrivere l'equilibrio del sistema generale:

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{h} + b x_\theta \ddot{\theta}) + k_h h = L \\ I_p \ddot{\theta} + m b x_\theta \ddot{h} + k_\theta \theta = M \frac{1}{4} + b \left( \frac{1}{2} + a \right) L \end{array} \right.$$

SISTEMA IN EQUILIBRIO



il sistema assume la forma seguente:

$$\begin{cases} q_1 & m(\ddot{h} + b x_e \ddot{\theta}) + k_h h = L \\ q_2 & I_p \ddot{\theta} + m b x_e \dot{h} + k_\theta \theta = M_{1/4} + b(\frac{1}{2} + a)L \end{cases}$$

EQUAZ. DI EQUILIBRIO PER IL SISTEMA AERODINAMICO

ora vedremo come variano queste equazioni per diversi casi:

CASO OMOGENEO DISACCOPIATO

OMOGENEO  $\rightarrow Q_\theta = 0, Q_h = 0$

DISACCOPIATO  $\rightarrow x_e = 0 \quad (e=a)$

il sistema diventa:

$$\begin{cases} m\ddot{h} + k_h h = 0 \\ I_p \ddot{\theta} + k_\theta \theta = 0 \end{cases}$$

in questo caso e' impossibile che si verifichi INSTABILITA' DINAMICA, infatti poche si abbia divergenza ( $\approx$  instabilita') deve verificarsi:

$$\begin{cases} k_\theta < 0 \\ k_h < 0 \end{cases}$$

ma poche  $C \equiv P$  (poche  $x_e = 0$ ) non esiste  $k_a = k_\theta + k_h$  tale che sia verificata

(16)

consideriamo ora un caso stationario.  $(c=2b)$

$$L = 2\pi \rho_{oo} b V_{oo}^2 \theta = \frac{1}{2} C_{L\alpha} \cdot \alpha \cdot \rho_{oo} V_{oo}^2 S \quad M_{\frac{3}{4}} = 0$$

$$\begin{cases} c = 2\pi \\ c = 2b \\ \alpha = \theta \\ S = c \cdot l \end{cases}$$

$\swarrow$  corda       $\searrow$  profondità unitaria

introduciamo  $\omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m}}$ ,  $\omega_\theta = \sqrt{\frac{k_\theta}{I_p}}$ , le pulsazioni del sistema nei 2 DOF.

Ora scriviamo il sistema in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} mb^2 & mb^2 x_\theta \\ mb^2 x_\theta & I_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{h}/b \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mb^2 \omega_n^2 & 2\pi \rho_{oo} b^2 U^2 \\ 0 & I_p \omega_\theta^2 - 2\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \pi \rho_{oo} b^2 U^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h/b \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

sostituiamo il vettore delle incognite  $\{x\} = \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$  come in seguito:

$$\begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{h} e^{vt} \\ \bar{\theta} e^{vt} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \bar{h} e^{vt} \\ v \bar{\theta} e^{vt} \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^2 \bar{h} e^{vt} \\ v^2 \bar{\theta} e^{vt} \end{Bmatrix}$$

ovvero la SOLUZIONE ESPONENZIALE.

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} mb^2 v^2 + mb^2 \omega_n^2 & mb^2 v^2 x_\theta + 2\pi \rho_{oo} b^2 V_{oo}^2 \\ mb^2 v^2 x_\theta & I_p \omega_\theta^2 + I_p v^2 - 2\left(\frac{1}{2} + \alpha\right) \pi \rho_{oo} b^2 V_{oo}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{h}/b \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

questo sistema ammette soluzioni non banali se e solo se  $\det[\dots] \neq 0$ .  
 Ora adimensionalizziamo il sistema introducendo i seguenti parametri:

$$r^2 = \frac{I_p}{mb^2}$$

$$\sigma = \frac{\omega_n}{\omega_\theta}$$

$$\mu = \frac{m}{\rho_{oo} \pi b^2}$$

$$V = \frac{U}{b\omega_\theta}$$

$$v = p \frac{U}{b}$$

Schema riassuntivo del tipo di moto:

$\Gamma(\lambda_{Re})$	$\Omega(\lambda_{Im})$	tipo	Stabilità
$< 0$	$\neq 0$	moto oscillatorio smorzato	SÌ
$= 0$	$\neq 0$	moto oscillatorio armonico	SÌ
$> 0$	$\neq 0$	moto oscillatorio amplificatore	NO
$< 0$	$= 0$	moto non oscillatorio smorzato	SÌ
$= 0$	$= 0$	moto non oscill. indipendente dal tempo	SÌ
$> 0$	$= 0$	moto non oscillatorio amplificatore	NO

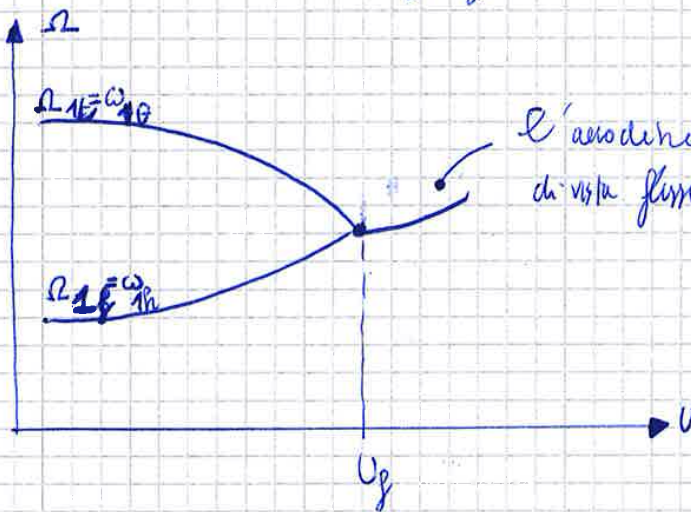
$$\begin{cases} p_1 = \frac{b v_1}{U} = \frac{b}{U} (\Gamma_1 \pm i \Omega_1) \\ p_2 = \frac{b v_2}{U} = \frac{b}{U} (\Gamma_2 \pm i \Omega_2) \end{cases}$$

METODO p

$$\begin{cases} v_1 = \Gamma_1 \pm i \Omega_1 \\ v_2 = \Gamma_2 \pm i \Omega_2 \end{cases}$$

COPPIE COMPLESSE CONIUGATE DI AUTOVALORI

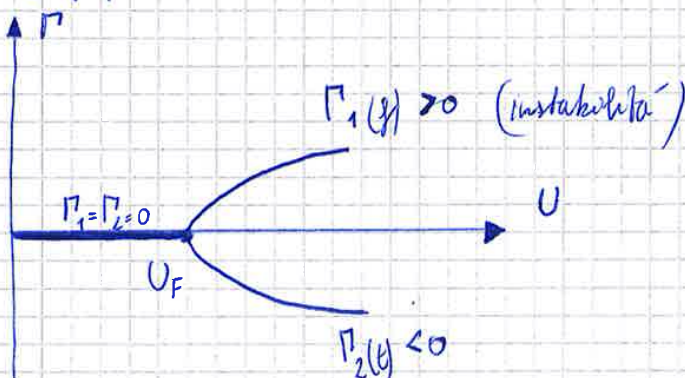
Per un moto instazionario generalmente  $p$  è molto grande!



L'aerodinamica "ingridita" la struttura dal punto di vista flessionale ( $\omega_n \gg \omega_0$ )

il rapporto  $\frac{\Omega_{16}}{U_q}$  è molto importante e di solito è preso  $\approx 4$  per avere una  $U_q$  più alta!

il termine reale  $\Gamma$  ci dice se il sistema è stabile (immortato) oppure instabile (amplificatore)

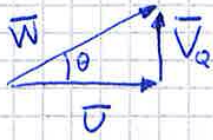


il modello stazionario è molto semplice e quindi irrealistico!

la seconda eq. del moto diventa in caso stazionario (si eliminano i termini dipendenti del tempo):

$$k_0 \cdot \theta = M \frac{d^2 \theta}{dt^2} + b \left( \frac{d}{dt} + a \right) L$$

un generico punto del profilo è investito da una velocità aerodinamica, somma del flusso e di  $V_a$ :



$$\frac{|V_a|}{|U|} \leq 0,1$$

$$\text{tg } \theta = \left| \frac{V_a}{U} \right| \approx \theta$$

essendo  $V_a$  piccola e quindi anche  $\theta$  piccolo

calcoliamo il  $\theta$  e avremo l'aerodinamica QUASI STAZIONARIA.

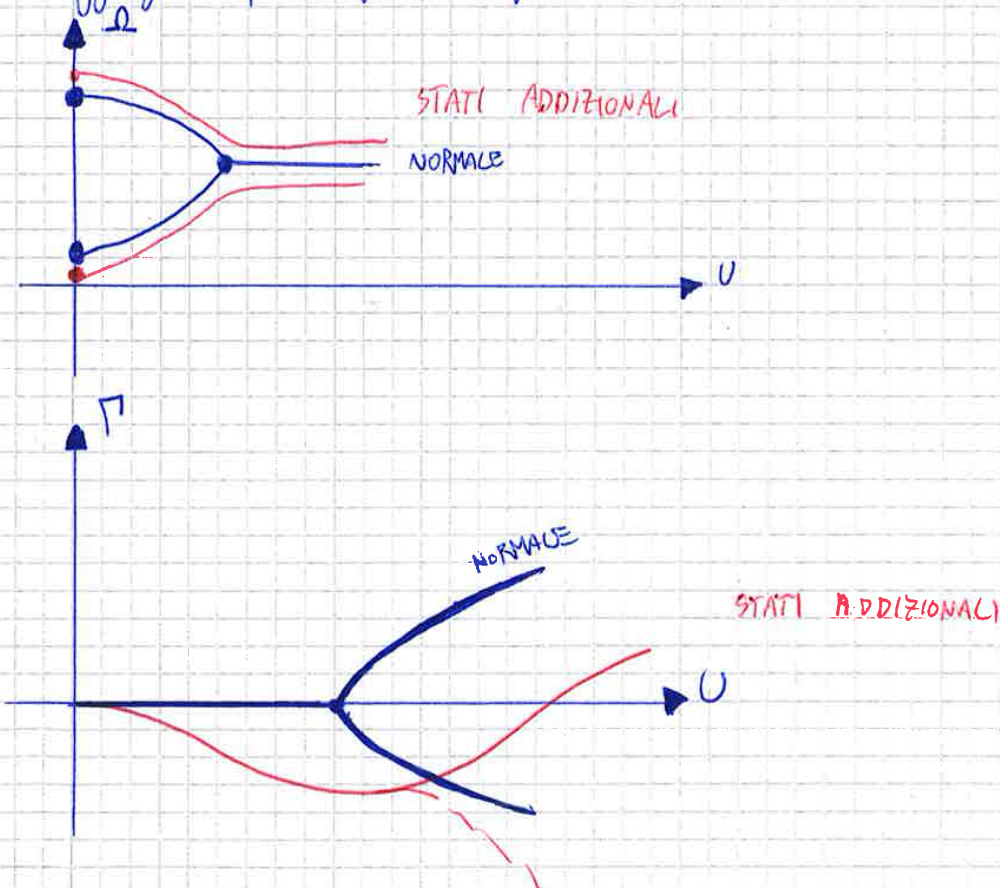
$$L = \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 2\pi \left| \frac{V_a}{U} \right| 2b = f(\theta, \dot{\theta}, h)$$

### STATI ADDIZIONALI

La portanza  $L$  dipende anche da STATI ADDIZIONALI, presenti sotto forma di vorticità nel flusso, e dipendenti da  $\theta, \dot{\theta}, h, \dot{h}, \dots$

contribuisce alla portanza

Aggiungendo questi parametri può venir meno il mescolamento dei modi:



30/10/2017

# ANALISI DEL FLUTTER

## FLUTTER CLASSICO

IDEA!

Si possono esprimere le forze agenti sul profilo conoscendone il moto.

Nel flutter  $\lambda_{Re} = 0 \Rightarrow$  MOTO PURAMENTE ARMONICO

Quindi i gdl assumono la forma:

$$h(t) = \bar{h} e^{i\omega t}$$

$$\theta(t) = \bar{\theta} e^{i\omega t}$$

Le forze aerodinamiche diventano:

$$L(t) = \bar{L} e^{i\omega t}$$

$$M(t) = \bar{M} e^{i\omega t}$$

debbono esprimere  $\bar{M}$  e  $\bar{L}$ :

$$\bar{L} = -\pi \rho_{\infty} b^3 \omega^2 \left[ l_{h_1}(k, M_{\infty}) \frac{\bar{h}}{b} + l_{\theta}(k, M_{\infty}) \bar{\theta} \right]$$

$$\bar{M} = -\pi \rho_{\infty} b^4 \omega^2 \left[ l_{h_2}(k, M_{\infty}) \frac{\bar{h}}{b} + l_{\theta}(k, M_{\infty}) \bar{\theta} \right]$$

$k \rightarrow$  FREQUENZA RIDOTTA

$l_{h_1}, l_{\theta}, m_{h_1}, m_{\theta} \rightarrow$  FUNZIONI COMPLESSE

Più prendiamo il SISTEMA DI EQUAZ. DI EQUILIBRIO SCRITTO IN FORMA MATRICIALE:

$$([M] - [M_a]) \{\ddot{x}\} + ([C] - [C_a]) \{\dot{x}\} - ([k] - [k_a]) \{x\} = \{0\}$$

$$\{x\} \rightarrow \begin{Bmatrix} h \\ \theta \end{Bmatrix}$$

METODO K (o anche U-G)

prende il nome dalla <sup>frequenza ridotta k</sup> autovalore  $\omega$  adimensionato  $p$ .  
 è un metodo semi-empirico

$$k = \frac{b\omega}{U}$$

FREQUENZA RIDOTTA (parte numerica di  $p$ )

$k = \frac{\text{componente instat. del moto}}{\text{vel. stat. del flusso}}$   $\propto$  grado di instazionarietà del profilo.

$k > 1 \Rightarrow$  flusso ha una velocità trasversale maggiore di quella che investe il profilo

Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{cases} m(\ddot{h} + b\dot{\theta}) + k_h h = -L + D_h \\ I_p \ddot{\theta} + mbx_{\theta} \ddot{h} + k_{\theta} \theta = M + D_{\theta} \end{cases}$$

SMORZAMENTO LEGATO AL GDL  $h$   
(lo trova con  $g_h$ )

SMORZAMENTO LEGATO AL GDL  $\theta$   
(lo trova con  $g_{\theta}$ )

$$\begin{cases} D_h = \bar{D}_h e^{i\omega t} = -i g_h m \omega^2 \bar{h} e^{i\omega t} \\ D_{\theta} = \bar{D}_{\theta} e^{i\omega t} = -i g_{\theta} I_p \omega^2 \bar{\theta} e^{i\omega t} \end{cases}$$

potenzi di energia dissipata

$g_h, g_{\theta} \rightarrow$  COEFFICIENTI DI SMORZAMENTO

Quanto valore  $g_h$  e  $g_{\theta}$ ?

Essi sono dati empirici, in genere  $\approx 0,1 \div 0,15$ .

$\Rightarrow$  ora abbiamo un nuovo sistema di equazioni e possiamo calcolare un nuovo determinante

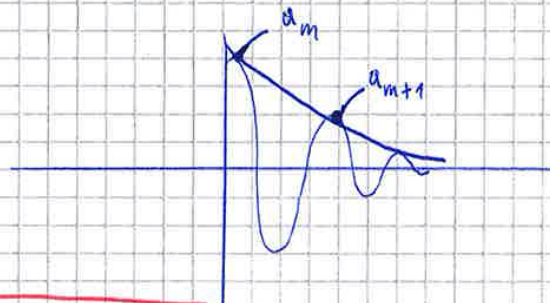
posso anche prendere lo stesso valore per  $g_h$  e  $g_{\theta}$

$$g_h = g_{\theta} = g$$



partiamo con un valore iniziale di  $y$   $y_{m=1} = 1$

Calcolo lo smorzamento vedendo la diminuzione d'ampiezza fra 2 oscillazioni consecutive



$$\gamma_m = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{a_{m+1}}{a_m} \right)$$

$\gamma$  ALL 'M-ESIMA OSCILLAZIONE

$$\gamma_k \propto \gamma$$

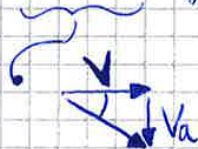
metodo-pk      metodo-k

Il METODO P. dà la soluzione esatta, però questo ha bisogno di sapere come le forze aerodinamiche variano nel tempo!

Allora uso METODO-K o METODO-PK.

Ora andiamo a vedere l'effetto dell'INCIDENZA!!

$$\theta_{inst} = \theta_{stat} + \text{geometria} + \text{fluido}$$



$$\theta = \theta_{stat} + \theta_{instat}$$

$$\theta_{instat} \approx \tan \theta = \frac{|V_a|}{|U_{\infty}|} < 0,1$$

$$\theta_{instat} = -\frac{h}{U_{\infty}} + \frac{b\theta}{U_{\infty}} \left( \frac{1+a}{2} \right)$$

conoscendo  $U_{\infty}$  e  $V_a$  possiamo calcolare  $\theta$ .

scrivo l'espressione del potenziale di quella distribuzione sul piano  $(x, y)$ :

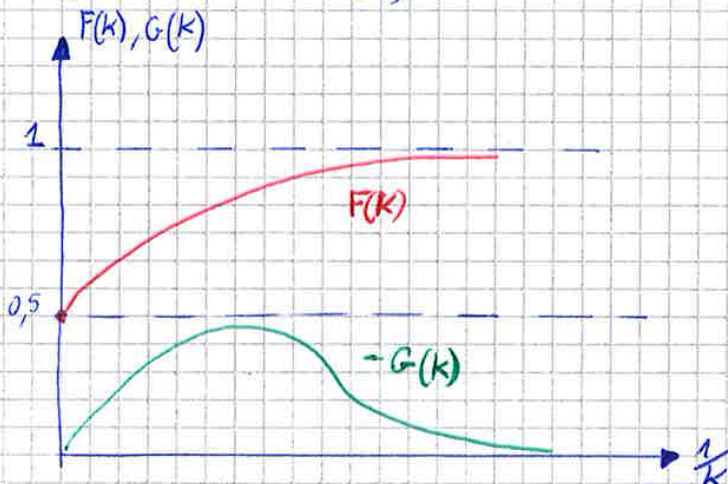
$$\Phi_0(x, y) = \dots$$

metto un vortice di intensità  $+\Gamma$  a metà della  $b$  e ne metto un altro di intensità  $-\Gamma$  nella scia per rispettare il T. di Kelvin-Helmholtz.  $\nearrow \left(\frac{1}{4} \cdot c\right)$

Ora seguiamo un metodo iterativo (\*):

- 1) con la  $V_a$  troviamo l'intensità della sorgente  $\sigma$
- 2) la mettiamo nell'espressione del potenziale
- 3) troviamo la distribuz. di  $V$ ,  $\bar{V} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$
- 4) troviamo la  $p$  conoscendo la  $V$  grazie al T. di Bernoulli
- 5) integriamo la  $p$  sul profilo
- 6) troviamo i termini riquadrati in   delle formule di L e M.

$$c(k) = F(k) + iG(k)$$



Per il moti stazionari vale:

$$F(k) \rightarrow 1$$

$$-G(k) \rightarrow 0$$

la separazione avviene al bordo di fuga



pongo 2 vortici (uno  $\Delta\Gamma$  e l'altro  $-\Delta\Gamma$ ) per rispettare il t. di Kelvin-Helmholtz ( $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ )

posso scrivere

$$\Phi(x, y) = \dots$$

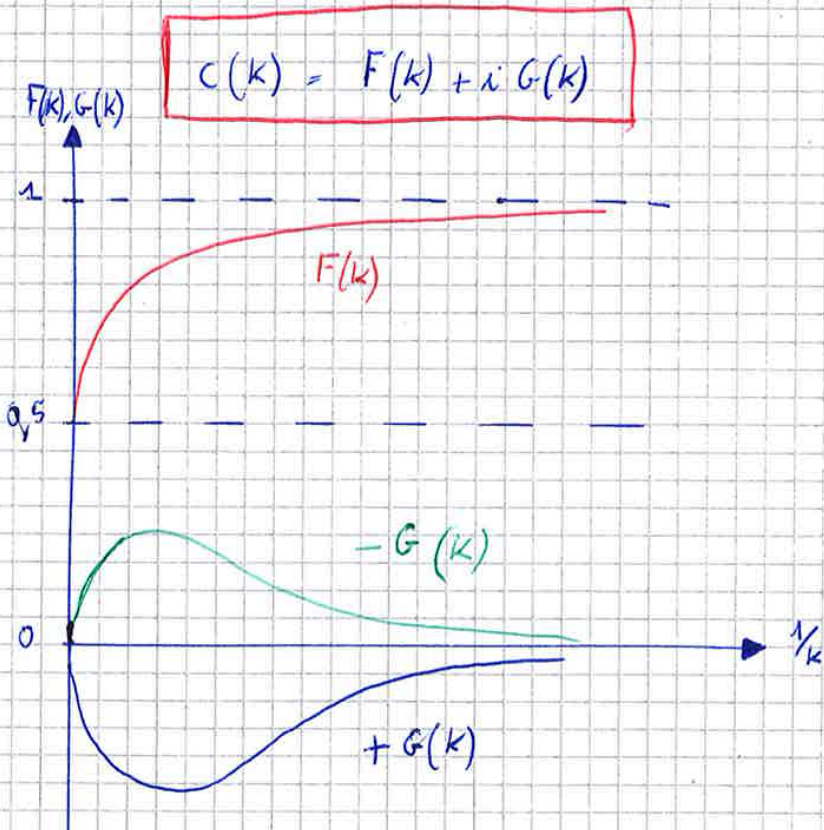
$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{VELOCITA' TRASVERSALE}$$

Seguo il METODO ITERATIVO (\*) e mi ricavo L e M nell'aerodinamica di Theodorsen

$$\sigma = w - V_\infty$$

nota  $V_\infty$  posso scrivere la espressione di  $\Phi_\sigma(x, y)$

si ricava la FUNZIONE DI THEODORSEN  $C(k)$

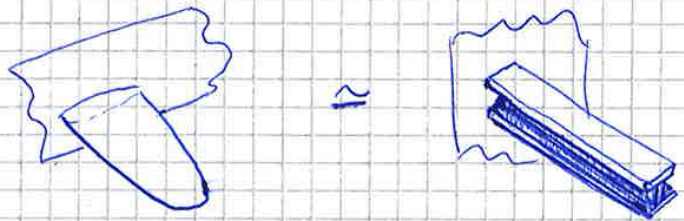


# ALI AD ALLUNGAMENTO FINITO

D'ora in avanti si valuteranno flussi e geometrie 3D, quindi si considererà un'ala ad allungamento finito, resa idealmente come una trave a sbalzo. Si fanno quindi dei richiami della TEORIA DELLE TRAVI.

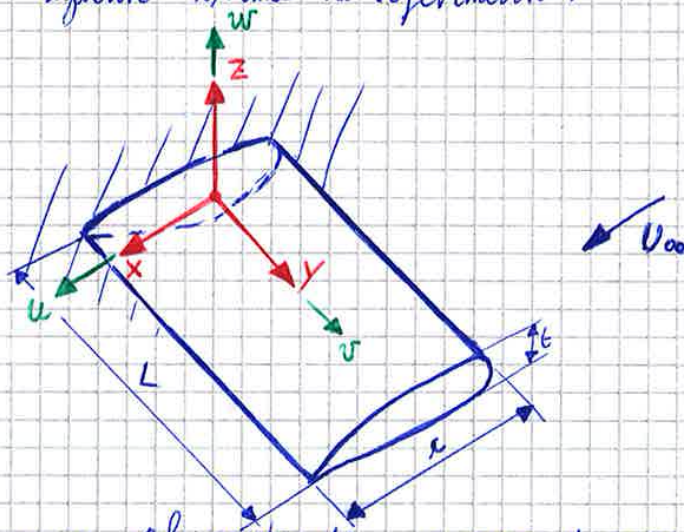
## TEORIA DELLA TRAVE

ala  $\approx$  trave



TRAVE: "solido 3D in cui una delle 3 dimensioni (lunghezza) è molto maggiore rispetto alle altre 2"

consideriamo il seguente sistema di riferimento:



abbiamo determinare gli spostamenti  $u, v, w$  di ogni punto della trave:

IPOTESI:

- sezione rigida ( $k \rightarrow \infty$ )
- lunghezza  $L \gg t, c$

$\Rightarrow$  il campo di spostamenti è dato come:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = 0 \\ v(x, y, z) = v^0(y) \\ w(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

⇒

CAMPO DI SPOSTAMENTI  $(\varphi_x + \varphi_y + \varphi_z)$

$$\begin{cases} u(x,y,z) = -u^0(y) + x\varphi_y(y) \\ v(x,y,z) = v^0(y) - z\varphi_x(y) + x\varphi_z(y) \\ w(x,y,z) = w^0(y) - z\varphi_y(y) \end{cases}$$

In generale gli spostamenti si possono scrivere anche come espansioni in serie in funzione delle incognite  $x$  e  $z$ . Il generico spostamento si può anche scrivere come somma di polinomi

$$u(x,y,z) = P_1(x,z)u_1 + P_2(x,z)u_2 + \dots + P_N(x,z)u_N$$

con  $u_1 = u^0(y)$

$u_2 = \varphi_y(y)$

$P_1 = -1$

$P_2 = x$

⇒ 
$$u(x,y,z) = \sum_{ij=1}^N x^i z^j u_{ij}(y)$$

SPOSTAMENTO COME SERIE DI POLINOMI

$N \uparrow \Rightarrow$  incognite  $\uparrow \Rightarrow$  però precisione  $\uparrow$

$N \rightarrow \infty \Rightarrow$  la soluzione approssimata coincide con quella 3D

Gli spostamenti  $u, v, w$  sono legati alle c.d.s.  $(N_x, T_x, T_z, M_x, M_y, M_z)$  attraverso le RELAZIONI COSTITUTIVE

e.g: LEGGE DI HOOKE  $(\sigma = E\varepsilon)$

TERMINE COSTITUTIVO

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

in forma matriciale

nella Teoria di Eulero-Bernoulli  $\gamma$  lo scarramento  $\gamma_{yz}$  si assume nullo

$$\Rightarrow \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$w_{,y}^{\circ} - \varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_x = w_{,y}^{\circ}$$

$$M_x = EI_x \cdot w_{,yy}^{\circ}$$

MOMENTO FLETTENTE  
(nuova formulazione)

● MOMENTO TORCENTE

$$M_y = \int_A (\tau_{yx} \cdot z - \tau_{yz} \cdot x) dA$$

$$\tau_{yx} = G \cdot \gamma_y = G \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = G \cdot x \cdot \varphi_{,yy}$$

$$\tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} = G \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -G \cdot z \cdot \varphi_{,yy}$$

$$\Rightarrow M_y = G \int_A \varphi_{,yy} (x^2 + z^2) dA = E I_x \varphi_{,yy} = G \cdot I_p \cdot \varphi_{,yy}$$

MOMENTO  
TORCENTE

con  $I_p = I_z + I_x = x^2 A + z^2 A \rightarrow$  MOMENTO D'INERZIA POLARE

Possiamo scrivere le equazioni ricavate in forma matriciale:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GI_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{,yy} \\ \varphi_{,yy} \end{Bmatrix}$$

momento torcente e momento flettente non sono accoppiati. In questa teoria  $\Rightarrow$  può esserci uno senza che ci sia l'altro

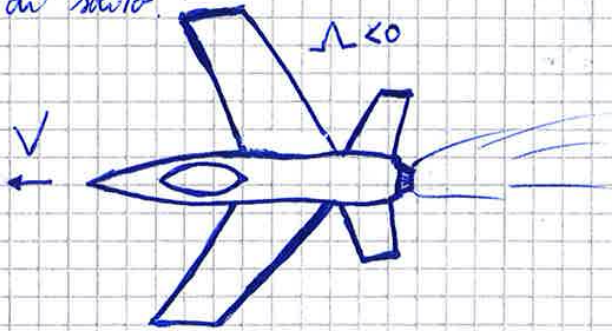
$$D_{26} = \sum_{k=1}^N \int_{-h_k}^{+h_k} z_k^2 Q_{26}^k \cdot dt$$

N stati

e.g.

ali a freccia negativa  
di solito.

hanno accoppiamento aerodinamico



si contrasta questo fatto con il tailoring (si porta  $D_{26} < 0$ )

(29)

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d}{dy} \left( GJ_t^2 \frac{d\theta}{dy} \right) = -M'$$

$GJ_t^2 \rightarrow$  RIGIDEZZA TORSIONALE ( $\approx$  cost lungo l'apertura alare)

Per trovare  $L'$  e  $M'_{ac}$  ricorriamo alla TEORIA DELLA STRISCIA:

$L' = q \cdot c \cdot c_e$   $\rightarrow$  coeff. di portanza per unità di lunghezza  $c_e = c_e(y)$

*p. dinamica*  
*corda*

$M'_{ac} = q \cdot c^2 \cdot c_{mac}$   $\rightarrow$  coeff. di momento per unità di lunghezza  $c_{mac} = c_{mac}(y)$

$$c_e = c_e(y) = a \cdot \alpha(y) = a(\alpha_r + \theta)$$

Sostituiamo  $L'$  e  $M'_{ac}$  in  $M'$  e troviamo

$$GJ_t \frac{d^2\theta}{dy^2} = -q \cdot c^2 \cdot c_{mac} - e \cdot q \cdot c \cdot c_e + W \cdot N \cdot d$$

$$(*) \quad \frac{d^2\theta}{dy^2} + \frac{q \cdot c \cdot a \cdot e}{GJ_t} \theta = -\frac{1}{GJ_t} (q \cdot c^2 \cdot c_{mac} + q \cdot c \cdot e \cdot a \cdot \alpha_r - NW \cdot d)$$

con  $a = \frac{dc_e}{d\alpha} = c_{ex}$

Risolvendo la (\*) troviamo la risposta aeroelastica dell'ala caricata a torsione:

Imponiamo le condizioni al contorno:

1)  $\theta = 0$  per  $y = 0$  (INCASTRO)

2)  $\frac{d\theta}{dy} = 0$  per  $y = L$  (PORTANZA NULLA ALL'ESTREMITÀ)

Introduciamo i parametri:

$$\lambda^2 = \frac{q \cdot c \cdot a \cdot e}{GJ_t}$$

$$\alpha_r = \frac{c \cdot c_{mac}}{a \cdot e} = \frac{NW \cdot d}{q \cdot c \cdot a \cdot e}$$

30



Com'è possibile?

$$\lambda = \sqrt{\frac{q_{a.e.c}}{GJ_t}} = \frac{\pi}{2L}$$

$$q_0 = \frac{GJ}{e.ca} \cdot \left(\frac{\pi}{2L}\right)^2$$

→ PRESSIONE DINAMICA DI DIVERGENZA

$$\Rightarrow \theta(y) = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) \left[ \sec(\lambda L) - 1 \right] = (\alpha_r + \bar{\alpha}_r) \left[ \sec \frac{\pi}{2} \sqrt{\bar{q}} - 1 \right]$$

con  $\bar{q} = \frac{q}{q_0}$

ALA RIGIDA → distribuzione ellittica di portanza

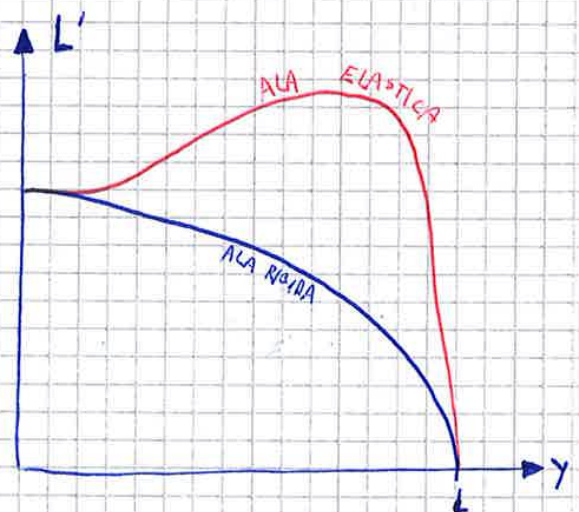
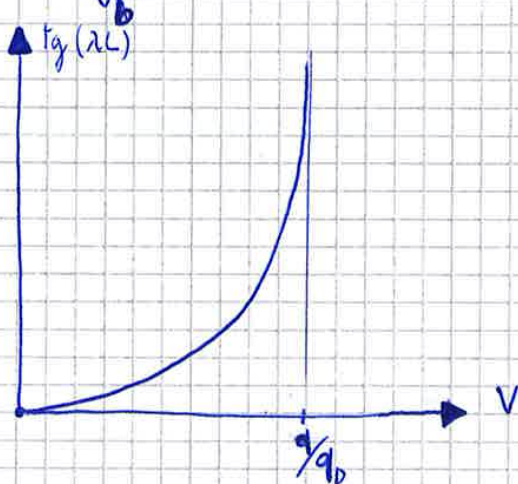
ALA ELASTICA →  $L' = L'(\theta(y)) \Rightarrow L' = f(y)$

Quindi aumenta la portanza complessiva  $L$  dell'ala e inoltre aumenta la distribuzione di portanza verso il tip dell'ala, quindi aumenta il momento flettente e le sollecitazioni sul cassone alare.

Infatti aumenta sia il braccio  $y$  che la  $L'$  andando verso il tip

$$M_x \propto L' \cdot y$$

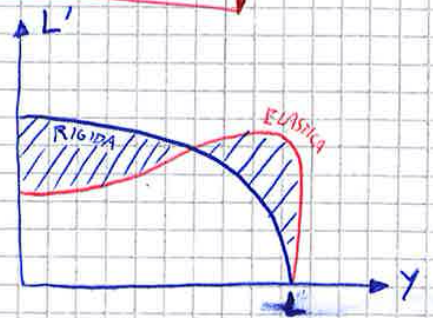
$$M_x = \int_b L' y dy$$



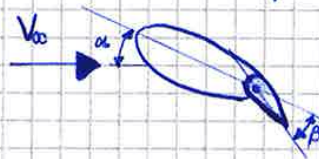
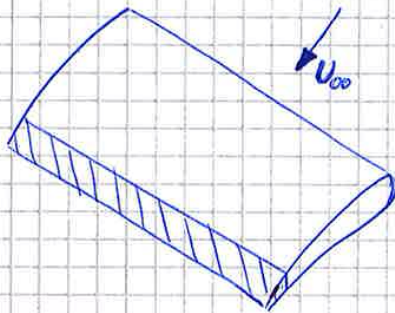
Per evitare questo effetto sollecitante che può anche portare alla rottura dell'ala si deve diminuire l'incidenza di volo. La curva  $L'(y)$  si sposta verso il basso e quindi  $M_x$  diminuisce.

$$\alpha_r = \frac{NWl_0}{2GJ\lambda e t g(\lambda l)} + \left[ 1 - \frac{\lambda l}{g(\lambda l)} \right] \left\{ \frac{N \cdot m \cdot g l^2 d}{GJ (\lambda l)^2} - \frac{e C_{mic}}{ae} \right\} \quad \text{ASSETTO}$$

$\alpha_r = 1 \Rightarrow$  E aree tratteggiate sono uguali: così si elidono a vicenda e  $N$  non varia tra ala rigida e ala elastica



### INVERSIONE DEGLI ALETTONI



oltre quale velocità gli alettoni danno una risposta opposta rispetto a quella aspettata?

$$C_l = a \cdot \alpha + C_{l\beta} \cdot \beta$$

$$C_{mic} = C_{mp} \cdot \beta$$

Per  $\alpha_r = 0$

$$\begin{cases} L' = qc(a\theta + C_{l\beta}\beta) \\ M' = eL' + qc^2 C_{mp}\beta \end{cases}$$

Da  $\theta$  si ottiene dalla risoluzione dell'equaz. differenziale:

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = -\lambda^2\psi\beta$$

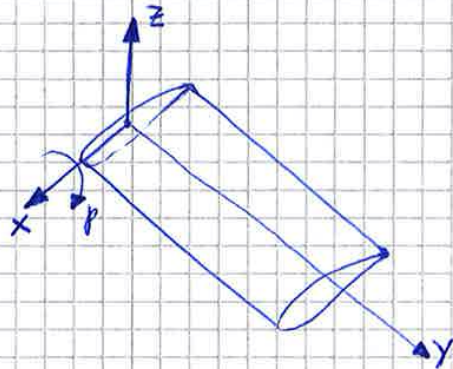
si introducono 2 nuovi parametri:

$$\psi = \frac{e C_{l\beta} + e C_{mp}}{ae}$$

$$\lambda^2 = \frac{qcae}{GJ}$$

## INVERSIONE ALLETONI - ROLLIO

il rollio logicamente modifica l'incidenza dell'ala per ogni profilo



$$\alpha = \alpha_a + \theta(y) - \frac{p \cdot y}{U}$$

↑ ↑ ↑  
angolo accelerativa rollio

INCIDENZA  
CON ROLLIO

$p \rightarrow$  VELOCITA' ANGOLARE DI ROLLIO

Risolvendo l'equazione differenziale del II ordine  $\frac{d^2\theta}{dy^2} + \lambda^2\theta = \lambda^2 \left( \frac{p \cdot y}{U} - B\psi \right)$  troviamo la risposta aerodinamica dell'ala  $\theta(y)$ :

$$\theta(y) = \frac{p}{\lambda U} \left[ \lambda y - \sec(\lambda l) \cdot \sin(\lambda y) \right] + \psi B \left[ \tan(\lambda l) \sin(\lambda y) + \cos(\lambda y) - 1 \right]$$

poiché  $\theta(y)$  dipende sia da  $p$  che da  $B$  si può avere una condizione di INVERSIONE DEI COMANDI RISPETTO AL ROLLIO.

$$\frac{dL}{dB} = 0$$

$$M_x = 0$$

se  $p = \text{costante}$  non c'è accelerazione di rollio  $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_x = \int_0^l y \cdot L'(y) dy = 0$$

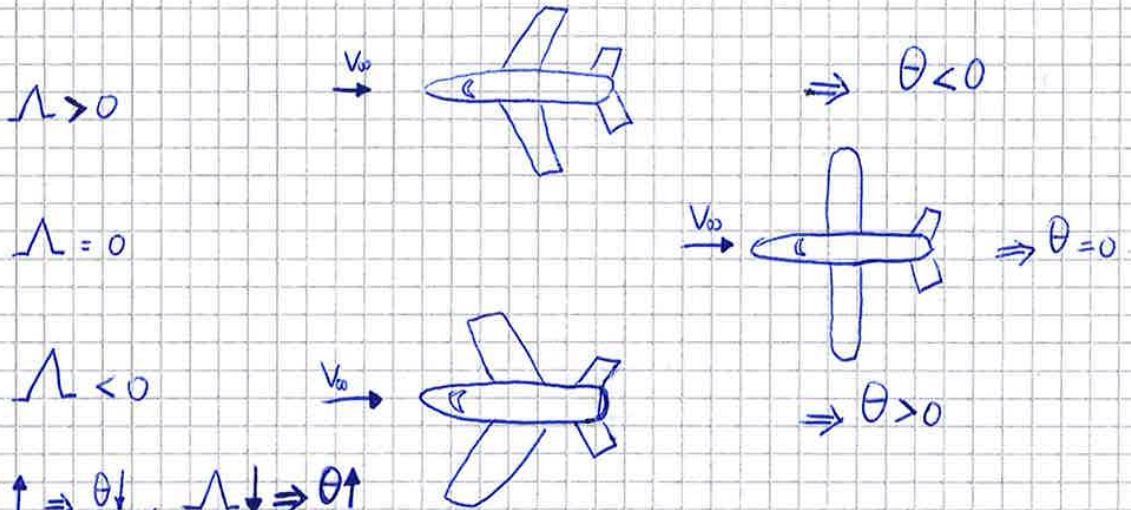
$$\frac{p l}{U} = \frac{\lambda l \left\{ c_{mp} \left[ (\lambda l)^2 - 2 \sec(\lambda l) + 2 \right] - 2 c_{ep} \left[ \sec(\lambda l) - 1 \right] \right\}}{2 a e \left[ \lambda l - \tan(\lambda l) \right]}$$

la condizione per cui  $\frac{d(p l / U)}{dB} = 0$  ci dà l'INVERSIONE AL COMANDO DI ROLLIO:

$$\Rightarrow \frac{\lambda l \left\{ c_{mp} \left[ (\lambda l)^2 - 2 \sec(\lambda l) + 2 \right] - 2 c_{ep} \left[ \sec(\lambda l) - 1 \right] \right\}}{2 a e \left[ \lambda l - \tan(\lambda l) \right]} = 0$$

esiste poi un 3° tipo di accoppiamento, detto...

3) ACCOPPIAMENTO GEOMETRICO → angolo di freccia  $\Lambda$  e rotazioni  $\phi_x$  e  $\phi_y$



in generale  $\Lambda \uparrow \Rightarrow \theta \downarrow$ ,  $\Lambda \downarrow \Rightarrow \theta \uparrow$

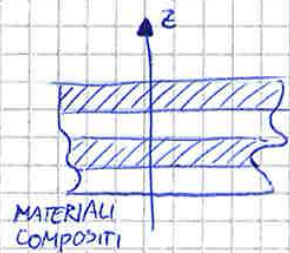
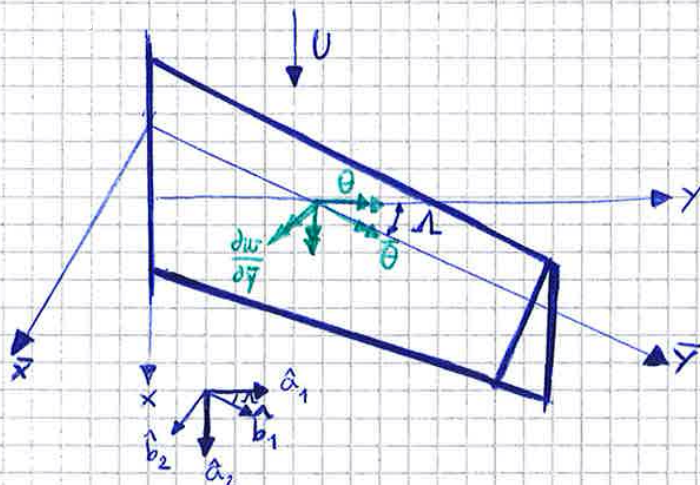
Un'ala a freccia incorre in torsione quando trascinata o flessionata.

$e=0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_y = 0 & (\theta=0) & \text{se } \Lambda=0 \\ \phi_y \neq 0 & (\theta=0) & \text{se } \Lambda \neq 0 \end{cases}$

! accoppiamento aerodinamico ( $C \equiv P$ )

ricordiamo che  $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI & D_{66} \\ D_{26} & G-I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{x,y} \\ \phi_{y,x} \end{Bmatrix}$ , con  $D_{26} = \sum_{k=1}^{N_{mat}} \int_{z_k^-}^{z_k^+} z^2 Q_{66}^k dE$

$\Lambda \rightarrow$  FRECCIA ALARE



$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Theta_{,yy} + \frac{qea\alpha}{GJ} \bar{\Theta} \cos^2(\Lambda) - \frac{qe-ca}{GJ} w_{,y} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) = -\frac{1}{\omega^2} [qea\alpha_r \cos(\Lambda) + qc^2_{mac} \cos^3(\Lambda) - Nmg_d] \\ w_{,yyyy} + \frac{qca}{EI} w_{,y} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) - \frac{qca}{EI} \bar{\Theta} \cos^2(\Lambda) = \frac{1}{EI} (qca\alpha_r \cos(\Lambda) - Nmg) \end{array} \right.$$

Ora si impongono le CONDIZIONI AL CONFINO:

$$\bar{y} = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Theta} = 0 \\ w = 0 \\ w_{,yy} = 0 \end{array} \right.$$

$$\bar{y} = l \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{\Theta}_{,y} = 0 \\ w_{,yy} = 0 \\ w_{,yyyy} = 0 \end{array} \right.$$

Al sistema (\*) esistono solo soluzioni approssimate, perché non è risolvibile in forma chiusa. Si valuta la convergenza di queste soluzioni misurando la differenza tra i termini a destra dell'uguale e quelli di sinistra. Si applicano metodi numerici o il PLV.

CASI PARTICOLARI:

• ALA DRITA ( $\Lambda = 0$ )

• DISACCOPIAMENTO AERODINAMICO ( $e = 0$ )  $\Rightarrow w_{,yyyy} + \frac{qca}{EI} w_{,y} \sin(\Lambda) \cos(\Lambda) = 0$

$$\Rightarrow q_D = -6,32970 \frac{EI}{\alpha c l^3 \sin(\Lambda) \cos(\Lambda)}$$

PRESSIONE DI DIVERGENZA

29/11/2017

# IL METODO AGLI ELEMENTI FINITI

Il Metodo agli Elementi Finiti, d'ora in poi chiamato come METODO FEM, consiste nel suddividere un dominio complesso in tanti sottodomini di forma elementare. In questi sottodomini le relazioni che esprimono grandezze quali lo spostamento, la deformazione ... sono esprimibili come FUNZIONI DI FORMA ELEMENTARI. In forma generale il METODO FEM è già stato visto in altri corsi come Costruzioni Aeronautiche del prof. Di Sciuma.

## ANALISI STATICA

EQUAZIONE MATRICIALE:

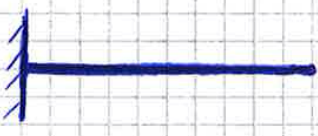
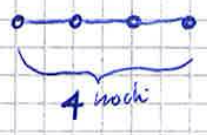
$$M\ddot{U} + (K_{st} + K_a)U = F$$



il sistema è di  $N$  in  $N$  incognite, dove  $N$  è il numero di nodi del dominio.

Consideriamo una trave a sbalzo modellizzata con 10 elementi B4 (beam 4)

(1D)



10 elementi B4  $\Rightarrow$  31 nodi

utilizziamo il modello della TRAVE DI THIMOSHENKO

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} \\ u_y = u_{y1} + x u_{y2} + z u_{y3} \\ u_z = u_{z1} \end{cases} \Rightarrow 5 \text{ incognite: } u_{x1}, u_{y1}, u_{z1}, u_{y2}, u_{y3}$$

In base alla LEGGE DI BIOT-SAVART il vortice nell'  $n$ -esimo pannello influenza la velocità del flusso su tutti gli altri pannelli

diff di pressione  $(\Delta p = \frac{\Delta p'}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2})$

$$w' = A^D \cdot \Delta p'$$

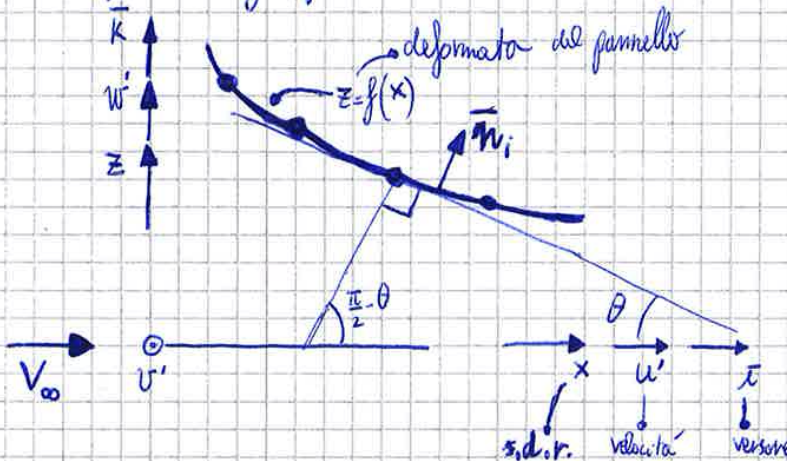
→ VELOCITA' DEL FLUSSO NORMALE AL PROFILO

MATRICE D' INFLUENZA AERODINAMICA  $(\in \mathbb{R}^{N_{AP} \times N_{AP}})$

in forma matriciale:

$$w'_i = \sum_{j=1}^{N_{AP}} A^D_{ij} \cdot \Delta p'_j$$

Le condizioni al contorno sono date dalla CONDIZIONE DI TANGENZA flusso sul  
control point di ogni pannello



avremo 3 componenti di  $V_{\infty} = u', v', w'$

$$\vec{V}_j^i = (V_{\infty} + u') \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k}$$

$$\vec{V}_j^i = (V_{\infty} + u') \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k} \Rightarrow \vec{V}_j^i = V_{\infty} \cdot \vec{i} + w' \cdot \vec{k}$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{1cm}}_{=0}$

$$\vec{V}_j^i \cdot \vec{n}_i = 0 \rightarrow \text{CONDIZ. DI TANGENZA SUL CONTROL POINT}$$

Posso scrivere:

$$V_{\infty} \vec{i} \cdot \vec{n}_i + w' \vec{k} \cdot \vec{n}_i = 0$$

$$V_{\infty} \cdot \sin \theta + w' \cdot \cos \theta = 0$$

$[A]$  dipende solamente della geometria del problema.

$$\Delta p = [A^D]^{-1} w = [A^D]^{-1} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = [A^D]^{-1} [A] \{U\}$$

Introduciamo la MATRICE SPLINE  $\tilde{A}$  che calcola gli spostamenti nei LOAD POINTS.

$$\{\tilde{z}\} = [\tilde{A}] \{U\}$$

Adesso passiamo al calcolo della MATRICE DI RIGIDezza AERODINAMICA utilizzando il PLV:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext}$$

PLV

Partiamo dal caso statico, in cui non compare  $M\ddot{U}$ . Dobbiamo definire il lavoro della parte aerodinamica, della parte strutturale e della parte di forze esterne:

$$\delta W_{ST} = \int_V \delta \epsilon^T \sigma \delta V = \delta U^T \cdot K_{ST} \cdot U$$

LAVORO STRUTTURALE

$$\delta W_{F_{ext}} = \delta U^T \cdot F$$

LAVORO FORZE ESTERNE

$$\delta W_{AERO} = \delta \tilde{z} \cdot L$$

LAVORO AERODINAMICO

portanza

$$\{L\} = \frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 [S] \{\Delta p\}$$

matrice diagonale con la sup. di ogni pannello  
 vettore dei  $\Delta p$  su ciascun pannello

$$\tilde{z} = \tilde{A} U$$

$$\delta \tilde{z} = \tilde{A} \delta U = \delta U^T \tilde{A}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p'}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2}$$



$$u = F_z N_j u_{zj}(y)$$

$F_z$  → FUNZIONE D'ESPANSIONE (dipende da  $x$  e  $z$ )

$N_j$  → FUNZIONE DI FORMA (dipende da  $y$ )

Ora scegliamo il modello strutturale della nostra trave. Si parte dai più elementari, poi aumentando i dettagli, si arriva a quelli più complessi ed accurati.

### 1) MODELLO DI EULERO-BERNOULLI

EULE in MUL 2!

è un metodo del 1° ORDINE!

è un caso particolare di EDTN con  $N=1$

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} + Xu_{x2} + Zu_{x3} \\ u_y = u_{y1} + Xu_{y2} + Zu_{y3} \\ u_z = u_{z1} + Xu_{z2} + Zu_{z3} \end{cases} \Rightarrow 9 \text{ INCOGNITE!}$$

IPOTESI:

- la sezione resta indeformata nel piano  $xz$

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} = 0 \\ \epsilon_{zz} = \frac{du_z}{dz} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{du_x}{dz} + \frac{du_z}{dx} = 0 \end{cases}$$

spostamento lungo  $x$ :  $u_x(x, y, z) = u_{x1}(y) + Xu_{x2}(y) + Zu_{x3}(y)$   
 è funzione solo della coord.  $y$

$u_{x2} = u_{x3} = 0$  dato che  $\epsilon_{xx} = 0$

$\Rightarrow u_x(x, y, z) = u_{x1}(y)$

$\Rightarrow u_z(x, y, z) = u_{z1}(y)$

$\Rightarrow$  il numero di incognite (DOF) passa da 9 a 5!

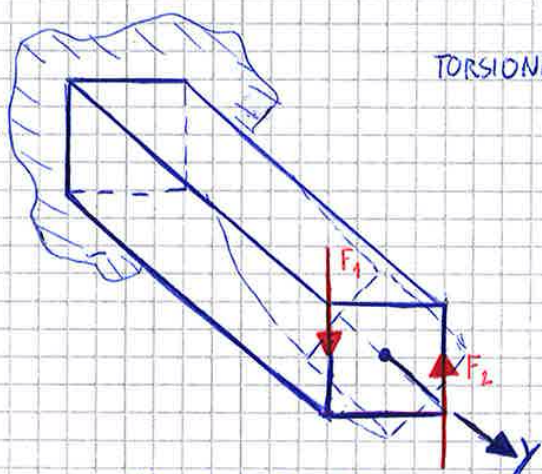
## 2) TRAVE DI THIMOSHENKO

si ottiene eliminando la 2° IPOTESI del metodo di Eulero - Bernoulli. Quindi in questo modello è contemplata la DEFORMABILITÀ A TAGLIO, pertanto si considerano le incognite  $\varphi_z$  e  $\varphi_x$  e il numero di incognite passa da 3 a 5.

è sempre un metodo del 1° ORDINE!

## 3) MODELLO EDTN

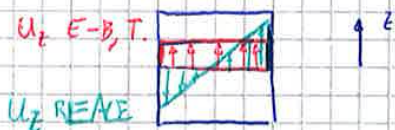
È se volessimo considerare anche la torsione, non solo la flessione come fatto nel modello di Eulero - Bernoulli?



TORSIONE PURA

$$|F_1| = |F_2|$$

i modelli di Eulero - Bernoulli e di Timoshenko non considerano la torsione della trave, dato che  $u_x$  e  $u_z$  sono costanti lungo la sezione della trave, cosa che chiaramente non è valida nel nostro modello.



si aggiunge un'altra incognita rispetto al modello di Timoshenko, ovvero la rotazione  $\varphi_y$ .

$$\begin{cases} u_x = u_{x1} - z \varphi_y \\ u_y = u_{y1} - x \frac{du_{z1}}{dy} - z \frac{du_{z1}}{dy} \\ u_z = u_{z1} - x \varphi_1 \end{cases} \Rightarrow 6 \text{ incognite}$$

Se le forze sono concentrate, come nel caso che abbiamo visto, però non possiamo considerare lo spostamento  $u_x$  e  $u_x$  come lineare, ma questo avrà un 40

Lo spostamento quindi è esprimibile come:

$$U = F_T u_T$$

vett. finit. di forma      vett. delle incognite

$T = 1, \dots, M$  dove  $M$  è il numero di termini dell'espansione di Taylor

$$DOF = 3 \cdot M$$

GRADI DI LIBERTÀ

Si interpola lungo l'asse della trave ( $y$ ):

$$u = F_T \cdot N_i \cdot u_{Ti}$$

$i = 1, 2, \dots, N$  dove  $N$  è il numero di elementi finiti della trave

Utilizziamo il METODO EDN=1

$$u(y_p) = F_T N(y_p)_i u_{Ti}$$

$$u_{x1}(y_p) = u_{x1} N_1(y_p) + u_{x2} N_2(y_p) + u_{x3} N_3(y_p) + u_{x4} N_4(y_p)$$

si hanno  $3 \cdot 4 = 12$  DOF.

FUNZ. DI FORMA  $\begin{cases} N_i = 1 & \text{sul nodo } i\text{-esimo} \\ N_i = 0 & \text{su tutti gli altri nodi} \end{cases}$

Come si ricava la MATRICE DI RIGIDEZZA? con il PLV.

$$\delta L_{int} = \int_V \delta \epsilon^T \cdot \sigma \, dV$$

$$\epsilon = b \cdot u \quad \text{matrice di derivazione } \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

$$\sigma = C \cdot \epsilon \quad \text{matrice delle costanti del materiale } \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$\epsilon = bu = b F_T N_i u_{Ti}$$

# ANALISI DINAMICA

Non si analizza la risposta dinamica del sistema mediante il METODO FEM.

Il sistema da risolvere stavolta è:

$$M\ddot{U}(t) + (K_s + K_a)U(t) = 0$$

il vettore delle incognite  $U(t)$  stavolta è dipendente dal tempo.

$$M = \int_V \rho \ddot{U} dV \quad \rightarrow \quad \text{MATRICE DI MASSA}$$

$$K_s \quad \rightarrow \quad \text{MATRICE DI RIGIDEZZA STRUTTURALE}$$

$$K_a \quad \rightarrow \quad \text{MATRICE DI RIGIDEZZA AERODINAMICA}$$

si utilizza il METODO  $-pK$ :

$$u = \bar{u} e^{pt}$$

$$p = \frac{L}{V_{\infty}} (\sigma + i\omega)$$

si considera una componente aerodinamica con soluzione puramente armonica ( $\sigma=0$ )  $\Rightarrow$  NON C'È SMORZAMENTO

$$u = \bar{u} e^{i\omega t}$$

$$\Delta p = \bar{\Delta p} e^{i\omega t} \quad \begin{matrix} \nearrow K_s + f(i\omega) \\ \nearrow K_a = f(i\omega) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow Mp^2 + K_s + K_a(i\omega) = 0 \quad (*)$$

va meglio del VLM nel caso instazionario

il n° di dof dipende dal n° di elementi finiti.

Per la matrice di rigidità aerodinamica si usa il METODO **DLM**: si mette una doppietta su ciascun pannello.

$$w = \int_A \Delta p K(\omega) dA$$

• PROBLEMA STRUTTURALE

$$M\ddot{U} + K_S U = 0$$

la risposta è  $u(t) = \sum_{i=1}^5 \bar{q}_i \phi_i$  ↳ consideriamo i primi 5 modi

MATRICI GENERALIZZATE RIDOTTE  $\tilde{M} = \Phi^T M \Phi$

$\in \mathbb{R}^{N_{modi} \times N_{modi}}$       MATRICE DEI MODI  $\in \mathbb{R}^{N_{top} \times N_{modi}}$   
 $\in \mathbb{R}^{N_{top} \times N_{top}}$       MATRICE DI MASSA  $\in \mathbb{R}^{N_{top} \times N_{top}}$

⇒ MATRICE DI RIGIDEZZA STRUTTURALE GENERALIZZATA  $\tilde{K}_{s,ii} = \omega_i^2 \tilde{M}_{ii}$

↳  $\omega_i$  freq. di oscillazione propria della struttura

⇒ MATRICE DI RIGIDEZZA AERODINAMICA GENERALIZZATA  $\tilde{K}_a(i\omega)_{ij} = \sum_{N=1}^{N_{AP}} \Delta p_j^N(i\omega) \tilde{z}_i^N S_{AP}^N$

$\tilde{z}_i = \tilde{A} \cdot \phi_i$

$i, j = 1, \dots, N_{modi}$

$$\begin{cases} w = A^D \Delta p \\ \Delta p = \overline{\Delta p} e^{i\omega t} \end{cases} \Rightarrow \tilde{K}_a = \tilde{K}_a(\omega)$$

Applichiamo ora il metodo -pk sul sistema:

$$\tilde{M}_p^2 + \tilde{K}_s + \tilde{K}_a(i\omega) = 0$$

$k = \frac{b}{V_{\infty}} \omega \rightarrow$  FREQUENZA RIDOTTA

si esegue un ciclo interno sulle  $k$  per ogni valore di  $V_{\infty}$ , che si fa variare entro un certo range.

Si cerca la convergenza di  $p$ ,  $p_0 = g_0 + i k_0$ , e il  $k_0$  diventa la nuova  $k$  con cui  $\checkmark$  trovare  $p$   
 Si esegue un ciclo iterativo  $p_i = p_{i+1}$  e una volta raggiunta la convergenza si passa al valore di  $V_{\infty}$  successivo

# TEORIA DELLA PIASTRA DI REISSNER-MINDLIN

utilizzata per le PIASTRE MULTISTRATO ( $E_L \gg E_T$ )

bisogna determinare le matrici  $[K], [D], [M]$   $[K_a], [D_a], [M_a]$   
strutturali meccaniche

ALA  $\sim$  TRAVE

MESH AERODINAMICA  $\sim$  TEORIA DELLA STRISCIA

FLUTTER  $\sim$  PISTON THEORY

$$[K]_{ala} = \sum_{e=1}^N [K^e]$$

MATRICE DI RIGIDEZZA

$$[D]_{ala} = \sum_{e=1}^N [D^e]$$

MATRICE DI SMORZAMENTO

$$[M]_{ala} = \sum_{e=1}^N [M^e]$$

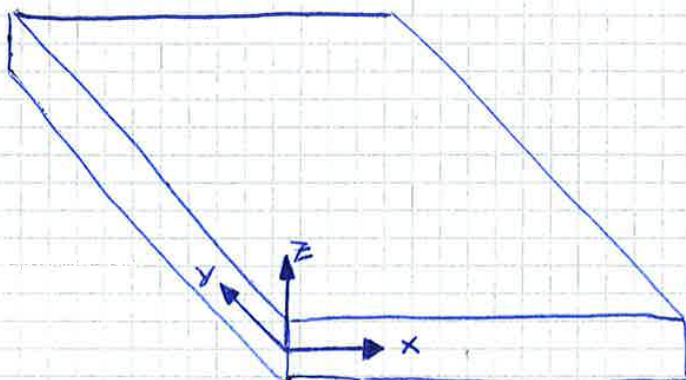
MATRICE DI MASSA

$$\{F(t)\}_{ala} = \sum_{e=1}^N \{F^e(t)\}$$

VEITORE DELLE FORZE (INSTAZIONARIO)

Di solito nel METODO FEM si modella l'ala come una piastra, trascurando la complessità strutturale del cassone alare (costole, longheroni, ...). Per studiare la piastra ci sono molte teorie, noi adesso vedremo la TEORIA DELLA PIASTRA DI REISSNER-MINDLIN

## PIASTRA DI REISSNER-MINDLIN



la piastra è un oggetto 3D  
 $\Rightarrow$  gli spostamenti sono visti in campo 3D

si pensa ad esempio ad una piastra soggetta ad un gradiente termico lungo z.

$$\epsilon_{zz} = \alpha \cdot \Delta T = \alpha [T_0 + z(T - T_0)]$$

$$\Rightarrow w(x, y, z) = w_0(x, y) + z \varphi_z(x, y) + z^2 \varphi(x, y)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \epsilon_{xz} = 0 \Rightarrow \varphi_x = -w_{,x} \\ \epsilon_{yz} = 0 \Rightarrow \varphi_y = -w_{,y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) - z \cdot w_{,x} \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \cdot w_{,y} \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  la t. di Reissner-Mindlin non è rispettata!

### EQUAZIONI COSTITUTIVE DI REISSNER-MINDLIN,

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{16} & & & \\ & c_{22} & c_{26} & & & \\ & & c_{66} & & & \\ & & & c_{44} & c_{45} & \\ & & & & c_{55} & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{pmatrix}$$

$[C] \rightarrow$  simmetrica

$$\begin{cases} \epsilon_{xz}, \epsilon_{yz} = \omega st \\ \epsilon_{zz} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_{xx}^k = C_{11}^k (u_{0,x} + z \varphi_{x,x}) + C_{12}^k (u_{0,y} + z \varphi_{x,y}) + C_{16}^k (u_{0,y} + z \varphi_{x,y} + u_{0,x} + z \varphi_{z,z})$$

CURVATURE

$$\Rightarrow N_{xx}^k = A_{11} u_{0,x} + B_{11} \varphi_{x,x} + A_{12} u_{0,y} + B_{12} \varphi_{x,y} + A_{16} (u_{0,y} + u_{0,x}) + B_{16} (\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x})$$

dove :

$$A_{ij} = \int C_{ij}^k dz$$

$$B_{ij} = \int z C_{ij}^k dz$$

$$D_{ij} = \int z^2 C_{ij}^k dz$$

$A_{11}, A_{12}, A_{16} \rightarrow$  COSTANTI MEMBRANALI

$B_{11}, B_{12}, B_{16} \rightarrow$  COSTANTI DI ACCOPPIAMENTO

$D_{ij} \rightarrow$  COSTANTI DI RIGIDEZZA FLESSIONALE

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{zz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & & & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^0 \\ \epsilon_{yy}^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{Bmatrix}$$

$\epsilon \rightarrow$  DEFORMAZIONI MEMBRANALI

$\gamma \rightarrow$  TORSIONI



trasformiamo il vettore  $\{\epsilon\}$  in  $\{d\epsilon\}$  e  $\{\sigma\}$  in  $\{d\sigma\}$

⇒

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u_x = u_{0,x} + z\varphi_{x,x} \\ \epsilon_{yy} = v_y = v_{0,y} + z\varphi_{y,y} \\ \epsilon_{xy} = v_x + u_y = u_{0,y} + z\varphi_{x,y} + v_{0,x} + z\varphi_{y,x} \\ \epsilon_{xz} = w_x + u_z = w_{0,x} + \varphi_x \\ \epsilon_{yz} = w_y + v_z = w_{0,y} + \varphi_y \end{cases}$$

$$\{s\} = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{pmatrix}$$

VEITTORE DEGLI SPOSTAMENTI

$$\Rightarrow \{\epsilon\} = [b_0]\{s\} + z [b_1]\{s\}$$

$[b_0], [b_1] \rightarrow$  MATRICI CHE CONTENGONO OPERATORI DIFFERENZIALI

$$\{d\epsilon\} = [b_0]\{ds\} + z [b_1]\{ds\}$$

LEGGE DI HOOKE:

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} = [C]([b_0]\{s\} + [b_1]\{s\})$$

discretizziamo il sistema con N elementi finiti:

$$\{s\} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

$$[B_0] = \left[ \begin{array}{ccccc} N_{1,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & 0 & 0 \\ N_{1,z} & 0 & N_{1,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,z} & N_{1,y} & 0 & 0 \end{array} \right] \dots \dots \dots \left[ \begin{array}{ccccc} N_{N,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{N,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{N,y} & N_{N,x} & 0 & 0 & 0 \\ N_{N,z} & 0 & N_{N,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{N,z} & N_{N,y} & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$[B_0] = [B_0]_1 \quad [B_0]_2 \quad \dots \quad [B_0]_N$$

$$[B_1] = [B_1]_1 \quad [B_1]_2 \quad \dots \quad [B_1]_N$$

$$\{\partial \varepsilon\} = [B_0] \{\partial q\} + z [B_1] \{\partial q\}$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\varepsilon\}$$

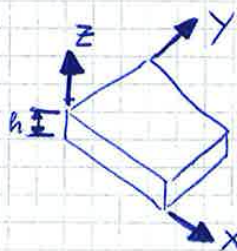
$$\Rightarrow \{\partial \sigma\} = [C] \{\partial \varepsilon\} = [C] \left( [B_0] \{\partial q\} + z [B_1] \{\partial q\} \right)$$

$$\partial L_i = \int_{V_e} \{\partial \varepsilon\}^T \{\sigma\} \partial V = \int_{V_e} \left[ \{\partial q\}^T \left( [B_0]^T + z [B_1]^T \right) [C] \left( [B_0] + z [B_1] \right) \right] \{\partial q\} \partial V =$$

$$= \{\partial q\}^T [K] \{\partial q\}$$

$$\Rightarrow [K] = \int_{V_e} \left[ \left( [B_0]^T + z [B_1]^T \right) [C] \left( [B_0] + z [B_1] \right) \right] \partial V = \int_{V_e} [B]^T [C] [B] \partial V$$

con  $[B] = [B_0] + [B_1] \cdot z$   
essendo un elemento piastra



$$\Rightarrow \int_{V_e} \partial V = \int_A \int_{-h/2}^{h/2} dz \, dA$$