



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2287A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia

**MATERIA: Costruzione di Macchine - Appunti -Esercizi -
Domande Tipo - Prof. Raffa**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Costruzione di macchine (14ALPNC) - a.a. 2015/16

Principali argomenti di carattere teorico trattati durante il corso

1. Ricavare le relazioni di reciprocità delle tensioni tangenziali imponendo l'equilibrio alla rotazione di un volume infinitesimo di lati dx, dy, dz , considerando l'effetto delle variazioni delle componenti di tensione dovute agli incrementi dx, dy, dz nel passaggio da una faccia del volume elementare a quella opposta. Con tecnica analoga, ricavare le equazioni differenziali di equilibrio della teoria dell'elasticità.

2. Ricavare la cinematica delle deformazioni nel caso 3D: considerare per esempio il piano (xy) e dimostrare che valgono le relazioni

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x, \varepsilon_y = \partial v / \partial y, \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x,$$

estendendo tale risultato agli altri piani coordinati.

3. La legge di Hooke per materiali isotropi. Spiegare il disaccoppiamento fra le componenti normali e tangenziali delle tensioni e delle deformazioni e la diversa struttura del legame (σ, ε) rispetto al legame (τ, γ) . Utilizzare le condizioni di simmetria applicabili, il teorema di Betti e il principio di sovrapposizione degli effetti.

Come si modifica la legge di Hooke nel caso dei materiali anisotropi?

4. Nel sistema di riferimento (x, y, z) è dato lo stato delle tensioni

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}.$$

Ricavare le formule di Cauchy (equilibrio del tetraedro elementare). Utilizzando tali formule, dimostrare che le tensioni principali sono le radici dell'equazione caratteristica $\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$, ricavando esplicitamente le espressioni degli invarianti I_1, I_2, I_3 . Perché i coefficienti I_1, I_2, I_3 si chiamano invarianti dello stato delle tensioni?

Ricavare l'equazione dell'ellissoide delle tensioni nel sistema di riferimento principale.

5. Stato di tensione piana: definizione (ipotesi fisiche e approssimazioni) e calcolo delle tensioni principali.

Studiare l'equilibrio di un solido in condizioni di tensione piana, sottoposto a trazione e compressione lungo due direzioni ortogonali, per dimostrare la validità della relazione $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

6. Ricavare le equazioni di equilibrio radiale e circonferenziale nelle coordinate polari r, ϑ per un solido sottoposto ai carichi di volume radiale e circonferenziale, R e T , nell'ipotesi di stato di tensione piana. Applicare tali equazioni al caso dei dischi rotanti, considerando entrambe le condizioni di assialsimmetria, *torsionlike* e *torsionless*. Quali sono le differenze di carattere fisico fra i due tipi di assialsimmetria?

- confronto analitico e grafico con la risposta forzata dell'oscillatore armonico, diverso significato fisico della risposta forzata del rotore di Jeffcott e dell'oscillatore nelle regioni $\omega/\omega_{cr} > 1$ e $\lambda/\lambda_n > 1$;
- la soluzione elementare nel caso di eccentricità $e = 0$, significato fisico della velocità critica in tale condizione.

15. Ricavare l'espressione del momento giroscopico, dimostrarne i diversi effetti fisici sull'albero (raddrizzante, rovesciante) a seconda del segno del parametro $A = I_p - I_d$. Illustrare e spiegare dal punto di vista fisico le modifiche da apportare alla matrice delle masse dell'albero rotante rispetto al caso dell'albero vibrante.

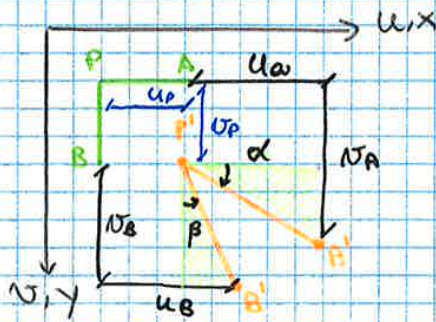
16. Albero incastrato a una estremità con un disco calettato all'estremo libero (disco con $A = I_p - I_d > 0$):

- Ricavare le frequenze proprie e le velocità critiche;
- tracciare il grafico della velocità critica adimensionale $\Omega^2 = \frac{\omega_{cr}^2 M \ell^3}{EJ}$ in funzione del parametro $\alpha = \frac{A}{M \ell^2}$;
- ricavare i risultati corrispondenti ai due casi limite $\alpha \rightarrow 0$ e $\alpha \rightarrow \infty$, fornendone la corrispondente interpretazione fisica.

La matrice di rigidezza dell'elemento trave è:

$$\frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & -6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$$

2.



Consideriamo 2 segmenti, uno lungo dx e l'altro dy disposti a formare 90° . Dopo la deformazione

$$\begin{aligned}
 u_A &= u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx \\
 v_A &= v_P + \frac{\partial v}{\partial x} dx \\
 u_B &= u_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy \\
 v_B &= v_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy
 \end{aligned}$$

Definita la deformazione come variazione di lunghezza rispetto alla lunghezza iniziale,

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{u_A - u_P}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{v_B - v_P}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}
 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la rotazione angolare $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ in caso di piccoli spostamenti si ha

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \frac{v_A - v_P}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \\
 \beta &= \frac{u_B - u_P}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \alpha \\ \beta \end{aligned}} \right\} \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

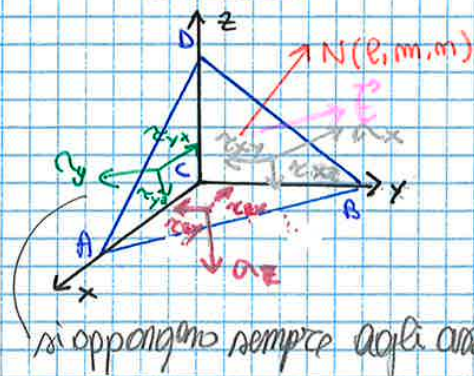
ESTENDENDO AGLI ALTRI PIANI

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Trova la matrice di deformazione reale e simmetrica.

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \gamma_{yx} \\ \gamma_{xz} &= \gamma_{zx} \\ \gamma_{yz} &= \gamma_{zy} \end{aligned}$$

4. Tetraedro di Cauchy



si oppongono sempre agli assi

$$t_x A = \alpha_x A_{BCD} + \tau_{zx} A_{ABC} + \tau_{yx} A_{ACD}$$

$$\begin{aligned} A_{BCD} &= A_e = A m^2 \\ A_{ACD} &= A_m = A m^2 \\ A_{ABC} &= A_m = A m^2 \end{aligned}$$

$$t_x = \alpha_x e + \tau_{yx} m + \tau_{zx} m$$

Si trovano

$$\begin{cases} t_x = \alpha_x e + \tau_{yx} m + \tau_{zx} m \\ t_y = \tau_{xy} e + \alpha_y m + \tau_{zy} m \\ t_z = \tau_{xz} e + \tau_{yz} m + \alpha_z m \end{cases} \quad \text{Equazioni di Cauchy}$$

vogliamo che $t_x = \alpha e$ cioè che $\vec{T} = \alpha \vec{N}$

vogliamo quindi trovare tre direzioni per le quali $\tau = 0$ e quindi dare agiscono solo tensioni normali.

$$\begin{aligned} (\alpha_x - \alpha) e + \tau_{yx} m + \tau_{zx} m &= 0 \\ \tau_{xy} e + (\alpha_y - \alpha) m + \tau_{zy} m &= 0 \\ \tau_{xz} e + \tau_{yz} m + (\alpha_z - \alpha) m &= 0 \end{aligned}$$

$$([T] - \alpha [I]) \vec{r} = \{0\} \rightarrow \text{imponiamo } |[T] - \alpha [I]| = 0$$

$$(\alpha_x - \alpha)(\alpha_y - \alpha)(\alpha_z - \alpha) - \tau_{zy}^2 - \tau_{yx} [\tau_{yx}(\alpha_z - \alpha) - \tau_{xz} \tau_{zy}] + \tau_{zx} [\tau_{xy} \tau_{yz} - \tau_{xz}(\alpha_y - \alpha)] = 0$$

$$(\alpha_x \alpha_y - \alpha(\alpha_x + \alpha_y) + \alpha^2)(\alpha_z - \alpha) - (\alpha_x - \alpha) \tau_{zy}^2 - \tau_{yx}^2 (\alpha_z - \alpha) + 2 \tau_{xy} \tau_{xz} \tau_{zy} - \tau_{zx}^2 (\alpha_y - \alpha) = 0$$

$$\alpha_x \alpha_y \alpha_z - \alpha_x \alpha_y \alpha - \alpha(\alpha_x + \alpha_y) \alpha_z + \alpha^2(\alpha_x + \alpha_y) + \alpha^2 \alpha_z - \alpha^3 + \alpha(\tau_{zy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2) - \alpha_x \tau_{zy}^2 - \tau_{yx}^2 \alpha_z - \tau_{zx}^2 \alpha_y = 0$$

$$-\alpha^3 + \alpha^2(\alpha_x + \alpha_y + \alpha_z) + \alpha(-\alpha_x \alpha_y - \alpha_x \alpha_z - \alpha_y \alpha_z + \tau_{zy}^2 + \tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2) + \alpha_x \alpha_y \alpha_z - \alpha_x \tau_{zy}^2 - \tau_{yx}^2 \alpha_z - \tau_{zx}^2 \alpha_y = 0$$

Equazione caratteristica:

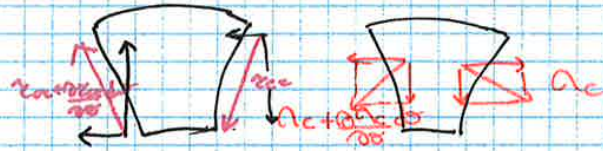
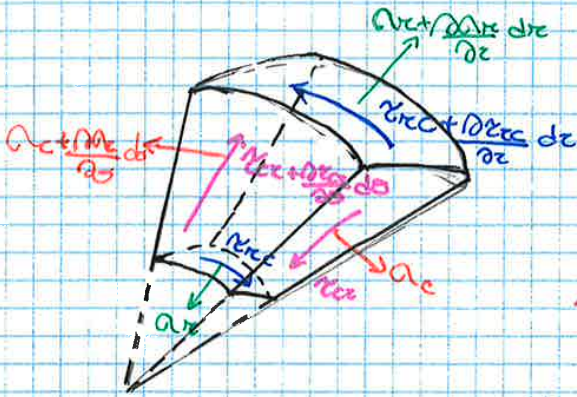
$$\alpha^3 - I_1 \alpha^2 + I_2 \alpha - I_3 = 0$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{traccia } [T] \\ I_2 &= \text{traccia (cofattore } T) \\ I_3 &= \det T \end{aligned}$$

Le radici dell'eq. caratteristica sono le tensioni principali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ($\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3$) alle quali corrispondono 3 autovettori.

I_1, I_2, I_3 si dicono invarianti perché non variano al variare del sistema di riferimento

6.



$h = \text{cost}$

EQUILIBRIO RADIALE

$$\begin{aligned} & (p(r + \frac{\partial p}{\partial r} dz) h (r + dz) d\theta - p r h r dz d\theta - (p_c + \frac{\partial p_c}{\partial \theta} dz) h dz \frac{r \sin \theta}{2} \\ & + p_c h r dz \frac{r \sin \theta}{2} + (\rho r c + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} dz) h dz \cos \theta \frac{r}{2} - \rho c h r dz \cos \theta \frac{r}{2} \\ & + R h r c dz d\theta = 0 \end{aligned}$$

acoline superiore
 $\frac{r \sin \theta}{2} \sim \frac{dz}{2}$
 $h = \text{cost}$
 $\cos \theta \sim 1$

$$p r dz d\theta + \frac{\partial p}{\partial r} r dz d\theta + p_c dz d\theta + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} dz d\theta + R r c dz d\theta = 0$$

$$\frac{p r}{r} - p_c + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} \frac{1}{r} + R = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} + \frac{p r - p_c}{r} + R = 0$$

EQUILIBRIO CIRCONFERENZIALE

$$\begin{aligned} & (\rho r c + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} dz) h (r + dz) d\theta - \rho c h r dz d\theta + (p_c + \frac{\partial p_c}{\partial \theta} dz) h dz \cos \theta \frac{r}{2} \\ & - p_c h r dz \cos \theta \frac{r}{2} + (\rho r c + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} dz) h dz \frac{r \sin \theta}{2} + \rho c h r dz \frac{r \sin \theta}{2} + T h r c dz d\theta = 0 \end{aligned}$$

$$\rho c dz d\theta + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} dz d\theta + \frac{p_c}{r} dz d\theta + \rho c dz d\theta + T r c dz d\theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p_c}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} + \frac{\rho r c}{r} + \frac{\rho c}{r} + T = 0$$

$$\frac{2 \rho r c}{r} + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial p_c}{\partial \theta} + T = 0$$

CON ASSIALSIMMETRIA $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$

TORSIONLIKE

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} + p r - p_c + R &= 0 \\ 2 \frac{\rho r c}{r} + \frac{\partial \rho r c}{\partial \theta} + T &= 0 \end{aligned}$$

TORSIONLESS
 Bisogna eliminare ogni componente possibile di torsione. Non basta $\omega = 0$, bisogna annullare τ_{rz} . Infatti con $\tau_{rz} = 0 \rightarrow \omega = 0$ non vale il viceversa. $\omega = 0$ vuol dire $\omega = \text{cost}$ quindi non ci sono torsioni.
 Frangitori

[K13] $N_3 = 1$ $\theta_3 = 0$

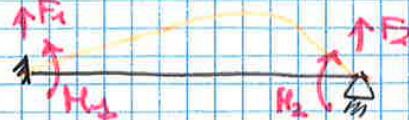
$$\frac{F_2}{\theta_2} = \frac{F_1}{\theta_1} \rightarrow F_2 = \frac{12EJ}{e^3} \quad (12)$$

$$-\frac{M_1}{\theta_1} = \frac{M_2}{\theta_2} \rightarrow M_2 = \frac{EJ}{e^3} \quad (-6e)$$



[K14] $N_2 = 0$ $\theta_2 = 1$

$$\frac{M_1}{\theta_1} = -\frac{M_2}{\theta_2} \rightarrow M_2 = (e^2) \frac{EJ}{e^3}$$



Non si può ricavare la matrice [K] da [k] cioè imponendo $[K] = [k]^{-1}$ perché $\det [k] = 0$ È un sistema labile

9 ASTA 2 NODI

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

$$[B] = \frac{\partial}{\partial x} [N] = \left[-\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \right] \quad [D] = E$$

$$[K] = \int_V \begin{bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{bmatrix} E \begin{bmatrix} -1/e & 1/e \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F_q\} = \int_V [N]^T \{q\} dV = \int_V \begin{bmatrix} 1-x/e \\ x/e \end{bmatrix} \frac{q}{A} A dx = \frac{qe}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\{F_r\} = \int_V [B]^T [D] \{\epsilon_r\} dV = \int_V \begin{bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{bmatrix} E \alpha \Delta T A dx = EA \alpha \Delta T \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

TRAVE

$$[B(x)] = \frac{\partial}{\partial x^2} N = \left[-\frac{6}{e^2} + \frac{12x}{e^3}, -\frac{4}{e} + \frac{6x}{e^2}, \frac{6}{e^2} - \frac{12x}{e^3}, -\frac{2}{e} + \frac{6x}{e^2} \right] \quad [D] = EJ$$

$$N' = \left[-\frac{6x}{e^2} + \frac{6x^2}{e^3}, 1 - \frac{4x}{e} + \frac{3x^2}{e^2}, \frac{6x}{e^2} - \frac{6x^2}{e^3}, -\frac{2x}{e} + \frac{3x^2}{e^2} \right]$$

$$[K] = \int_V \begin{bmatrix} -\frac{6}{e^2} + \frac{12x}{e^3} \\ -\frac{4}{e} + \frac{6x}{e^2} \\ \frac{6}{e^2} - \frac{12x}{e^3} \\ -\frac{2}{e} + \frac{6x}{e^2} \end{bmatrix} EJ \begin{bmatrix} -\frac{6}{e^2} + \frac{12x}{e^3} & -\frac{4}{e} + \frac{6x}{e^2} & \dots \end{bmatrix} dx$$

$$\rightarrow \frac{EJ}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6e & -12 & 6e \\ 6e & 4e^2 & -6e & 6e^2 \\ -12 & -6e & 12 & -6e \\ 6e & 6e^2 & -6e & 4e^2 \end{bmatrix}$$

$$\{F_q\} = \int_V \begin{bmatrix} 1 - 3(x/e)^2 + 2(x/e)^3 & -\frac{6x}{e} + \frac{6x^2}{e^2} \\ x - \frac{2x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} & 1 - \frac{4x}{e} + \frac{3x^2}{e^2} \\ 3(x/e)^2 - 2(x/e)^3 & \frac{6x}{e^2} - \frac{6x^2}{e^3} \\ -x^2/e + x^3/e^2 & -\frac{2x}{e} + \frac{3x^2}{e^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{A} A dx$$

$$\{F_q\} = \begin{bmatrix} qe/12 \\ qe^2/12 \\ qe/12 \\ -qe^2/12 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{cr}^2 = \left(6 - \frac{2}{\alpha}\right) + \sqrt{\left(6 - \frac{2}{\alpha}\right)^2 + \frac{12}{\alpha}}$$

• $\alpha \rightarrow \infty$

$$6 + 6 = 12 = \Omega_{cr}^2$$

$$\boxed{\varphi_2 = 0}$$

è l'albero ruotato
con $\varphi_2 = 0$

• $\alpha \rightarrow 0$

$$A \rightarrow 0$$

$$-4k \cancel{\varphi_2} m \omega^2 + 12k \cancel{\varphi_2} k^2 = 0$$

$$\omega^2 = 3 \frac{EJ}{\cancel{\varphi_2} m}$$

Non sappiamo dove sia \vec{E} ma sappiamo che esiste grazie al teorema.
 Sappiamo che è scomponibile in due componenti, α e τ

α : componente normale, \perp
 τ : componente tangenziale

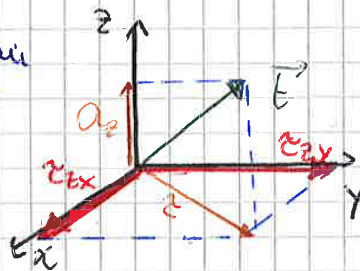
STATO DELLE TENSIONI

ci serve un sistema di riferimento, ad esempio il piano x, y

$$\mathcal{S} \equiv (x, y) \rightarrow (\alpha_z, \tau_{zx}, \tau_{zy})$$

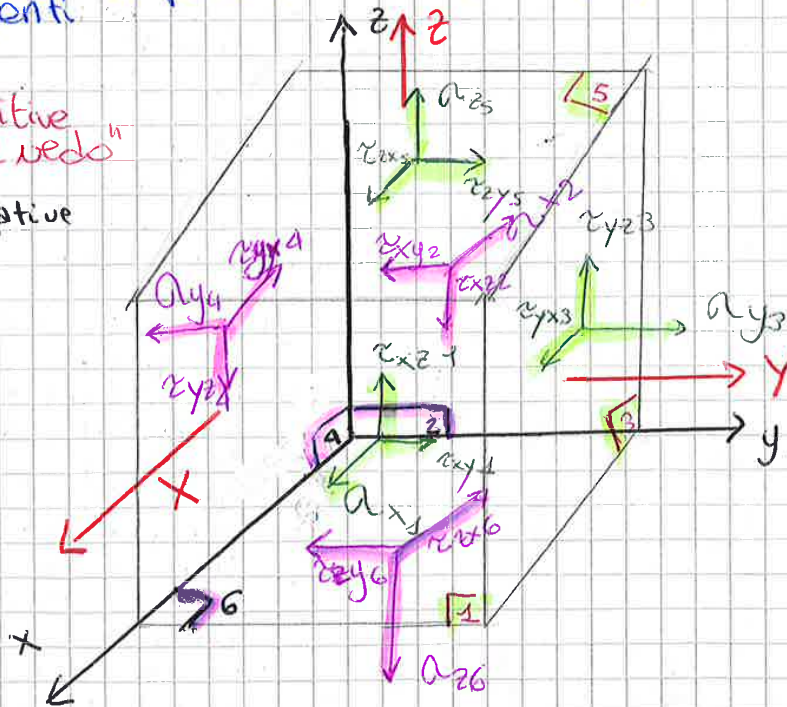
$$\vec{n}_n \equiv z$$

Per definire lo stato delle tensioni è suff. conoscere \vec{E} su 3 piani \perp passanti per O



Esistono 9 componenti di tensione, solo 6 sono indipendenti.

- facce positive perché "le vedo"
- facce negative con il -



carichi di volume }
 carichi di superficie }

non esiste "carico concentrato" nella teoria dell'elasticità perché $\mathcal{S} \rightarrow 0$ e quindi andrebbe a infinito \vec{E}

x, y, z $N/m^3 \rightarrow$ componenti di volume

Eq. rotazione $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

Eq. traslazione χ

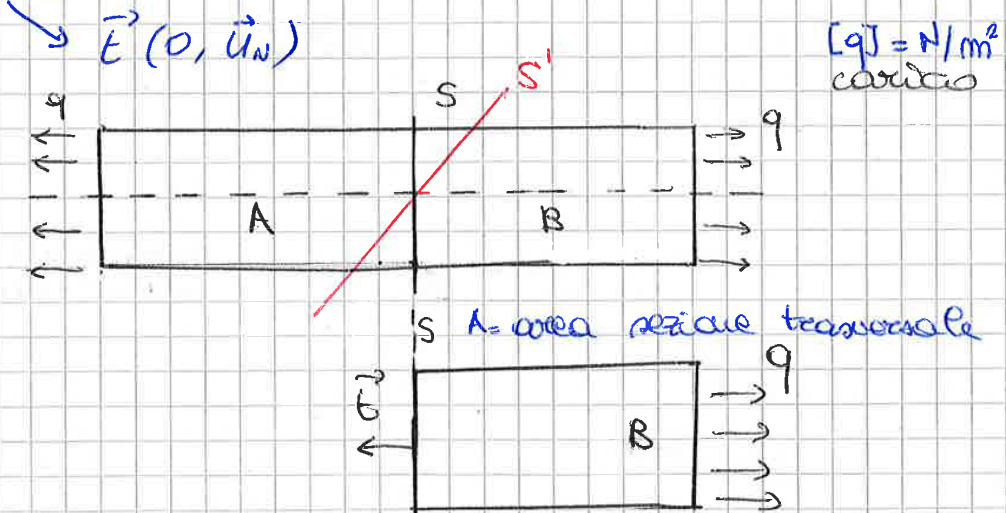
circolo su cui agiscono *circolo su cui sono distribuite*

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{xx'}) dydz + (\tau_{yx} - \tau_{yx'}) dx dz + (\tau_{zx} - \tau_{zx'}) dx dy + X dydz = 0$$

Equazioni: equilibrio alla traslazione

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{cases}$$

\vec{E} varia con il punto e con l'orientazione della superficie



$t_A = qA \rightarrow t = q$

S ⊥ asse barra: $\vec{E} = (q, 0)$ zero orientamento privilegiato con solo componente normale

$A_d = \frac{A}{\cos \alpha}$

$t_x A_d = qA \rightarrow t_x = q \cos \alpha$

$\sigma_x = t_x \cos \alpha = (q \cos \alpha) \cos \alpha = q \frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1)$

$\tau_{\alpha} = t_x \sin \alpha = \frac{1}{2} q \sin 2\alpha$

$\vec{E}_\alpha = (\sigma_x, \tau_\alpha)$

$$\begin{cases} t_x = a_{xx}l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n \\ t_y = \tau_{xy}l + a_{yy}m + \tau_{zy}n \\ t_z = \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + a_{zz}n \end{cases}$$

Formule di Cauchy

Adesso imponiamo che $\vec{T} = a\vec{N}$
 Vario il piano, Cauchy diventa

$$\begin{cases} t_x = al \\ t_y = am \\ t_z = an \end{cases}$$

cerchiamo le direzioni lungo le quali agiscono solo tensioni normali

$$\begin{cases} (a_{xx} - a)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (a_{yy} - a)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (a_{zz} - a)n = 0 \end{cases}$$

$$([T] - a[I]) \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{autovettore}$$

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix}$$

$$|[T] - a[I]| = 0 \quad \text{Eq. caratteristica: } a^3 - I_1 a^2 + I_2 a - I_3 = 0$$

$a_1 \geq a_2 \geq a_3$, ordinamento algebrico es. 0, -50 MPa, 20 MPa
 sono sempre 3, incluso quelle nulle

I_1, I_2, I_3 : invarianti dello stato delle tensioni
 monovarianti costanti il loro valore ad variare del s.o.r

$$I_1 = \text{tr} [T] = a_{xx} + a_{yy} + a_{zz}$$

guardare come si avvicina fare calcoli

$$I_2 = \text{tr} [\text{cof}_T] \quad (\text{cof})_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$\text{COF}_T = \begin{vmatrix} a_{yy} & \tau_{xy} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & a_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \tau_{xz} & a_{zz} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{xz} & a_{zz} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & a_{yy} \end{vmatrix}$$

$$I_2 = a_{xx}a_{yy} - \tau_{xy}^2 + a_{xx}a_{zz} - \tau_{xz}^2 + a_{yy}a_{zz} - \tau_{yz}^2$$

$$I_3 = \det [T]$$

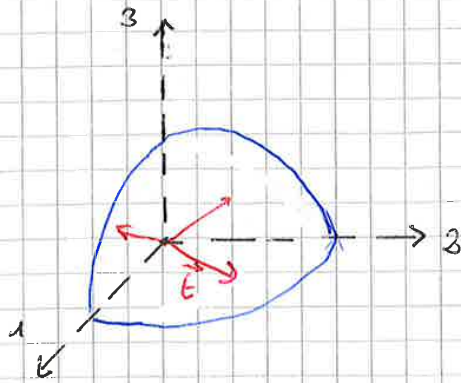
$$I_3 = a_{xx}a_{yy}a_{zz} - a_{xx}\tau_{yz}^2 - a_{yy}\tau_{xz}^2 - a_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz}$$

invarianti: sono tracce e determinanti; non dipendono dallo stato della matrice; qualsiasi riferimento scelto il riferimento principale è sempre quello

$$\begin{bmatrix} l \\ m \\ n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_i \\ m_i \\ m_i \end{bmatrix} = \vec{N}_i$$

3 piani principali sono \perp tra loro

esistere il vettore delle tensioni totali \vec{T}



$$|\sigma_{\text{min}}| \leq |\vec{T}| \leq |\sigma_{\text{max}}|$$

Trazione σ_3

$$(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0) \rightarrow \sigma_3 \leq |\vec{T}| \leq \sigma_1$$

STATO DELLE DEFORMAZIONI

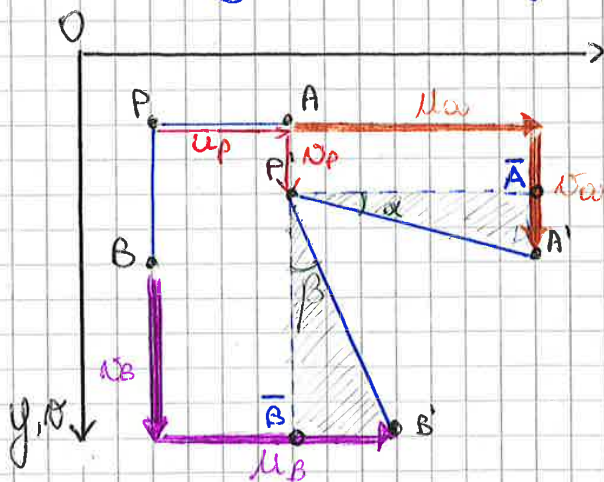
6 componenti deformazione
3 spostamento

(u, v, w)

cinematica della deformazione: 3 estensimetri piccoli

1° ordine \rightarrow deformazioni piccole

Segmento lungo dx e segmento lungo dy



$u(x,y)$ $v(x,y)$
Nelle ipotesi di piccoli spostamenti
($\tan \alpha \approx \alpha$)

$$\alpha \approx \frac{v(A) - v(P)}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\beta \approx \frac{u(B) - u(P)}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$u_A = u_P + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

$$v_A = v_P + \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$u_B = u_P + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$v_B = v_P + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\epsilon_x = \frac{u_A - u_P}{dx} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

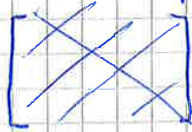
$$\epsilon_y = \frac{v_B - v_P}{dy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial y} dy}{dy} \quad \gamma_{xy} = \alpha + \beta \quad \text{è lo scorcimento angolare}$$

con il punto A rimuovo dy
no dipendenza assi

$$f(x+dx, y+dy) = f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$du = v_A$
 $dy = 0$

- (σ, ϵ) disaccoppiati rispetto a (γ, δ)
- legame $\sigma - \epsilon \neq \gamma - \delta$
- Anisotropo

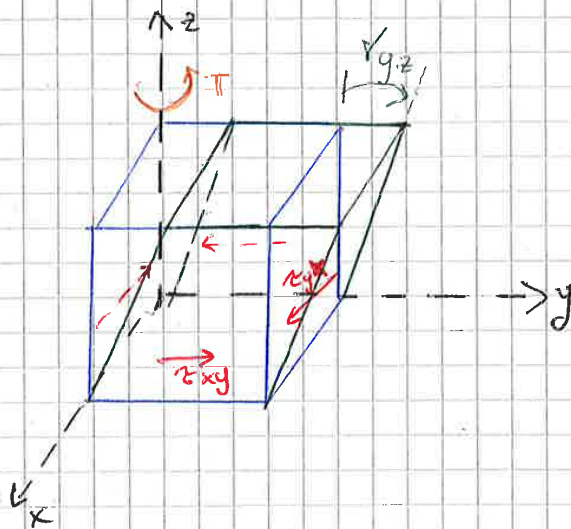


piena, simmetrica
 $36 \rightarrow 21$
 coeff. indip.

se anisotropo ciascuna delle tensioni è in funzione delle 6 deformazioni e gli assi non coincidono

- $E =$ modulo di Young MPa
- $\nu =$ coeff. di Poisson adimensionale
- $G =$ modulo elastico $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ MPa

Acciai $\sim 2 \cdot 10^5$ MPa
 $\nu \sim 0,3$



γ_{yz} dipende solo da τ_{yz}
 Supponiamo per assurdo
 stesso sistema (τ_{xy}, τ_{yx}) produce $+\delta_{yz} - \delta_{yz}$

Partiamo da $\tau_{yz} \neq 0$ dopo la rotazione di π , le τ_{yx} non cambiano quindi non possiamo generare δ_{yz}
 $(\tau_{xy}, \tau_{yx}), (\tau_{xz}, \tau_{zx}), (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ non possono produrre accrescimenti angolari

Quindi $\{\gamma_a\} = \{\delta\}$ (1)

Si può anche dimostrare che $\{\epsilon_x\} = \{\delta\}$ (2)

Da (1) arrivo a (2) anche con T. Betti

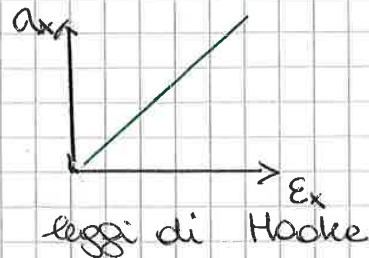


3/10/2017

(σ, ϵ) normali
 (τ, γ) tangenziali
 $\gamma = \begin{cases} \delta \alpha \end{cases}$ non esiste
 $\delta_{ij} = \frac{1}{G} \tau_{ij} \quad i \neq j$ legame tra τ e γ

legame tra σ e ϵ + complesso, infatti non si ha solo deformazione lungo E_x ma anche E_y e E_z quando il carico è applicato lungo x , si ha cioè una riduzione delle dimensioni trasversali

$E_x \quad E_y = E_z = -\nu E_x$
 $\alpha_x \quad E_x; E_y, E_z \neq 0$
 $\alpha_y \quad E_y; E_x, E_z = -\nu E_y$
 $\alpha_z \quad E_z; E_x, E_y = -\nu E_z$



$E_x = \frac{1}{E} [\alpha_x - \nu (\alpha_y + \alpha_z)]$

$E_y = \frac{1}{E} [\alpha_y - \nu (\alpha_x + \alpha_z)]$

$E_z = \frac{1}{E} [\alpha_z - \nu (\alpha_x + \alpha_y)]$

Abbiamo trovato due matrici, lo stato delle tensioni e della deformazioni

$[T] = \begin{bmatrix} \alpha_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \alpha_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \alpha_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}$

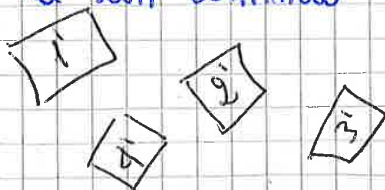
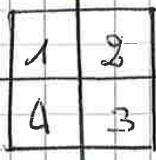
$[E] = \begin{bmatrix} E_x & \delta_{yx} & \delta_{zx} \\ \delta_{xy} & E_y & \delta_{zy} \\ \delta_{xz} & \delta_{yz} & E_z \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}$

Noi consideriamo solo i mezzi isotropi dove gli assi principali delle deformazioni coincidono con quello delle tensioni. Infatti $\tau_{xy} = G \delta_{xy}$. Se $\tau_{xy} = 0 \quad \delta_{xy} = 0$

Problema di compatibilità delle deformazioni con gli spostamenti

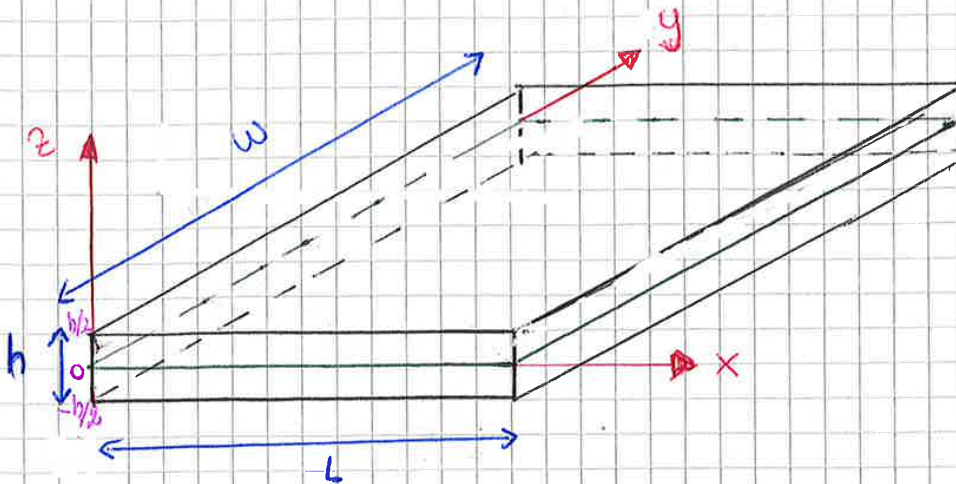
$E_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad E_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \delta_{xy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \quad \delta_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$
 $E_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad \delta_{yz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$

Ci sono 6 (ϵ, γ) dipendenti da solo 3 (u, v, w) ?
 Immagino un nodo, lo divido in 4 tetraedri e poi si deformano. Se ricompongo di 1'+2'+3'+4' non si ha un continuo



Stato di tensione piano (Plane stress)

Considero una lastra piana



$\frac{h}{L}, \frac{h}{w} \ll 1$ h molto piccolo

Carichi: non esistono carichi applicati lungo asse z
componenti lungo $z=0$ (asse $z=0$)

Per $z = \pm \frac{h}{2}$, $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$

Assumo che $\sigma_z = 0$, $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ dunque perché h piccolo
Riduzioni delle componenti

$\{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\} \neq 0$
Queste non sono $f(x, y, z)$, possiamo annullare per lo stesso motivo la dipendenza da z

TENSIONI

$$[T] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \det [T] = 0 \quad I_3 = 0$$

Non c'è dipendenza da z per nessuna variabile $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0$

DEFORMAZIONI

$$[E] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & \gamma_{yx} & \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} & \epsilon_y & \gamma_{zy} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial z} = 0 \quad \epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) \neq 0$$

1) caso particolare di th. elasticità \Rightarrow 2 eq. equilibrio,
1 eq. compatibilità

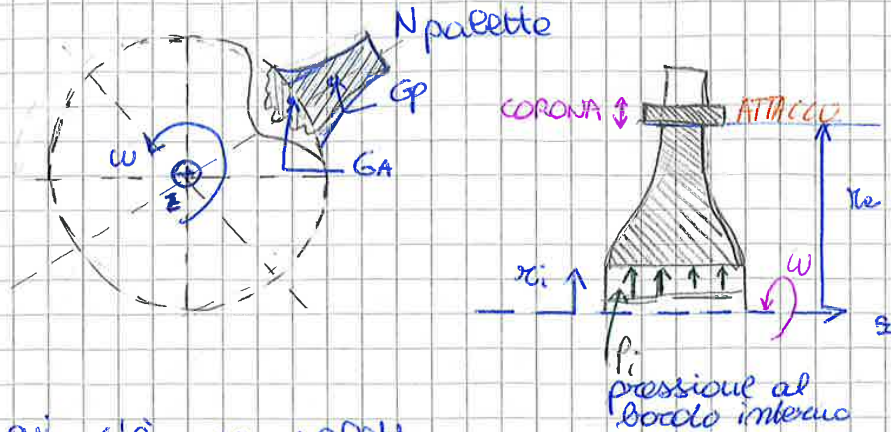
$$1) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{equilibrio}$$

$$2) \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0$$

$$1) \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad \text{compatibilità}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \\ \gamma_{xy} = \tau_{xy} \frac{1}{G} \end{array} \right.$$

Resistenze dei dischi rotanti



Sezione in cui c'è una paletta

$\omega \rightarrow$ campo centrifugo

Forze di superficie $\pi_i \rightarrow \pi_i \rightarrow p_i$

Conosciamo le coordinate del baricentro

$$r_e : F_c = N (M_A R_{GA} + M_P R_{GP}) \omega^2 \quad \text{forza centri fuga totale}$$

\uparrow massa attacco paletta \uparrow raggio \uparrow paletta

Tirco centrifugo degli N sistemi ATTACCO + PALETTA

$$t_e = \frac{F_c}{2\pi r_e h} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

CARICHI AGENTI SUL DISCO

1) $\omega \rightarrow$ campo centrifugo

carichi volume

2) superficie $\left\{ \begin{array}{l} p_i \text{ (forzamento)} \\ t_e \text{ (N sistemi attacco + paletta)} \end{array} \right.$

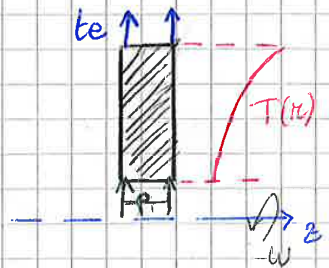
carico di superficie

3) Gradiente radiale di temperatura $T'(r)$

carico termico

Ipotesi

a) disco di spessore costante $h = \text{cost}$



Caso particolare

$$\omega = 0 \quad \frac{dT}{dr} = 0 \quad t_e = 0 \quad [p_i \neq 0] \rightarrow \text{eccitamento forzato}$$

Disco sottoposto a sollecitazioni meccaniche ma fermo

b) tensione piano

c) assiale simmetria

RADIALE

$$a_r r + r \frac{\partial a_r}{\partial r} - a_\theta + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + rR = 0 \quad \text{div. ob per } r$$

$$\frac{\partial a_r}{\partial r} + \frac{a_r - a_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + R = 0 \quad \text{Eq. differenziale di equilibrio lungo } r$$

Eq. equilibrio circonferenziale

$$\begin{aligned} & (\tau_{rc} + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} dr) h(r+dr) d\theta - \tau_{rc} h r d\theta + (\frac{\partial \tau_{c\theta}}{\partial \theta} d\theta) h dr \cos \frac{d\theta}{2} - a_\theta h dr \sin \frac{d\theta}{2} \\ & + (\tau_{c\theta} + \frac{\partial \tau_{c\theta}}{\partial \theta} d\theta) h dr \sin \frac{d\theta}{2} + \tau_{c\theta} h dr \sin \frac{d\theta}{2} + T h r d\theta dr = 0 \\ & (\tau_{rc} r d\theta + \tau_{rc} dr d\theta + 3^o \text{ ordine}) - \tau_{rc} r d\theta + \frac{\partial \tau_{c\theta}}{\partial \theta} dr d\theta + \tau_{c\theta} dr d\theta + T r d\theta dr = 0 \end{aligned}$$

CIRCONFERENZIALE

$$2\tau_{rc} + \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_c}{\partial \theta} + T = 0 \quad \text{Eq. differenziale di equilibrio lungo } \theta$$

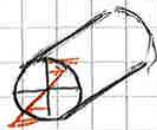
vs $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0$
 $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + Y = 0$ coordinate rettangolari

ASSIALSIMMETRIA

$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0$ carichi geometria materiale

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_r}{dr} + \frac{a_r - a_\theta}{r} + \frac{r}{\rho} \omega^2 &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{rc}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{rc}}{r} + \frac{\rho \omega^2 r}{T} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Assialsimmetria Torsion-like}$$

Bordo di torsione



Ma consideriamo $\omega = 0$

$\tau_{rc} = 0$, $\omega = 0$ TORSIONLESS

$$\bullet \frac{da_r}{dr} + \frac{a_r - a_\theta}{r} + \rho \omega^2 r = 0 \quad \rho \omega^2 r = 0$$

Viceversa se $\omega = 0$ rimangono le r
 $\rightarrow \frac{dv_\theta}{r} = -2 \frac{dv_r}{r} \rightarrow \epsilon_{rc} = -2 \epsilon_{r\theta} + \epsilon_{nc}$ $\tau_{rc} = \frac{C}{r^2} \neq 0$

Devo rimuovere tutte le sorgenti di torsione, quindi ω e poi un momento torcente al bordo esterno M_c

Porto al secondo membro

Eq. compatibilità delle tensioni

$$(1+r)(\sigma_c - \sigma_r) + r \frac{d\sigma_c}{dz} - v r \frac{d\sigma_r}{dz} + E \alpha r \frac{dT}{dz} = 0$$

Consideriamo E, α, r costanti

Abbiamo 2 equazioni del 1° ordine accoppiate, possiamo passare a 1 equazione del 2° ordine nella σ_c

$$(1) \quad r \frac{d\sigma_r}{dz} + \sigma_r (\alpha) + r R = 0$$

$$(2) \quad (1+r)(\sigma_c - \sigma_r) + r \frac{d\sigma_c}{dz} - v r \frac{d\sigma_r}{dz} + E \alpha r \frac{dT}{dz} = 0$$

$$(1) \quad \sigma_r = r \frac{d\sigma_r}{dz} + \sigma_r + \frac{r R}{\alpha p w^2 r^2}$$

$$(2) \quad (1+r) \left(r \frac{d\sigma_c}{dz} + p w^2 r^2 \right) + r \left(r \frac{d^2 \sigma_c}{dz^2} + \frac{d\sigma_c}{dz} + \frac{d\sigma_c}{dz} + 2 p w^2 r \right) - v r \frac{d\sigma_r}{dz} + E \alpha r \frac{dT}{dz} = 0$$

$$(1+r) r \frac{d\sigma_c}{dz} + (1+r) p w^2 r^2 + r^2 \frac{d^2 \sigma_c}{dz^2} + 2 p w^2 r^2 - v r \frac{d\sigma_r}{dz} + E \alpha r \frac{dT}{dz} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 \sigma_c}{dz^2} + \frac{3}{r} \frac{d\sigma_c}{dz} \right) + (3+r) p w^2 + \alpha E \frac{dT}{dz} = 0$$

parte non
compatibile
 p, r, α

centrifugo
grad. T

forzanti

Trovata σ_r , $\sigma_c = r \frac{d\sigma_c}{dz} + \sigma_c + p w^2 r^2$

Geometria: 1D (r)

Studio delle tensioni: 3D $\{ \sigma_r, \sigma_c, \sigma_z \}$

Stato delle deformazioni: 3D $\{ \epsilon_r, \epsilon_c, \epsilon_z = -\frac{v}{E} (\sigma_r + \sigma_c) \}$

$$x = \frac{r}{r_0} \rightarrow dr = r_0 dx \quad x: \text{raggio adimensionale}$$

$$\frac{d}{dz} \rightarrow \frac{1}{r_0} \frac{d}{dx}; \quad \frac{d}{dr} = \frac{1}{r_0 r} \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d^2 \sigma_c}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d\sigma_c}{dx} + (3+r) p w^2 r^2 + \alpha E \frac{dT}{dx} = 0 \quad \text{Eq. governo + condizioni al contorno}$$

$$\sigma_c = x \frac{d\sigma_c}{dx} + \sigma_c + p w^2 r^2 x^2$$

$$p w^2 r^2 x^2 = \sigma_0 \quad [\sigma_0] = N/m^2$$

Eq. risolvibile per i dischi sottili, di spessore cost., con grad(T)

- 1) FORZE DI SUPERFICIE (p, r, α)
- 2) CAMPO CENTRIFUGO (w)
- 3) GRAD T (dT/dx)

N.B. non sovrapposizione degli effetti

$$\sigma_r(x) \rightarrow \sigma_c(x) \quad \epsilon_c = \frac{\mu}{r_0}$$

$$\frac{1}{x e^2} \frac{d^2 \alpha x}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{1}{x e^2} \frac{d \alpha x}{dx} + (3+x) \rho \omega^2 + \frac{\alpha E}{\pi} \frac{1}{x e} \frac{dT}{dx} = 0$$

$$x^2 e^2 \frac{d^2 \alpha x}{dx^2} + \frac{3}{x} \frac{d \alpha x}{dx} + (3+x) \rho \omega^2 x^2 + \frac{\alpha E}{x} \frac{dT}{dx} = 0$$

meusbarger.com

- imponi $x=1$ e $x=\beta$ e sai già disuguaglianze
- con $\rho \omega^2 = A + \frac{B}{x^2}$ + condizioni che sai trovi A e B
- trovi A e B che sostituisci in $\rho \omega^2 = A + \frac{B}{x^2}$

$$a_c = x \frac{da_c}{dx} + a_n + \rho \omega^2 r x^2$$

$$\frac{da_c}{dx} = \frac{2B}{x^3} - \frac{a_0(3+r)x}{4} \rightarrow a_c = \frac{A+B}{x^2} - \frac{a_0(1+3r)x^2}{8}$$

$$u = \frac{\pi r x}{E} \left[(1-r)A + (1+r)B - \frac{a_0(1-r^2)x^2}{8} \right] \quad u = \pi E \epsilon$$

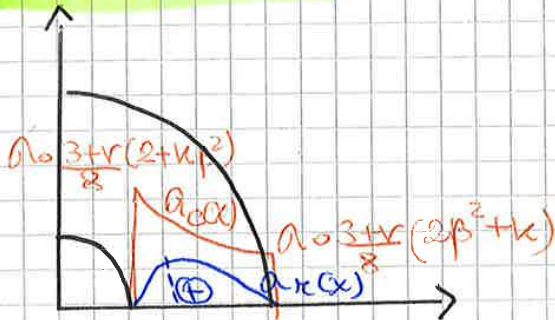
Condizioni al contorno giuste da applicare: Contorno esterno. Voglio studiare solo l'effetto di ω

$$a_r(\beta) = 0$$

$$a_r(1) = 0$$

Solo ω ($\dot{\omega} = 0$) $\left\{ \begin{array}{l} \text{DISCO FORATO} \\ \text{DISCO PIENO} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} a_r(\beta) = 0 \\ a_r(1) = 0 \end{array} \right.$

DISCO FORATO ROTANTE



Di nuovo a_c è $e_a +$ pericolosa, al bordo interno

$$k = \frac{2-2r}{3+r} \quad 0 < k < 1$$

a_r ha un piccolo max in corrispondenza del raggio $x = \beta - 1$. Si vede da $\frac{da_r}{dx} = 0$ non è elevata

$$a_{r \max} = a_0 \frac{3+r}{8} \underbrace{(1-\beta^2)}_{< 1}$$

$$a_1 = a_c$$

$$a_2 = a_r$$

$$a_3 = a_2 = 0$$

$$x = \beta, 1$$

stato 1D

$$x = \beta \quad a_r = 0 \quad A - \frac{B}{\beta^2} - \frac{a_0(3+r)\beta^2}{8} = 0$$

$$x = 1 \quad a_r = 0 \quad A - B - \frac{a_0(3+r)}{8} = 0$$

$$A = \frac{a_0(3+r)}{8} (1+\beta^2) \quad B = \frac{a_0(3+r)\beta^2}{8}$$

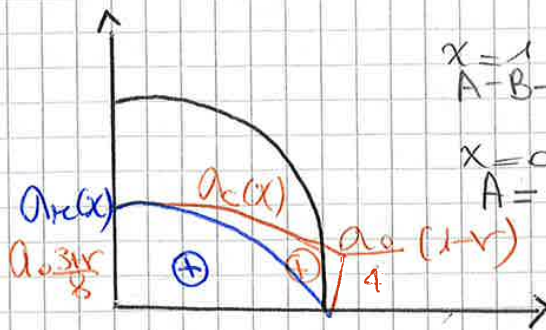
DISCO PIENO

$$B = 0$$

$$a_r(1) = 0$$

$$A = \frac{a_0(3+r)}{8}$$

$$x = 0 \quad a_r = a_c = A$$



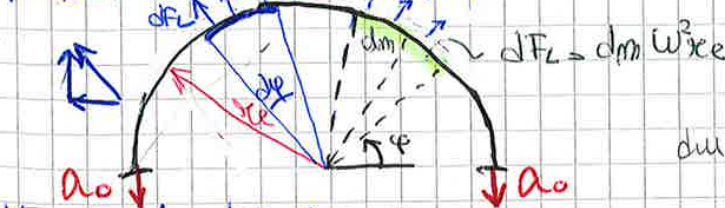
$$x = 1 \quad a_r = 0$$

$$A - B - \frac{a_0(3+r)}{8} = 0$$

$$x = 0 \quad B = 0$$

$$A = \frac{a_0(3+r)}{8}$$

SIGNIFICATO FISICO DI a_0



a_0 : tensione circonferenziale che si genera al ruotare delle anelle a velocità ω

$$dF_c = \rho A r \omega^2 dr$$

$$dF_c = (\rho A r \omega^2 dr)$$

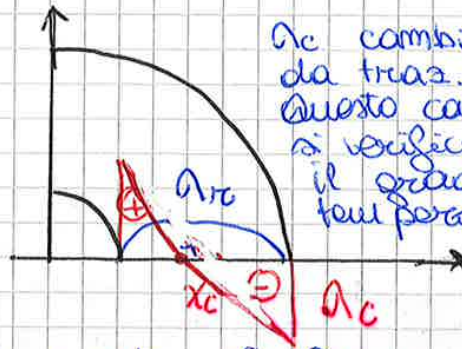
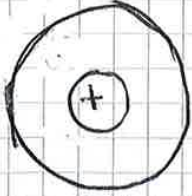
$$F_c = \int_{anello} dF_c = \rho \omega^2 r^2 A \int_0^R dr = 2 \rho \omega^2 A R^2$$

$$a_0 = \rho \omega^2 r^2$$

Troviamo lo spostamento radiale $u(x) = \frac{1}{E} \alpha T (A_1(x) - \nu A_2(x))$
 $u(x) \rightarrow$ questa funziona sempre. Nel caso E del gradiente di temperatura, il comportamento di A_1 e A_2 è un po' diverso.

DISCO FORATO

Solo gradiente termico. Dalle condizioni al contorno troviamo A e B



A_c cambia segno da trazione a compressione. Questo comportamento si verifica solo con il gradiente di temperatura.

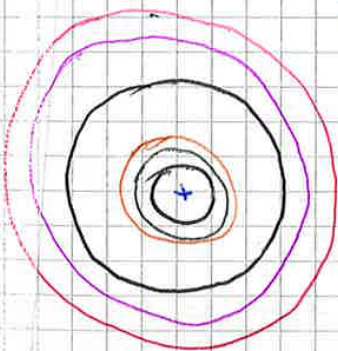
$x = \beta$ trazione 1D

$\beta < x < x_c$ trazione 2D " esiste solo A_r

$x_c < x < 1$ stato misto perché $A_r > 0$ e $A_c < 0$

$x = 1$ compressione 1D $A_r = 0$

T cresce con x (decrease per esempio nei tubi). Se cresce con il raggio, T all'esterno è minore. Consideriamo il disco inalterato (mezzo). Osserviamo il bordo interno e immaginiamo di prendere un anello infinitesimo indipendente da ciò che lo circonda. Esso tende a dilatarsi dal mezzo a verde.

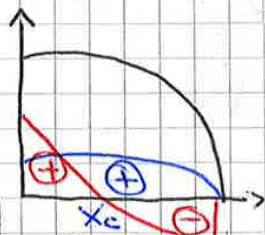


Successivamente la temperatura aumenta ancora e si dilata di più. Il mezzo però è continuo.

- dilataz. per la T
- dilataz. costretta dalla fibra

intorno espande + del davuto e si genera trazione
 esterno meno del davuto, si genera compressione

$A_r(x)$
 $A_c(x)$



CASO DISCO PIENO

$B=0$ $A_r(\beta)=0$
 produce $\Rightarrow A = -C$

$B=0$

$A = -C$

disco pieno $A_c(x) = A + (1+\nu)C/x = C[(1+\nu)x^{-1} - 1] = 0$

$x^i = \frac{1}{1+\nu} \rightarrow x_c = \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}$

ci dice dove si trova per il termine generico di temperatura

abbiamo:

$T = b_0 x^i \rightarrow T = b_0 + b_1 x \rightarrow x_c = \frac{1}{2}$

non conta

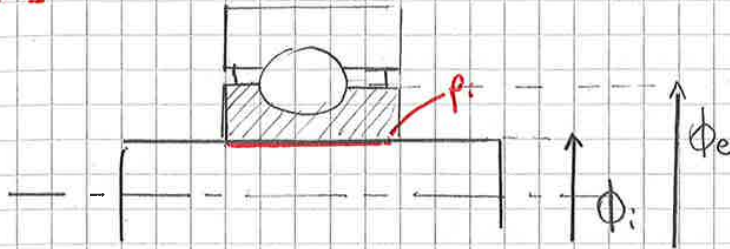
Notiamo muovimenti il cambio di segno di A_c . A differenza del disco forato possiamo trovare x che annulla A_c

23/10/2017

Esercitazione

- α : forzamento mozzo/albero
- β : raso campo centrifugo
- β : $\omega, r_e \rightarrow (\omega, r_e, \rho)$
- S : raso grad T
- E : velocità di inizio plasticizzazione

es. 1



$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,3$
 $u(r = r_i) \downarrow$
 $u(r = r_e) \downarrow ?$
 $x = \frac{r}{r_e}$
 $\phi_i = 45 \text{ mm}$
 $\phi_e = 54,5 \text{ mm}$

h non conta
 $\omega = 0$
 $\frac{dT}{dx} = 0$



$\sigma_r = A - \frac{B}{x^2}$ dall'eq. di equilibrio radiale $\sigma_c = A + \frac{B}{x^2}$

$\beta = \frac{\phi_i}{\phi_e} \approx 0,82$ ($\beta = \frac{r_i}{r_e}$)

$\sigma_r(\beta) = A - \frac{B}{\beta^2} = -p_i \rightarrow A = B = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2}$
 $A = B \approx 28 \text{ MPa}$

$u(\beta) = ?$

$E_r = \frac{du}{dr}$

$E_c = \frac{u}{r}$

ASSIALSIMMETRIA
TORSIONLESS

$u = r E_c = r_e x E_c$

E_c ? deformazioni circonferenziali

Hooke $E_c = \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r)$

TENSIONI
↓
DEFORMAZIONI
↓
HOOKE

$u(x) = r_e x \frac{1}{E} (\sigma_c - \nu \sigma_r) = x \frac{r_e}{E} \left[\left(A + \frac{B}{x^2} \right) - \nu \left(A - \frac{B}{x^2} \right) \right] =$

$= x \frac{r_e}{E} \left[A(1-\nu) + \frac{B}{x^2} (1+\nu) \right]$

$A = B = p_i \frac{\beta^2}{1-\beta^2} > 0$

$x = \beta \rightarrow u(\beta) = 8,18 \mu\text{m}$

$$\beta = \frac{\phi_i}{\phi_e} \rightarrow \beta = \frac{\phi_i}{\phi_c} = \frac{1}{4}$$

La parte dopo ϕ_c diventa un'unica corona di acciaio
 l'attoria che rimuovo e considero solo il suo effetto
 centrifugo

dF_c

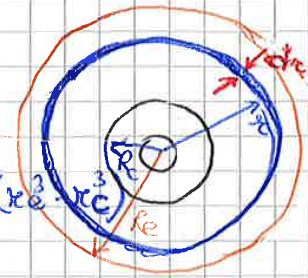
$$t_e = \frac{\int dF_c}{\underbrace{2\pi r_c h}_{\substack{\text{area su} \\ \text{cui agisce} \\ \text{il tiro} \\ \text{centrifugo}}}} = \frac{\int dF_c}{2\pi r_c h}$$



$$dF_c = dm \omega^2 r_c \rightarrow dF_c = [\rho dV] \omega^2 r_c$$

$$dF_c = \rho (2\pi r_c dr) h \omega^2 r_c = 2\pi \rho h \omega^2 r_c^2 dr$$

$$F_c = \int_{r_c}^{r_e} dF_c = 2\pi \rho h \omega^2 \int_{r_c}^{r_e} r_c^2 dr = 2\pi \rho h \omega^2 \frac{1}{3} (r_e^3 - r_c^3)$$



$$t_e = \frac{F_c}{\underbrace{2\pi r_c h}_{\substack{\uparrow \\ r_c}}} = \frac{\rho \omega^2 (r_e^3 - r_c^3)}{3 r_c}$$

Non è il caso di separare le sorgenti, imporre subito
 le condizioni al contorno

$$a_r = A - \frac{B}{r^2} - \rho_0 \frac{3+r}{8} r^2$$

$$a_r \left(\beta = \frac{\phi_i}{\phi_c} \right) = 0 \quad a_r(r) = t_e > 0$$

$$B = \rho_0 \frac{3+r}{8} \beta^2 + \frac{\beta^2}{1-\beta^2} t_e = B_w + B_{te}$$

$A, B > 0$ sempre!

$$A = \rho_0 \frac{3+r}{8} (1+\beta^2) + \frac{t_e}{1-\beta^2} = A_w + A_{te}$$

$$\rho_0 = \rho \omega^2 r_c^2$$

$$a_c \left(\beta = \frac{\phi_i}{\phi_c} \right) \sim 141 \text{ MPa}$$

con $a_r(\beta) \neq 0 = \rho_i$ in acciaio

$$A = A_w + A_{te} + A_{\rho_i}$$

$$B = B_w + B_{te} + B_{\rho_i}$$

$$a_c \left(\beta = \frac{\phi_i}{\phi_c} \right) \sim 158 \text{ MPa vs } 141 \text{ MPa}$$

$$A_{id} = A_1 - A_3 \begin{cases} \beta: A_c - (-p_i) = A_c + p_i \\ \alpha: \sigma_c - A_c \end{cases}$$

$$|A_c|_{grad T} > A_c > 0 \rightarrow$$

es. 4

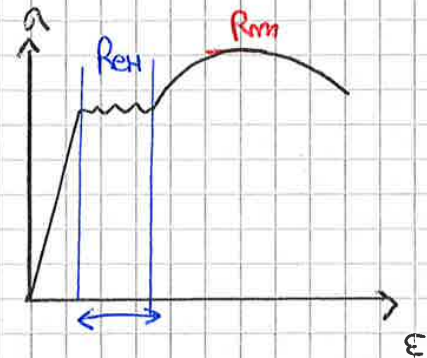
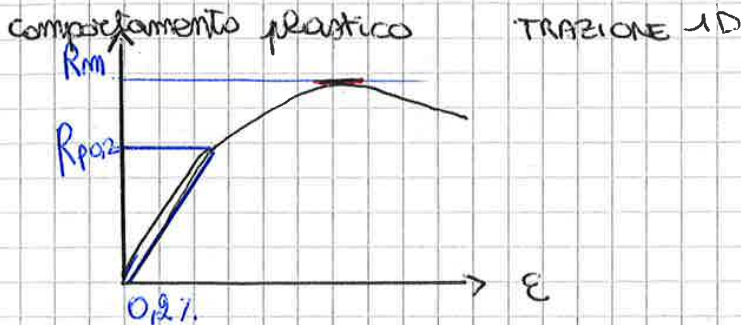
DISCO FORATO
 $\phi_i = 100 \text{ mm}$
 $\phi_e = 500 \text{ mm}$
 $h = 50 \text{ mm}$

- 1) $w_{ip} = ?$
velocità ideale plasticizz.
- 2) resistenza a $w = 2 \cdot 10^4 \text{ eppm}$

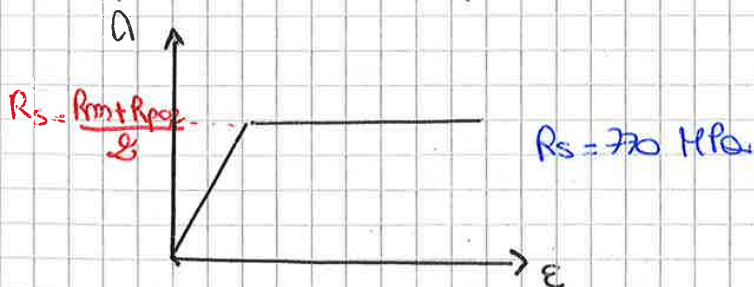
MATERIALE ($R_m = 905 \text{ MPa}$ $R_{p0.2} = 635 \text{ MPa}$ $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 $\nu = 0,3$ $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$)

$$A_c(\beta) = 0$$

$$A_c(\alpha) = 0$$



comportamento elastoplastico ideale



R_s : carico limite

$$w_{ip} \Rightarrow A_{id} = R_s$$

Visto che c'è solo w , il punto + pericoloso è $\alpha = \beta$
 a sezione \rightarrow bordo interno + pericoloso di quello esterno

$$w_{ip} \Rightarrow A_{id}(\beta) = R_s$$

$$A_c(x) = A + \frac{B}{x^2} - A_0 \frac{1+\nu}{8} x^2$$

$$A_c(x) = A - \frac{B}{x^2} - A_0 \frac{3+\nu}{8} x^2$$

$$\sigma_{id}(\beta) = \sigma_c(\beta) + p_i$$

$$\sigma_{id}(\beta) = R_s$$

$$w_{ip} = \sqrt{\frac{R_s - p_i \frac{2}{1-\beta^2}}{\rho \pi e^2}} \sqrt{\frac{-d}{(3+r) + \beta^2(1-r)}}$$

$$(w_{ip})_{\sigma_{\pi}(\beta) = -p_i} < (w_{ip})_{\sigma_{\pi}(\beta) = 0}$$

$$\sigma_{\pi}(1) = 0$$

Ogni sorgente ulteriore peggiora

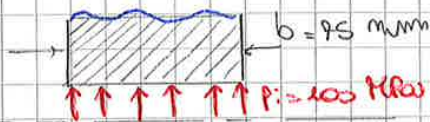
25/10/2017

Es 6

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_c) \right] = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_c)$$

Given: $E = 1.1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$ $\nu = 0,25$

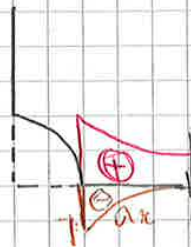
$$\sigma_c(\beta) = \frac{p_i}{\beta^2}$$



A forzamento trasversale
 $w=0$ $\frac{dI}{dx} = 0$

$$S = -0,04 \text{ mm}$$

$$\begin{cases} \sigma_x = A - B/x^2 \\ \sigma_c = A + B/x^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \sigma_x(\beta) = A - \frac{B}{\beta^2} = -p_i \\ \sigma_x(1) = A - B = 0 \end{cases}$$

$\epsilon_z = \begin{cases} S/b \text{ dato del problema} \\ -\frac{\nu}{E} 2A \end{cases}$

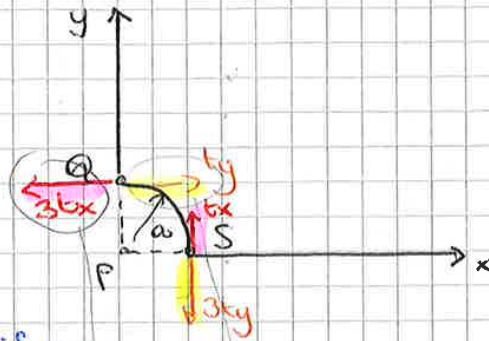
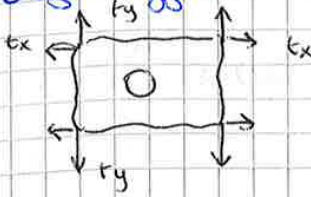
$$A = -\frac{\nu E}{2br} > 0 \text{ perche } S < 0 \quad A = B \approx 117 \text{ MPa}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{A}{A+p_i}} = 0,734$$

$$\sigma_c(\beta) = A \left(1 + \frac{1}{\beta^2} \right) = 334 \text{ MPa}$$

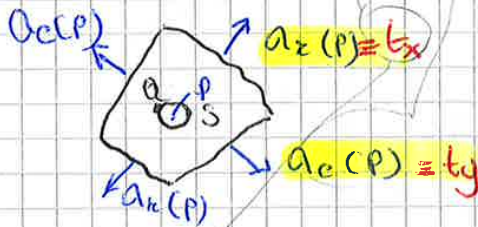
In relazione ho $\sigma_0 = \rho \omega^2 r^2$ quindi devo avere informazioni sulle dimensioni radiali

In un disco forato abbiamo sia t_x sia $t_y \rightarrow$ sovrapposizione degli effetti



Anche dove foro verificano

In un disco abbiamo $\sigma_x(P)$ e $\sigma_c(P)$ note. Queste corrispondono a t_x e t_y e' come se "immergessimo" il foro nei campi di tensione di $\sigma_x(P)$ e $\sigma_c(P)$
 Metodo delle sezioni. Metto azioni della parte che rimuovo (disco) a quello che resta (foro)



Foro praticato nel disco

Pto Q: $3\sigma_x(P) - \sigma_c(P) = \sigma_{x,MAX}$

Pto S: $3\sigma_c(P) - \sigma_x(P) = \sigma_{c,MAX}$

Pto Q: $\{ \sigma_{x,MAX}; \sigma_z=0; \sigma_c=0 \}$ TRAZ 1D / COMP

Pto S: $\{ \sigma_{c,MAX}; \sigma_z=0; \sigma_x=0 \}$ TRAZ / COMP 1D
↑ e' radiale
 ↑ S si può spostare in senso radiale

$\sigma_{id}(B) \leftarrow$ DISCO PRIVO DI FORI / INTAGLI

$\sigma_{id} < \begin{cases} |\sigma_{x,MAX}| \\ |\sigma_{c,MAX}| \end{cases}$

30/10/2017

$P(a_x, a_c)$

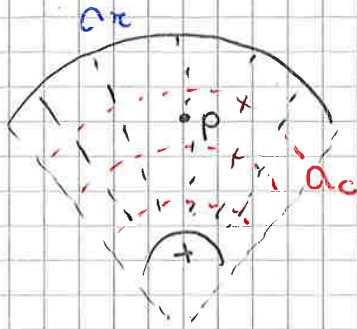
foro piccolo in confronto al centro del disco

$$Q(a_{xMAX}, a_c = 0, a_z = 0)$$

$$S(a_x = 0, a_{cMAX}, a_z = 0)$$

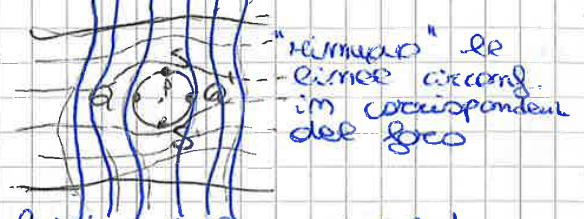
$$a_{xMAX} = 3a_x(P) - a_c(P)$$

$$a_{cMAX} = 3a_c(P) - a_x(P)$$

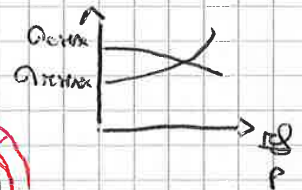
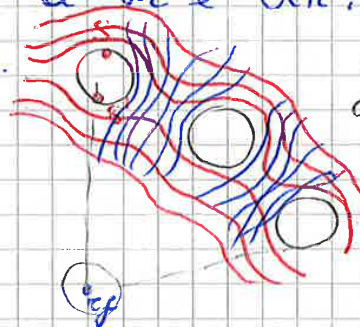


Facendo il foro taglie delle linee di flusso che deviano il loro percorso. Localmente si ha un disturbo

su S-S' non esiste teorica meridiana



Se abbiamo una schiera di fori cosa succede rispetto a foro isolato a a_c e a_x ?
 Due taglie vicini hanno l'effetto di alleggerimento. La radiale aumenta, la circonferenziale diminuisce sintomo dei gregoci

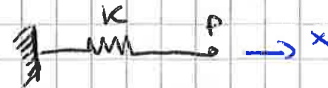
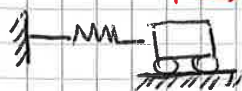


Calcolo matrice delle strutture

Numero finito di gradi di libertà

Sistemi continui \rightarrow DISCRETI

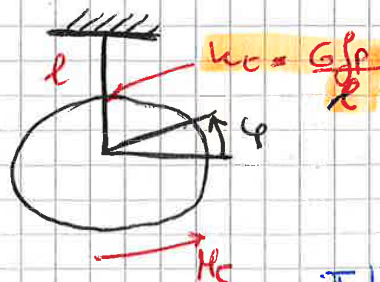
Eq. STATICO A UN GRADO DI LIBERTA'



$$F = kx$$

$$\varphi, M_t$$

$$M_t = k_t \varphi$$

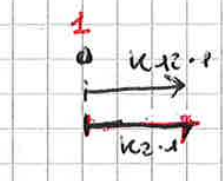
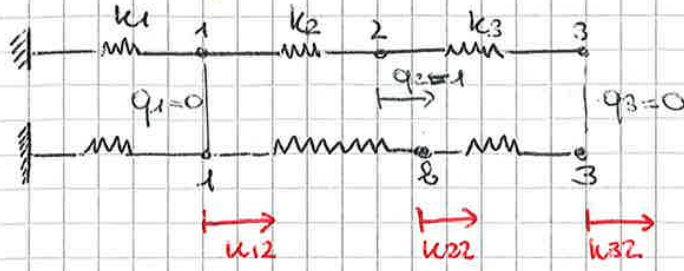


momento di inerzia polare

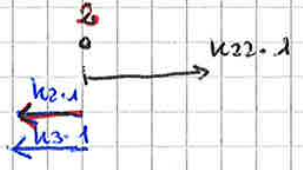
$$J_p = \frac{\pi d^4}{32} + \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$

k_{i2}

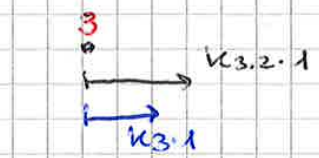
$q_2 = 1 \quad q_1, q_3 = 0$



$k_{12} = -k_2$



$k_{22} = k_2 + k_3$



$k_{32} = -k_3$

LA MATRICE DI RIGIDEZZA È

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix}$$

[K]

Una matrice di rigidità generale è una matrice simmetrica di dimensioni $N \times N$ (pari cioè al grado di libertà del sistema)

Si può ricavare la matrice di flessibilità

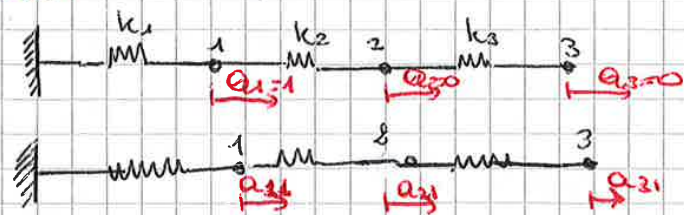
$$\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Potrebbero esistere sistemi per cui a_{ij} non esiste

a_{ij} = COEFF. DI FLESSIBILITÀ

a_{ij} = spostamento generalizzato in corrispondenza di $Q_j = 1$, $Q_e = 0$ e $e \neq j$

a_{i1}



$a_{11} = \frac{Q_1}{k_1} = \frac{1}{k_1}$

$\begin{cases} a_{21} = \frac{1}{k_1} \\ a_{31} = \frac{1}{k_1} \end{cases}$

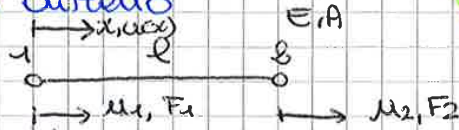
→ sono lo stesso spostamento

Si ha un movimento rigido (moto rigido) senza avere carichi applicati

Matrici di rigidezza di modelli monodimensionali

TRAZIONE/COMPRESSIONE/TORSIONE

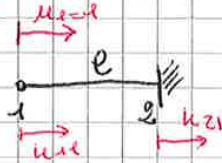
$k_{ij} \rightarrow$ metodo diretto



ASTA

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$k_{i1} : u_1 = 1, u_2 = 0$



spostamento δ

$$\delta = \frac{Pl}{EA} \rightarrow \delta = 1 \rightarrow \frac{P}{\delta} = \frac{EA}{l}$$

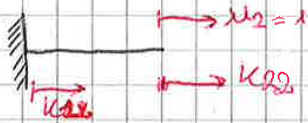
$$k_{11} = \frac{EA}{l}$$

$$k_{21} = -\frac{EA}{l}$$

ASTA

La somma deve fare 0 perché sistema in equilibrio

$k_{i2} : u_2 = 1, u_1 = 0$



$$k_{22} = \frac{EA}{l}$$

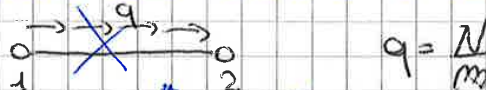
$$k_{12} = -\frac{EA}{l}$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$\det [K] = 0$ deve essere sempre verificato

consideriamo i carichi di volume e termici

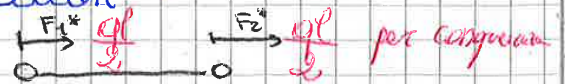
CARICHI VOLUME



$$q = \frac{N}{m}$$

si traducono in carichi F_1^* e F_2^* come vettori ai nodi. Sono sistemi equivalenti: sono in equilibrio e si traducono in congruenza di carichi.

EQUILIBRIO $\rightarrow F_1^* + F_2^* = ql$
 CONGRUENZA $\rightarrow (\Delta u)q = (\Delta u)^*$



$$E\epsilon = \frac{du}{dx} \quad E\epsilon = \frac{\Delta x}{l} = \frac{N}{EA}$$

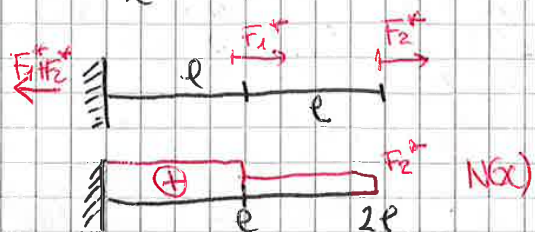
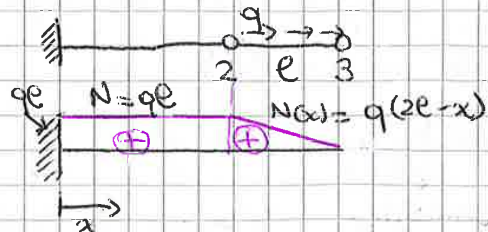
$$(\Delta u)_{2-3} = ?$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA}$$

$$\Delta u_{2-3} = \int_l \frac{q(2l-x)}{EA} dx = \frac{ql^2}{2EA}$$

$$\frac{ql^2}{2EA} = \frac{F_2^* l}{EA} \leftarrow \int_l \frac{F_2^*}{EA} dx$$

CONGRUENZA $\rightarrow F_2^* = \frac{ql}{2} \quad F_1^* = \frac{ql}{2}$



6/11/2017

TRAVE

Trave → solo flessione

Solido di S. vincolato che lavora solo a flessione.

Abbiamo 2 gradi di libertà per nodo: spostamenti trasversali (e rispettive forze) e le rotazioni: (momenti)



Separiamo i comportamenti per ogni matrice semplice. Non ci sono componenti assiali perché già incluse nell'asta.

Scelezioni divise per nodo

$U_1, F_1 \equiv q_1, Q_1$ $U_2, F_2 \equiv q_3, Q_3$
 $\theta_1, M_1 \equiv q_2, Q_2$ $\theta_2, M_2 \equiv q_4, Q_4$

spostamenti, Forze positive verso l'alto e momenti, angoli positivi se antiorari

$$\begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots \\ k_{31} & k_{32} & \dots \\ k_{41} & k_{42} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{NODO 1} \\ \text{NODO 2} \end{matrix}$$

k_{i1} : $q_1=1, q_e=0, e \neq 1$ DEFINIZIONE

$k_{11} = [N/m] = k_{31}$ mettiamo in relazione una forza Q_1 con uno spostamento q_1
 $k_{21} = [Nm/cm] = k_{41}$ mettiamo in collegamento un momento (Q_2) a uno spostamento

k_{i2} : $q_2=1, (\theta_1=1), q_e=0, e \neq 2$

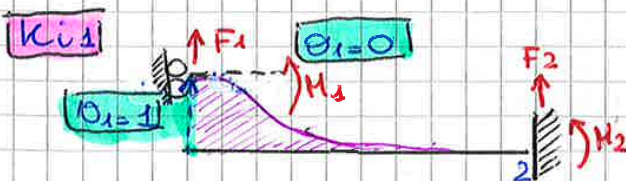
$k_{12} = \left[\frac{N}{rad} \right] = k_{32}$
 $k_{22} = \left[\frac{Nm}{rad} \right] = k_{42}$

Finché si possono combinare forze e momenti si parla di forze e spostamenti generalizzati

1° colonna $F_1 = k_{11} \cdot 1$ $F_2 = k_{31} \cdot 1$

$M_1 = k_{21} \cdot 1$ $M_2 = k_{41} \cdot 1$

considero questa corrispondenza

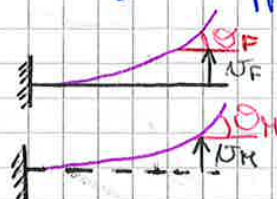
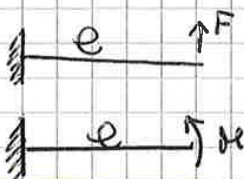


Aggiungo un incastro mobile in 1 (incastro → tangente orizzontale)

Per trave con due vincoli impongo:

- 1) EQUILIBRIO
 - 2) CONGRUENZA
- compatibilità forze
compatibilità spostamenti

Dalla teoria delle travi sappiamo che



$U_F = \frac{Fe^3}{2EJ}$

$U_H = \frac{Fe^3}{3EJ}$

$\theta_H = \frac{Me}{EJ}$

$\theta_F = \frac{Me^2}{2EJ}$

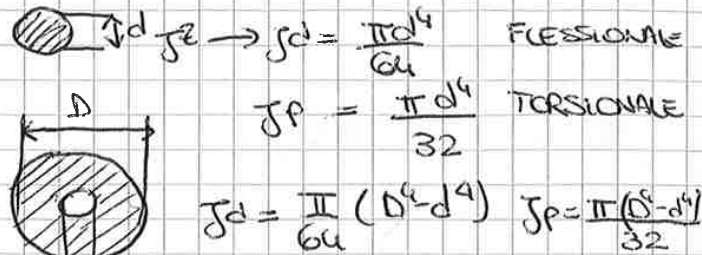
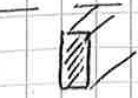
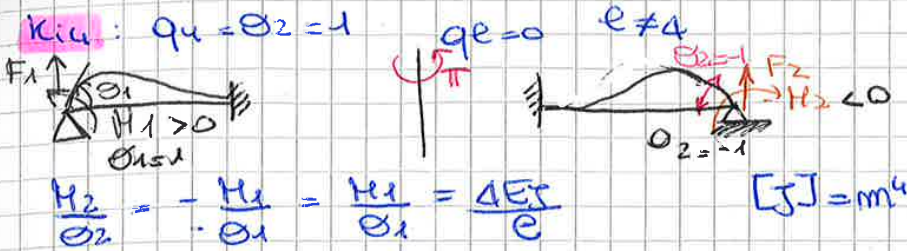
1) EQUILIBRIO

$F_1 + F_2 = 0$
 $M_2 + M_1 - F_1 e = 0$

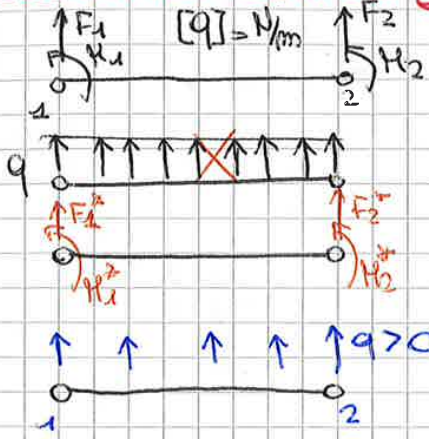
2) CONGRUENZA

$U_1 = \frac{F_1 e^3}{3EJ} - \frac{M_1 e^2}{2EJ} = 0$

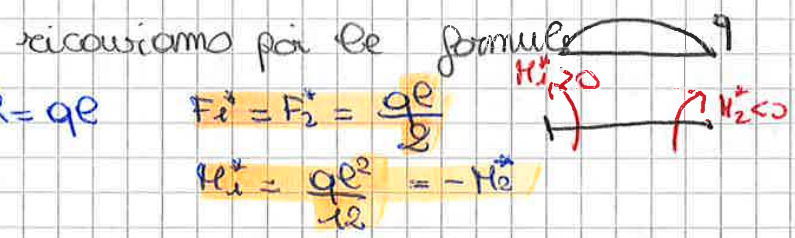
$\theta_1 = -\frac{F_1 e^2}{2EJ} + \frac{M_1 e}{EJ} = 0$



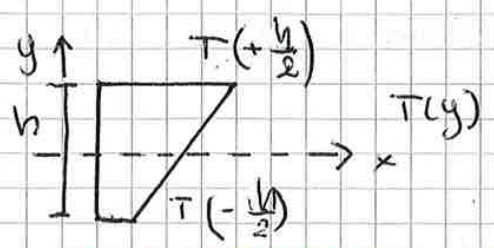
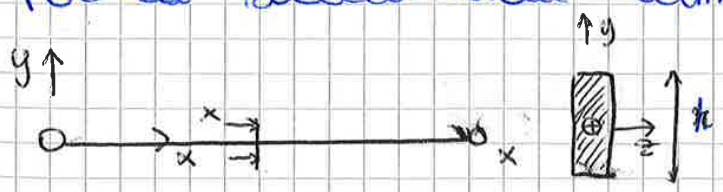
VETTORI DEI CARICHI NODALI EQUIVALENTI



Elemento trave carico uniformemente distribuito

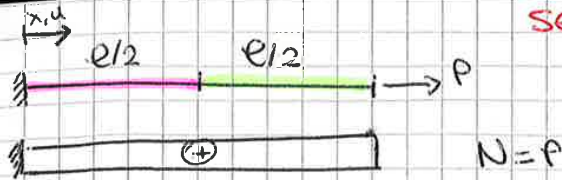


Per la sollecitazione termica



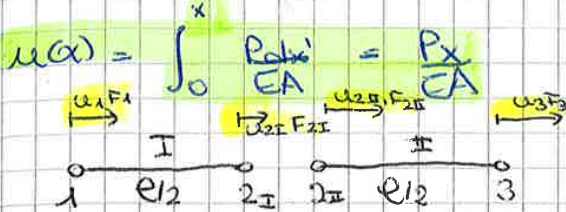
$T(y) = [T_m, \Delta T]$
 composizione valore medio e scarto rispetto alla media

$T_m = \frac{1}{2} \left[T\left(-\frac{h}{2}\right) + T\left(\frac{h}{2}\right) \right]$ $\Delta T = \frac{1}{2} \left[T\left(\frac{h}{2}\right) - T\left(-\frac{h}{2}\right) \right]$



serie di due elementi cost.

$$E_x = \frac{du}{dx} \rightarrow \frac{de}{dx} = \frac{\Delta x}{e} = \frac{P}{EA} = \text{cost} \quad E_x = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

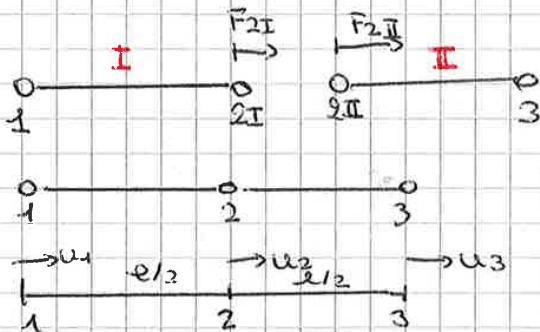


Struttura in equilibrio per i 2 elementi

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_{2I} \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2I} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}_I \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_{2I} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2II} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2II} \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{32} & k_{33} \\ k_{23} & k_{33} \end{bmatrix}_{II} \begin{Bmatrix} u_{2II} \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Per equilibrio e congruenza anche per continuità $\rightarrow u_{2I} = u_{2II} = u_2$



$$\rightarrow F_{2I} + F_{2II} = F_2 = \begin{cases} Q \\ \emptyset \end{cases}$$

LABILE \rightarrow attivo $\omega [K]_{3 \times 3}$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$F_{2I} + F_{2II} = F_2 = \begin{cases} Q \\ \emptyset \end{cases}$$

$$F_1 = k_{11} u_1 + k_{12} u_2$$

$$F_{2I} = k_{21} u_1 + (k_{22})_I u_2$$

$$F_{2II} = (k_{22})_{II} u_2 + k_{23} u_3$$

$$F_3 = k_{32} u_2 + k_{33} u_3$$

$$F_{2I} + F_{2II} = F_2 = k_{21} u_1 + k_{23} u_3 + \underbrace{[(k_{22})_I + (k_{22})_{II}]}_{\frac{2EA}{e} (1+1)} u_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \frac{2EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

quando eq. dei due elementi separati

scorciamento lungo diagonale



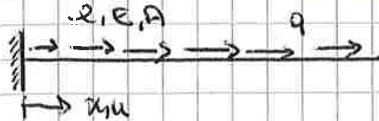
risultato assemblaggio

nomina algebrica di k_{ij} egale in comune

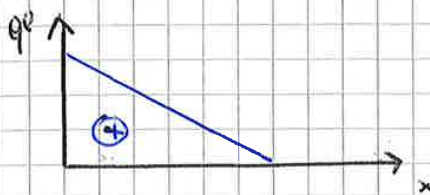
CONGRUENZA $U_{2I} = U_{2II}$, $\theta_{2I}, \theta_{2II}$
 EQUILIBRIO $F_{2I} + F_{2II} = F_2$ $\left\{ \begin{array}{l} a \neq 0 \\ \phi \\ c \neq 0 \\ 0 \end{array} \right.$
 $M_{2I} + M_{2II} = M_2$ $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ 0 \end{array} \right.$
 Σ algebrica dei k_{ij}

8/11/2017

In presenza di forza di volume: è un sistema assiale quindi è un carico uniformemente distribuito. È tutto noto: l, E, A, q



$[q] = Nm^{-1}$
 $N(x) = q(l-x)$



andamento tensione lungo barra

$\sigma_x = \frac{N(x)}{A}$

Punto di partenza

$E\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{1}{E} N(x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{N(x)}{EA} \rightarrow u(l) = \int_0^l \frac{N(x)}{EA} dx = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA}$

Abbiamo anche $u(x)$ o coordinata generica

• 1 elemento ASTA, carico di volume

$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

la somma dei carichi dà $\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ spostamento carichi nodali equivalenti

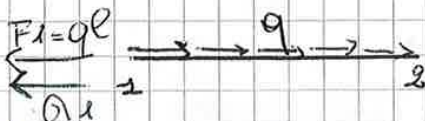
q non c'è perché non ho carichi concentrati
 no che $u_1=0$ e $F_2=0$
 NOTI $u_1=0, F_2=0$

$\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{ql}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \end{Bmatrix}$ ricavo

$\frac{ql}{2} = \frac{EA}{l} u_2 \rightarrow u_2 = \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA}$

$F_1 + \frac{ql}{2} = \frac{EA}{l} \left(-\frac{1}{2} \frac{ql^2}{EA} \right) \rightarrow F_1 = -ql$

Per le tensioni so $\sigma_1 = \frac{F_1}{A} = -\frac{ql}{A}$ $\sigma_2 = \frac{F_2}{A} = 0$



Teoria: aggiungere nodi per ricavare informazioni. Divido la barra in 2 elementi, stesso carico



VINCOLI

Considero rigidità dei cuscinetti, rappresentazione comoda. In realtà questi vincoli possono essere sostituiti con molla perché non sono proprio rigidi. Considero vincolo elastico nella matrice di rigidità. Oppure scopo diverso: inserisco molla per aumentare la rigidità



Se ho vincoli esterni elastici e li devo inserire nella k della trave

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6e \\ -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

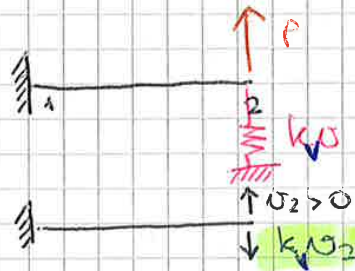
incastrato vero, v_1 e θ_1 metto a zero e elimino le corrispondenti componenti

Non c'è braccio di momento, $M_2 = 0$ mentre $F_2 = P$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6e \\ -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

ricavo $v_2 = \frac{1}{3} \frac{Pe^3}{EJ}$ $\theta_2 = \frac{Pe^2}{2EJ}$

Aggiungo m $\frac{1}{3} \frac{Pe^3}{EJ}$



La molla si oppone sempre al movimento

$$\vec{F} = -k_v \cdot \vec{v}$$

Nel modo 2 $P - k_v v_2$
 $F_2 = P$
 $F_2 = P - k_v v_2$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_v & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6e \\ -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EJ}{e^3} \begin{bmatrix} 12 + \frac{k_v e^3}{EJ} & -6e \\ -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Aggiungo rigidità in corrispondenza del grado di libertà v_2 . Se ho anche molla torsionale

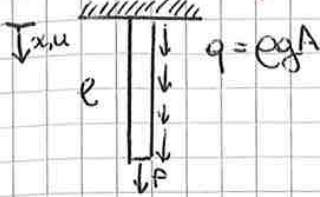


$$[k_\theta] = \frac{Nm}{rad} \quad [k_v] = \frac{N}{m}$$

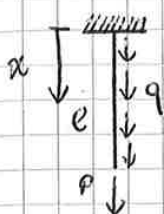
$$\begin{bmatrix} 12 + \frac{k_v e^3}{EJ} & -6e \\ -6e & 4e^2 + \frac{k_\theta e^3}{EJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

13/11/2017

Esercizio in più

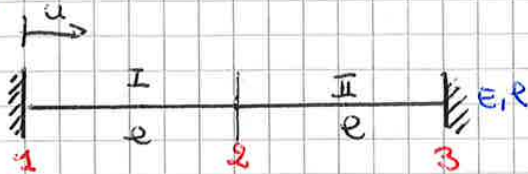


- 1) un elemento
- 2) due elementi



Soluzione $N(x) = P + q(e-x)$
 $\sigma(x) = \frac{N(x)}{A}$ $\epsilon(x) = \frac{\sigma(x)}{E} = \frac{N(x)}{EA} \Rightarrow u(x)$ } "soluzione esatta"

es 2



$A_I = 2A_{II} = 20 \text{ mm}^2$ $u?$
 $\Delta T = \text{cost}$ $R?$
 $e = 100 \text{ mm}$ $\sigma?$
 $E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$
 $\alpha = 12 \cdot 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$

Elemento I

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + EA_I \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA_I}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

Elemento II

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} + EA_{II} \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{EA_{II}}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblaggio

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} + E \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -A_I \\ A_I - A_{II} \\ A_{II} \end{Bmatrix} = \frac{E}{e} \begin{bmatrix} A_I & -A_I & 0 \\ -A_I & A_I + A_{II} & -A_{II} \\ 0 & -A_{II} & A_{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$u_1 = 0$
 $u_3 = 0$
 $\Delta T = \text{cost}$

metto da parte ciò che riguarda il vincolo rigido $F_2 = 0 \rightarrow$ non ci sono carichi

$$E \alpha \Delta T (A_I - A_{II}) = \frac{E}{e} [A_I + A_{II}] u_2 \rightarrow u_2 = \alpha \Delta T e \frac{A_I - A_{II}}{A_I + A_{II}} = 0,2 \text{ mm}$$

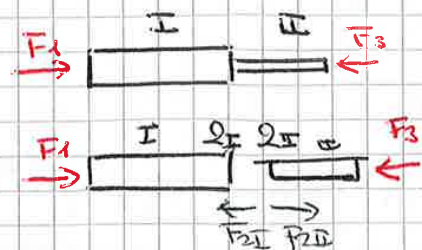
Se $A_I = A_{II} \rightarrow u_2 = 0$

Reazioni vincolari

$$F_1 = EA_I \alpha \Delta T - \frac{EA_I}{e} u_2 = 16000 \text{ N}$$

$$F_3 = -EA_{II} \alpha \Delta T - \frac{EA_{II}}{e} u_2 = -16000 \text{ N}$$

dalle eq. dei due elementi



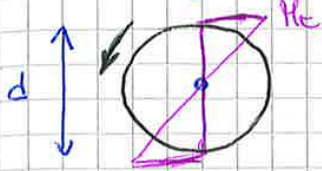
Ricerca di tensioni max e min e ρ_a II. Sono max e min, rotaz. (torsioni) uguali in I e II $\rightarrow F_{im II} = 0$
 spostamenti uguali

Eqs. locali

I $M_1 = -\frac{GJ\theta}{e} \varphi_2 = -M_e$
 $M_{2I} = \frac{GJ\theta}{e} \varphi_2 = M_e$

II $M_{2II} = 0$ $M_{3II} = 0$

III $M_{3III} = M_e$ $M_4 = -M_e$



$\tau(x) = \frac{M_e x}{J\rho}$

$\tau_{MAX} = \frac{M_e}{W_t}$

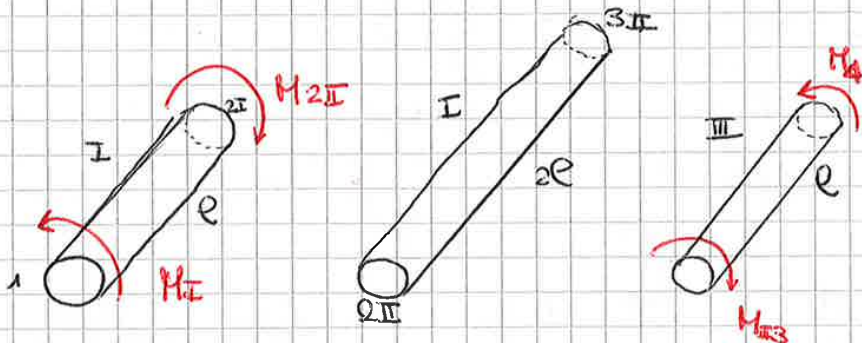
$W_t \rightarrow$ modulo resistenza a torsione

$W_t = \frac{J\rho}{\frac{d}{2}}$

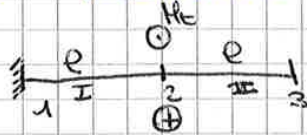
elemento I $\tau_{1,MAX} = \frac{M_e}{W_t} = -\frac{M_e}{W_t}$
 $\tau_{2I,MAX} = \frac{M_e}{W_t}$

elemento II $\tau_{2II,MAX} = \tau_{2III,MAX} = 0$

elemento III $\tau_{3III,MAX} = \frac{M_e}{W_t}$ $\tau_{4,MAX} = -\frac{M_e}{W_t}$



Potero anche analizzarlo in un altro modo: è simmetrico rispetto alle mezzecce anche rispetto ai momenti torcenti



Soluzione U_2, θ_2

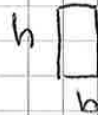
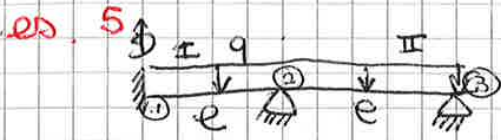
$$U_2 = \frac{3 q e}{8 k + k_0} < 0 \quad \text{sempre perché } q < 0$$

$$\theta_2 = \frac{3 U_2}{2 e} - \frac{q}{48 k} = \frac{q}{16} \frac{24 k - k_0}{3 k (3 k + k_0)}$$

$$k_0 = \frac{3 q e}{8 U_2} - 3 k$$

$$q = -10^5 \text{ Nm} \rightarrow \text{poor convenzione}$$

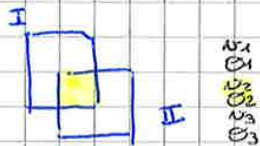
LABILE
ISOSTATICO
IPERSTATICO



Posso usare
-q da subito
oppure sostituire
numero con -

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_{2I} \\ M_{2I} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qe/2 \\ qe^2/12 \\ +qe/2 \\ -qe^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{E I_1}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6e & -12 & 6e \\ 6e & 4e^2 & -6e & 2e^2 \\ -12 & -6e & 24 & 0 \\ 6e & 2e^2 & 0 & 8e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{2II} \\ M_{2II} \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qe/2 \\ qe^2/12 \\ qe/2 \\ -qe^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{E I_2}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6e & -12 & 6e \\ 6e & 4e^2 & -6e & 2e^2 \\ -12 & -6e & 24 & 0 \\ 6e & 2e^2 & 0 & 8e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} qe/2 \\ qe^2/12 \\ qe \\ 0 \\ qe/2 \\ -qe^2/12 \end{Bmatrix} = \frac{E I_2}{e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6e & -12 & 6e & 0 & 0 \\ 6e & 4e^2 & -6e & 2e^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6e & 24 & 0 & -12 & 6e \\ 6e & 2e^2 & 0 & 8e^2 & -6e & 2e^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6e & 12 & -6e \\ 0 & 0 & 6e & 2e^2 & -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \theta_1 \\ U_2 \\ \theta_2 \\ U_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$U_1 = \theta_1 = 0 \quad U_2 = 0 \quad U_3 = 0$ 1, 2, 3, 5 righe / colonne

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -qe^2 \\ -\frac{qe^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{E I_2}{e^3} \begin{bmatrix} 8e^2 & 2e^2 \\ 2e^2 & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad M_2 = M_3 = 0$$

$$\theta_2 = \frac{qe^3}{16 E I_2} \quad \theta_3 = -\theta_2 \quad q = -600 \text{ N/m}$$

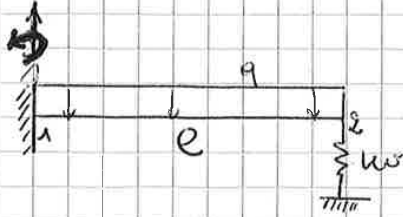
REAZIONI VINCOLARI
dalla [K] assemblata
6x6

$$F_1 = \frac{13}{28} qe \quad F_2 = \frac{8}{7} qe$$

$$M_1 = \frac{qe^2}{14} \quad F_3 = \frac{11}{28} qe$$

15/11/2017

es. 4



$k_w?$

$|v_2| \leq |v_2|_{lim}$



- $e = 1 \text{ m}$
- $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Nm}^2$
- $a = 40 \text{ mm}$
- $q = 10^6 \text{ N/m}$
- $q = -10^6 \text{ N/m}$

$$\begin{Bmatrix} qe/2 \\ -qe^2/12 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 12 + \frac{k_w}{k} & -6e \\ -6e & 4e^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

verifica con $k_w = 0$

$$k = \frac{ES}{e^3} = \frac{E a^4}{e^3 \cdot 12} \approx 13 \cdot 10^3 \text{ Nm}^{-1}$$

$$v_2 = \frac{1}{8} \frac{qe}{k} \quad \theta_2 = \frac{1}{6} \frac{q}{k}$$

$$|v_2| \leq |v_2|_{lim} = 15 \text{ mm}$$

$$k_w \approx 1,22 \cdot 10^5 \text{ N/m}$$

es. 6



$\begin{cases} \circ \text{ uso } -q \\ \circ \text{ } 2e \end{cases}$

$$k = \frac{ES}{e^3}$$

$$\text{I: } \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_{2I} \\ M_{2I} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qe \\ -qe^2/3 \\ -qe \\ qe^2/3 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} \frac{k-ES}{(2e)^3} \\ \frac{ES}{e^3} \cdot \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$\text{II: } \begin{Bmatrix} F_{2II} \\ M_{2II} \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

Assemblaggio

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{27}{2} k & \frac{9}{2} k e \\ \frac{9}{2} k e & 6 k e^2 + k_w \end{bmatrix}$$

$$M_3 = -k_w v_2$$

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qe \\ -qe^2/3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$F_1 = \frac{3}{2} k (-v_2 + \theta_2 e) + qe = 6,65 \text{ N}$$

$$M_1 = k \left(-\frac{3}{2} e v_2 + e^2 \theta_2 \right) + \frac{qe^2}{3} = 1,52 \text{ Nm}$$

Dopo l'impostazione dei vincoli rigidi

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ H_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -qe/2 \\ qe^2/12 \end{Bmatrix} + \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8e^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

*7 effetto
termini 0
su u_2, θ_2*

diagonale

$$\begin{Bmatrix} -qe/2 \\ qe^2/12 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 24 & 0 \\ 0 & 8e^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

$$u_2 = - \frac{qe^4}{48EJ}$$

$$\theta_2 = \frac{qe^3}{96EJ}$$

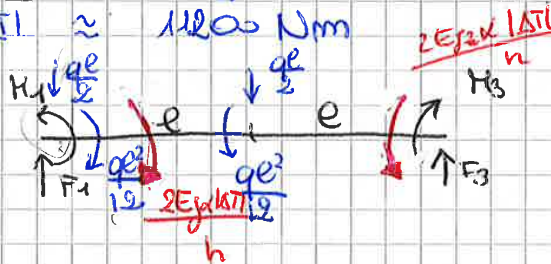
$$F_1 = \frac{13}{16} qe$$

$$M_1 = \frac{11}{48} qe^2 + \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h}$$

$$F_3 = \frac{5}{16} qe$$

$$M_3 = -\frac{5}{48} qe^2 - \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h}$$

$$\frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h} \approx 11200 \text{ Nm}$$



$$\uparrow F_1 + F_3 = qe$$

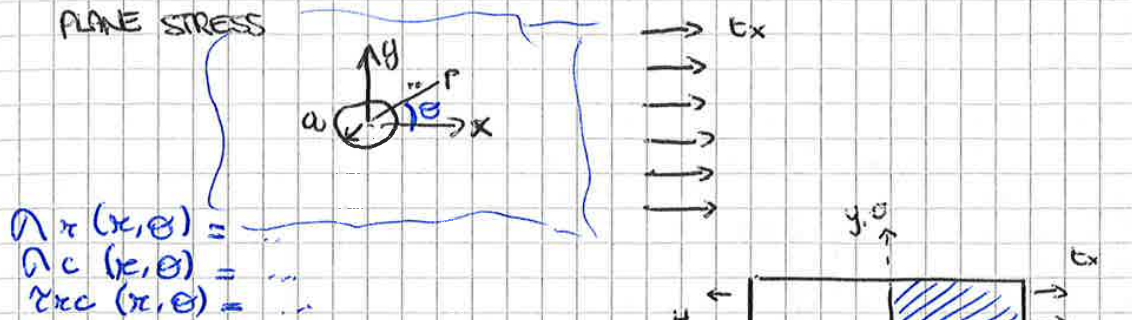
$$1) \left(\frac{qe^2}{12} - \frac{qe^2}{12} \right) + \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h} (1-1) + M_1 - M_3 + F_3 2e - \frac{qe}{2} e = 0$$

$$\left(\frac{11}{48} qe^2 + \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h} \right) - \left(\frac{5}{48} qe^2 + \frac{2EJ\alpha|\Delta T|}{h} \right) = 0$$

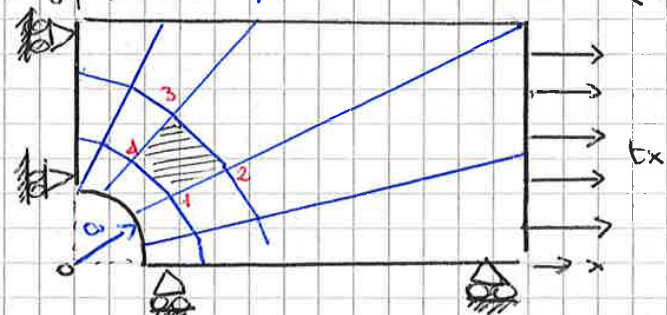
*moduli,
verso sia
nella freccia*

TH. TRAVI → PCMS
 $k_{ij} \rightarrow [k]$ metodo diretto
 funziona solo per elementi 1D
 ASTA → tracc./comp., torsione
 B.E. → flessione
 Si può estendere questa teoria?

mezzo infinitamente esteso

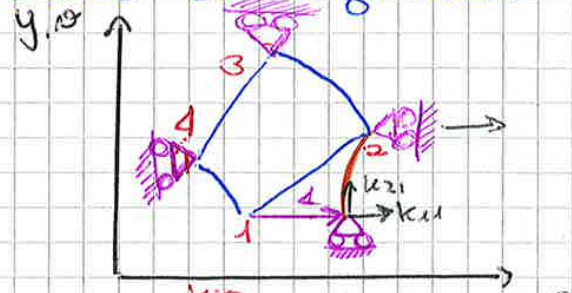


Prendiamo una piastra vera



Ogni elemento è una sorta di "tessera bidimens." che lavora in stato di tensione pura

Posso prendere questo elemento e scriverne la matrice di rigidità?



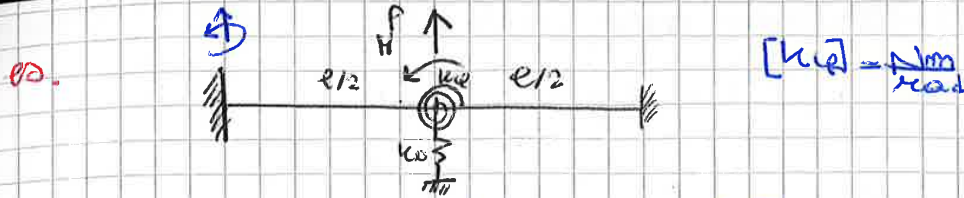
$N = 4$ no modi
 $g \rightarrow$ gradi di libertà per modo
 $g = 2$

k sarà una matrice $[k] = 8 \times 8$ che è la matrice dell'elemento

$$\begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

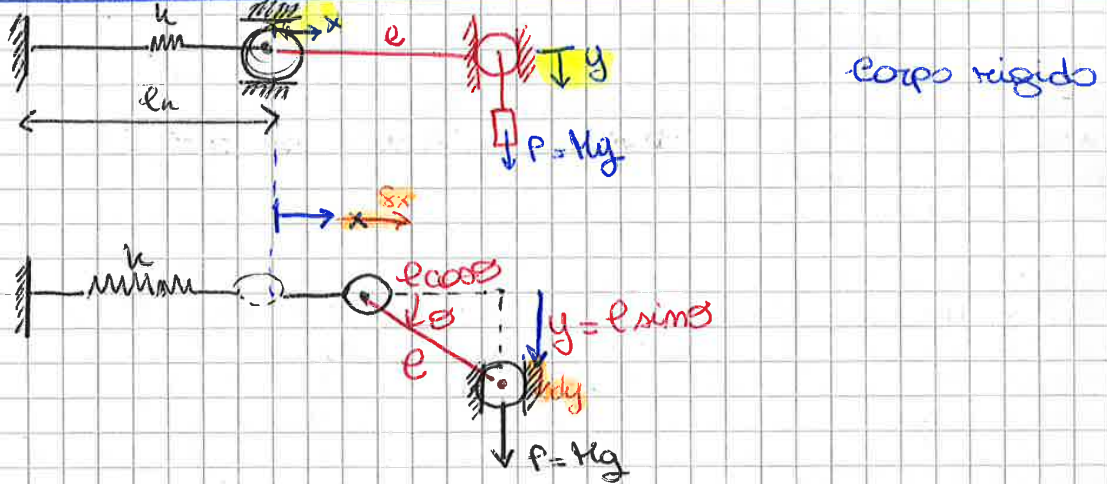
8×8

Posso calcolare i coeff. della prima colonna $u_1=1$ e scrivere meglio altri modi.
 Vorrei calcolare k_{11}, k_{21}
 Ogni colonna ci dà zero \rightarrow ora si vede subito (-1 e 1) mentre la trave ha unità di misura diverse e non si vede ad occhio (bi segno) forze eq. moment.). Il modo si deve fare equisost.



$$\begin{bmatrix} 24k + k_0 & 0 \\ 0 & 8ke^2 + k_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix}$$

- Δ_2, φ_2
- $\Delta_{2I}, \Delta_{2II}$
- reazioni: tutte
- equilibrio corpo libero



$$x = e(1 - \cos \theta)$$

$$y = e \sin \theta$$

$\delta \mathcal{L}_{int} = 0 \rightarrow \delta \mathcal{L}_{ext} = 0$
 impongo spostamenti virtuali δx e δy
 $F_{ext} = m g \downarrow, P$

$$\delta \mathcal{L}_{ext} = -kx \delta x + P \delta y$$

$$\delta x = \delta [e(1 - \cos \theta)] = -e(-\sin \theta) \delta \theta$$

$$\delta y = e \delta (\sin \theta) = e \cos \theta \delta \theta$$

virtù che è spost. virtuale non mette la regola derivazione ma lascio $\delta \theta$

$$\delta \mathcal{L}_{ext} = -ke(1 - \cos \theta)e \sin \theta \delta \theta + Mge \cos \theta \delta \theta = 0$$

$$\delta \theta [Mge \cos \theta - ke^2 \sin \theta (1 - \cos \theta)] = 0$$

$$Mg \cos \theta = ke \sin \theta (1 - \cos \theta)$$

$$\frac{Mg}{ke} = \tan \theta (1 - \cos \theta)$$

equazione di equilibrio del sistema

$\delta \theta \neq 0$ perché sto imponendo lo spostamento virtuale e $\theta(\cdot)$ che è zero

Risolvendo si trova $\theta_0 \rightarrow$ angolo statico

SCHEMA GENERALE

- ① $\{f(x,y,z)\} \rightarrow$ NOTO
- ↓ cinematiche deformazioni
- ② $\{E(x,y,z)\}$ NOTO
- ↓ Hooke
- ③ $\{a(x,y,z)\}$

se spostamenti noti \rightarrow tutto viene in successione, $\int + \text{cost}$
 Ma io non conosco f , fingo omdamento polinomiale e vado avanti. Kompolo e uso risultati noti.

Omdamento polinomiale $\{N(x,y,z)\}$ unico approssimativo, il resto è rigoroso

②

$$E_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$E_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

$h = 3$

campo delle deformazioni ha h componenti

$$\begin{matrix} h \times 1 & & h \times 2 & & h \times 1 \\ \{E(x,y,z)\} & = & [D] & \{f(x,y,z)\} & = \end{matrix}$$

espressione rigorosa, e meno rigorosa quando sostituisco a $f(x,y,z) \rightarrow N(x,y,z)$ cioè l'omdamento polinomiale

per e' asta $h=1$

$$E_x = \frac{du}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{e} & \frac{1}{e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N(x,y,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B(x,y,z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_N \end{Bmatrix}$$

③

$$\begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{a(x,y,z)\} = [D] \{E(x,y,z)\}$$

Se c'è componente termica ottengo $\{a(x,y,z)\} = [D] \{E(x,y,z) - \epsilon_T(x,y,z)\}$
 (deriva da)

$$E_x = \frac{1}{E} \alpha_x + \alpha \Delta T$$

↑
elastica termica

$$\alpha_x = E E_x - E (\alpha \Delta T)$$

Hooke al contrario

per e' asta $[D] = E : \alpha_x = E (E_x - \alpha \Delta T)$

Si possono ricavare in funzione degli spostamenti moda e

$$\begin{aligned} \{g(x,y,z)\} &= \{N(x,y,z)\} \{g_N\} \\ \{E(x,y,z)\} &= \{B(x,y,z)\} \{g_N\} \\ \{a(x,y,z)\} &= [D] \{E(x,y,z)\} \{g_N\} \end{aligned}$$

$$\{F\} = \int_0^e A dx \begin{Bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{Bmatrix} E (\alpha \Delta T) = EA \alpha \Delta T \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$[k] = \int_0^e A dx \begin{Bmatrix} -1/e \\ 1/e \end{Bmatrix} E \begin{Bmatrix} 1/e & -1/e \\ -1/e & 1/e \end{Bmatrix} = \frac{EA}{e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$

elementi finiti meccanici "membranae"
 1D: ASTA
 2D: ELEMENTI PIANI
 3D: ELEMENTI SOLIDI

1D: TRAVE
 2D: PIASTRA
 3D: GUSCI

buoni esercizi per capire questo gruppo

Trave



$N=2$
 $q=2$
 $\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$
 $\varphi(x) = \frac{du}{dx}$

grado di libertà discretizzati

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$$

$$\varphi(x) = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$$

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

$[\Phi(x)]$

$$[\Phi_N] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & e & e^2 & e^3 \\ 0 & 1 & 2e & 3e^2 \end{bmatrix} \rightarrow [\Phi_N]^{-1} \text{ nota } 4 \times 4$$

$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} = [\Phi(x)] [\Phi_N]^{-1} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = [N(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$[N(x)] = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) & N_3(x) & N_4(x) \\ N_1'(x) & N_2'(x) & N_3'(x) & N_4'(x) \end{bmatrix}$$

derivate perché derivano da $\varphi(x)$

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{e^2} + \frac{2x^3}{e^3} \leftarrow \text{adimensionale}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \leftarrow \text{No}$$

$$N_3(x) = \frac{3x^2}{e^2} - \frac{2x^3}{e^3} \leftarrow \text{adimensionale}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{e} + \frac{x^3}{e^2} \leftarrow \text{No}$$

per fare tornare adimensionale

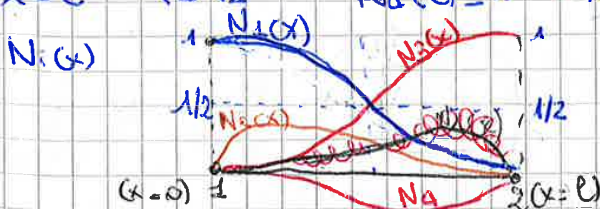
$$\begin{Bmatrix} u(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

$$u(x) = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 \varphi_1 + N_4 \varphi_2$$

$$\varphi(x) = \frac{du}{dx} = N_1' u_1 + N_2' u_2 + N_3' \varphi_1 + N_4' \varphi_2$$

unica garanzia di spessa. ciò da contributo

$x=0$ $u=u_1$ $N_1(0)=1$ $N_2(0)=N_3(0)=N_4(0)=0$
 $x=e$ $u=u_2$ $N_3(e)=1$ $N_1(e)=N_2(e)=N_4(e)=0$
 $x=0$ $\varphi=\varphi_1$ $N_2'(0)=1$ $N_1'(0)=N_3'(0)=N_4'(0)=0$
 $x=e$ $\varphi=\varphi_2$ $N_4'(e)=1$ $N_1'(e)=N_2'(e)=N_3'(e)=0$



funzioni associate a spostamenti

\rightarrow si può fare anche per derivate

disegno sbagliato di N_4 e $N_3 \rightarrow$ antisimmetriche

$\sigma_x = E \epsilon_x$ 1D legge di Hooke

$\int \sigma_x dA = F_x$
 $\epsilon_x = \frac{1}{E} \frac{d^2 u}{dx^2}$ relazione che ci serve

$\{u\} = [D] \{\epsilon\}$ abbiamo trovato che $[D] = E \frac{1}{E}$ scalare

RICHIAMO
 $\frac{1}{E} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2}$

TRAVE $h=1$ $\theta \leftrightarrow \varphi$ equiva

$\{\epsilon\} \rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = [B(x)] \{D\}$
 $[B(x)] = [N_1'' \ N_2'' \ N_3'' \ N_4'']$ 1×4

deformazione sull'elemento visto come curvatures per vettore spostamento modale

$[B(x)] = [N_1''(x) \ N_2''(x) \ N_3''(x) \ N_4''(x)]$

$[D] = E \frac{1}{E}$

$[N(x)] = \begin{bmatrix} N_1(x) & \dots & N_4(x) \\ N_1'(x) & \dots & N_4'(x) \end{bmatrix}$

→ bisogna riconoscere N, D, B di qualsiasi elemento finito

$[k] = \int_V dV [B(x, y, z)]^T [D] [B(x, y, z)]$

TRAVE: $\int_0^l dx \begin{bmatrix} N_1''(x) \\ N_2''(x) \\ N_3''(x) \\ N_4''(x) \end{bmatrix} E \frac{1}{E} [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)]$
 $= \frac{E}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6e & \dots \\ 6e & 4e & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{4 \times 4}$

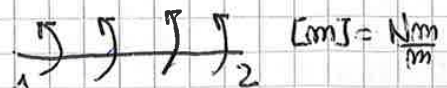
non integro più sul volume, pezzo già fatto (\int_A) questo vale in generale, se provi o fai i calcoli trovi 4×4

Carichi di volume

$\{F_q\} = \int_V dV [N(x, y, z)]^T \{q(x, y, z)\}$

$\{q(x, y, z)\} = \{q\} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix}$

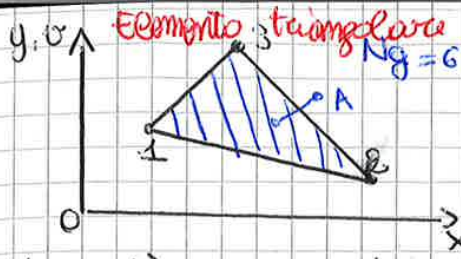
per noi è zero momento distribuito



in teoria, da verificare

$\{F_q\} = \int_0^l A dx \begin{bmatrix} N_1(x) & N_1(x) \\ \vdots & \vdots \\ N_4(x) & N_4(x) \end{bmatrix} \frac{1}{A} \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \{F_q\} = \begin{bmatrix} ql \\ ql/2 \\ ql/2 \\ -ql/2 \end{bmatrix}$

se $m \neq 0$ uso colonne derivate



$$\{f_N\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad 6 \times 1$$

Non c'è un grado di libertà privilegiato, divide le 6 possibilità in modo equo. Parto dal grado minore

$$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x,y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [\Phi(x,y,z)] \{\alpha\}$$

Binomio facile per ogni modo

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\alpha\} = [\Phi_N]^{-1} \{f_N\}$$

$$\begin{Bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \underbrace{[\Phi(x,y)]}_{N(x,y)} \underbrace{[\Phi_N]^{-1}}_{6 \times 6} \underbrace{\{f_N\}}_{6 \times 1}$$

prende per buona $[\Phi_N]^{-1}$

$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) & 0 \\ 0 & N_1(x,y) & 0 & N_2(x,y) & 0 & N_3(x,y) \end{bmatrix}$$

$$N_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2A}$$

A: area triangolo

regola permutazionale

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j \quad b_i = y_j - y_k \quad c_i = x_k - x_j$$

$$i \rightarrow N_i \quad \begin{matrix} i=1 \\ j=2 \\ k=3 \end{matrix}$$

$$N_1(x,y) ?$$

$$a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2 \quad [a_i] = m^2$$

$$b_1 = y_2 - y_3 \quad [b_i] = [c_i] = m$$

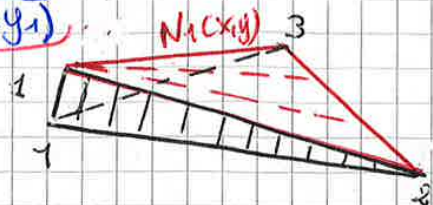
$$c_1 = x_3 - x_2$$

$$N_1(x,y) = \frac{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y}{(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_1 y_2 - x_2 y_1)}$$

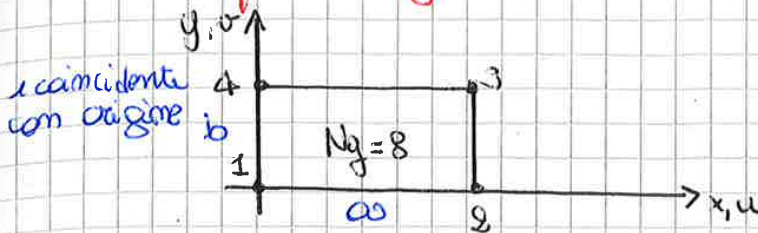
$$N_1(x_1, y_1) = 1$$

$$N_1(x_2, y_2) = N_1(x_3, y_3) = 0$$

$$N_i(x_i, y_i) = \delta_{i,e}$$



Elemento quadrangolare



$$\begin{aligned} \text{DOF } 1 &= 4 \\ \text{DOF } 2 &= 8 \\ \text{DOF } 3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned}$$

o₈ dipende da x e y

$$[B(x,y)] = [\partial] [N(x,y)]$$

$$[B(x,y)]_{4 \times 8} \neq [B]_{3 \times 8}$$

$$[D]_{4 \times 8} = [D]_{3 \times 8}$$

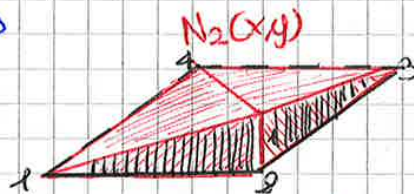
$$[N(x,y)] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

$$N_1(x,y) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad N_i(x,y) = \delta_{i,j}$$

$$N_2(x,y) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right)$$

$$N_3 = \frac{xy}{ab} \quad N_4 = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} N_2(a,0) &= 1 \\ N_2(0,0) &= N_2(a,b) = N_2(0,b) = 0 \end{aligned}$$



a) ISOTROPIA GEOMETRICA
 Non privilegio un asse rispetto a un altro, sono uguali

b) ISOTROPIA rispetto al campo degli spostamenti u come v sono trattati uguali

$$[B(x,y)] = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} y-b & 0 & -(y-b) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & -(x-a) \\ x-a & y-b & -x & -(y-b) & x & y & -(x-a) & y \end{bmatrix}$$

$$[\partial] [N(x,y)]$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B(x,y)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$$

γ_{xy} : lineare sia in x sia in y

ϵ_x : lineare in y, costante in x

ϵ_y : lineare in x, costante in y

"Condizione di saldatura"
 Sul lato in comune non ci devono essere distacchi o
 compenetrazioni.



1) MOTI RIGIDI
 STATICA (abile)
 DINAMICA: moto rigido associato a frequenze nulla $\lambda^2 = 0$
 staticas \rightarrow la parte in estremità è
 oggetto di moto rigido, si
 sposta anche se non ha q

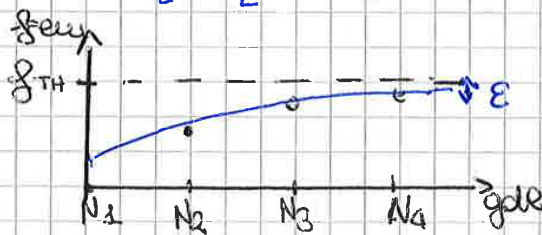
2) $E_x = \text{cost}$ $E_y = \text{cost}$ $\gamma_{xy} = \text{cost}$ per la convergenza del metodo
 h convergenza \rightarrow aumento elementi e me diminuisce
 dimensione caratteristiche



- 1) δ_1
- 2) δ_2
- 3) δ_3
- 4) ancora + δ fino a una
 variazione infinitesima

δ_{FEH} $\frac{b}{L}, \frac{h}{L} \ll 1$

$\delta_{TH} = \frac{PE^3}{3EJ}$



Cosa ci aspettiamo

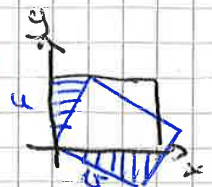
Nella teoria delle travi $y(x)$ non è lineare (cubica)
 iteroadisco il sistema, spostamenti + piccoli
 tendono dal basso degli spostamenti
 Costingo a deformare secondo una rete di polinomi
 sempre + piccoli

Nella dinamica andamento delle altre, andamento
 duale. $\lambda^2 = \kappa/m$
 spostamento polinomiale di grado basso

VERIFICO COMPLETEZZA



$u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$
 $v(x,y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy$
 componente costante α_1, α_5 \rightarrow moto rigido
 componente lineare $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_6, \alpha_7$ \rightarrow campo x, campo y



Condizioni di deform. costanti : $E_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_2 + \alpha_4 y$

$E_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha_7 + \alpha_8 x$

$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = (\alpha_3 + \alpha_4 x) + (\alpha_6 + \alpha_8 y)$

Verificati E_x, E_y, γ_{xy} anche per Δ perché Δ^r ha α_4 e α_8

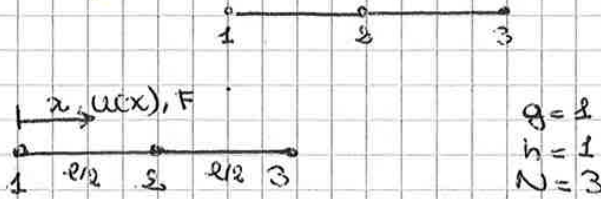
4/12/2017

Elementi di ordine superiore (p-convergenza)

$$\{g(x, y, z)\} = \underbrace{[N(x, y, z)]}_{\text{polinomi}} \{g_n\}$$

La struttura si comporta come composizione di polinomi; ho un irrigimento e per questo ho convergenza dal basso. Per la frequenza auto ω di quelle vere per rendere meno rigido il sistema devo passare ad elementi di ordine superiore (funzioni di grado di ordine + elevato)

(1D): elemento di rinforzo è l'asta a 3 nodi (trazione, compressione, torsione)



Posso usare 3 parametri che attribuisco all'unico spostamento presente. Si scrive la formulazione generale per tutti i nodi.

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = \underbrace{[1 \ x \ x^2]}_{[\Phi(x,y,z)]} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & e/2 & e^2/4 \\ 1 & e & e^2 \end{bmatrix}}_{[\Phi_N]} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

sostituisco $x=0$
 $x=e/2$
 $x=e$

$$\{\alpha\} = [\Phi_N]^{-1} \{u_n\} \rightarrow u(x) = \underbrace{[\Phi(x)]}_{1 \times 3} \underbrace{[\Phi_N]^{-1}}_{3 \times 3} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

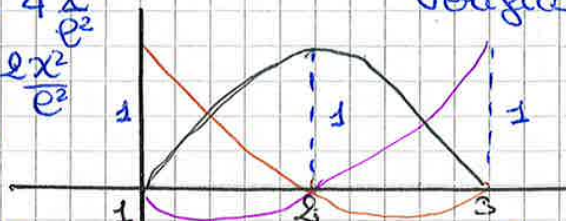
$$u(x) = [N(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Auto nuove funzioni di forma, non ho più andamento lineare che avevo con l'elemento a 2 nodi

$$[N(x)] = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x)]$$

- $N_1(x) = 1 - 3 \frac{x}{e} + 2 \frac{x^2}{e^2}$
 - $N_2(x) = 4 \frac{x}{e} - 4 \frac{x^2}{e^2}$
 - $N_3(x) = -\frac{x}{e} + \frac{x^2}{e^2}$
- Integrale di $N_1(x)$

Per l'elemento i-esimo vale $N_i(x_k) = \delta_{i,k}$
verifico $1 \equiv (0)$
 $2 \equiv (e/2)$
 $3 \equiv (e)$



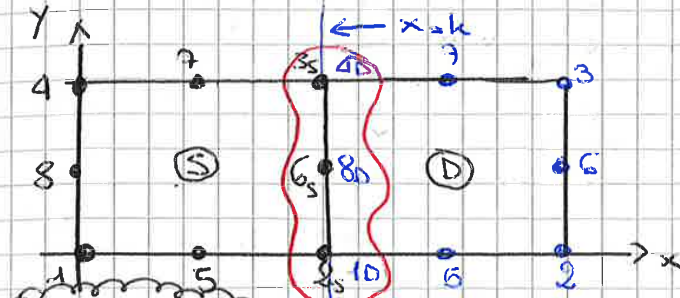
Ho meno elementi per arrivare a convergenza nel caso di elementi di ordine superiore

come 4 nodi

$$\begin{cases} u(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 \\ v(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10} x + \alpha_{11} y + \alpha_{12} x^2 + \alpha_{13} xy + \alpha_{14} y^2 + \alpha_{15} x^2 y + \alpha_{16} xy^2 \end{cases}$$

3 requisiti da soddisfare sono:

- COMPLETEZZA: nodi rigidi, deformaz. costante → soddisfatta, come 4 nodi piccoli per il livello + base
- COMPATIBILITÀ: sull'elemento, tra elementi adiacenti → da verificare
- abbiamo polinomi sempre c'è



U → prova

$$u(x=k, y) = (\alpha_9 + \alpha_{10}k + \alpha_{12}k^2) + (\alpha_{11} + \alpha_{13}k + \alpha_{15}k^2)y + (\alpha_{14} + \alpha_{16}k)y^2$$

→ $A + By + Cy^2$

$x=k$

$$\begin{aligned} U_{25} &= U_{10} \\ U_{65} &= U_{8D} \\ U_{75} &= U_{4D} \end{aligned}$$

Ok. Sul lato in comune sia u sia v sono univocamente definiti

Se avessi scelto x^3 e y^3 nella verifica tra elementi adiacenti

$$u(x,y) = \alpha_9 + \alpha_{10}x + \alpha_{11}y + \alpha_{12}x^2 + \alpha_{13}xy + \alpha_{14}y^2 + \alpha_{15}x^3 + \alpha_{16}y^3$$

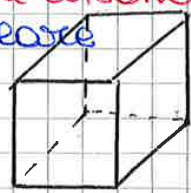
$$u(x,y) = (\alpha_9 + \alpha_{10}k + \alpha_{12}k^2 + \alpha_{15}k^3) + (\alpha_{11} + \alpha_{13}k)y + \alpha_{14}y^2 + \alpha_{16}y^3$$

→ $u(x=k, y) = A' + B'y + C'y^2 + Dy^3$

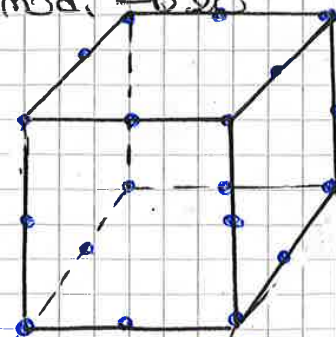
$u(k, y)$ dipende da 4 costanti → andamento cubico, non è compatibile

3D

lineare



ordine superiore, ogni faccia ha 8 nodi → 20



Serendipity (senza punto in mezzo)

Se sono dei limiti non devono essere presenti elementi troppo distanti. Per elementi nel piano la forma di riferimento è il quadrato; che punto di vista della fessura quali distorsioni sono accettate?

• Rapporto base/altezza rettangolo



$\frac{H}{L} \leq \frac{1}{8}$ regioni interne
 $\frac{H}{L} \leq \frac{1}{10}$ regioni distanti