NUMERO: 2288A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Peruzzo Caroca

MATERIA: Fisica I Teoria + Esercitazione + Temi di esame - Prof. Gliozzi

CINEMATICA del PUNTO (formule del MAZZOLDI)

- **MOTO RETTILINEO**

velocità media : $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

- informazioni complessive
- non so il tipo di moto

velocità istantanea : $v = \frac{dx}{dt}$

- rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante considerato

LEGGE ORARIA generale : $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$

poiché : $v_m = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} v(t)dt$

$x(t) = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t-t_0)$

MOTO RETTILINEO UNIFORME $\begin{cases} v = cost \\ a = 0 \end{cases}$

lo spazio è funzione lineare del tempo

accelerazione media : $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$

accelerazione istantanea : $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

$\begin{cases} a = 0 : \text{moto rettilineo uniforme} \\ a > 0 : \text{la velocità aumenta} \\ a < 0 : \text{la velocità diminuisce} \end{cases}$

⚠ è il segno della velocità istantanea a dare il verso del moto

$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$ LEGGE generale

$x(t) = x_0 + \int [v_0 + a(t-t_0)]dt \longrightarrow x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2$

MOTO RETTILINEO UNIFORMEMENTE ACCELERATO

la velocità è una funzione lineare del tempo mentre lo spazio è una funzione quadratica del tempo, a = costante.

$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v(x(t)) = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \longrightarrow \boxed{a = v\frac{dv}{dx}}$

Da questa relazione, integrando, si ottengono

$$\int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} v\,dv = \frac{1}{2}(v^2 - v_0^2)$$

Nel moto uniformemente accelerato : $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

POSIZIONE $x(t) \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$
(COSTANTE ⇒ QUIETE)

VELOCITA' $v(t) \longrightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)dt$
(COSTANTE ⇒ RETT. UNIF)

ACCELERAZIONE $a(t) \longrightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$
(COSTANTE ⇒ RETT. UNIF. ACC)

DERIVATA ↓ ↑ INTEGRALE

- **MOTO RETTILINEO SMORZATO ESPONENZIALMENTE**

$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = -kv}$ accelerazione sempre contraria alla velocità, che dunque deve diminuire, e varia con la stessa legge

$$\int \frac{dv}{v} = \int -k\,dt \rightarrow \ln\frac{v}{v_0} = -kt \rightarrow \boxed{v(t) = v_0 e^{-kt}}$$

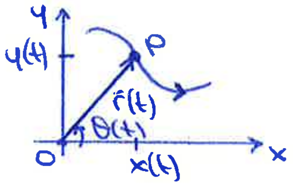
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = -kv \rightarrow \frac{dv}{dx} = -k \rightarrow \int dv = \int -k\,dx \rightarrow \boxed{v(x) = v_0 - kx}$$

Legge oraria: $\boxed{x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)\,dt = \frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$

$\tau = 1/k$ costante di tempo
↳ GRANDE: decrescita lenta
↳ PICCOLA: decrescita rapida

- **MOTO nel PIANO**

moto con traiettoria generica per la quale vengono usati vettori



$\boxed{\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} \\ r &= \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}}$

$$r(t) = \overline{OP} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y$$

$\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\bar{u} = v\bar{u}_t}$ È sempre TANGENTE alla traiettoria nel punto considerato

Tutto questo però è invariante rispetto al sistema di riferimento.
Usando due versori $\bar{u}_r$ ($//\,\bar{r}$) e $\bar{u}_\theta$ ($\perp$ al precedente) si ottiene:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

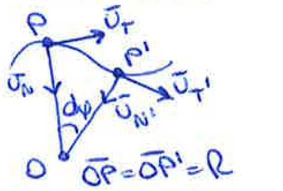
$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2} \rightarrow \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{v}(t)\,dt$$

⚠ Componente // alla velocità ($\bar{u}_T$) esprime la variazione del modulo della velocità. Quella ⊥ dice come varia la direzione della velocità ed è diretto verso la concavità della traiettoria

$$\begin{cases} \bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt}(v\bar{u}_T) = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + v\frac{d\varphi}{dt}\bar{u}_N \\ \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{dv}{dt}\bar{u}_T + \frac{v^2}{R}\bar{u}_N = \bar{a}_T + \bar{a}_N \\ a &= \sqrt{a_N^2 + a_T^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^2}{R^2}} \end{aligned}}$$

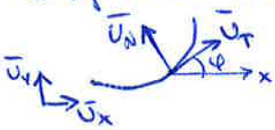
↓ dice quanto rapidamente varia la direzione di $\bar{u}_T$ e quindi di $\bar{u}_N$

$\bar{a}_T$ = ACCELERAZIONE TANGENZIALE
$\bar{a}_N$ = ACCELERAZIONE NORMALE o CENTRIPETA



$a_N = a_T = 0 \Rightarrow$ moto rettilineo uniforme
$a_T \neq 0 \Rightarrow$ moto UAMO (rettilineo e vario $\Rightarrow a_N = 0$)
$a_N \neq 0 \Rightarrow$ moto CURVILINEO (curvilineo ed uniforme $\Rightarrow a_T = 0$)

Componenti CARTESIANE: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\bar{u}_x + \frac{dx}{dt}\bar{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{u}_y = a_x\bar{u}_x + a_y\bar{u}_y$



$$a_x = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - \frac{v^2}{R}\sin\varphi$$
$$a_y = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + \frac{v^2}{R}\cos\varphi$$

Componenti POLARI: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\bar{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\bar{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\bar{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\bar{u}_\theta}{dt}$

$$\begin{cases} \frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta \\ \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_r \end{cases} \rightarrow \bar{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\bar{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\bar{u}_\theta$$

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{a}(t)\,dt$$

2

DINAMICA del PUNTO

PRINCIPIO di INERZIA: un corpo non soggetto a forze permane nel suo stato di moto / quiete

FORZA: esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

- **LEGGE di NEWTON**

$$\boxed{\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}}$$

m = massa inerziale (inerzia = resistenza a variare il proprio stato di moto)

Se $a = 0 \rightarrow v$ = costante (principio di inerzia)
Questa formulazione vale in un sistema inerziale.

udm: $[F] = N = kg\frac{m}{s}$

- **QUANTITA' di MOTO e IMPULSO**

quantità di moto: $\boxed{\bar{p} = m\bar{v}}$

Se la massa è costante: $\boxed{\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}}$ → la massa varia per due motivi: si modifica in senso stretto; dipende dalla velocità (≃ per a c)

Teorema dell'impulso: $\boxed{\bar{J} = \int_0^t \bar{F}dt = \int_{p_0}^{p} d\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_0 = \Delta\bar{p}}$

→ se m è costante: $\boxed{\bar{J} = m(\bar{v} - v_0) = m\Delta\bar{v}}$

udm: $[J] = N \cdot s$

⚠ Variazione di quantità di moto è tanto maggiore quanto più elevato è il valore dell'impulso cioè, se F è costante, quanto maggiore è il tempo in cui agisce la forza.

Se F è costante: $\boxed{\bar{F}t = m(\bar{v} - \bar{v}_0)}$ valor medio: $F_m = \frac{\Delta\bar{p}}{\Delta t}$

Conservazione della quantità di moto: in assenza di forze applicate la qdm rimane costante ($\bar{F} = 0 \Rightarrow \Delta\bar{p} = 0 \Rightarrow \bar{p}$ costante).

- **RISULTANTE delle FORZE e REAZIONI VINCOLARI**

Se su un punto agiscono più forze la risultante delle forze applicate è:
$$\boxed{\bar{R} = \sum \bar{F}_i}$$

Se la risultante è nulla non è detto che siano nulle le forze.
Se un corpo soggetto all'azione di una forza rimane fermo a questa forza se ne oppone un'altra in modo che la loro risultante sia nulla (questa forza di reazione è detta REAZIONE VINCOLARE).
Se durante il moto di un oggetto, dovesse annullarsi la reazione vincolare allora avverrebbe il distacco del corpo dalla superficie.
Quando $\bar{F}$ è variabile si ha un moto vario in cui l'accelerazione ha due componenti:

$$\boxed{\bar{F} = m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = \underbrace{m\frac{dv}{dt}\bar{u}_T}_{\bar{F}_T} + \underbrace{m\frac{v^2}{R}\bar{u}_N}_{\bar{F}_N}}$$

$\bar{F}_N$: fa variare la direzione della velocità

$\bar{F}_T$: fa variare il modulo della velocità

- **FORZA PESO**

$$\boxed{\bar{P} = m\bar{g}}$$

$g = 9,8\ m/s^2$

- **FORZA di ATTRITO RADENTE**

Può essere STATICA o DINAMICA a seconda che si opponga alla messa in moto di un corpo fermo o di uno già in moto.

tensione : $T_f = m\left(g\cos\theta(t) + \frac{v^2(t)}{L}\right)$ → è max nella posizione verticale dove sono max $\theta(t)$ e $v(t)$

- **LAVORO, POTENZA, ENERGIA CINETICA.**

lavoro : $\boxed{W = \int_A^B \bar{F}\cdot ds = \int_A^B F\cos\theta\, ds = \int_A^B F_T\, ds}$ → è l'integrale di linea della forza.

- → È pari alla somma dei lavori delle singole forze applicate: $W = \sum_i W_i$
- LAVORO — MOTORE : $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$; RESISTENTE : $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$

unità di misura : $[W] = J = N \cdot m$

- → È nullo se — non agisce nessuna forza; agiscono forze la cui risultante è nulla; agiscono forze ⊥ allo spostamento

potenza : $\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \bar{F}\cdot\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\cdot\bar{v} = F_T \cdot v}$ (istantanea)

→ media : $P_m = \frac{W}{t}$

unità di misura : $[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{Nm}{s}$

energia cinetica : $W = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$

- $W > 0 \Rightarrow E_{KB} > E_{KA}$
- $W < 0 \Rightarrow E_{KB} < E_{KA}$
- $W = 0 \Rightarrow E_K$ costante

⚠ W è quello TOTALE.

- Lavoro della forza peso: $\boxed{W = -(mgz_B - mgz_A) = -E_{pB} - E_{pA} = -\Delta E_p}$
- Lavoro della forza elastica : $\boxed{W = \int_A^B -kx\bar{u}_x \cdot dx\bar{u}_N = -k\int_A^B x\,dx = \frac{1}{2}k(x_A^2 - x_B^2) = -\Delta E_p}$
- Lavoro di una forza di attrito radente : $\boxed{W = \int_A^B \bar{F}_a d\bar{s} = \int_A^B -\mu_d N\bar{u}\cdot d\bar{s} = -\mu_d N \int_A^B ds}$
Dipende dal percorso.
È sempre negativo e dunque è un LAVORO RESISTENTE.

- **FORZE CONSERVATIVE**

quelle il cui lavoro non dipende dal percorso.

$\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{s} = \int_B^A \bar{F} d\bar{s}$, quindi : $\int_A^B \bar{F}\cdot d\bar{s} = -\int_B^A \bar{F} d\bar{s}$ e dunque : $\boxed{\oint \bar{F}\cdot d\bar{s} = 0}$

Energia potenziale è funzione delle coordinate. $\boxed{W = E_{pA} - E_{pB} = -\Delta E_p}$

Le forze il cui lavoro dipende dal percorso sono NON CONSERVATIVE.

- **CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA**

se agiscono solo forze conservative : $\boxed{E_m = E_K + E_p = \text{costante}}$

In presenza di forze non conservative l'energia meccanica non si conserva e la sua variazione è pari al lavoro delle forze dissipative (anche se in realtà diminuisce sempre). $\boxed{W_{diss} = E_{mB} - E_{mA} = \Delta E_m}$

- **RELAZIONE TRA ENERGIA POTENZIALE e FORZA**

$\boxed{F = -\nabla E_p = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\right)}$ La forza è dunque nel verso di massima diminuzione di E_p.

La forza è sempre ⊥ alla superficie equipotenziale.

MOTI RELATIVI

Le leggi fisiche non dipendono dal sistema di riferimento ma esso va sempre precisato
SISTEMA FISSO: quello da cui si osserva il moto. $(Oxyz)$
SISTEMA MOBILE: quello che viene visto muoversi. $(O'x'y'z')$
distano $\overline{OO'}$

$$\boxed{\bar{r} = \overline{OO'} + \bar{r}'}$$

$$r = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$$
$$r' = x'\bar{u}_{x'} + y'\bar{u}_{y'} + z\bar{u}_{z'}$$
$$\overline{OO'} = x_{O'}\bar{u}_x + y_{O'}\bar{u}_y + z_{O'}\bar{u}_z$$

VELOCITÀ ASSOLUTA: $\boxed{\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z} = \bar{v}_{O'} + v' + x'\frac{d\bar{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\bar{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\bar{u}_{z'}}{dt}$

VELOCITÀ RELATIVA: $\boxed{\bar{v}' = \frac{dx'}{dt}\bar{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\bar{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\bar{u}_{z'}}$

VELOCITÀ di O' del sistema mobile misurata da un osservatore nel fisso: $\boxed{\bar{v}_{O'} = \frac{d\overline{OO'}}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\bar{u}_z}$

FORMULE di POISSON: $\frac{d\bar{u}_{x'}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{u}_{x'}$ $\quad \frac{d\bar{u}_{y'}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{u}_{y'}$ $\quad \frac{d\bar{u}_{z'}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{u}_{z'}$

$\to \omega\wedge(x'\bar{u}_{x'} + y'\bar{u}_{y'} + z'\bar{u}_{z'}) = \bar{\omega}\wedge\bar{r}'$

Teorema delle VELOCITÀ RELATIVE: $\boxed{\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \bar{v}' + \underbrace{\bar{\omega}\wedge\bar{r}'}_{\to \frac{dr'}{dt}}}$

VELOCITÀ di TRASCINAMENTO: differenza tra le velocità misurate nei due sistemi
$\to \boxed{\bar{v}_t = \bar{v} - \bar{v}' = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega}\wedge\bar{r}'}$

ACCELERAZIONE ASSOLUTA: $\boxed{\bar{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\bar{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\bar{u}_z} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\bar{v}'}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\wedge\bar{r}' + \omega\wedge\frac{d\bar{r}'}{dt}$

ACCELERAZIONE RELATIVA: $\boxed{\bar{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\bar{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\bar{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\bar{u}_{z'}}$

ACCELERAZIONE di O' rispetto ad O: $\boxed{\bar{a}_{O'} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt}}$

teorema delle ACCELERAZIONI RELATIVE: $\boxed{\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{O'} + \bar{\omega}\wedge(\bar{\omega}\wedge\bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt}\wedge\bar{r}' + 2\bar{\omega}\wedge\bar{v}'}$

ACCELERAZIONE di TRASCINAMENTO: $\boxed{\bar{a}_t = \bar{a}_{O'} + \bar{\omega}\wedge(\bar{\omega}\wedge\bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt}\wedge\bar{r}'}$

$\to \boxed{\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + a_{co}}$

$\to$ ACCELERAZIONE di CORIOLIS: $\boxed{\bar{a}_c = 2\bar{\omega}\wedge\bar{v}'}$

Sistema di riferimento inerziale: in esso vale il PRINCIPIO d'INERZIA. Tutti gli altri sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a quello inerziale sono inerziali.

In un sistema NON INERZIALE il prodotto della massa di un punto materiale per la sua accelerazione in quel sistema è uguale alla forza vera agente su quel punto più le forze apparenti (FORZE di INERZIA).

$$\bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = m\bar{a}'$$

Le forze apparenti non esistono in un sistema inerziale.

DINAMICA dei SISTEMI di PUNTI MATERIALI

- **SISTEMI di PUNTI. AZIONE e REAZIONE**

DINAMICA → conseguenza dell'interazione con forze

$$\boxed{\bar{F}_{TOT} = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}}$$

La distinzione tra forze interne ed esterne dipende da come viene scelto il sistema.

↓

ad esse si applica il principio di AZIONE e REAZIONE di Newton → anche alle $\bar{F}^{(E)}$

In generale: $\bar{R}^{(I)} = \sum_i \bar{F}_i^{(I)} = \sum_{ij} F_{ij} = 0$ perché a due a due sono uguali ed opposte.

Ad esempio, nel caso di FORZE D'ATTRITO, esse sono per un corpo di attrito (cioè resistenti) e per l'altro motrici.

∀ PUNTO P_i di massa m_i	
- POSIZIONE	$\bar{r}_i$
- VELOCITÀ	$\bar{v}_i$
- ACCELERAZIONE	$\bar{a}_i = \frac{\bar{F}_i}{m_i}$
- QUANTITÀ di moto	$\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$
- MOMENTO ANGOLARE	$\bar{L}_i = \bar{r}_i \wedge m_i \bar{v}_i$
- ENERGIA CINETICA	$E_{K_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Per il SISTEMA di PUNTI	
- QUANTITÀ di MOTO TOTALE	$\bar{P} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i$
- MOMENTO ANGOLARE TOTALE	$\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i = \sum_i \bar{r}_i \wedge m_i \bar{v}_i$
- ENERGIA CINETICA TOTALE	$E_K = \sum_i E_{K_i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Momento angolare riferito ad un polo, mobile o fisso, nel sistema di riferimento inerziale.

- **CENTRO di MASSA di un SISTEMA di PUNTI**

La sua posizione è individuata dal RAGGIO VETTORE: $\boxed{\bar{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{\sum m_i}}$ $\quad \boxed{x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}}$ → Analogamente per y_{cm} e z_{cm}

⚠ La posizione del CM rispetto agli N punti materiali non dipende dal sistema di riferimento mentre le sue coordinate variano in base al sistema scelto.

$\boxed{\bar{r}'_{cm} = \bar{r}_{cm} + \overline{OO'}}$ se ho due sistemi di riferimento.

Se poi i punti sono in moto, in generale, la posizione del CM cambia

$$\boxed{\bar{v}_{cm} = \frac{d\bar{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{P}}{M} = \frac{M\bar{v}_{cm}}{M}}$$

→ qdm del CM

→ massa totale del sistema

$$\boxed{\bar{a}_{cm} = \frac{d\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum m_i \bar{a}_i}{M}}$$

Se il sistema è inerziale: $m_i \bar{a}_i = \bar{F}_{TOT} = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}$ e sostituendo i risultati ottenuti prima: $M\bar{a}_{cm} = \sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i (\bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}) = \bar{R}^{(E)} + \cancel{\bar{R}^{(I)}} = \bar{R}^{(E)}$

teorema del moto del CENTRO di MASSA: $\boxed{\bar{R}^{(E)} = M\bar{a}_{cm}}$

Il cm si muove come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema.

$$\boxed{\bar{R}^{(E)} = M\bar{a}_{cm} = M\frac{d\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{dM\bar{v}_{cm}}{dt} = \frac{d\bar{P}}{dt}}$$

⚠ Il moto del cm è determinato solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare il moto del cm

- **CONSERVAZIONE della QUANTITÀ di MOTO**

Sistema isolato o $\bar{R}^{(E)} = 0$ ⇒ $\begin{cases} \bar{a}_{cm} = 0 \\ \bar{v}_{cm} = \text{costante} \\ \bar{P} = \text{costante (si conserva)} \end{cases}$ ⇒ il cm si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete

La qdm può conservarsi anche lungo una sola direzione: $R_x^{(E)} = 0 \Rightarrow \bar{P}_x = \text{costante}$

Perché $\bar{P}$ resti costante deve rimanere costante la somma.

⚠ C'è equivalenza tra conservazione della qdm e principio di azione e reazione

conservazione dell'energia : $(E_k+E_p)_B = (E_k+E_p)_A$ = costante
↳ con forze non conservative : $(E_k+E_p)_B - (E_k+E_p)_A = W_{diss}$ → dipende dalle forze interne

! In un sistema isolato di punti è sempre possibile applicare la conservazione della quantità di moto totale e del momento angolare totale mentre la conservazione dell'energia meccanica non può essere imposta a priori ma solo se si è certi che le forze interne siano conservative

- **URTI TRA PUNTI MATERIALI**

urto → quando due corpi vengono a contatto e interagiscono per breve tempo
↳ durante il quale possono svilupparsi forze molto intense (IMPULSIVE) che agiscono per il breve tempo dell'urto

senza forze esterne durante l'urto si conserva la quantità di moto.

$$\bar{P}_{in} = m_1\bar{v}_{1in} + m_2\bar{v}_{2in} = m_1\bar{v}_{1fin} + m_2\bar{v}_{2fin} = \bar{P}_{fin}$$

$$\bar{P} = (m_1+m_2)\bar{v}_{cm} = \bar{P}_{in} = \bar{P}_{fin} = \text{costante}$$

$$m_1\bar{v}_{1fin} - m_1\bar{v}_{1in} = I_{21} = \int_1^2 \bar{F}_{21}dt \qquad \Big\{ \to \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21} \Rightarrow \underbrace{I_{12} = -I_{21}}_{\text{impulsi}}$$

$$m_2\bar{v}_{2fin} - m_2\bar{v}_{2in} = I_{12} = \int_1^2 \bar{F}_{12}dt$$

$$\Delta P = \int_{t_1}^{t_2} F^{(E)}dt = F_m^{(E)}\tau$$ ↳ se è breve ⇒ ΔP trascurabile

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}dt = \bar{F}_m\tau$$

- **URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO**

si verifica quando i due punti restano attaccati dopo l'urto.

$$\boxed{m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = (m_1+m_2)\bar{v}' = (m_1+m_2)\bar{v}_{cm}}$$

subito dopo l'urto i due corpi si muovono con la velocità che aveva cm prima dell'urto.

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{cm}^2 \to \boxed{E_{kfin} = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{cm}^2 < E_{kin}}$$

↓ rispetto al cm cioè prima dell'urto (è quella che viene assorbita)

- **URTO ELASTICO**

forze interne che si manifestano durante l'urto sono conservative.

$$\boxed{\bar{P}_{in} = \bar{P}_{fin}} \qquad \boxed{E_{kin} = E_{kfin}}$$

Nel sistema cm la qdm di ciascun punto resta la stessa in modulo e varia solo il verso.

$$v_{cm} = \frac{m_1v_{1in} + m_2v_{2in}}{m_1+m_2}$$

- **URTO ANELASTICO**

I punti tornano a separarsi dopo l'urto. Una certa frazione di E_k viene assorbita. Se non agiscono forze impulsive esterne si conserva la qdm.

coefficiente di restituzione: $\boxed{e = -\frac{p'_{1fin}}{p'_{1in}} = \frac{I_{nt}}{I_{def}} = -\frac{p'_{2fin}}{p'_{2in}}}$

$(|p'_{1fin}| = |p'_{2fin}|$ e $|p'_{1in}| = |p'_{2in}|)$ $\boxed{E'_{kfin} = e^2 E'_{kin}}$

$$\delta = \frac{E'_{kfin} - E'_{kin}}{E'_{kin}} = e^2 - 1$$

$$v_{2fin} = \frac{m_1(1+e)v_{1fin} + (m_2 - em_1)v_{2in}}{m_1+m_2}$$

$$v_{cm} = \frac{m_1v_{1in} + m_2v_{2in}}{m_1+m_2} \to v_{1fin} = \frac{(m_1 - em_2)v_{1in} + m_2(1+e)v_{2in}}{m_1+m_2}$$

DINAMICA del CORPO RIGIDO e CENNI di STATICA

CORPO RIGIDO: sistema di punti materiali in cui le distanze tra tutte le possibili coppie di punti non possono variare.

↓

il suo moto può essere studiato
- sistema di riferimento inerziale
- sistema di riferimento del suo centro di massa (moto rispetto al cm perché le distanze non variano)
- sistema di riferimento con assi solidali al corpo rigido in cui ciascun punto del corpo rigido è fermo

(1 PUNTO → 3 COORDINATE; N PUNTI → 3N COORDINATE)

GRADI DI LIBERTÀ
- PUNTO: 3
- CORPO RIGIDO: 6
- N PUNTI: 3N
- DUE PUNTI
  - VINCOLATI AD UNA LINEA: 1
  - VINCOLATI AD UN PIANO: 2
  - VINCOLATI AD UNA CERTA DISTANZA TRA LORO: 5

$W^{(I)} = 0$ → perché le mutue distanze non variano → $\boxed{\Delta E_k = W^{(E)}}$

• MOTO di un CORPO RIGIDO

TRASLAZIONE: può essere uniforme/vario con $\bar{v} = \bar{v}_{cm}$, la dinamica è quella di un punto materiale

$L' = 0$
$E'_k = 0$

- QUANTITÀ di MOTO: $\bar{P} = M\bar{v}_{cm}$
- MOMENTO ANGOLARE: $\bar{L} = \bar{L}_{cm} = \bar{r}_{cm} \wedge M\bar{v}_{cm}$
- ENERGIA CINETICA: $E_k = E_{k\,cm} = \frac{1}{2}M v_{cm}^2$
- EQUAZIONE del MOTO del CM: $\bar{R} = M\bar{a}_{cm}$

ROTAZIONE: tutti i punti descrivono una traiettoria circolare con velocità $\omega(t)$

→ equazione del moto: $\boxed{\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt}}$

ROTOTRASLAZIONE: è il moto più generale che possa compiere un corpo rigido in cui ogni spostamento può essere considerato come la somma di traslazione e rotazione.

→ $\bar{v}_P = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \overline{OP}$
$\bar{v}_Q = \bar{v}_O + \bar{\omega} \wedge \overline{OQ}$ $\Big\}$ $\boxed{\bar{v}_P = \bar{v}_Q + \bar{\omega} \wedge \overline{QP}}$

Se Q è fermo → ROTAZIONE
$\bar{\omega}$ è unica
$\bar{v}$ dipende dall'asse di rotazione scelto

• CORPO CONTINUO e DENSITÀ

$$\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r}\,dm}{\int dm} = \frac{\int \bar{r}\,dm}{m}$$ (m: massa totale)

$\rho = \frac{dm}{dV}$ (in generale $\rho(x,y,z)$)

$\boxed{m = \int dm = \int \rho\, dV}$

Di solito si usa: $\rho = \frac{m}{V}$ → $m = \rho V$ ⟹ $\boxed{\bar{r}_{cm} = \frac{\int \bar{r}\rho\, dV}{m}}$

DENSITÀ SUPERFICIALE: $\rho_s = \frac{dm}{dS}$

DENSITÀ LINEARE: $\rho_l = \frac{dm}{dl}$

• ROTAZIONI RIGIDE ATTORNO ad UN ASSE FISSO in UN S.R. INERZIALE

Asse può essere visto come polo.

ω ha direzione fissa e modulo di solito variabile (quindi ha $\alpha = d\omega/dt \neq 0$)

Asse z di rotazione
$\omega \parallel z$
$O \in z$ è il polo
$\bar{r}$ di P forma θ con z
r di P forma $\frac{\pi}{2}$ con $\bar{v}_P$

$L_{zi} = L_i \cos\theta_i = m_i r_i \omega \cos\theta_i$
$L_z = m_z r_z v_z = m_z R_z \omega$
$L_{iz} = m R_z^2 \omega$ → momento angolare assiale

$L_z = \sum_i L_{iz} = (\sum m_i R_i^2)\omega = I_z \omega$

Componente $\parallel z$ può variare solo in modulo.
Componente $\perp z$ può variare in direzione, in modulo e dipende dal polo.

• TEOREMA di HUYGENS-STEINER

Se si sceglie un asse di inerzia ≠ da quelli "standard" (purché sia ad esso //) il momento di inerzia diventa: $\boxed{I = I_z + md^2}$

↓ distanza del nuovo asse dall'asse z

I momenti di inerzia sono ADDITIVI purché calcolati rispetto ad uno stesso asse.

$$\boxed{E_k = \underbrace{\frac{1}{2} I_z \omega^2}_{\text{moto rispetto al cm}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{cm}^2}_{\text{moto del cm}}}$$

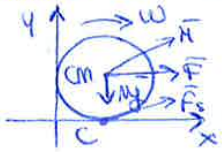
• MOTO di PURO ROTOLAMENTO

corpo rigido di simmetria: cilindrica / sferica

- STRISCIAMENTO: tutte le velocità sono = e // tra loro
- ROTOSTRISCIAMENTO: il corpo rotola e il punto di contatto ha velocità non nulla.
- PURO ROTOLAMENTO: la velocità del punto di contatto è nulla

↳ vi è una forza di ATTRITO che tiene fermo il punto

$$\boxed{\vec{v} = 0 \qquad \vec{v}_{cm} = \omega r \qquad \vec{a}_{cm} = \alpha r}$$



x: $F + f_s = m a_{cm}$ (MOTO)

y: $f_s = mg$ (EQ. VERTICALE)

$mk^2 a_{cm} = Mr - r^2 f_s$ (ROTAZIONE)

↓ condizione per cui C sia fermo $\boxed{f_s \le \mu_s N = \mu_s mg}$

! La forza di attrito non compie lavoro in questo tipo di moto perché è applicata ad un punto che resta fermo.

ATTRITO VOLVENTE: detta forza di attrito che fa sì che un corpo che rotola senza strisciare dopo un po' si fermi da solo.

↳ $M_v = hmg$ momento che si oppone al moto

• MOMENTO DELL'IMPULSO

Per mettere in moto un corpo rigido è possibile applicare una forza di tipo IMPULSIVO: $\vec{J} = \int \vec{F} dt$

momento dell'impulso (rispetto ad un polo scelto per i momenti): $\boxed{\vec{r} \wedge \vec{J} = \Delta \vec{L} = \vec{L}_{fin} - \vec{L}_{in}}$

↓ varia anche il momento angolare

• LEGGI di CONSERVAZIONE nel MOTO di UN CORPO RIGIDO

Se $\vec{R}^{(e)} = 0$ → il cm si muove di moto rettilineo uniforme ma non è detto che lo sia anche quello degli altri punti del corpo rigido.

Se $\vec{M} = 0$ → non è detto che ω sia costante perché dipende tutto dall'asse di rotazione che non è detto sia quello principale di inerzia per cui $L = I\omega$

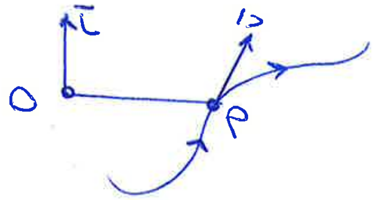
Se L = costante ma varia I allora varia anche ω.

DIMOSTRAZIONI

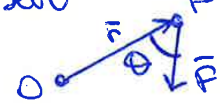
TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE

Hp Calcolo la $d\bar{L}/dt$ di P in moto osservandolo da O (fisso).

Th Allora la derivata temporale del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo fisso in un sistema di riferimento inerziale.



[MOMENTO DI UNA FORZA
$\bar{M} = \bar{r} \wedge \bar{F} = rF \operatorname{sen}\theta$


]

perchè sono //

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dt} \wedge m\bar{v} + \bar{r} \wedge m\frac{d\bar{v}}{dt} = \cancel{\bar{v} \wedge m\bar{v}} + \bar{r} \wedge m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \wedge m\bar{a}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \wedge m\bar{a} = \bar{r} \wedge \bar{F} = \bar{M}}$$ se il polo O è fermo.

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \wedge \bar{F} = \bar{r} \wedge \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{p}}{dt} \qquad \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \frac{dm}{dt}\bar{v} + m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\bar{a} = \bar{F}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{M} = 0 \\ \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{L} = \text{costante}$$ (nel caso di forza nulla oppure // vettore posizione)

TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE per FORZE IMPULSIVE

Hp Il polo a cui è riferito il momento deve essere fisso.

$$\bar{M} = \frac{d\bar{L}}{dt} \rightarrow d\bar{L} = \bar{M}dt$$

costante nel tempo poiché $\bar{F}$ è impulsiva

$$\Delta\bar{L} = \int_0^t \bar{M}\,dt = \int_0^t (\bar{r} \wedge \bar{F})dt = \bar{r} \wedge \int_0^t \bar{F}\,dt = \bar{r} \wedge \bar{J} \rightarrow \boxed{\Delta\bar{L} = \bar{r} \wedge \bar{J}}$$

Th la variazione di $\bar{L}$ è pari al momento dell'impulso.

TEOREMA dell'ENERGIA CINETICA

Detto anche TEOREMA-ENERGIA LAVORO.
Dato che è ricavato dalla II LEGGE di NEWTON ($\bar{F} = m\bar{a}$) vale sia per forze conservative che per forze non conservative.

$$\delta W = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F\cos\theta\, ds = F_T\, ds = m a_T\, ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\frac{ds}{dt}dv = mv\,dv$$

Considerando un percorso A→B finito:

$$W_{AB} = \int_{A\,\gamma}^{B} \delta W = \int_{A\,\gamma}^{B} mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2\Big|_A^B = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{K_B} - E_{K_A} = \Delta E_K$$

Il teorema dunque dice che il lavoro totale delle forze agenti su un corpo è pari alla variazione della sua energia cinetica.
Dunque, uno dei modi per trasferire energia è compiere lavoro.
La forza cambia la velocità ed il lavoro l'energia cinetica.

$$\frac{d\bar v_{O'/O}}{dt} = \frac{d^2 x_{O'}}{dt^2}\bar u_x + \frac{d^2 y_{O'}}{dt^2}\bar u_y + \frac{d^2 z_{O'}}{dt^2}\bar u_z = \bar a_{O'/O}$$

$$\frac{d\bar v'_P}{dt} = \frac{d^2x'}{dt^2}\bar u_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\bar u_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\bar u_{z'} + \frac{dx'}{dt}\cdot\frac{d\bar u_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{d\bar u_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\cdot\frac{d\bar u_{z'}}{dt} = \bar a'_P + (\bar\omega\wedge\bar v'_P)$$

$$\bar\omega\wedge\frac{d\bar r'}{dt} = \bar\omega\wedge(\bar v'_P + \bar\omega\wedge\bar r') = \bar\omega\wedge\bar v'_P + \bar\omega\wedge(\bar\omega\wedge\bar r')$$

$$\Rightarrow \bar a_P = \bar a'_P + \boxed{\bar a_{O'/O} + \frac{d\bar\omega}{dt}\wedge\bar r' + \bar\omega\wedge(\bar\omega\wedge\bar r')} + \boxed{2\bar\omega\wedge\bar v'_P} = \bar a'_P + \bar a_t + \bar a_{Co}$$

ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO ($\bar a_t$)

ACCELERAZIONE DI CORIOLIS ($\bar a_{Co}$) (deriva dalla somma dei due termini in questo colore)

$$\bar a = \bar a'_P + \bar a_{O'} + \frac{d\bar\omega}{dt}\wedge\bar r' + \boxed{\bar\omega\wedge(\bar\omega\wedge\bar r')} + 2\bar\omega\wedge\bar v'_P$$

parte dovuta alla rototraslazione di O' rispetto ad O con velocità angolare ω

* ACCELERAZIONE CENTRIFUGA

accelerazione di O' rispetto ad O (traslazione)

accelerazione misurata in O'x'y'z' del punto P

quella nel SR Oxyz

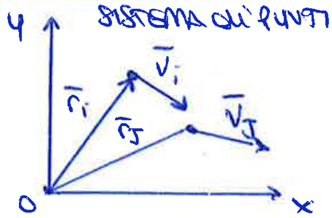
Questo vale se i due sistemi di riferimento sono inerziali.
$\bar u_{x'}, \bar u_{y'}, \bar u_{z'}$: ruotano con velocità angolare $\bar\omega$ rispetto ad $\bar u_x, \bar u_y, \bar u_z$.

Se $\frac{d\bar\omega}{dt} = 0 \Rightarrow$ moto circolare uniforme: $\bar a = \bar a'_P + \bar a_{O'/O} + \underbrace{\bar\omega\wedge(\bar\omega\wedge\bar r')} + 2\bar\omega\wedge\bar v'_P$

cioè $\dot\omega$: accelerazione angolare

segno ⊕ CENTRIPETA (verso)
segno ⊖ CENTRIFUGA (opposto)

MOMENTO ANGOLARE per un SISTEMA di PUNTI → II EQUAZIONE CARDINALE della DINAMICA



(Hp) O fisso o coincidente con Cm (può essere mobile)

$$\bar L_i = \bar r_i\wedge m_i\bar v_i$$

$$\sum_i \bar r_i\wedge m_i\bar v_i = \sum_i \bar L_i = \bar L_{TOT}$$

Vedo come varia nel tempo il momento angolare totale del sistema:

$$\frac{d\bar L}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \bar L_i = \frac{d}{dt}\sum_i \bar r_i\wedge m_i\bar v_i = \sum_i \frac{d\bar r_i}{dt}\wedge m_i\bar v_i + \bar r_i\wedge m_i\frac{d\bar v_i}{dt} =$$

$$= \cancel{\sum_i \bar v_i\wedge m_i\bar v_i} + \sum_i \bar r_i\wedge m_i\bar a_i = \sum_i \bar r_i\wedge\bar F_i =$$

$$= \sum_i \bar r_i\wedge\bar F_i^{(e)} + \cancel{\sum_{ij}\bar r_i\wedge\bar F_{ij}} = \sum_i \bar M_i^{(e)} = \bar M_{TOT}^{(e)}$$

! È la somma dei momenti delle forze esterne o il momento della risultante

↳ si cancella perché per le forze interne vale il principio di azione e reazione

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\bar L}{dt} = \sum_i \bar r_i\wedge\bar F_i^{(e)} = \bar M_{TOT}^{(e)}}$$

(Th) La variazione di momento angolare è pari al momento delle forze esterne a prescindere che il polo sia o no coincidente col Cm

TEOREMA ENERGIA CINETICA per un sistema di N PUNTI

$$dW_i = \bar{F}_i \wedge d\bar{r}_i = \bar{F}_i^{(e)} \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_i^{(i)} \cdot d\bar{r}_i = dW_i^{(e)} + dW_i^{(i)}$$

$dW_i^{(i)}$ non si annulla perché formato da termini: $\bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_j + \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_i = \bar{F}_{ij}(d\bar{r}_i + d\bar{r}_j) = \bar{F}_{ij}\, d\bar{r}_{ij}$

è nullo solo quando sono nulli i cambiamenti delle distanze relative dei punti (cioè nel corpo rigido)

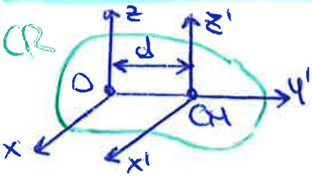
$$dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i = m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} d\bar{r}_i = m_i \bar{v}_i \cdot d\bar{v}_i = m_i \bar{v}_i \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt}$$

$$\int m_i \bar{v}_i \, d\bar{v}_i \rightarrow W = W^{(i)} + W^{(e)} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = \Delta E_K$$

- forze conservative: $E_{KA} + E_{PA} = E_{KB} + E_{PB} =$ costante
- forze non conservative: $W = (E_{KB} + E_{PB}) - (E_{KA} + E_{PA})$

TEOREMA di HUYGENS-STEINER

CR



permette di calcolare il momento di inerzia rispetto ad un asse $z' \parallel z$ di rotazione perché con z' non valgono più le simmetrie per calcolare l'integrale del momento di inerzia: $I_z = \int R^2 dm = \int \rho R^2 dV = \int \rho (x^2+y^2) dV$

R: distanza di dm dall'asse

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' + d \\ z = z' \end{cases}$$

$$\boxed{I_z = \underbrace{I_{cm}}_{I_{z'}} + Md^2}$$

Calcolo I rispetto a z:

$$I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum m_i (x_i'^2 + (y_i' + d)^2) = \sum_i (m_i x_i'^2 + y_i'^2 + 2y_i' d + d^2) =$$

$$= \boxed{\sum_i m_i \underbrace{(x_i'^2 + y_i'^2)}_{R_i}}_{I_{cm}} + \cancel{\sum m_i 2y_i' d} + \sum_i m_i d^2 = I_{cm} + Md^2$$

$\sum m_i y_i' = m_i y'_{cm}$ ma $y'_{cm} = 0$ nel sistema cm

M: massa totale sistema

$$E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2}(I_{z'} + md^2)\omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} md^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_{z'} \omega^2 + \frac{1}{2} md^2 \left(\frac{v_{cm}}{d}\right)^2$$

$I_{z'}$: rispetto ad un asse passante per il cm; $v_{cm} = \omega d$

$$\Rightarrow \boxed{E_K = \underbrace{\frac{1}{2} I_{z'} \omega^2}_{\text{rotazionale rispetto al cm}} + \underbrace{\frac{1}{2} m v_{cm}^2}_{\text{energia cinetica del cm}}}$$

In accordo a quello visto con Koenig per E_K: quando cm non è asse di rotazione ho due contributi:

- uno dovuto alla rotazione attorno al cm
- uno relativo all'E_K del cm stesso.

ω è la velocità v_{cm} del centro di massa che percorre una traiettoria circolare di raggio d rispetto all'asse z.

3

TRAIETTORIA dei PIANETI

• Due masse M ed m si attraggono

In un sistema inerziale: $\bar{F} = m\bar{a}_m$
$-\bar{F} = M\bar{a}_M$

$(M) \xrightarrow{\bar{F}} \cdots \xleftarrow{\bar{F}} (m)$

l'accelerazione relativa di m rispetto ad M è: $\bar{a} = \bar{a}_m - \bar{a}_M = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\bar{F} = \frac{1}{\mu}\bar{F}$

Dove μ è la MASSA RIDOTTA: $\mu = \frac{mM}{m+M}$ $\Rightarrow \bar{F} = \mu\bar{a} \Rightarrow$ Il moto relativo di due corpi soggetti alla loro mutua interazione è equivalente al moto di un punto con massa pari alla ridotta e forza pari a quella mutua

Energia: $E = \frac{1}{2}\mu v^2 + E_p$

In coordinate polari: $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

Per una particella in moto circolare: $\frac{d\theta}{dt} = \omega$

$|\bar{L}| = I\bar{\omega} = r^2\mu\omega$ $\quad \left\{ r^2\omega = \frac{L^2}{r^2\mu^2} \right.$

L'energia diventa: $E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} + E_p$ $\longrightarrow$ come E_p prendo $E_p = -\frac{k}{r}$

$$\begin{cases} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\omega = \frac{2}{\mu}\left(E - E_p - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right) \\ \omega^2 = \frac{L^2}{\mu^2 r^2} \end{cases}$$

$\rightarrow$ ottengo un'equazione differenziale di r e θ con tutto il resto costante: $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{2\mu r^4}{L^2}\left(E - E_p - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)$

Considerando la radice: $\left(\frac{dr}{d\theta}\right) = \sqrt{\frac{2\mu r^4}{L^2}\left(E + \frac{k}{r} - \frac{L^2}{2\mu r^2}\right)} = r^2\sqrt{-\frac{2\mu E}{L^2}\left(-1 - \frac{k}{Er} + \frac{L^2}{2E\mu r^2}\right)}$

$$\int_0^\theta d\theta = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{-\frac{2\mu}{L^2}E\left(-1 - \frac{k}{Er} + \frac{L^2}{2\mu E r^2}\right)}}$$

sostituisco: $\begin{cases} b^2 = -\frac{L^2}{2E\mu} \\ 2a = -\frac{k}{E} \\ y = \frac{1}{r} \longrightarrow \frac{dy}{dr} = -\frac{1}{r^2} \end{cases}$

$$\theta = \int \frac{dr}{r^2\sqrt{\frac{1}{b^2}\left(-1 + \frac{2a}{r} - \frac{b^2}{r^2}\right)}} = -\int \frac{\pm b\,dy}{\sqrt{(-1 + 2ay - b^2y^2)}} = \mp\int \frac{dy}{\sqrt{\left(-\frac{1}{b} + \frac{2ay}{b^2} - y^2\right)}}$$

N.B. $\int \frac{du}{\sqrt{\gamma u^2 + \beta u + \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\arccos\left(-\frac{\beta + 2\gamma u}{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}\right)$

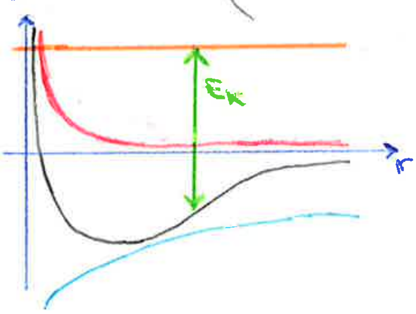
$$\theta = \arccos\left(-\frac{\frac{2a}{b^2} - 2y}{\frac{2a}{b^2}\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}\right) = \arccos\left(-\frac{1 - \frac{L^2}{\mu k r}}{\sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}}\right)$$

$\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{L^2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}\cos\theta\right)$
$\frac{1}{r} = \frac{1}{ed} + \frac{1}{d}\cos\theta$

per confronto si ottiene l'ECCENTRICITA': $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{\mu k^2}}$

$\left(e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \begin{cases} >1 & \text{IPERBOLE} \\ =1 & \text{PARABOLA} \\ <1 & \text{ELLISSE} \end{cases}\right.$

$\Rightarrow$ ENERGIA: $\boxed{E = \frac{1}{2}\mu v_r^2 + \frac{L^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r}}$



Energia potenziale effettiva: somma di • e •.

Energia cinetica: differenza tra • e •

$E > 0 \longrightarrow$ IPERBOLE $(e = 2)$

$\Rightarrow E < 0 \longrightarrow$ ELLISSE $\left(e = \frac{1}{2}\right)$

4

ADIABATICA REVERSIBILE

Primo principio in forma infinitesima: $dU + dW = dQ = 0$

$dU + dW = Nc_v dT + p dV = dQ = 0$

Dato che la trasformazione è adiabatica e reversibile posso passare per stati di equilibrio successivi: $pV = NRT$ in ogni punto $\to p = \frac{NRT}{V}$

Da cui ottengo: $Nc_v dT + \frac{NRT}{V} dV = 0$ (equazione differenziale in due variabili)

$\frac{\cancel{N}c_v}{T} dT = -\frac{\cancel{N}R}{V} dV \to \frac{c_v}{T} dT = -\frac{R}{V} dV$ ma $\underbrace{R = c_p - c_v}_{MAYER} \to \frac{c_v}{T} dT = -(c_p - c_v)\frac{dV}{V}$

ma $\frac{c_p}{c_v} = \gamma \to \underbrace{\frac{dT}{T} = -(\gamma-1)\frac{dV}{V}}$

↳ integro: $\int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} = -(\gamma-1)\int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} \to \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = (1-\gamma)\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$

Utilizzando le proprietà dei logaritmi: $\left(\frac{T}{T_A}\right) = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{(1-\gamma)} \to \boxed{T_A V_A^{(\gamma-1)} = T_B V_B^{(\gamma-1)}}$

cioè BOYLE

$TV^{(\gamma-1)} =$ costante

∀ adiabatica reversibile

! Il fatto che $\gamma > 1$ fa sì che il grafico dell'adiabatica sia più inclinato rispetto a quello dell'isoterma sul diagramma pV.

RENDIMENTO del ciclo di CARNOT

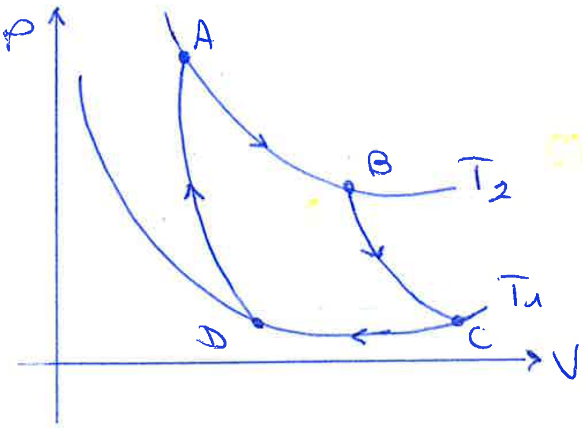
Hp) Macchina termica ideale (tutte reversibili)

AB (1) ESPANSIONE ISOTERMA
BC (2) ESPANSIONE ADIABATICA
CD (3) COMPRESSIONE ISOTERMA
DA (4) COMPRESSIONE ADIABATICA

T_1 molto bassa
T_2 molto alta $\left\{ T_2 > T_1 \right.$

AB: entra Q   CD: esce Q

BC, DA { non ho scambi termici



Th) RENDIMENTO: $\eta = \frac{W_{TOTALE}}{Q_{ASSORBITO}}$

Dim) $W_{BC} = -W_{DA}$

$$\eta = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = \frac{W}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = \left(1 + \frac{NRT_1 \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right)}{NRT_2 \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}\right) = 1 - \frac{T_1 \cancel{\ln\left(\frac{V_C}{V_D}\right)}}{T_2 \cancel{\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)}}$$

poiché $\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1} \to \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$

Quindi: $\boxed{\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}}$

5

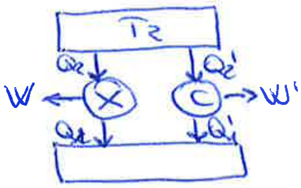
TEOREMA di CARNOT

(Th) Il rendimento di una macchina termica non può mai essere maggiore di quello della macchina di Carnot $\eta_x \le 1 = \eta_C$

$$\eta_C = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

$$\eta_x = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A}$$

(Dim) Per assurdo: suppongo che $\eta_x \le 1$ sia falso e che $\eta_x > \eta_C$ e considero due macchine, x e C, che lavorano tra T_2 e T_1



$T_2 > T_1$

C reversibile

Dato che $\eta_x > \eta_C$ faccio in modo che $W = W'$

$$\eta_x = \frac{W}{Q_2} > \eta_C = \frac{W'}{Q_2'} \quad \text{ma } W = W'$$

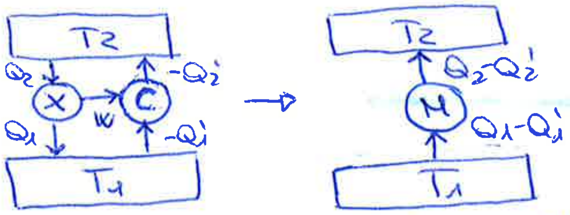
$$\frac{W'}{Q_2'} = \frac{W}{Q_2} \to \frac{1}{Q_2'} > \frac{1}{Q_2} \Rightarrow Q_2' > Q_2$$

$$\left.\begin{array}{l} W = Q_1 + Q_2 \\ W' = Q_1' + Q_2' \end{array}\right\} W = W' = Q_1 + Q_2 = Q_1' + Q_2' \quad \text{(I principio)}$$

$$Q_2 - Q_2' < 0$$

$$Q_1 - Q_1' = Q_2' - Q_2 > 0 \to Q_1 - Q_1' > 0$$

Ora unisco le due macchine x e C in un'unica macchina; dato che C è reversibile inverto tutti i segni così che diventi una macchina frigorifera (usa il lavoro prodotto da x)



$Q_1 - Q_1' > 0$ calore assorbito

$Q_2 - Q_2' < 0$ calore ceduto

$\Rightarrow$ M viola il II principio

$\Rightarrow$ Non si possono costruire macchine perfette (cioè con $\eta = 1$)

$\Rightarrow$ $\eta_x = \eta_C$ solo se la macchina è reversibile (ed ideale)

$\Rightarrow$ Tutte le macchine reali sono irreversibili

Corollario:

- MACCHINA REVERSIBILE:

$$\eta_R = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} \to \frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \to \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0}$$

- MACCHINA IRREVERSIBILE:

$$\eta_I = 1 + \frac{Q_1}{Q_2} < 1 - \frac{T_1}{T_2} \longrightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} < 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \le 0}$$

6

$$\int_{A_{AMB}}^{B}\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV} = \Delta S_{AB}^{AMB} = -\int_{A_{SIST}}^{B}\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV} = -\Delta S_{AB}^{SIST}$$

→ L'ambiente scambia entropia in segno opposto rispetto a quella del sistema

$$\Delta S_{AB}^{U} = \Delta S_{AB}^{AMB} + \Delta S_{AB}^{SIST}$$

- REVERSIBILE : $\Delta S^U = 0$ poiché $\Delta S^{AMB} = -\Delta S^{SIST}$
- IRREVERSIBILE : $\Delta S^U > 0$ poiché $\Delta S^{AMB} \neq -\Delta S^{SIST}$
- CICLICA : $\Delta S^{SIST} = 0$ $\begin{cases} \Delta S^{AMB} = 0 & \text{se reversibile} \rightarrow \Delta S^U = 0 \\ \Delta S^{AMB} > 0 & \text{se irreversibile} \rightarrow \Delta S^U > 0 \end{cases}$

⇒ Ogni processo naturale avviene nella direzione che comporta un aumento dell'entropia complessiva di sistema e ambiente.

ADIABATICHE :

$\Delta S^{AMB} = 0 \Rightarrow \Delta S^U = \Delta S^{SIST} \geq 0$

$\Delta S^U > 0 \Rightarrow \Delta S^{SIST} > 0$ (IRREVERSIBILE)

$\Delta S^U = 0 \Rightarrow \Delta S^{SIST} = 0$ (REVERSIBILE)

$$\int_A^B\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{IRR} \neq \Delta S_{AB\,IRR}^{SIST} = \int_A^B\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV}$$

Poiché un'adiabatica reversibile è isoentropica due stati collegati da un'adiabatica irreversibile ad entropia ≠ devono essere collegati da due adiabatiche.

GAS IDEALE

$dQ = dU + dW \begin{cases} dW = p\,dV \\ dU = Nc_v\,dT \end{cases} \rightarrow dQ = Nc_v\,dT + p\,dV \underset{\text{reversibile}}{=} Nc_v\,dT + \frac{NRT}{V}dV$

$$\Delta S = \int_A^B dS = \int_A^B\left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{REV} = \int_A^B\left(\frac{Nc_v}{T}dT\right) + \left(\frac{NR}{V}dV\right) = Nc_v \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + NR\ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

ISOTERMA : $S_B - S_A = -Nc_v \ln\frac{p_B}{p_A} = NR\ln\frac{V_B}{V_A}$

ISOCORA : $S_B - S_A = Nc_v \ln\frac{T_B}{T_A} = Nc_v \ln\frac{p_B}{p_A}$

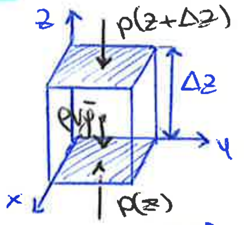
ISOBARA : $S_B - S_A = Nc_p \ln\frac{T_B}{T_A} = Nc_p \ln\frac{V_B}{V_A}$

relazione di MAYER : $R = c_p - c_v$

7

EQUILIBRIO STATICO di un FLUIDO

(Hp) La forza di pressione è funzione della quota
Nel centro c'è presente la forza di volume dovuta alla gravità.
Superficie infinitesima dS.



(Dim) $p(z)dS - p(z+\Delta z)dS = dS\left[p(z) - \left(p(z) + \frac{\delta p}{\delta z}dz\right)\right] = -dS\frac{\delta p}{\delta z}dz = -dV\frac{\delta p}{\delta z}$

sviluppo di Taylor al primo ordine in z — forza di pressione

$-dV\frac{\delta p}{\delta z} = \rho dV f_z = f_z dm$ (forza per unità di massa) → ragionamento analogo nelle altre direzioni.

$\boxed{\rho \bar{f}_v = \bar{\nabla} p}$ → se in un fluido in quiete agisce una forza di volume la pressione nel fluido non è costante ma varia secondo il gradiente

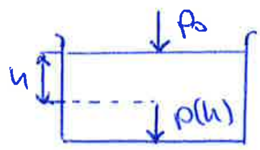
Se $\rho \bar{f}_v = 0$ < non ho forze esterne / densità molto bassa => pressione costante

- IN presenza della FORZA PESO:

$f_x = f_y = 0 \quad f_z = -g \rightarrow f_z \rho = \frac{\partial p}{\partial z} \rightarrow -g\rho = \frac{\partial p}{\partial z}$

$\int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} g\rho dz \rightarrow \boxed{p_2 - p_1 = -\rho g(z_2 - z_1)}$

LEGGE di STEVINO



$\left(\begin{array}{l} p_0 = p_2 \ @h \\ p(h) = p_1 \ @ 0 \\ z_2 = h \\ z_1 = 0 \end{array}\right)$

(Hp) Recipiente contenente un liquido la cui superficie esterna è sottoposta alla pressione p_0

(Dim) Pressione a profondità h: $p_2 - p_1 = p_0 - p(h) = -\rho g(z_2 - z_1) = -\rho g h$

=> $\boxed{p(h) = p_0 + \rho g h}$ → Corollario: ogni variazione di pressione della superficie di separazione si trasmette uguale in ogni punto del liquido

PRINCIPIO di ARCHIMEDE

(Hp) considero una porzione di fluido di volume V_0 delimitata da una superficie S su cui agiscono la forza peso e le forze di pressione.

(Dim) $\bar{F}_p + \bar{F}_v = 0$

$\bar{F}_p = -m\bar{g} = -\rho V_0 \bar{g}$ → se sostituisco un uguale volume V_0 ma con massa m' ovvero anche ρ' diversa => cambia la forza peso ma non le forze di pressione

$\bar{F}_v = m\bar{g}$

$\underbrace{(m'-m)\bar{g} = (\rho' - \rho)V_0\bar{g}}$ ← non ho più equilibrio

→ $\rho' > \rho$: il corpo SCENDE

→ $\rho' < \rho$: il corpo SALE

In entrambi i casi il corpo riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume del fluido spostato:

↳ forza di Archimede : $\boxed{\bar{F}_A = -\underbrace{\rho V_0}_{m \text{ del volume liquido}}\bar{g}}$

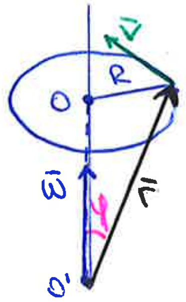
8

MOTO di PRECESSIONE

moto circolare : $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\wedge\bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\wedge\bar{r} + \bar{\omega}\wedge\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\alpha}\wedge\bar{r} + \bar{\omega}\wedge\bar{v} = \bar{a}_t + \bar{a}_N$

$|\bar{a}_t| = \alpha R$ → TANGENZIALE → nulla nel moto circolare uniforme

$|\bar{a}_N| = \omega^2 R$ → CENTRIPETA



$\bar{r}$: modulo costante e ruota attorno ad O' nella direzione di $\bar{\omega}$ formando un angolo φ costante con l'asse.

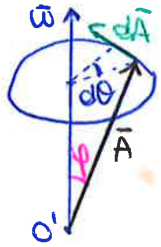
$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{r}$

$\bar{v}$: vettore in moto circolare uniforme formando un angolo $\frac{\pi}{2}$ con la direzione di $\bar{\omega}$.

$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{v}$

moto di PRECESSIONE : rotazione di un asse rispetto ad un altro asse fisso con cui forma un angolo costante e con cui ha un punto in comune (O').

→ $\bar{A}$ vettore di modulo costante in moto con $\bar{\omega}$: $\frac{d\bar{A}}{dt} = \bar{\omega}\wedge\bar{A}$



$dA = A\,\text{sen}\varphi\, d\theta$

$\frac{dA}{dt} = A\,\text{sen}\varphi\frac{d\theta}{dt} = A\,\text{sen}\varphi\,\omega = |\bar{\omega}\wedge\bar{A}|$

MOMENTO delle FORZE CENTRALI

forza centrale :
- in qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso detto CENTRO
- il suo modulo è funzione solo della distanza dal centro : $F(r) < \begin{matrix} >0 & \text{repulsiva} \\ <0 & \text{attrattiva} \end{matrix}$

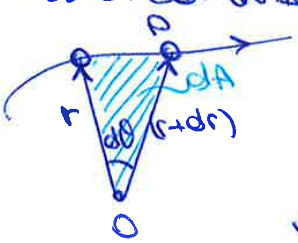
la presenza di una forza di questo tipo in una regione dello spazio costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce un campo di forza

In un campo di forze il momento della forza rispetto al centro è sempre nullo perché $\bar{F} \parallel \bar{r}$: $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$ → $\bar{L}$ costante $\left(\bar{M} = \bar{r}\wedge\bar{F} = rF\,\text{sen}(k\pi) = 0\right)$

$\bar{L}$ costante significa che ha sempre stessa direzione, modulo e verso e, poiché esso è ⊥ al piano individuato da $\bar{v}$ ed $\bar{r}$, essi devono essere piano fisso e quindi moto bidimensionale.

$\bar{L} = \bar{r}\wedge m\bar{v} = \bar{r}\wedge m(\bar{v}_\theta + \bar{v}_r) = \cancel{\bar{r}\wedge m\bar{v}_r} + \bar{r}\wedge m\bar{v}_\theta = rmv_\theta \overset{v_\theta = \omega r}{=} mr^2\omega = mr^2\frac{d\theta}{dt}$ (perché $\bar{r} \parallel \bar{v}_r$)

In dt il raggio vettore congiungente O e P spazza un'area dA che è approssimabile ad un triangolo di $\begin{cases} \text{base} : r d\theta \\ \text{altezza} : r \end{cases}$ ⟶ $dA = \frac{1}{2}(r d\theta) r = \frac{1}{2} r^2 d\theta$



VELOCITÀ AREALE : $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$ costante (=> II Keplero)

velocità con cui viene spazzata l'area dal vettore $\bar{r}$

$r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m}$

La traiettoria di un punto che si muove in un campo di forze centrali giace in un piano fisso passante per il centro così che dA/dt = cost.

⚠ Risultati non verificati

Fisica I – Gliozzi – 2 Luglio 2012 – TEMA A - (compito da 10 crediti)

1. **Primo problema (11 pt)**:

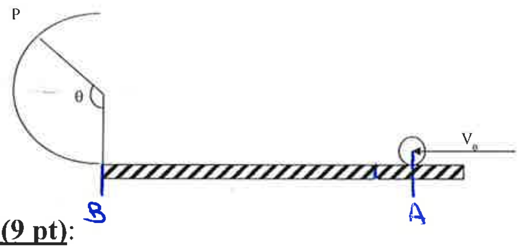
   a) Un oggetto puntiforme di massa m=1Kg ha velocità nulla ed è sottoposto all'azione di una forza $F=e^{3t}$. Sapendo che striscia su un piano con attrito μ_d=0.1, determinare la velocità dopo 1 s.

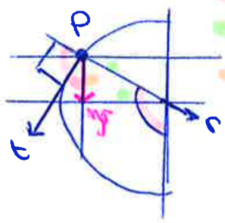
   b) Sia dato un corpo puntiforme di massa m=1Kg. Al tempo t = 0 la massa m ha una velocità iniziale v_0 = 10 m/sec. Il blocco scivola per un tratto L=150 cm lungo un piano orizzontale con attrito (sia μ_k = 0.1 il coefficiente di attrito) fino ad incontrare una guida circolare di raggio R = 2 m priva di attrito, come indicato in Figura. Ricavare:

      i. la forza normale applicata dal corpo alla guida quando il corpo passa nella posizione P individuata dall'angolo θ=120°

      ii. Se lungo la guida agisse un attrito con momento M = 15/π N m rispetto al centro della circonferenza, quanto varrebbe l'energia cinetica di m nel punto P ?

$\overline{AB} = L = 1{,}5\,m$





120°
30°
60°

2. **Secondo problema (9 pt)**:

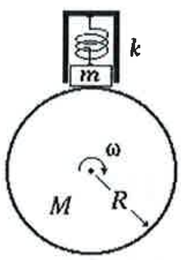
Un volano, costituito da un disco di rame con raggio R = 32 cm e massa M = 348 kg è in rotazione con velocità angolare ω_0= 376 rad/s attorno ad un asse fisso perpendicolare al disco e passante per il suo centro [I=1/2*MR^2]. Per fermare il volano viene azionato un freno che consiste in un blocco pure di rame di massa m = 5 kg che viene spinto verticalmente dall'alto sul disco da una molla di costante elastica k = 8.61 · 10^4 N/m compressa di una quantità x = 6 cm. Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra blocco e disco è μ_k = 0.12, calcolare

   a) quanti giri compie il volano prima di fermarsi.

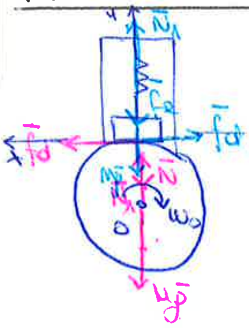
Supponendo inoltre che tutta l'energia dissipata vada a scaldare uniformemente sia il blocco che il volano, calcolare:

   b) l'aumento di temperatura (calore specifico del rame: 385 J/(Kg K)).

$x = 0{,}06\,m$
$R = 0{,}32\,m$



PROBLEMA 2



m) $\bar{N}_1 + \bar{f}_e + \bar{f}_d + m\bar{g} = m\bar{a}$

y) : $N_1 - f_e - mg = 0 \longrightarrow N_1 = kx + mg = 5215\,N$

M) $\bar{N}_1 + \bar{N} + M\bar{g} + \bar{f}_d = M\bar{a}$

y) $N - N_1 - Mg = 0$

x) $f_d = \mu_d N_1 = 625{,}8\,N$

↑ attrito dinamico

O) $-f_d R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt}$

Integro: $\int_0^{t^*} -f_d R\,dt = \int_{\omega_0}^{0} \frac{1}{2}MR^2\,d\omega \longrightarrow -f_d R t^* = -\frac{1}{2}MR^2\omega_0$

$t^* = \frac{-\frac{1}{2}MR^2\omega_0}{-f_d R} = \frac{MR\omega_0}{2f_d} = 33{,}5\,s \simeq 34\,s$

Moto decelerato: $\cancel{\omega}^{0} = \omega_0 + \alpha t^* \longrightarrow \alpha = -\frac{\omega_0}{t^*} = -11{,}1\,rad/s^2$

$\theta(t) = \cancel{\theta_0}^{0} + \omega_0 t^* + \frac{1}{2}\alpha t^{*2} = 6368\,rad$

$\Rightarrow$ N° giri $= \frac{\theta(t)}{2\pi} = 1013{,}5$ giri $\simeq 1014$ giri

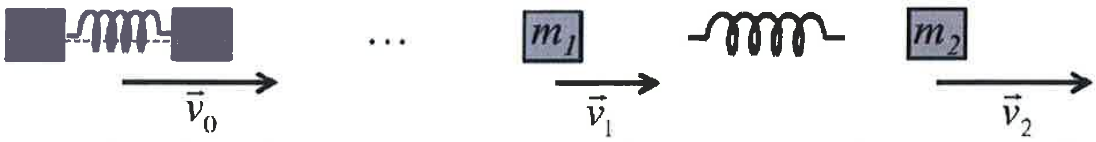
2

⚠ Risultati non verificati

Fisica I – 16 Luglio 2012 – TEMA A - (compito da 10 crediti)

Primo problema (11 pt):

1) Si hanno due corpi puntiformi, di massa $m_1 = 0{,}50$ kg e $m_2 = 1{,}0$ kg, e una molla ideale (di massa trascurabile) di costante elastica $k = 1{,}0 \cdot 10^4$ N/m. La molla viene posta tra i due corpi e dato che essi sono collegati tramite un filo corto (di massa trascurabile) essa risulta compressa di un $\Delta x = 5{,}0$ cm.



In tali condizioni il sistema (i due corpi e la molla) vengono lanciati lungo un piano liscio (attrito trascurabile) alla velocità $v_0 = 10{,}0$ m/s.
Supponendo che ad un certo istante il filo si spezzi lasciando liberi i corpi e la molla, determinare le velocità finali, v_1 e v_2, dei due corpi;

filo che si spezza ≃ urto
La forza elastica è interna al sistema —> qdm si conserva

$$\begin{cases} (m_1+m_2)v_0 = m_1v_1+m_2v_2 & 1 \\ \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_0^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 & 2 \end{cases}$$

$$v_1 = \frac{\overbrace{(m_1+m_2)}^{M}v_0 - m_2v_2}{m_1} = \frac{Mv_0 - m_2v_2}{m_1}$$ dall'equazione 1

$$2: \quad Mv_0^2 + k\Delta x^2 = m_1\left(\frac{Mv_0 - m_2v_2}{m_1}\right)^2 + m_2v_2^2$$

$$Mv_0^2 + k\Delta x^2 = \frac{M^2v_0^2}{m_1} + \frac{m_2^2v_2^2}{m_1} - \frac{2m_2v_2Mv_0}{m_1} + m_2v_2^2$$

$$Mv_0^2 + k\Delta x^2 = \frac{M^2v_0^2}{m_1} + v_2^2\left(\frac{m_2^2}{m_1} + m_2\right) - \frac{2m_2Mv_0v_2}{m_1}$$

$$-v_2^2\left(\frac{m_2^2+m_2m_1}{m_1}\right) + \frac{2m_2Mv_0}{m_1}v_2 + v_0^2\left(M - \frac{M^2}{m_1}\right) + k\Delta x^2 = 0$$

$$-3v_2^2 + 60v_2 + (-300+275) = 0 \longrightarrow v_2 = \begin{cases} 19{,}6 \text{ m/s} \\ 0{,}43 \text{ m/s} \end{cases}$$

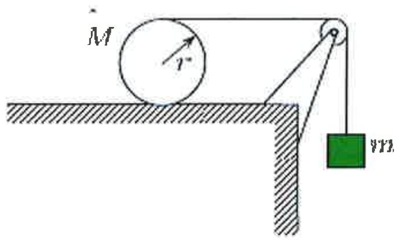
$$v_1 = \frac{(m_1+m_2)v_0 - m_2v_2}{m_1} = \begin{cases} \xrightarrow{v_2=19{,}6} = -9{,}2 \text{ m/s} \\ \xrightarrow{v_2=0{,}43} = 29{,}3 \text{ m/s} \end{cases}$$

—> per come ho scelto il sistema di riferimento $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono verso dx => $\begin{cases} v_2 = 0{,}43 \text{ m/s} \\ v_1 = 29{,}3 \text{ m/s} \end{cases}$

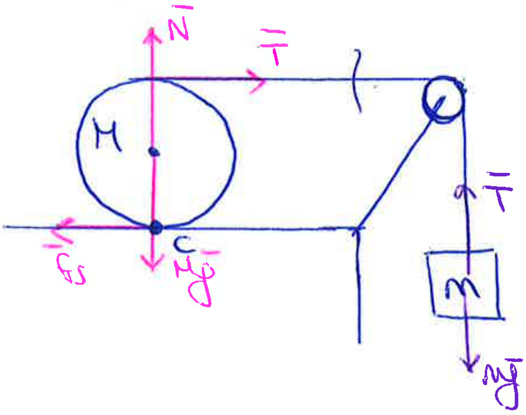
3

Secondo problema (10 pt):

1) Si consideri il sistema rappresentato nella figura a destra in cui un cilindro pieno di massa $M = 5{,}0$ kg e raggio $r = 15$ cm viene tirato da una corda (avvolta su di esso) a cui è appeso (all'altro capo) un corpo di massa $m = 2{,}0$ kg. Trattando la puleggia come ideale e la corda come ideali e supponendo che il cilindro rotoli senza scivolare, si determini l'accelerazione con cui scende il corpo di massa m.



puro rotolamento !



$M)$: $N - Mg = 0 \rightarrow N = 48\,N$

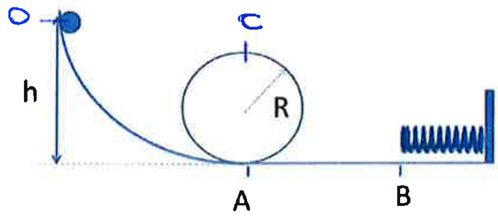
$T \cdot 2R = I_c \alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\frac{a}{R}$

$m)$: $T - mg = ma$

Fisica I – 30 Giugno 2014 – TEMA B - (compito da 10 crediti)

Problema 1 (punti 10)

1) Una pallina di massa m si muove, partendo da ferma e da un'altezza h su una guida che forma un anello di raggio R, mostrata in figura (giro della morte). Alla fine della guida vi è un tratto orizzontale da A a B di lunghezza L, al termine del quale vi è una molla di costante elastica k. Si calcoli:

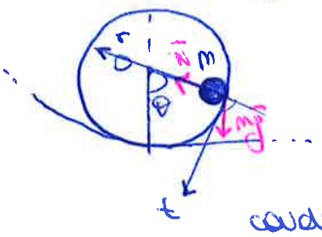


a) Il valore minimo di h per il quale la pallina arriva a comprimere la molla;
Per tale valore di h si calcoli la massima compressione della molla
b) nel caso in cui il tratto AB sia privo di attrito
c) nel caso in cui il tratto AB sia scabro e abbia coefficiente di attrito dinamico che varia con la distanza x dal punto di riposo della molla (B), secondo la legge $\mu_d = \mu_{d0} + ax^2$

2) Un disco fermo di raggio R = 10.0 cm e massa M = 25.0 kg ($I = 1/2\ MR^2$ rispetto al centro di massa) viene messo in rotazione intorno ad un asse per il centro di massa ortogonale al disco fino a raggiungere una velocità angolare $\omega' = 150$ giri/min. Trascurando ogni attrito, si calcoli:
a) il momento costante necessario se si vuole raggiungere tale velocità in 4 giri;
b) il tempo impiegato se fosse stato applicato un momento pari a $M = 0.01\ t^3$, dove t è il tempo.

PROBLEMA 1.1

Non ho attriti, per avere h_{min} devo imporre la condizione di aderenza di m alla guida durante il giro della morte:



$$\bar{N} + m\bar{g} = m\bar{a}$$

$$r): \; N - mg\cos\theta = m a_N = m\frac{v_c^2}{R} \rightarrow N = m\frac{v_c^2}{R} + mg\cos\theta$$

$$t): \; mg\sin\theta = m a_t$$

condizione di aderenza: $N > 0$

Imponendo la condizione di aderenza su N ne ottengo una su v_c^2

$$m\frac{v_c^2}{R} + mg\cos\theta > 0 \rightarrow v_c^2 > -g\cos\theta R$$

Applico la conservazione dell'energia tra OA ed AC

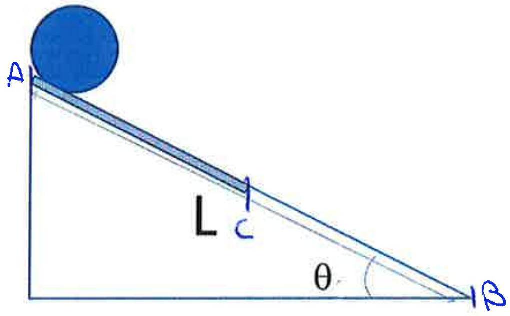
$$OA: \; mgh_{min} = \frac{1}{2}mv_A^2$$

$$AC: \; \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_c^2 + mg2R$$

$$\text{da cui}: \; \cancel{m}gh_{min} = \frac{1}{2}\cancel{m}v_c^2 + \cancel{m}g2R \rightarrow v_c^2 = 2gh_{min} - 4gR$$

Problema 2 (punti 11)

Un cilindro omogeneo di massa M = 1.0 kg e raggio R = 10 cm è inizialmente fermo alla sommità di un piano inclinato di θ = 60° e di lunghezza complessiva L = 4.0 m (si veda figura).

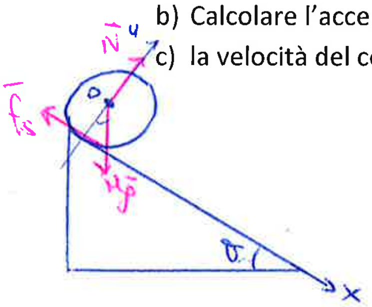


a) Trovare il coefficiente di attrito statico minimo necessario a far sì che il cilindro inizi a rotolare senza strisciare.

Si assuma che il coefficiente di attrito statico sia superiore al valore trovato sopra per la prima metà del percorso, e che per la seconda metà del percorso sia invece nullo assieme al coefficiente di attrito dinamico.

b) Calcolare l'accelerazione del centro di massa del cilindro nella prima metà del percorso; e

c) la velocità del centro di massa del cilindro alla fine dell'intero percorso



$\vec{N} + \vec{f}_s + M\vec{g} = M\vec{a}_{cm}$

x) $-f_s + Mg \operatorname{sen}\theta = M a_{cm}$

y) $N - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = Mg\cos\theta = 4{,}9\,N$

$O\circlearrowright\ f_s R = I\alpha = \frac{1}{2}MR^{\cancel{2}} \cdot \frac{a_{cm}}{\cancel{R}} \rightarrow f_s = \frac{M a_{cm}}{2}$

Attrito per puro rotolamento : $|f_s| \leq \mu_s N \rightarrow -\mu_s N \leq f_s \leq \mu_s N$

puro rotolamento $\begin{cases} a_{cm} = \alpha R \\ V_{cm} = \omega R \end{cases}$

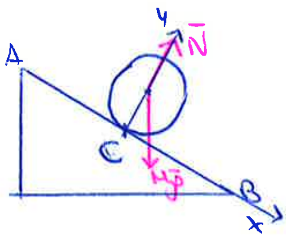
Sostituendo $O\circlearrowright$ in x) : $-\frac{M}{2}a_{cm} + Mg\operatorname{sen}\theta = M a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{Mg\operatorname{sen}\theta}{\frac{3}{2}M} = 5{,}66\,m/s^2$

Da cui : $f_s = \frac{M a_{cm}}{2} = \frac{M}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{3}g\operatorname{sen}\theta = \frac{M}{3}g\operatorname{sen}\theta$

$\mu_s N \geq f_s \rightarrow \mu_s N \geq \frac{M}{3}g\operatorname{sen}\theta \rightarrow \mu_s \cancel{Mg} \geq \frac{\cancel{M}}{3}\cancel{g}\operatorname{sen}\theta \rightarrow \mu_s^{MIN} \geq \frac{\operatorname{sen}\theta}{3} = 0{,}29 \simeq 0{,}3$

Se $\mu_s > \mu_s^{MIN} \rightarrow a = a_{cm} = \frac{2}{3}g\operatorname{sen}\theta = 5{,}66\,m/s^2$

CB liscio $\Rightarrow$ non ho più puro rotolamento $\Rightarrow$ ho strisciamento



$\vec{N} + M\vec{g} = M\vec{a}$

x) : $\cancel{M}g\operatorname{sen}\theta = \cancel{M}a \rightarrow a = g\operatorname{sen}\theta = 8{,}49\,m/s^2$

y) : $N - Mg\cos\theta = 0 \rightarrow N = 4{,}9\,N$

Nel tratto CB ho un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione $\vec{a}$: $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$ da applicare ad AC e CB

Problema 3 (punti 9)

Una macchina termica reversibile ad ogni ciclo assorbe una quantità di calore Q_2 = 600 J da un serbatoio caldo a temperatura T_2 e cede un calore Q_1 ad una massa m = 0.1 kg di ghiaccio alla temperatura di fusione T_1 = 273.15 K. Finché il ghiaccio non è completamente fuso, il lavoro W fatto ad ogni ciclo dalla macchina viene utilizzato per comprimere (ad ogni ciclo!) in modo isobaro del gas ideale alla pressione P = 10^5 Pa dal volume iniziale V_i = 0.002 m^3 al volume finale $V_f = V_i /4$.
Determinare:

a) la temperatura T_2 del serbatoio caldo; ✓

b) il numero N di cicli compiuti dalla macchina per fondere tutta la massa di ghiaccio (si trascuri nel risultato la frazione non intera di cicli); ✓

c) la temperatura T_1' cui arriva l'acqua nell'istante in cui la macchina ha assorbito un calore complessivo Q'_2 = 10^4 J dal serbatoio caldo a partire da quanto tutto il ghiaccio è fuso [suggerimento... si provi ad usare la variazione di entropia dell'universo].

[Si assumano λ_g = 3.3x10^5 J/kg per il calori latenti di fusione del ghiaccio e c = 4186.6 J/kgK il calore specifico dell'acqua.]

$$\eta_R = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{|W|}{Q_{ASS}}$$

$$W = p(V_f - V_i) = p\left(\frac{V_i}{4} - V_i\right) = -150\,J$$ fatto dalla macchina sul gas

$$\eta_R = \frac{|W|}{Q_2} = 0{,}25 \longrightarrow T_2 = \frac{-T_1}{\eta_R - 1} = 364{,}2\,K$$

Calore ceduto in un ciclo è pari a Q_1:

$$W = Q_1 + Q_2 \longrightarrow Q_1 = W - Q_2 = 450\,J$$

Il calore per fondere tutto il ghiaccio (cioè tutta m) è:

$$Q_{TOT} = m\lambda_f = 33000\,J$$

Il numero di cicli per fondere tutto è:

$$N = \frac{Q_{TOT}}{Q_1} = 73{,}3 \simeq 73 \text{ cicli}$$

$$\eta_R = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{Q_1'}{Q_2'} \longrightarrow Q_1' = -Q_2'(\eta_R - 1) = 7500\,J$$

$$\text{Ma: } Q_1' = mc(T_1' - T_1) \longrightarrow T_1' = \frac{Q_1' + mcT_1}{mc} = 291{,}06\,K$$

$$a = v\frac{dv}{dx} = \frac{F}{m} - \frac{fd}{m} \rightarrow \int_{v_0}^{0} v\,dv = \int_0^L \frac{F}{m} - \frac{fd}{m}\,dx \rightarrow \left[\frac{v}{2}\right]_{v_0}^{0} = \frac{1}{m}\int_0^{\ell} \frac{3}{5-x} - fd\,dx$$

$$-\frac{v_0^2}{2} = \underbrace{\frac{3}{m}\int_0^{\ell} \frac{1}{5-x}\,dx}_{} - \underbrace{\frac{1}{m}\int_0^{\ell} fd\,dx}_{-\frac{fd}{m}\ell}$$

$$5 - x = t$$
$$dt = -1\,dx$$

$$-\frac{3}{m}\int_0^{\ell}\frac{1}{t}\,dt = -\frac{3}{m}\left[\ln t\right]_0^{\ell} = -\frac{3}{m}\left[\ln(5-x)\right]_0^{\ell} = -\frac{3}{m}\left(\ln(3{,}5) - \ln(5)\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{v_0^2}{2} = -\frac{3}{m}\left(\ln(3{,}5) - \ln(5)\right) - \frac{fd}{m}\ell$$

$$v_0 = \sqrt{2\left(\frac{3}{m}\ln\left(\frac{3{,}5}{5}\right) - \frac{fd\,\ell}{m}\right)} = 0{,}89\ m/s$$

$$(m_1+m_2)gR+(m_1+m_2)\alpha R^2-mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{ml^2}{3}\alpha$$

$$(m_1+m_2)gR-mg\frac{l}{2}\sin\theta=\underset{\substack{\uparrow \\ \omega\frac{d\omega}{d\theta}}}{\alpha}\left(\frac{ml^2}{3}-(m_1+m_2)R^2\right) \quad \text{ora posso integrare}$$

$$\int_0^{\pi}\left((m_1+m_2)gR-mg\frac{l}{2}\sin\theta\right)d\theta=\left(\frac{ml^2}{3}-(m_1+m_2)R^2\right)\int_0^{\omega_f}\omega\, d\omega$$

$$\left[(m_1+m_2)gR\theta+mg\frac{l}{2}\cos\theta\right]_0^{\pi}=\left(\frac{ml^2}{3}-(m_1+m_2)R^2\right)\left[\frac{\omega^2}{2}\right]_0^{\omega_f}$$

$$(m_1+m_2)gR\pi-mgl=\left(\frac{ml^2}{6}-\frac{(m_1+m_2)R^2}{2}\right)\omega_f^2$$

$$\Rightarrow \omega_f=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)gR\pi-mgl}{\left(\frac{ml^2}{6}-\frac{(m_1+m_2)R^2}{2}\right)}}=28{,}97\ \text{rad/s}$$

Se avessi avuto $M_0=5\,Nm$ l'equazione di momento diventerebbe:

$$O): \ TR-mg\frac{l}{2}\sin\theta-M_0=I\alpha$$

Da cui l'integrale:
$$\int_0^{\pi}\left((m_1+m_2)gR-m\frac{l}{2}g\sin\theta-M_0\right)d\theta=\left(\frac{ml^2}{3}-(m_1+m_2)R^2\right)\int_0^{\omega_f'}\omega\, d\omega$$

$$\Rightarrow \omega_f'=\sqrt{\frac{(m_1+m_2)gR\pi-M_0\pi-mgl}{\left(\frac{ml^2}{6}-\frac{(m_1+m_2)R^2}{2}\right)}}$$

$$P_D = \frac{nRT_D}{V_C} = 117597{,}9 \ Pa \quad ?$$

Per trovare V_0 so che $T_0 = T_A$ perché isoterma ma che è anche sull'adiabatica BC:

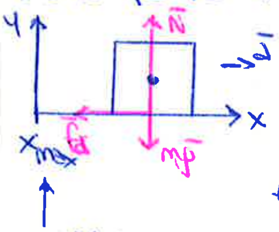
$$T_0 V_0^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$V_0 = V_B \left(\frac{T_B}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0{,}014 \ m^3$$

$$P_0 = \frac{nRT_0}{V_0} = 53424{,}4 \ Pa$$

PROBLEMA 1.1

Dopo il lancio non ho più forza elastica ma forza d'attrito (dipendente da x) che mi fa rallentare m.



$\bar{N}+m\bar{g}+\bar{f}_d=m\bar{a}$

$x): N-mg=0 \to N=mg$

$y): -f_d=ma$

ATTRITO DINAMICO: $f_d=\mu_d N=(\mu_{d0}+ax)N$

considero come punto di partenza x_{max} (massima elongazione) per cui l'attrito inizia da lì

$$W_A=-\int \mu_d(x)N\bar{u}_x\cdot d\bar{x}=-\int_0^{x'}\mu_d(x)N\bar{u}_x\cdot\bar{u}_x dx=-N\int_0^{x'}(\mu_{d0}+ax)dx=-N\left(\mu_{d0}x'+\frac{a}{2}x'^2\right)$$

Perchè non cada impongo $v(L^*)=0$ nella conservazione di ΔE_m tra l'istante in cui la molla è compressa e quello in cui si ferma ad L^*:

$$\begin{cases} W_{DISS}=W_A \\ \Delta E_k=\frac{1}{2}mv^2-0 \\ \Delta E_p=0-\frac{1}{2}k\Delta x^2 \end{cases} \to W_A=\Delta E_k+\Delta E_p \to -mg\left(\mu_{d0}L^*+\frac{a}{2}L^{*2}\right)=\cancel{\frac{1}{2}mv^2}-\frac{1}{2}k\Delta x^2$$

voglio si fermi

Ottengo un'equazione di II grado in L^*: $\frac{mga}{2}L^{*2}+mg\mu_{d0}L^*-\frac{1}{2}k\Delta x^2=0$

$$L^*=-\frac{\mu_{d0}}{a}\pm\sqrt{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{k\Delta x^2}{mga}}=0{,}0198\,m$$

scelgo quella col + perchè vado verso le x positive

Se $L<L^*$ arriva con velocità diversa da 0 e cade con traiettoria parabolica:

$$\begin{cases} x(t)=v_0t=d \\ y(t)=h-\frac{1}{2}gt^2=0 \end{cases} \to h=\frac{1}{2}gt^2 \to t=\sqrt{\frac{2h}{g}}=0{,}64\,s \text{ tempo di caduta}$$

Applico di nuovo la conservazione di ΔE_m: $W_A=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}k\Delta x^2$

$$v_0=\sqrt{\frac{W_A+\frac{1}{2}k\Delta x^2}{\frac{1}{2}m}}=\sqrt{2\frac{W_A}{m}+\frac{k}{m}\Delta x^2}=\sqrt{\frac{-2mg\left(\mu_{d0}L+\frac{a}{2}L^2\right)+k\Delta x^2}{m}}$$

sostituendo ottengo: $d=v_0t=\sqrt{\left(2\frac{W_A}{m}+\frac{k\Delta x^2}{m}\right)\cdot\frac{2h}{g}}$

PROBLEMA 1.2

Il bambino mette in moto tutto.

Si conserva il momento angolare: $L_i=Rmv$, $L_f=I_{TOT}\omega_i$ $\quad \left\{ \omega_i=\frac{Rmv}{\frac{1}{2}MR^2+mR^2}=0{,}46\,rad/s\right.$

Con l'inizio della rotazione ho inizio del momento frenante, equazione di equilibrio della rotazione attorno all'asse di rotazione:

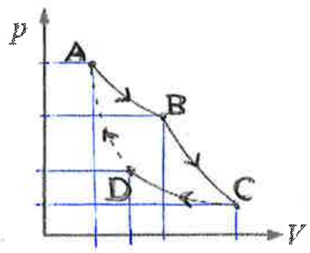
$$O): \tau=I_{TOT}\alpha=I_{TOT}\frac{d\omega}{dt}=I_{TOT}\,\omega\frac{d\omega}{d\theta} \to \int\tau d\theta=\int I_{TOT}\,\omega\, d\omega$$

$$\int_0^{10\pi}\tau d\theta=\int_{\omega_i}^0 I_{TOT}\,\omega\, d\omega \to 10\pi\tau=-\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\frac{\omega_i^2}{2} \to \tau=\frac{-\left(\frac{1}{2}MR^2+mR^2\right)\frac{\omega_i^2}{2}}{10\pi}=-0{,}98\,Nm$$

$c_V = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = \frac{7}{5}$

Problema 3 (punti 10)

n = 2 moli di un gas ideale $\boxed{\text{biatomico}}$ si trovano inizialmente in equilibrio nello stato A ($P_A = 3x10^5$ Pa, V_A, T_A = 380 K). A seguito di una trasformazione reversibile in contatto termico con un serbatoio alla temperatura T_A, il gas si porta allo stato B (P_B, V_B, $T_B = T_A$) assorbendo un calore Q_{AB} = 5000 J. Dopo aver isolato il contenitore, il gas viene portato reversibilmente nello stato C ($P_C = P_B/3$, V_C, T_C). A questo punto il gas viene messo in contatto termico con un serbatoio alla temperatura T_C e compresso reversibilmente fino allo stato D (P_D, V_D, $T_D = T_C$) compiendo un lavoro esterno pari a W_{CD}= 4000 J. Infine il contenitore del gas viene nuovamente isolato, e si riporta il gas nello stato iniziale A per mezzo di una trasformazione non reversibile. Determinare:



AB = CD : isoterme
BC = DA : adiabatiche

a) la pressione P_B del gas in B;
b) la temperatura T_C del gas nello stato C;
c) il volume V_D occupato dal gas nello stato D;
d) la differenza $\Delta\ \eta$ tra il rendimento di un ciclo reversibile operante tra gli stessi serbatoi di calore ed il rendimento del ciclo descritto.
e) La variazione di entropia dell'universo in un ciclo.

$V_A = \frac{nRT_A}{P_A} = 0{,}021 m^3$

AB isoterma: $Q_{AB} = W_{AB} = 5000 J = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \rightarrow V_B = V_A e^{\frac{Q_{AB}}{nRT_A}} = 0{,}046 m^3$

$P_B = \frac{nRT_A}{V_B} = 137295{,}7 Pa \rightarrow p_C = \frac{P_B}{3} = 45765{,}2 Pa$

BC adiabatica : $T_B p_B^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = T_C p_C^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} \rightarrow T_C = T_A \left(\frac{p_B}{p_C}\right)^{\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)} = 277{,}63 K = T_D$

$V_C = \frac{nRT_C}{P_C} = 0{,}101 m^3$

perchè è fatto sul gas

CD isoterma : $W_{CD} = Q_{CD} = nRT_C \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) \rightarrow V_D = V_C e^{\frac{-W_{CD}}{nRT_C}} = 0{,}042 m^3$

Di fatto ABCD è un ciclo di CARNOT con un ramo irreversibile:

$$\left.\begin{array}{l} \eta_R = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 0{,}269 \\ \eta_I = \frac{W}{Q_{ass}} = \dots \end{array}\right| \Delta\eta = \eta_R - \eta_I$$

$\Delta S^U = \Delta S^{irr} = \Delta S^S_{DA} = nR \ln\frac{V_D}{V_A} = 10{,}8 J/K = \Delta S^{amb}_{DA}$ perchè è ciclica quindi $\Delta S^U = 0$

adiabatica irreversibile (quindi anche isoterma)

Quando viene messo in rotazione devo considerare la forza centrifuga:

$$F_{el} + f_s + Mg\sin\theta - M\omega^2 x\cos^2\theta = 0$$

$$-Mg\sin\theta - k(x - l_0) + f_s + M\omega^2 x\cos^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow f_s = Mg\sin\theta + k(x - l_0) - M\omega^2 x\cos^2\theta$$

$\downarrow$

la normale varia: $N = M(g + \omega^2 x\sin\theta)\cos\theta$

Y

Terzo problema (9pt):

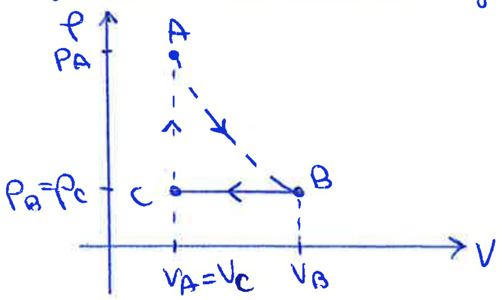
Una mole di gas ideale monoatomico compie un ciclo composto da

1) un'espansione adiabatica irreversibile dallo stato A, alla temperatura $T_A = 500\ K$ e $V_A = 0.002\ m^3$, allo stato B, in cui $T_B = T_A/2$,
2) una trasformazione isobara reversibile che porta il gas nello stato C, in cui $V_C = V_A$,
3) una trasformazione isocora irreversibile che riporta il gas nello stato iniziale.

Sapendo che la variazione di entropia del gas lungo le trasformazioni reversibili è -6 J/K, calcolare

√ a) il volume raggiunto dal gas nello stato B,
√ b) il lavoro fatto dal gas nella trasformazione AB,
√ c) il rendimento del ciclo e la variazione di entropia dell'universo.

1 mol → MONOATOMICO : $\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$, $c_V = \frac{3}{2}R = 12{,}5$, $c_p = \frac{5}{2}R = 20{,}8$



	A	B	C
T	500K	$T_A/2$	*
V	$0{,}002 m^3$	*	V_A
P	*	*	P_B

AB : espansione adiabatica irreversibile
BC : isobara reversibile
CA : isocora irreversibile

* $P_A = \frac{nRT_A}{V_A} = 2078615{,}5\ Pa$

* $T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow V_B = \left(\frac{T_A V_A^{\gamma-1}}{T_B}\right)^{1/\gamma-1} = 0{,}0056\ m^3$

* $P_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 371181{,}3\ Pa$

* $T_C = \frac{V_A P_B}{nR} = 89{,}3\ K$

$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_V(T_B - T_A) = 3117{,}9\ J$

$W_{BC} = P_B(V_C - V_B) = 1336{,}3\ J$

$W_{CA} = 0$ (isocora)

$Q_{AB} = 0$ (adiabatica)

$Q_{BC} = nc_p(T_C - T_B) = -3340{,}3\ J$

$Q_{CA} = nc_V(T_A - T_C) = 5122{,}1\ J$ unico calore assorbito

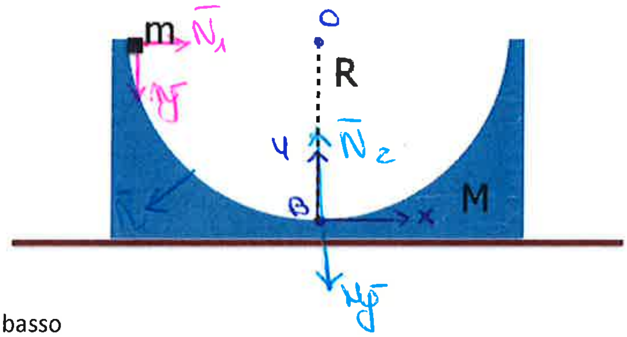
17

Fisica I – Gliozzi – 20 Giugno 2016 – TEMA B

Primo problema (10pt):

corpo M
corpo m

Un blocchetto di massa $m = 0,75$ Kg si muove senza attrito lungo la superficie interna di una ciotola emisferica di raggio $R = 25\,cm$ e massa $M = 3.0\,Kg$, che è appoggiata su di un tavolo privo di attrito. Il blocchetto viene lasciato cadere da fermo dal bordo superiore della ciotola.



✓ 1. Calcolare la velocità del blocchetto nel momento in cui raggiunge il punto più basso
✓ 2. Calcolare di quanto si è spostata la ciotola nel momento in cui il blocchetto raggiunge il punto più basso.

Si assuma di sostituire il blocchetto con una sferetta omogenea di pari massa e raggio $a = 0.5\,cm$. La sferetta è costituita di un materiale che presenta un grande coefficiente di attrito con la superficie della ciotola, tale da garantire che essa rotoli senza strisciare all'interno della ciotola.

✓ **3.** Calcolare la velocità della sferetta nel momento in cui raggiunge il punto più basso. Il momento d'inerzia di una sfera omogenea rispetto ad un asse passante per il suo centro vale $I = \left(\frac{2}{5}\right) Ma^2$.

Non ci sono forze esterne x: qdm si conserva lungo x (N_2, N_1, mg sono lungo y) $\hookrightarrow v_{cm}^x = 0$

$$0 = m v_B + M V_B \to V_B = -\frac{m}{M} v_B$$

Si conserva anche l'energia meccanica (no forze dissipative): $mgR = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} M V_B^2$

$$\Rightarrow mgR - \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} \cancel{M} \frac{m^2}{M^{\cancel{2}}} v_B^2 = 0 \to \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2 \left(1 + \frac{m}{M}\right) = \cancel{m} gR$$

$$\frac{1}{2} v_B^2 \left(\frac{M+m}{M}\right) = gR \to v_B = \sqrt{\frac{2gRM}{M+m}} = 1{,}98\,m/s$$

Qdm orizzontale è nulla $\Rightarrow x_{cm}$ rimane costante nel tempo (perché $v_{cm}^x = 0$)

$$x_{cm}^i = x_{cm} = \frac{m(-R) + M(0)}{m+M} = -\frac{mR}{m+M}$$

(SR. Bxy) Perché $\Delta x_{cm} = 0$, M deve compensare lo spostamento di m.

Posso usare $x' = X + x$ per indicare la posizione di m rispetto ad M, sostituendo in quella sopra si ottiene:

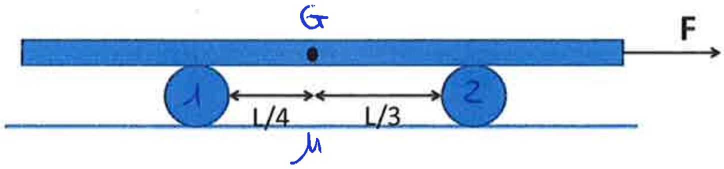
$$x_{cm} = \frac{x'(B)m + X(B)(m+M)}{m+M} = -\frac{mR}{m+M} = -0{,}05\,m$$

$$x'(B) = 0 \Rightarrow X(B) = -\frac{mR}{m+M}$$ $\Rightarrow$ la ciotola si è spostata di $\frac{mR}{m+M}$ verso sx (rispetto al SR Bxy).

$$\Delta x_{cm} = 0 \to \bar{x}_{cm}^f - \bar{x}_{cm}^i = 0$$

Secondo problema (11pt):

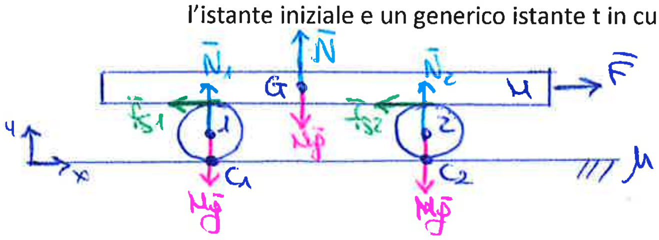
Due cilindri omogenei di raggio R e massa M sono disposti parallelamente sopra un piano orizzontale. Chiameremo cilindro 1 quello più a sinistra e cilindro 2 quello più a destra. Il coefficiente di attrito tra i cilindri e il piano è tale da garantire che vi sia sempre puro rotolamento. Sopra i cilindri poggia una lastra di massa M e lunghezza L. Si hanno coefficienti d'attrito statico differenti nel punto di contatto fra i due cilindri e la lastra sovrastante ($\mu_{s,1}$ e μ_{s2}). Inizialmente il sistema è fermo e il centro del cilindro 1 dista $L/4$ dal centro della lastra, mentre il centro del cilindro 2 dista L/3 dal centro della lastra. Al tempo $t = 0$, una forza ***F*** orizzontale è applicata alla lastra.



a) Si assuma che la lastra non strisci sui cilindri e che la lastra sia abbastanza lunga da evitare la fuoriuscita dei cilindri; scrivere le equazioni del moto per il blocco e per i cilindri e determinare le loro accelerazioni.

b) Ricavare la condizione sul modulo della forza F affinché la lastra non scivoli sui cilindri nell'istante iniziale in cui viene applicata la forza.

c) Supponendo che l'attrito tra lastra e cilindri sia sufficientemente grande da garantire assenza di strisciamento per tutto il moto, calcolare il lavoro svolto dalla forza F nell'intervallo di tempo fra l'istante iniziale e un generico istante t in cui si mantengono queste condizioni di moto



$F - f_{1s} - f_{2s} = MA$

$(1)\circlearrowleft\ 2R f_{1s} = I_{C_1}\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\frac{a_1}{R} = \frac{3}{2}MR a_1$

$(2)\circlearrowleft\ 2R f_{2s} = I_{C_2}\alpha_2 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)\frac{a_2}{R} = \frac{3}{2}MR a_2$

Per il puro rotolamento dei cilindri su piano: $A = 2a_1 = 2a_2 \rightarrow a_1 = a_2 = \frac{A}{2}$

e $a_1 = a_2$ perché sono due cilindri =

$f_{s1} = \frac{3}{2}MR\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2R} = \frac{3}{8}MA$

$f_{s2} = \frac{3}{2}MR\frac{A}{2}\cdot\frac{1}{2R} = \frac{3}{8}MA$

$\begin{cases} F - \frac{3}{8}MA - \frac{3}{8}MA = MA \rightarrow MA = F - \frac{3}{4}MA \\ MA\left(1 + \frac{3}{4}\right) = F \rightarrow A = \frac{4F}{7M} \end{cases}$

Perché non scivoli → ATTRITO:

$|f_{1s}| \le f_{1max} = \mu_{s1} N_1$ $\qquad |f_{2s}| \le f_{2max} = \mu_{s2} N_2$

$\begin{cases} N_1 + N_2 - Mg = 0 \\ -N_1\frac{L}{4} + N_2\frac{L}{3} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} N_1 + N_1\left(\frac{L}{4}\cdot\frac{3}{L}\right) = Mg \rightarrow N_1 = \frac{Mg}{1+\frac{3}{4}} = \frac{4}{7}Mg \\ -\frac{4}{7}Mg\cdot\frac{L}{4} + N_2\frac{L}{3} = 0 \rightarrow N_2 = \frac{MgL}{7}\cdot\frac{3}{L} = \frac{3}{7}Mg \end{cases}$

$f_{1max} = \mu_{s1}\frac{4}{7}Mg$

$f_{2max} = \mu_{s2}\frac{3}{7}Mg$

$f_{1s} = \frac{3}{8}MA = \frac{3}{8}M\frac{4F}{7M} < \mu_{s1}\frac{4}{7}Mg \rightarrow \frac{3}{14}F < \mu_{s1}\frac{4}{7}Mg \rightarrow F < \frac{8}{3}\mu_{s1}Mg$

$f_{2s} = \frac{3}{8}MA = \frac{3}{8}M\frac{4F}{7M} < \mu_{s2}\frac{3}{7}Mg \rightarrow \frac{3}{14}F < \mu_{s2}\frac{3}{7}Mg \rightarrow F < 2\mu_{s2}Mg$

$\Rightarrow$ poiché non so i valori di μ_{s1} e μ_{s2} $\rightarrow F < \min\left\{\frac{8}{3}\mu_{s1}Mg \,;\, 2\mu_{s2}Mg\right\}$

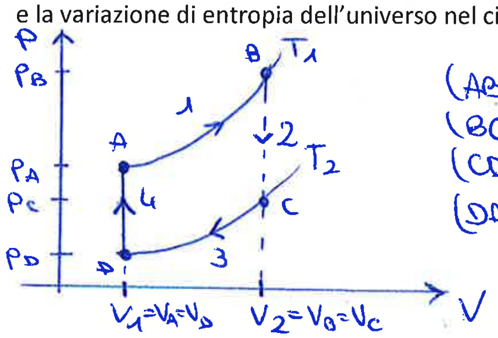
Terzo problema (9pt):

Una macchina termica utilizza due sorgenti $T_1 = 400\ K$ e $T_2 = 300\ K$ ed opera con $n = 10$ moli di gas perfetto monoatomico compiendo il seguente ciclo:

a) espansione isoterma reversibile, alla temperatura T_1, dal volume V_1 al volume V_2;
b) raffreddamento isocoro irreversibile fino alla temperatura T_2, realizzato ponendo il gas a contatto con la sorgente T_2;
c) compressione isoterma reversibile, alla temperatura T_2, dal volume V_2 al volume V_1;
d) trasformazione isocora, adiabatica, irreversibile, realizzata eseguendo lavoro sul gas fino a chiudere il ciclo.

! Ho lavoro < 0 da considerare anche se è isocora *

Indicare quale condizione sui volumi V_1 e V_2 garantisce che la macchina sia in grado di fornire lavoro e calcolare il lavoro totale nel caso in cui $V_1 = 0.002\ m^3$ e $V_2 = 0.03\ m^3$. Calcolare il rendimento della macchina e la variazione di entropia dell'universo nel ciclo.



(AB): 1 isoterma reversibile (espansione)
(BC): 2 raffreddamento isocoro irreversibile
(CD): 3 compressione isoterma reversibile
(DA): 4 isocora adiabatica reversibile

$V_1 = 0{,}002\,m^3$ $\quad T_1 = 400\,K$
$V_2 = 0{,}03\,m^3$ $\quad T_2 = 300\,K$

10 moli → MONOATOMICO : $\gamma = \frac{5}{3} = 1{,}67$, $c_V = \frac{3}{2}R = 12{,}5$, $c_p = \frac{5}{2}R = 20{,}8$

$W_{AB} = nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = 90063{,}9\ J$
$W_{CD} = nRT_2 \ln\frac{V_1}{V_2} = -67547{,}9\ J$ $\quad W_{TOT} = 10016\ J$
* $W_{DA} = nc_V(T_2 - T_1) = -12500\ J$

$W_{TOT} = W_{AB} + W_{CD} + W_{DA} > 0$ perché la macchina mi dia lavoro

$$nRT_1 \ln\frac{V_2}{V_1} + nRT_2 \ln\frac{V_1}{V_2} - nc_V(T_1 - T_2) > 0$$

$$\underbrace{nR(T_1 - T_2)}_{>0 \text{ perché prodotto roba positiva}}\underbrace{\left(\ln\frac{V_2}{V_1} - \frac{c_V}{R}\right)}_{\text{considero solo questa parte}} > 0$$

$$\ln\frac{V_2}{V_1} > \frac{c_V}{R}$$

$$\frac{V_2}{V_1} > e^{c_V/R} \rightarrow V_2 > e^{\frac{\frac{3}{2}R}{R}} V_1 \rightarrow V_2 > e^{3/2} V_1$$

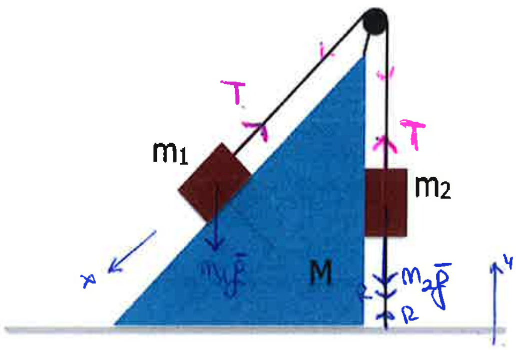
$$V_2 > 0{,}00896\,m^3$$

20

Fisica I – Gliozzi – 5 Luglio 2016 – TEMA A

Primo problema (11pt):

Su un piano orizzontale liscio si trova in quiete un cuneo mobile di massa *M=3Kg*. Sulla superficie inclinata (di un angolo θ = *60°* rispetto al piano orizzontale) poggia un punto materiale di massa m_1 collegato tramite una fune ideale (e per mezzo di una carrucola ideale) con un altro punto materiale di massa m_2 sospeso e posto a contatto con la superficie laterale del cuneo. Le masse sono fra loro nei seguenti rapporti: $M=3m_2$, $m_1=2m_2$. Non vi è attrito tra le due masse e la superficie del cuneo. Inizialmente la massa m_2 è tenuta ferma da una fune ideale collegata al piano orizzontale.



a) Si calcolino le tensioni delle funi all'equilibrio.

Si taglia la fune che tiene fermo il secondo punto materiale, assumendo che il cuneo non si ribalti, si calcoli:

b) la velocità del cuneo di massa *M* una volta che il blocchetto di massa m_2 si è innalzato di *h=0.3 m*

$$m_1 g \sin\theta - T = 0 \rightarrow T = m_1 g \sin\theta = 16,97 \simeq 17N$$
$$T - R - m_2 g = 0 \rightarrow R = T - m_2 g = 7,18N$$

Tagliando la fune m_1 scende ed m_2 sale, ma si muove anche M perché è a contatto con le due masse: dato che non ho forze esterne si conserva la qdm e l'Energia poiché non ho forze non conservative:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + MV = 0$$
$$-m_1 g h \sin\theta + \frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \frac{1}{2}m_2(v_{2x}^2 + v_{2y}^2) + \frac{1}{2}MV^2 = -m_2 g h$$

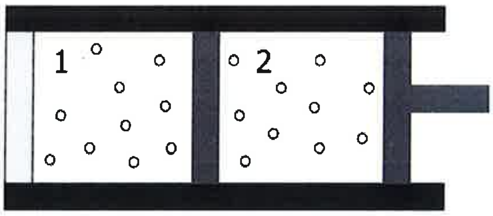
$v_{2x} = V$ perché M trascina m_2

$v_1' = v_{2y}$ velocità relativa di m_1 rispetto ad M

$$-m_1 g h \sin\theta + \frac{1}{2}V^2(m_1 + m_2 + M) + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_1'^2 + m_1 V v_1' \cos\theta = -m_2 g h$$
$$m_1 V + m_1 v_1' \cos\theta + m_2 V + MV = 0 \rightarrow v_1' = -\frac{m_1 + m_2 + M}{\frac{m_1}{2}} = -6V$$
$$\Rightarrow V = \sqrt{\frac{gh(2\sin\theta - 1)}{51}} = 0,2m/s$$

21

Terzo problema (10 pt):



Un cilindro con pareti adiabatiche e fondo non adiabatico è separato in due parti da un setto mobile (sottile e di massa trascurabile) e chiuso da un pistone mobile (di massa trascurabile). Il setto e il pistone sono isolanti termicamente. Nella regione 1 è contenuta una mole di gas ideale monoatomico, mentre nella regione 2 si trova una mole di gas ideale biatomico. Inizialmente i due gas occupano volumi uguali e si trovano all'equilibrio termico con l'ambiente esterno alla temperatura T_0. Il pistone viene spinto reversibilmente fino a far dimezzare il volume occupato dal gas biatomico. Nel nuovo stato di equilibrio, il setto viene bloccato, il fondo reso adiabatico, e viene tolto il rivestimento adiabatico del setto, permettendo lo scambio termico tra i due gas. Infine, dopo aver raggiunto l'equilibrio termodinamico, il pistone viene riportato nella sua posizione iniziale. Durante questa trasformazione il gas 2 compie un lavoro $W = R\,T_0/2$.

Determinare

1. le variabili termodinamiche dei due gas negli stati di equilibrio considerando noti volume iniziale e della temperatura iniziale
2. la variazione di entropia dell'universo nell'ultima trasformazione effettuata dai due gas.

$N_1 = 1$ mole MONOATOMICO : $\gamma = \frac{5}{3}$; $c_V = \frac{3}{2}R$; $c_p = \frac{5}{2}R$

$N_2 = 2$ moli BIATOMICO : $\gamma = \frac{7}{5}$; $c_V = \frac{5}{2}R$; $c_p = \frac{7}{2}R$

	A		B		C		D	
	1	2	1	2	1	2	1	2
P	*	*	*	*	*	*	*	*
V	V_A	V_A	*	$V_A/2$	V_{B1}	V_{B2}	V_C	*
T	T_0	T_0	T_0	*	T_C	T_C	*	*

2) AB → compressione adiabatica reversibile : $T_{2B}V_{2B}^{\gamma-1} = T_{2A}V_{2A}^{\gamma-1}$

nelle correzioni dice $P_{2B} = \frac{2^{2/5}T_0R}{V_A}\cdot 2$

$* \rightarrow T_{2B} = \frac{T_0 V_A^{\gamma-1}}{\left(\frac{V_A}{2}\right)^{\gamma-1}} = T_0 \cdot 2^{2/5}$

$* \; P_{2B} = \frac{2RT_0\cdot 2^{2/5}}{V_A/2} = 2^{2/5}\frac{T_0R}{V_A}$ $\qquad * \; P_{2A} = \frac{2RT_0}{V_A}$

1) AB → compressione isoterma reversibile perché a contatto con T_0

$* \; P_{1A} = \frac{NRT_0}{V_A} = \frac{RT_0}{V_A}$

W_{21} è solo compressione, non ho scambio di [illegible]

$* \; \boxed{P_{1B} = P_{2B}}$ $\qquad * \; V_{1B} = V_A \cdot 2^{-2/5}$

$\Delta U^1_{BC} = -\Delta U^2_{BC} \rightarrow N_1 c_V (T_C - T_{1B}) = -N_2 c_V (T_C - T_{2B})$

$\frac{3}{2}R(T_C - T_0) = -\frac{5}{2}R\cdot 2\left(T_C - T_0^{2/5}\right)$

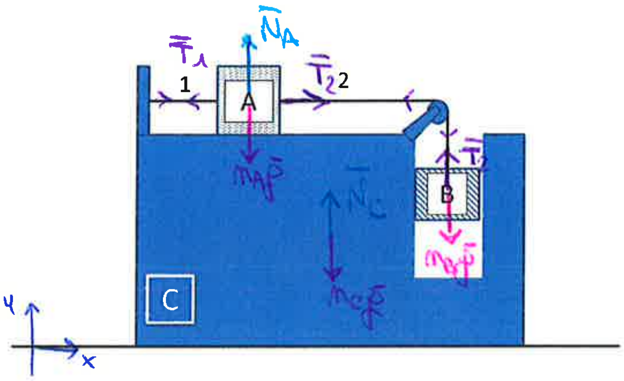
quindi ho [illegible]

$T_C = \frac{3+2^{2/5}\cdot 5}{8}\,T_0$

23

Fisica I – Gliozzi – 5 Luglio 2016 – TEMA B

Primo problema (11pt):



Nel sistema rappresentato in figura il corpo A, di massa $m_A = 5$ kg, è appoggiato sul ripiano orizzontale del blocco C di massa $m_C = 5\,m_A$ che a sua volta è appoggiato su un piano orizzontale liscio; A è collegato da un filo (denominato 2 nella figura) inestensibile e di massa trascurabile a un corpo B di massa $m_B = 2\,m_A$, vincolato a muoversi verticalmente rispetto a C, tramite una carrucola ideale. Inizialmente il corpo A è tenuto fermo da un filo inestensibile (denominato 1 in figura) vincolato al blocco C e l'intero sistema è in quiete.

1. Trovare il valore delle tensioni delle funi all'equilibrio, e della reazione vincolare normale al piano orizzontale d'appoggio.

A un certo istante si taglia il filo 1 e si lascia il sistema libero di muoversi. Trascurando ogni attrito,

2. si calcoli il modulo della velocità del corpo C quando il corpo B si è abbassato di un tratto $\Delta h = 0.2m$.

$m_C = 5m_A = 25\,kg$

$m_B = 2m_A = 10\,kg$

$T_2 - m_B g = 0 \rightarrow T_2 = m_B g = 98\,N$

$T_2 - T_1 = 0 \rightarrow T_2 = T_1$

$N_A - m_A g = 0 \rightarrow N_A = m_A g = 49\,N$

$N_C - m_C g - N_A - T_2 = 0 \rightarrow N_C = m_C g + N_A + T_2 = 392\,N$

Tagliando la fune (1) inizia a muoversi, si conserva la qdm lungo x

$$m_A v_A + m_B v_{Bx} + m_C v_C = 0$$

Si conserva anche l'energia meccanica:

$$m_B g \Delta h = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 + \frac{1}{2} m_B (v_{Bx}^2 + v_{By}^2)$$

$v_A = v_C + v_A'$ → di A rispetto a C, che è poi $= v_{By}$

$v_A' = v_{By}$

$v_{By} = v_A' = v_A - v_C = -8v_C$

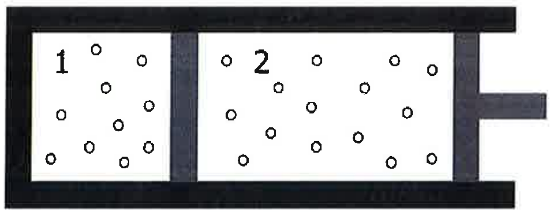
$$\rightarrow \frac{1}{2} m_A 49 v_C^2 + \frac{1}{2} m_B (v_C^2 + 64 v_C^2) + \frac{1}{2} m_C v_C^2 = m_B g \Delta h$$

$$v_C = \sqrt{\frac{g \Delta h}{46}} = 0{,}2\,m/s$$

24

Terzo problema (10 pt):

$V_{TOT} = 3V_A$



Un cilindro adiabatico è separato in due regioni da un setto mobile (sottile e di massa trascurabile) ed è chiuso da un pistone (di massa trascurabile), entrambi adiabatici. Nella regione 1 si trova una mole di gas ideale monoatomico, mentre la regione 2 è riempita con 2 moli dello stesso gas. Inizialmente i due gas si trovano in equilibrio termodinamico alla stessa temperatura T_A ed occupano rispettivamente volumi V_A e $2V_A$, inoltre il pistone si trova in equilibrio meccanico con l'ambiente esterno. I gas vengono compressi reversibilmente spingendo molto lentamente il pistone fino a che la regione 1 ha dimezzato il proprio volume. Il setto viene poi bloccato e il pistone viene lasciato espandere irreversibilmente fino alla posizione iniziale (raggiungendo l'equilibrio meccanico), nella quale viene poi bloccato. Infine, a volumi bloccati i due gas vengono messi a contatto termico fra loro, fino al raggiungimento dell'equilibrio.

Determinare

1. √ le variabili termodinamiche dei due gas negli stati di equilibrio considerando note T_A e V_A,
2. √ la variazione di entropia dell'universo nell'ultima trasformazione effettuata dai due gas.

MONOATOMICO: $\gamma = \frac{5}{3}$; $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$

	A		B		C		D	
	1	2	1	2	1	2	1	2
P	*	*	*	*	*	*	*	*
V	V_A	$2V_A$	$V_A/2$	V_A	$V_A/2$	*	V_A	$2V_A$
T	T_A	T_A	*	*	*	P_A	*	*

AB : compressione reversibile adiabatica
BC : espansione irreversibile adiabatica
CD : isocora irreversibile

* $P_{A1} = \frac{nRT_A}{V_A}$ * $P_{A2} = \frac{2RT_A}{V_A/2} = \frac{RT_A}{V_A}$ Dato che ho equilibrio meccanico $P_{A1} = P_{A2} = p_{esterna}$

* $T_{A1}V_{A1}^{\gamma-1} = T_{B1}V_{B1}^{\gamma-1} \rightarrow T_{B1} = \frac{T_{A1}V_{A1}^{\gamma-1}}{V_{B1}^{\gamma-1}} = T_{A1}\left(\frac{V_{A1}}{\frac{V_{A1}}{2}}\right)^{\gamma-1} = T_{A1} \cdot 2^{2/3} = 1,59 \cdot T_{A1}$

* $P_{B1} = \frac{nRT_{B1}}{V_{B1}} = \frac{RT_A(1,59)}{\frac{V_A}{2}} = 2^{5/3}\frac{RT_A}{V_A} = 3,18\frac{RT_A}{V_A}$

IN B l'equilibrio fa sì che $P_{B1} = P_{B2}$ e dunque: $\frac{T_{2B}}{T_{1B}} = \frac{V_{2B}}{V_{1B}} = \frac{V_A}{2V_A}$

* $T_{B2} = T_A$ * $P_{2B} = \frac{2RT_A}{V_A}$

* $V_{C2} = V_{TOT} - V_{C1} = 3V_A - \frac{V_A}{2} = \frac{5}{2}V_A$

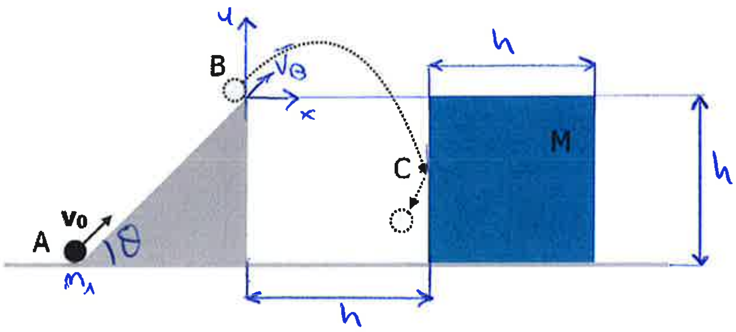
* $T_{C2} = \frac{V_{C2}P_A}{nR} = \frac{5}{2}V_AP_A \cdot \frac{1}{2R} = \frac{5}{4}\frac{V_AP_A}{R} = \frac{5}{4}T_A$

26

Fisica I – Gliozzi – 5 Luglio 2016 – TEMA C

Primo problema (9pt):

Un punto materiale di massa m_1=0.5kg viene lanciato con velocità iniziale v_0 lungo un piano inclinato di $\theta = 45°$. Raggiunta la fine del piano inclinato alla quota $h = 1$ m, il punto continua la sua traiettoria fino a rimbalzare su un cubo di massa M=2m_1 e di lato h, posto a distanza h dall'estremità del piano inclinato.



1. Quanto deve valere la velocità iniziale affinché il punto materiale colpisca la faccia laterale del cubo a una quota $h/2$?
2. Calcolare il modulo della velocità del punto materiale in C e la sua direzione

Supponiamo che il piano orizzontale sia liscio e che l'urto sia elastico, calcolare

3. la velocità V del cubo immediatamente dopo l'urto.
4. L'impulso trasferito nell'urto dal punto materiale.

AB) : $\frac{1}{2}\cancel{m}v_A^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_B^2 + \cancel{m}gh \rightarrow v_B^2 = v_A^2 - 2gh$

traiettoria moto parabolico : $y = x\,tg\theta - \frac{gx^2}{2v_B^2\cos^2\theta} = x - \frac{gx^2}{v_B^2}$

Sostituisco le coordinate del punto $C\left(h, \frac{h}{2}\right)$: $\frac{h}{2} = h - \frac{gh^2}{v_B^2}$

$v_B^2 = \frac{3}{2}gh \rightarrow \frac{3}{2}gh = v_A^2 - 2gh \rightarrow v_A = \sqrt{\frac{gh}{2}}$

La velocità in C avrà due componenti:

$v_{xC} = v_{Bx} = v_B\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}v_B$

$v_{yC} = \frac{dy_C}{dt} \rightarrow \left(v_x - \frac{2gx}{v_B^2}v_x\right) = \left(1 - \frac{2gx}{v_B^2}\right)v_x \rightarrow v_{cy} = -\frac{\sqrt{2}}{6}v_B$

$\bar{v}_C = \frac{\sqrt{2}}{2}v_B\bar{u}_x + \frac{\sqrt{2}}{6}v_B\bar{u}_y \qquad |\bar{v}_C| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3} \qquad \alpha = arctg\frac{-\frac{\sqrt{2}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -18{,}4°$

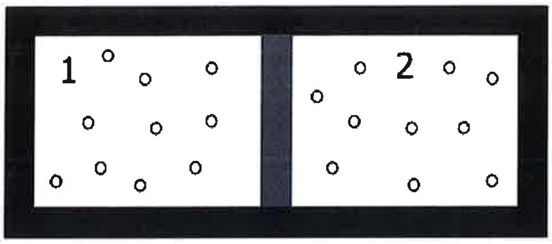
Urto elastico => si conservano energia e qdm:

$$\begin{cases} mv_{cx} = MV + mv'_{cx} \\ \frac{1}{2}mv_{cx}^2 = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv'^2_{cx} \end{cases} \quad V = \frac{2m}{m+M}v_{cx}$$

Impulso orizzontale : $J = \Delta P = MV = \frac{2mMv_{cx}}{m+M}$

11

Terzo problema (10pt):



Un contenitore adiabatico di volume V è separato in due parti uguali da un setto mobile (sottile e di massa trascurabile) anch'esso adiabatico. La regione 1 contiene una mole di gas ideale monoatomico, mentre nella regione 2 ci sono due moli dello stesso gas. Inizialmente i due gas sono alla stessa temperatura ed il setto è tenuto fermo in modo che i due gas occupino lo stesso volume. Ai due gas viene fornita una eguale quantità di calore $Q = 6\ R\ T_A$. Poi viene rimosso l'isolamento al setto bloccato e si aspetta che i due gas raggiungano l'equilibrio termico. Infine si rilascia il setto fino a raggiungere la posizione di equilibrio, seguendo una isoterma irreversibile.

Determinare

√ 1. le variabili termodinamiche dei due gas negli stati di equilibrio considerando noti T_A e V,
2. la variazione di entropia dell'universo nell'ultima trasformazione effettuata dai due gas.

$N_1 = 1$ mol
$N_2 = 2$ mol
{ MONOATOMICO : $\gamma = \frac{5}{3}$; $c_v = \frac{3}{2}R$; $c_p = \frac{5}{2}R$

	A 1	A 2	B 1	B 2	C 1	C 2	D 1	D 2
P	*	*	*	*	*	*	*	*
V	$V/2$	$V/2$	V_A	V_A	V_A	V_A	*	*
T	T_A	T_A	*	*	T_C	T_C	T_C	T_C

→ perché ho equilibrio meccanico $P_{1D} = P_{2D}$

* $P_{A1} = \frac{N_1 R T_A}{V/2} = \frac{2RT_A}{V}$

* $P_{A2} = \frac{N_2 R T_A}{V/2} = \frac{4RT_A}{V}$

1) 2) AB è isocora irreversibile *
$Q = 6RT_A = N_1 c_v (T_{1B} - T_A) \rightarrow T_{1B} = 5T_A$
$Q = 6RT_A = N_2 c_v (T_{2B} - T_A) \rightarrow T_{2B} = 3T_A$

* $P_{B1} = \frac{N_1 R \cdot 5T_A}{V/2} = \frac{10RT_A}{V}$

* $P_{B2} = \frac{N_2 R T_A \cdot 3}{V/2} = \frac{12RT_A}{V}$

1) 2) BC è isocora irreversibile ma il calore se lo scambiano direttamente i due gas → $Q^1_{BC}\ Q^2_{BC} = 0$

$$N_1 c_v (T_C - T_{1B}) + N_2 c_v (T_C - T_{2B}) = 0$$

$$T_C = \frac{11}{3} T_A$$

* $P_{C1} = \frac{N_1 R T_C}{V/2} = \frac{11}{3} \frac{2RT_A}{V} = \frac{11}{3} P_{A1}$

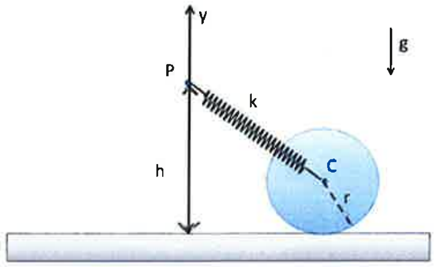
* $P_{C2} = \frac{N_2 R T_C}{V/2} = \frac{11}{3} \frac{4RT_A}{V} = \frac{11}{3} P_{A2}$

28

Fisica I – Gliozzi – 9 Settembre 2016 – TEMA A

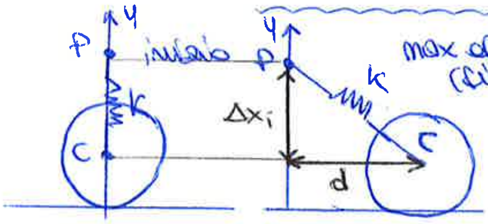
Primo problema (11 pt):

Un disco omogeneo, di massa m=10 kg, raggio r=0.3 m e spessore costante, è appoggiato su un piano orizzontale scabro sul quale rotola senza strisciare. Il centro C del disco è collegato, mediante una molla di costante elastica k=90 N/m e lunghezza di riposo trascurabile, a un punto P dell'asse y posto ad altezza h=0.7 m dal piano di appoggio. All'istante t=0 il centro C si trova sull'asse y con componente della velocità v_{0x}=1 m/s. Si determini:



a) la distanza massima alla quale può giungere il disco → cioè la max elongazione della molla (istante in cui si ferma ed inverte il moto)
b) scrivere le equazioni del moto per il disco in un punto generico
c) ricavare l'accelerazione massima consentita perché vi sia puro rotolamento nel caso in cui il coefficiente d'attrito statico valga $\mu_s = 0.1$, e dire per quale posizione del cilindro si ha il massimo valore dell'accelerazione.

$\vec{F}_e = -k(\vec{\ell} - \underbrace{\vec{\ell}_0}_{\approx 0}) = -k\vec{\ell}$ ⇒ esercita sempre forza elastica (molla sempre tesa/compressa) qui la considero sempre tirata.



max elongazione (fine) $\Delta x_i = h - r = 0{,}4\,m$

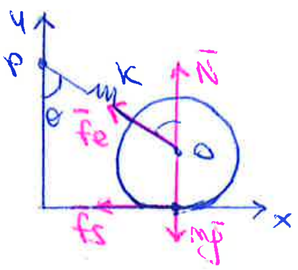
Puro rotolamento ⇒ attrito non compie lavoro

Applico la conservazione dell'energia tra l'inizio e la posizione di max. elongazione:

$$\frac{1}{2}k\Delta x_i^2 + \frac{1}{2}m v_{0x}^2 + \frac{1}{2}I_0\omega_0^2 = \frac{1}{2}k\Delta x_f^2 \quad \text{con } I_0 = \frac{1}{2}mr^2 \text{ e } \omega_0 = \frac{v_{0x}}{r}$$

$$\Delta x_f = \sqrt{\frac{k\Delta x_i^2 + m v_{0x}^2 + \frac{1}{2}m r^2 \frac{v_{0x}^2}{r^2}}{k}} = 0{,}57\,m$$

Per trovare d uso Pitagora: $d = \sqrt{\Delta x_f^2 - \Delta x_i^2} = 0{,}41\,m$



$$\bar{N} + \bar{f}_e + \bar{f}_s + m\bar{g} = m\bar{a}$$

x) $-f_s - f_e\sin\theta = ma \to f_s = -ma - f_e\sin\theta$

y) $N + f_e\cos\theta - mg = 0 \to N = mg - k\Delta x\cos\theta$

O) $f_s r = I_0\alpha = \frac{1}{2}mr^2 \cdot \frac{a}{r} \to f_s = \frac{1}{2}\frac{mra}{r} = \frac{1}{2}ma$

puro rotolamento: $a = \alpha r$

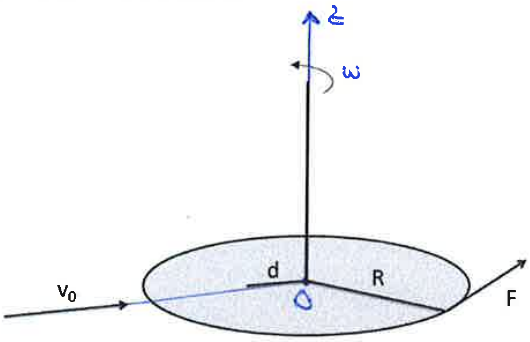
Condizioni attrito per puro rotolamento: $|f_s| \le \mu_s N \to -\mu_s N \le f_s \le \mu_s N$

$$\frac{1}{2}ma \le \mu_s(mg - k\Delta x\cos\theta)$$

$$a \le \frac{2\mu_s(mg - k\Delta x\cos\theta)}{m}$$

30

Secondo problema (9 pt):



Una giostra è formata da un disco di raggio $R = 1.5\,m$ e massa M =200 Kg capace di ruotare senza alcun attrito attorno all'asse verticale fisso passante per il suo centro O. Un bambino la mette in rotazione dall'esterno (al tempo $t = 0$ la giostra è ferma), applicando una forza $F = \beta t^2$ (dove $\beta = 3Ns^{-2}$) tangente al disco per $t_1 = 2s$, poi smette e la lascia libera di ruotare. Calcolare la velocità angolare di rotazione ω_0 della giostra alla fine della spinta.

Mentre la giostra ruota con velocità ω_0 il bambino decide di saltarci sopra, compiendo un salto in direzione radiale rispetto alla giostra e arrivando ad una distanza d = 1 m dal centro con velocità di modulo pari a $v_0 = 1\,m/s$. Si consideri l'azione dell'attrito sufficiente a mantenere il bambino dopo il salto istantaneamente fermo rispetto alla giostra.

a) Calcolare la nuova velocità angolare di rotazione della giostra, approssimando il bambino con un punto materiale di massa m = 40 Kg. Si confronti il risultato con quello che si otterrebbe approssimando il bambino con un cilindro omogeneo di altezza h = 1 m, raggio di base R_B = 20 cm e stessa massa; qual è la differenza tra le velocità angolari nei due casi?

b) Cosa accadrebbe se il bambino (nell'approssimazione di punto materiale) saltasse sulla giostra, sempre a distanza d=1m dal centro, con la stessa velocità in modulo del caso precedente (v_0), ma direzione tangenziale alla giostra e concorde al senso di rotazione della giostra stessa?

c) Quale deve essere il minimo valore del coefficiente di attrito statico μ_s tra la giostra e il bambino affinché egli possa rimanere fermo rispetto alla giostra (nel caso in cui venga approssimato con un punto materiale)? Spiegare qualitativamente come sarebbe la forza di attrito fra il bambino e la giostra se sull'asse della giostra agisse un momento frenante.

Equazioni di equilibrio della rotazione attorno ad O:

$$O\circlearrowleft: FR = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \int_0^{t_1}(\beta t^2)R\,dt = \int_0^{\omega_0}\frac{MR^2}{2}d\omega \rightarrow \left[\beta\frac{t^3}{3}R\right]_0^{t_1} = \left[\frac{MR^2}{2}\omega\right]_0^{\omega_0}$$

Da cui: $\beta R\frac{t_1^3}{3} = \frac{MR^2}{2}\omega_0 \rightarrow \omega_0 = \frac{\beta \cancel{R} t_1^3}{3}\cdot\frac{2}{MR^{\cancel{2}}} = 0{,}053$ rad/s

Dopo il salto si conserva il momento angolare: $I\omega_0 + \cancel{dmv_0\cos\theta} = I'\omega' \rightarrow \omega' = \frac{I\omega_0}{I'}$

perché v_0 radiale

I' dipende da come considero il bambino:

- PUNTO MATERIALE: $I' = \frac{1}{2}MR^2 + md^2 \rightarrow \omega'_p = 0{,}045$ rad/s
- CILINDRO: $I' = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + md^2 \rightarrow \omega'_c = 0{,}0448$ rad/s

La differenza tra ω'_p e ω'_c è minima perché $I >> I'$

Se salto tangenzialmente il momento angolare si conserva: $I\omega_0 + dmv_0 = I\omega'$

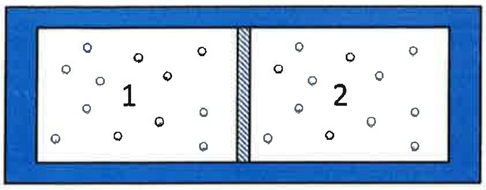
$$\omega' = \frac{I\omega_0 + dmv_0}{I} = \frac{I\omega_0 + dmv_0}{\frac{1}{2}MR^2 + md^2} = 0{,}196 \text{ rad/s}$$

Per ~~trovare~~ il minimo valore di μ_s devo vedere le equazioni del moto

31

Terzo problema (10pt):

Un cilindro di volume $2V_0$ è separato in due scomparti da un pistone, privo di attriti, la cui sezione ha area S. A destra e a sinistra del pistone ci sono due uguali quantità di gas monoatomico a pressione p_0 e temperatura T_0 (stato A_1, A_2). Si blocca il pistone, si isolano termicamente i gas, e si fornisce al gas 1 una quantità di calore pari a p_0V_0, (stato B_1 , B_2).



a) Quale forza serve, per tenere fermo il pistone in questo stato?

Ora, senza consentire scambi di calore, si lascia spostare lentamente il pistone, fino all'equilibrio meccanico (stato C_1, C_2). Infine, dopo aver nuovamente bloccato il pistone, si consente lo scambio di calore fra i due gas fino al raggiungimento dell'equilibrio termico (stato D_1,D_2).

b) Determinare le variabili termodinamiche per i gas nei due scomparti negli stati A, B, C e D (utilizzando per denominarli simboli del tipo p_{B1}, T_{D2}, V_{C1} ecc.)

c) Calcolare inoltre la variazione d'entropia del sistema 1+2 nella trasformazione CD

Inoltre, ove possibile, per ogni trasformazione nei due scomparti dire esplicitamente di che trasformazione notevole si tratta.

cfr. soluzione tema B.

32

PRIMO PROBLEMA

Equazioni di equilibrio alla rotazione: O↺: $F\frac{L}{2} = I\alpha = \left(\frac{1}{12}ML^2\right)\frac{d\omega}{dt} \to \alpha t^3\frac{L}{2} = \frac{1}{12}ML^2\frac{d\omega}{dt}$

integrando: $\int_0^{t_1} F\frac{L}{2}dt = \int_0^{\omega_0}\frac{1}{12}ML^2 d\omega \to \alpha\frac{L}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^{t_1} = \frac{1}{12}ML^2\omega_0 \to \alpha\frac{L}{8}t_1^4 = \frac{1}{12}ML^2\omega_0$

$\Rightarrow \omega_0 = \frac{\alpha\frac{L}{8}t_1^4}{\frac{1}{12}ML^2} = 0{,}16$ rad/s

Il salto del ginnasta è come un urto anelastico, si conserva il momento angolare attorno a O:

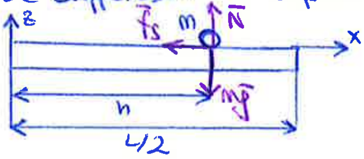
$L_i = I\omega_0 + hmv_G$
$L_f = I'\omega'$
$\left\{ \omega' = \frac{I\omega_0 + hmv_G}{I'} = \frac{\frac{1}{12}ML^2\omega_0 + hmv_G}{\frac{1}{12}ML^2 + mh^2} = 0{,}152 \text{ rad/s}\right.$

Quando salta radialmente $\bar{v}_G //$ trave: $I\omega_0 + \cancel{hmv_G} = I'\omega' \to \omega' = \frac{I\omega_0}{I'}$

↳ GINNASTA = PUNTO MATERIALE: $I' = \frac{1}{12}mL^2 + mh^2 \to \omega'_p = 0{,}089$ rad/s

↳ GINNASTA = CILINDRO: $I' = \frac{1}{12}ML^2 + mh^2 + \frac{1}{2}mR_G^2 \to \omega'_c = 0{,}084$ rad/s

La differenza tra ω'_p ed ω'_c è minima perché $I >> I'$.



Perché m non cada: $|f_s| \le \mu_s N \to -\mu_s N \le f_s \le \mu_s N$

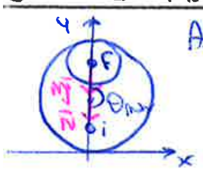
$\bar{f}_s + m\bar{g} + \bar{N} = m\bar{a}$

z) $N - mg = 0 \to N = mg = 784$ N

x) $-f_s = ma = m\frac{v_P^2}{h} = m\frac{(\omega'_p h)^2}{h} = m\omega'^2 h \to f_s = -m\omega_p'^2 h$

Impongo la condizione dell'attrito: $-\mu_s N \le -m\omega'^2 h \to \mu_s \ge \frac{m\omega_p'^2 h}{N} = 0{,}001$.

SECONDO PROBLEMA



Applico la conservazione dell'energia tra quando viene messo in moto e quando $\theta = \theta_{max}$

$\frac{1}{2}mv_i^2 + \frac{1}{2}I_r\omega_i^2 + mgr = \frac{1}{2}I_r\omega_f^2 + \frac{1}{2}mv_f^2 + mg(2R - r)$

$v_f^2\left(\frac{1}{2\cancel{r^2}}\frac{m\cancel{r^2}}{2} + \frac{1}{2}m\right) = \frac{1}{2}mv_i^2 + \left(\frac{m\cancel{r^2}}{2}\right)\frac{v_i^2}{2\cancel{r^2}} + \cancel{mgr} + 2Rmg - \cancel{mgr}$

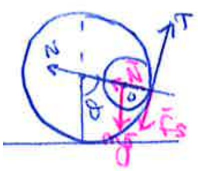
$v_f^2\left(\frac{3}{4}\cancel{m}\right) = v_i^2\left(\frac{3}{4}\cancel{m}\right) + 2R\cancel{m}g \to v_f^2 = v_i^2 + \frac{8}{3}Rg$.

Equazioni di equilibrio per r: $\bar{N} + m\bar{g} = m\bar{a}$ → tutto verticale

$-N - mg = -ma = -m\frac{v_f^2}{(R-r)} \to N = m\frac{v_f^2}{(R-r)} - mg$

Condizione di aderenza: $N > 0 \to m\frac{v_f^2}{(R-r)} - mg > 0 \to v_f^2 > \frac{\cancel{m}g(R-r)}{\cancel{m}}$

Sostituendo nella conservazione dell'energia: $v_i = v_{min} = \sqrt{g(R-r) - \frac{8}{3}Rg}$



$\bar{N} + \bar{f}_s + m\bar{g} = m\bar{a} = m(\bar{a}_N + \bar{a}_T)$

N): $N - mg\cos\theta = ma_N = m\frac{v_i^2}{(R-r)}$

T): $-f_s - mg\sin\theta = ma_T$

O↻ $f_s r = I_r\alpha = \left(\frac{1}{2}mr^2\right)\frac{a_T}{r} = \frac{1}{2}mr\,a_T \to f_s = \frac{1}{2}ma_T$

PURO ROTOLAMENTO: $a_T = \alpha R$
$v_{cm} = \omega R$

ATTRITO: $|f_s| \le \mu_s N = \mu_s m\left(\frac{v_i^2}{(R-r)} + g\cos\theta\right)$

Accelerazione max per avere puro rotolamento: $f_s \le \mu_s N$

$\frac{1}{2}\cancel{m}a_T \le \mu_s\cancel{m}\left(\frac{v_i^2}{(R-r)} + g\cos\theta\right) \to a_T \le 2\mu_s\left(\frac{g(R-r) - \frac{8}{3}Rg}{(R-r)} + g\cos\theta\right)$

SISTEMA 4 equazioni
4 incognite

$p_{1B} V_{1B} / nR$

$$\begin{cases} 2p_A V_A + nRT_A \ln\left(\frac{V_{2B}}{V_A}\right) = nc_v (T_{1B} - T_A) \\ p_{1B} = p_{2B} \quad \to \text{equilibrio meccanico} \\ V_{1B} + V_{2B} = 2V_A \\ p_{2B} = \frac{nRT_A}{V_{2B}} \end{cases}$$

BC: isocore irreversibile per entrambi i gas

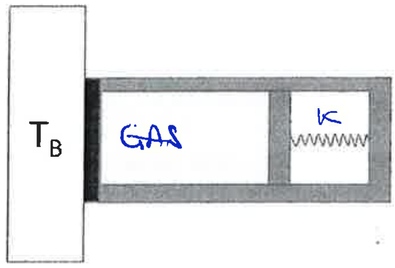
$$2T_x = \frac{T_1 + T_2}{2}$$ da cui ottengo ΔS

CD: adiabatica per 1 : $p_{D1} V_{D1}^{\gamma} = p_{C1} V_{C1}^{\gamma}$
nulla per 2

$F = \frac{\Delta p_C}{S}$ → tra i due gas
→ del pistone

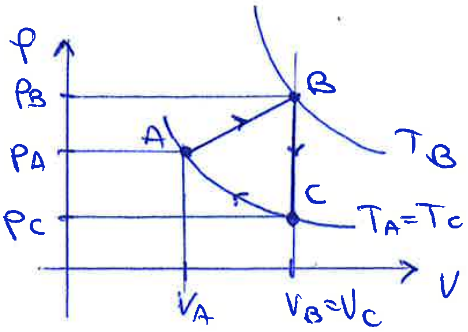
Terzo problema (10 pt): ⟶ ⚠ Soluzione non verificata

Un recipiente cilindrico di sezione $S = 10^{-2}\, m^2$ è diviso in due parti da un pistone libero di scorrere senza attriti. Nella parte sinistra (vedi figura) vi sono n = 0.6 moli di gas ideale biatomico. Nella parte destra è stato fatto il vuoto, ed è inserita una molla di costante elastica k = 2000 N/m. Inizialmente il gas è alla temperatura ambiente T_A = 300 K, e la molla è compressa rispetto alla sua lunghezza di riposo della quantità Δx_A = 0.4 m. Il gas viene riscaldato ponendolo a contatto termico, attraverso la parete diatermica a sinistra del cilindro, con un serbatoio alla temperatura T_B (tutte le altre pareti del cilindro sono adiabatiche). Il gas si espande fino allo stato di equilibrio B in cui la molla è compressa di Δx_B = 0.9 m. Il serbatoio viene quindi rimosso, si blocca il pistone e si attende che si ristabilisca l'equilibrio termico con l'ambiente (stato C). Infine, rimossa la molla e sbloccato nuovamente il pistone, si riporta il gas allo stato iniziale A con una compressione isoterma reversibile.



Si disegni il ciclo descritto nel piano di Clapeyron e si determinino:

✓ a) il volume iniziale V_A del gas ed il lavoro W_{AB} compiuto dal gas nella trasformazione AB;
✓ b) la temperatura T_B del serbatoio ed il calore Q_{AB} scambiato dal gas nella trasformazione AB;
✓ c) il calore Q_{ced} ceduto nel ciclo ed il rendimento η del ciclo;
d) la variazione di entropia dell'universo ΔS^U_{AB} nella trasformazione AB.



BIATOMICO : $c_v = \frac{5}{2}R$, $c_p = \frac{7}{2}R$, $\gamma = \frac{7}{5}$

AB : politropica
BC : isocora
CA : compressione isoterma reversibile

$p_A = \frac{k \Delta x_A}{S}$ $\quad p_B = \frac{k \Delta x_B}{S}$ $\quad \Delta x = \Delta x_B - \Delta x_A$

$V_B = V_A + \Delta x\, S = V_C$ $\quad T_B = \frac{p_B V_B}{nR}$

$\Delta U_{AB} = n c_v (T_B - T_A)$

$W_{AB} = -\Delta E_p = \frac{1}{2} k (\Delta x_B^2 - \Delta x_A^2)$

$T_A = T_C \longrightarrow p_C = \frac{p_B}{T_B} T_A$

$Q_{BC} = n c_v (T_C - T_B)$ $\quad W_{BC} = 0$

$Q_{CA} = W_{CA} = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right)$

$\eta = \frac{Q_{TOT}}{W_{TOT}}$

Nell'urto anelastico è come se istantaneamente la massa su cui agisce mg fosse raddoppiata → uso la II equazione cardinale:

$$O) \quad TR = \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}(2M)R^2\right)}_{I'} \frac{a}{R} \rightarrow ma + mg = Ma \rightarrow a(M-m) = mg \rightarrow a = \frac{mg}{M-m} = 41{,}2\ m/s^2$$

$$\alpha_1 = \frac{a}{R} = 257{,}5\ rad/s^2$$

$$\omega_1 = \omega_0 + \alpha_1 t_0 = 75{,}14\ rad/s$$

$$\Delta E_K = \frac{1}{2} I' \omega_1^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 = \frac{1}{2}(MR^2)\omega_1^2 - \frac{1}{4}MR^2\omega_0^2 = \frac{1}{4}MR^2(\omega_0^2 - \omega_1^2) = 93{,}95\ J$$

$$\bar{J} = 0 - M\bar{v}_B = -M\bar{v}_B = -5{,}2\ kg\,m/s$$