



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2284A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Venezia

**MATERIA: Elettromagnetismo Applicato - Appunti - Riassunti -
Esercizi - Prof. Tartaglia - Freschi**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

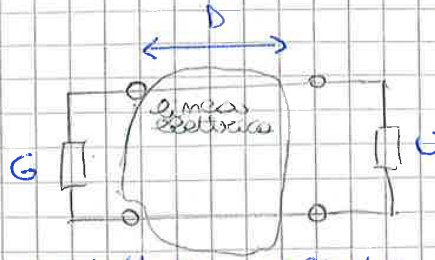
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

3/10/2019

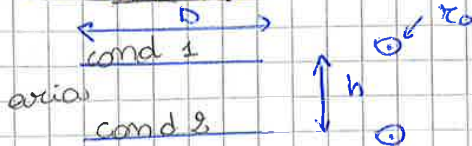
Linee elettriche

Generatore, utilizzatore e collegamento tra di essi.

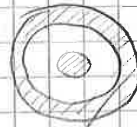


Linea elettrica: coppia di conduttori, cilindri con assi concentrici distanti h . Un altro parametro è D . Conduttori separati dal mezzo isolante.

LINEA AEREA

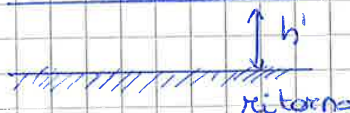


CAVO COASSIALE

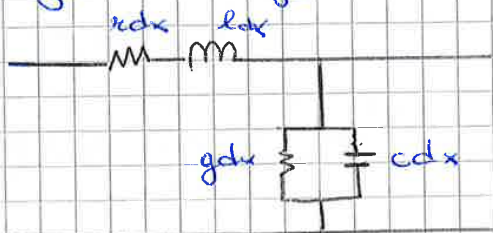


D : lunghezza linea

CONDUTTORE E TERRENO



CASO MONODIMENSIONALE: regime qualsiasi. Noi consideriamo porzioni di linea dx , tratto elementare rappresentato da bipolo passivo dove avvengono i fenomeni.



r	$\frac{\Omega}{m}$	$\frac{\Omega}{km}$
l	H/m	
$1/r \rightarrow g$	S/m	
c	F/m	

Tutte grandezze per unità di lunghezza

r, l, g, c indipendenti da coordinata longitudinale, lungo la linea i parametri sono costanti



Le grandezze caratteristiche sono i e v che dipendono da x e dal tempo.

$$v(x, t) \quad i(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r g v + (\pi c + l g) \frac{\partial v}{\partial t} + l c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

Facendo lo stesso cosa per i travi

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = \pi g i + (\pi c + l g) \frac{\partial i}{\partial t} + l c \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Per risolverlo?

Assegnare condizioni iniziali $v(x,0), i(x,0)$ $0 \leq x \leq D$
 e le condizioni al contorno $\begin{cases} v(x=0,t) \\ i(x=0,t) \end{cases}$

ρ CONDUCTANZA \rightarrow corrente che attraversa isolanti, perdite nel materiale dielettrico
 Studio delle equazioni in regime qualunque e nel regime periodico (sinusoidale)

REGIME QUALUNQUE
 linee senza perdite \rightarrow aumento principale
 non distorcenti qualsiasi
 \rightarrow troppo complesso, non affrontarlo

linee senza perdite: per ipotesi $r=0, g=0$

$$(1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = l c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$(2) \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = l c \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Le soluzioni sono della forma $v = F(x-at)$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = F'$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''$$

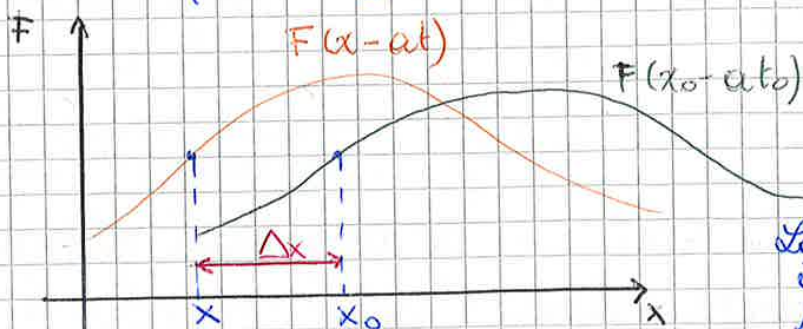
$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a F'$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 F''$$

ostituendo (1) $F'' = a^2 l c F''$ $a^2 l c = 1$ $a = \pm \frac{1}{\sqrt{l c}}$

dimensionalmente a è una velocità (di propagazione)

Rappresentare questa funzione, cambio t



La curva trasce immutata di una quantità pari ad a

$$\Delta x = a \Delta t$$

$$a = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Linee non distorcibili lineare che associamo ad un andamento
 di attenuazione esponenziale

$$v = e^{-\beta x} F(x-at) \quad i = e^{-\beta x} G(x-at)$$

Questa è una ipotesi; queste linee esistono; bisogna calcolare a e β .
 Assegnata questa soluzione, bisogna verificare che otteniamo risultati significativi.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= -\beta e^{-\beta x} F + e^{-\beta x} F' \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \beta^2 e^{-\beta x} F - 2\beta e^{-\beta x} F' + e^{-\beta x} F'' \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= e^{-\beta x} (-a) F' \\ -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= -ae^{-\beta x} (-a) F'' = a^2 e^{-\beta x} F'' \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = r g v + (\pi c + l g) \frac{\partial v}{\partial t} + l c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\beta^2 e^{-\beta x} F - 2\beta e^{-\beta x} F' + e^{-\beta x} F'' = r g e^{-\beta x} F - (\pi c + l g) a e^{-\beta x} F' + l c a^2 e^{-\beta x} F''$$

$$\left\{ \begin{aligned} \beta^2 &= r g \\ l \beta &= (\pi c + l g) a \\ 1 &= a^2 l c \end{aligned} \right.$$

$$a = \pm \frac{1}{\sqrt{l c}} \quad \beta = \sqrt{r g} \rightarrow + \text{ perché è una attenuazione}$$

$$2\beta = (\pi c + l g) a$$

$$4\beta^2 = (\pi^2 c^2 + l^2 g^2 + 2\pi c l g) a^2$$

$$4\beta^2 l c = \pi^2 c^2 + l^2 g^2 + 2\pi c l g$$

portando il termine a dx ottengo il quadrato

$$(\pi c - l g)^2 = 0$$

$$\pi c = l g$$

$$\frac{\pi}{g} = \frac{l}{c}$$

il rapporto tra parametri dissipativi = rapporto tra parametri conservativi.

Per la corrente ottengo gli stessi risultati.
 Legame tra tensione e corrente?

$$\beta_1 = \beta = \sqrt{r g}$$

$$a_1 = a = \pm \frac{1}{\sqrt{l c}}$$

$$v = e^{-\beta x} F(x-at)$$

$$i = e^{-\beta x} G(x-at)$$

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = r i + l \frac{\partial i}{\partial t}$$

Sulla linea sappiamo che v e i sono funzioni d'onda
 Onde progressive

$$V^+ = Z_0 i^+$$

$$V^- = -Z_0 i^-$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Le condizioni iniziali non influenzano; quelle al contorno

$$\begin{cases} V_0 = E_0 - R_g I_0 \\ V_u = R_u I_u \end{cases}$$

a destra succede che $V_0 = Z_0 i^+$ $t > 0$
 onda che si propaga nel verso delle x crescenti

Relazione tra i_0 e i^+ (generatore, entra nella linea)

$$E_0 - R_g i^+ = Z_0 i^+$$

$$i^+ = \frac{E_0}{R_g + Z_0} \leftarrow \text{fem e voto}$$

\leftarrow "impedenza equivalente"

Onda di corrente a partire da istante zero.
 Nel punto di connessione deve soddisfare eq. del generatore e eq. della linea.
 La corrente è la stessa, onda progressiva

$V=0$ all'inizio
 dopo un Δt $V=?$ dipende dal tempo passato

Il fronte d'onda si sposta
 Se tempo vale $t_0 = \frac{x_0}{a}$

$$V^+ = \frac{Z_0}{R_g + Z_0} E_0 = Z_0 i^+$$

Transitorio di propagazione di un segnale lungo una linea

Se la linea è ∞ il tempo è $\infty \rightarrow$ Non ci interessa

$$i^+ = \frac{E_0}{R_g + Z_0} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{ questo vale da } t \text{ a } \frac{L}{a} \leftarrow \text{lunghezza linea}$$

$$V^+ = Z_0 i^+$$

cosa succede al tempo L/a ?

- caso fortunato $R_u = Z_0$, la tensione a fine della linea sarà quella dell'utilizzatore linea adattata \rightarrow no transitorio

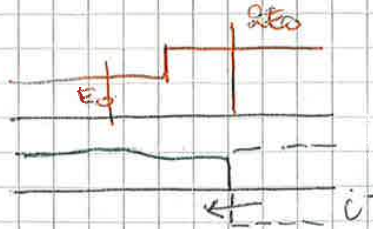
$$\begin{cases} V_u = R_u i_u \\ i_u = \frac{E_0}{R_g + Z_0} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{V_u}{i_u} = Z_0$$

Caso di circuito aperto

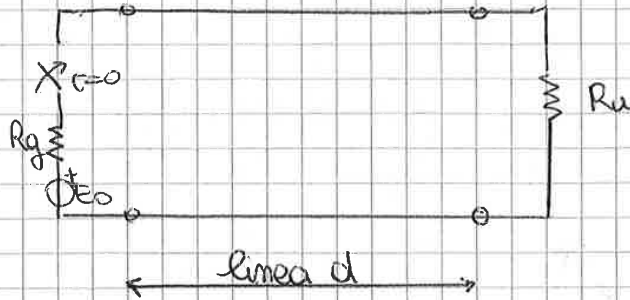
$$R_u = \infty \quad \Gamma_I = -1 \quad \Gamma_V = 1$$

$$V = (1 + \Gamma_V) V^+$$

$$i = (2 + \Gamma_I) i^+$$



4/10/2019

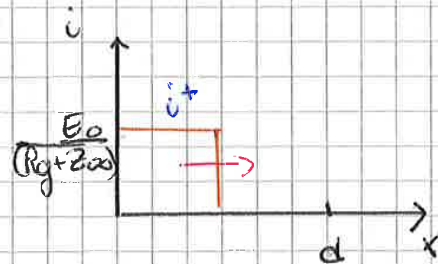
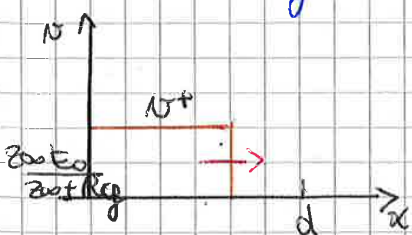


Condizioni iniziali: $V(x, 0) = 0$; $i(x, 0) = 0$

Da una parte eq polo, dall'altra eq. Emeas

$$V^+ = \frac{E_0 Z_{00}}{R_g + Z_{00}} \quad ; \quad i^+ = \frac{V^+}{Z_{00}} \quad ; \quad i^- = -\frac{V^-}{Z_{00}}$$

$$\begin{cases} V^+ = E_0 - R_g i^+ = E_0 - R_g \frac{V^+}{Z_{00}} \\ i^+ = \frac{E_0}{R_g + Z_{00}} \end{cases}$$



$$V = R_u i = V^+ + V^- = R_u (i^+ + i^-) = V^+ + V^-$$

eq. bipolo resistivo

$$V^+ - Z_{00} i^- = R_u i^+ + R_u i^-$$

$$-i^- (R_u + Z_{00}) = (R_u - Z_{00}) i^+$$

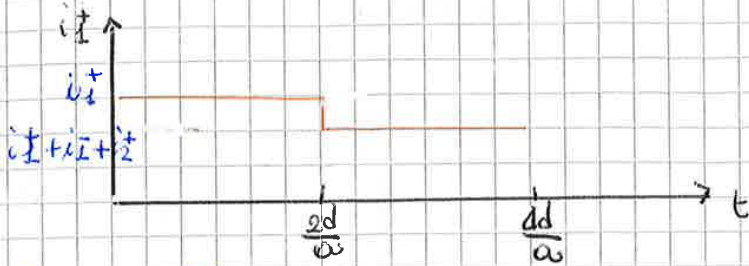
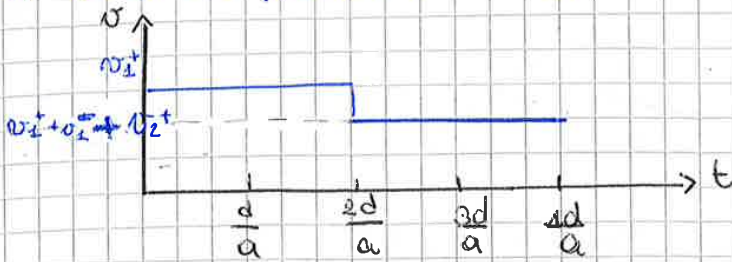
$$i^- = -\frac{R_u - Z_{00}}{R_u + Z_{00}} i^+ = -\Gamma_V i^+$$

$$V^- = -Z_{00} i^- = \Gamma_V V^+$$

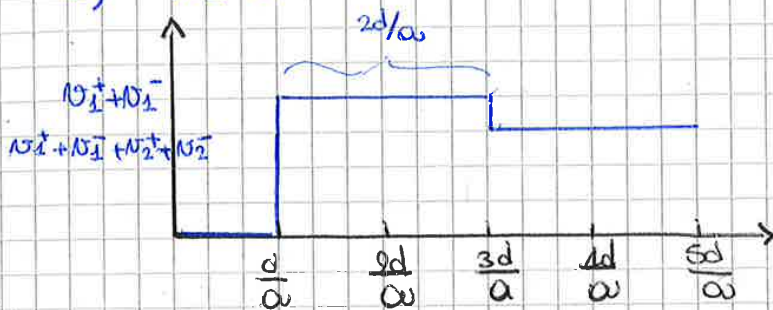
$$\Gamma_V = \frac{R_u - Z_{00}}{R_u + Z_{00}} = \frac{\left(\frac{R_u}{Z_{00}}\right) - 1}{\left(\frac{R_u}{Z_{00}}\right) + 1} = \frac{k_u - 1}{k_u + 1}$$

$$\begin{cases} k_u > 1 & \Gamma_u < 1 \\ k_u \rightarrow \infty & \Gamma_u = 1 \end{cases}$$

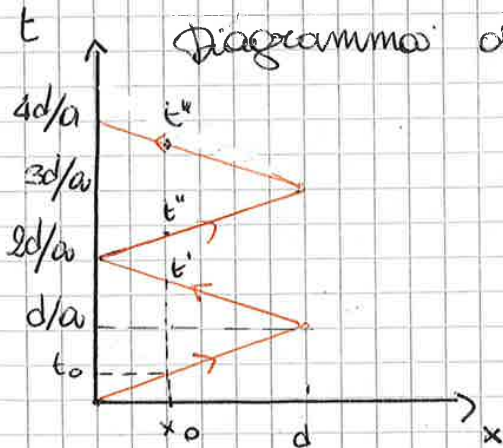
1) Fisso la posizione $x=0$



2) $x = d$

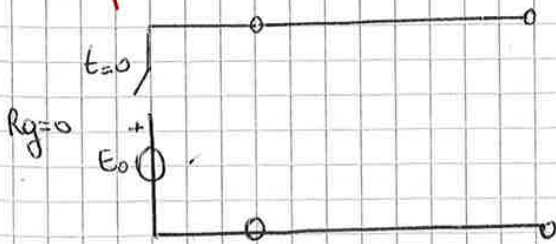


Diagrammi di riflessione



Caso pochi cablo - linea a vuoto

$$\forall x \begin{cases} v(x,0) = 0 \\ i(x,0) = 0 \end{cases}$$



All' inizio della linea E_0 imposta

$x = d$?
 $x = d/2$?

Immaginiamo

$\Gamma_u \rightarrow$ utenze
 $\Gamma_g \rightarrow$ generatori

$$V = V_1^+ + V_1^- + V_2^+ + V_2^- + V_3^+ + V_3^- \dots$$

$$V = V_1^+ + V_1^- \Gamma_u + (V_1^- \Gamma_g) + V_2^+ \Gamma_u + (V_2^- \Gamma_g) + \dots$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ V_1^+ \Gamma_u \Gamma_g & V_1^- \Gamma_u \Gamma_g \Gamma_u & V_1^- \Gamma_u^2 \Gamma_g^2 \end{matrix}$$

$$V = V_1^+ (1 + \Gamma_u + \Gamma_u \Gamma_g + \Gamma_u^2 \Gamma_g + \Gamma_u^2 \Gamma_g^2 + \dots) =$$

$$V_1^+ [(1 + \Gamma_u) + \Gamma_u \Gamma_g (1 + \Gamma_u) \dots] =$$

$$V_1^+ [(1 + \Gamma_u) \sum_{m=0}^{\infty} (\Gamma_u \Gamma_g)^m] =$$

$$\frac{V_1^+ (1 + \Gamma_u)}{1 - \Gamma_u \Gamma_g}$$

$$V = V_1^+ \frac{1 + \Gamma_u}{1 - \Gamma_u \Gamma_g} = V_1^+ \frac{1 + \frac{R_u - Z_{00}}{R_u + Z_{00}}}{1 - \frac{R_u - Z_{00}}{R_u + Z_{00}} \frac{R_g - Z_{00}}{R_g + Z_{00}}} =$$

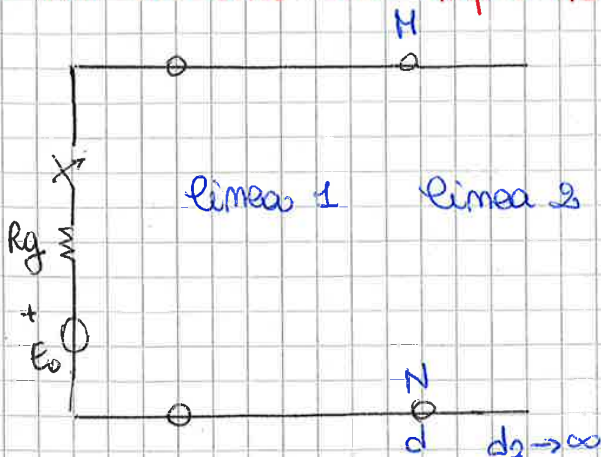
$$= V_1^+ \frac{R_u + Z_{00} + R_u - Z_{00}}{R_u + Z_{00}} = V_1^+ \frac{2R_u (R_g + Z_{00})}{(R_u + Z_{00})(R_g + Z_{00}) - (R_u - Z_{00})(R_g - Z_{00})}$$

$$= V_1^+ \frac{2R_u (R_g + Z_{00})}{R_u R_g + R_u Z_{00} + R_g Z_{00} + Z_{00}^2 - R_u R_g + R_u Z_{00} + R_g Z_{00} + Z_{00}^2}$$

$$\Rightarrow V_{oc} = V_1^+ \frac{2R_u (R_g + Z_{00})}{2(R_u Z_{00} + R_g Z_{00})} = V_1^+ \frac{R_u (R_g + Z_{00})}{(R_u + R_g) Z_{00}} = \frac{E_0 Z_{00}}{R_g + Z_{00}} \frac{R_u (R_g + Z_{00})}{(R_u + R_g) Z_{00}}$$

$$\rightarrow V_{oc} = \frac{E_0 R_u}{R_u + R_g}$$

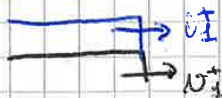
linee in cascata con impedenza caratteristica diversa



linea 2 \rightarrow le onde si propagano nell' ∞

premessa

linea di lunghezza ∞ da collegare a un generatore
 Tutto avviene come se es. avesse una resistenza
 pari a Z_{00}



$$V_1^+ = E_0 \frac{Z_{00}}{Z_{00} + R_g}$$

$$\begin{cases} V = V_1^+ \\ i = i_1^+ \\ \text{linea 1} \\ \begin{cases} V = V_1^+ + V_1^- \\ i = i_1^+ + i_1^- \end{cases} \end{cases}$$

linea 2

$$\begin{cases} V_1^+ + V_1^- = V_2^+ \\ i_1^+ + i_1^- = i_2^+ \end{cases} \leftarrow \text{giusto, quello di questo sbaglio}$$

$$\frac{V_2^+}{Z_2^+} = 2200$$

$$V_1^- = -i_1^- Z_{10}$$

$$\begin{cases} V_1^+ + V_1^- = V_2^+ \\ \frac{V_1^+}{Z_{100}} - \frac{V_1^-}{Z_{100}} = \frac{V_2^+}{Z_{200}} \end{cases} \rightarrow i_1^+ + i_1^- = i_2^+$$

$$-\frac{V_1^+}{Z_{200}} - \frac{V_1^-}{Z_{200}} + \frac{V_1^+}{Z_{100}} - \frac{V_1^-}{Z_{100}} = 0$$

coeff. di riflessione

$$\Gamma_V = \frac{Z_{200} - Z_{100}}{Z_{200} + Z_{100}}$$

$$V_1^- \left(\frac{1}{Z_{100}} + \frac{1}{Z_{200}} \right) = V_1^+ \left(\frac{1}{Z_{100}} - \frac{1}{Z_{200}} \right)$$

$$V_1^- = \left(\frac{Z_{200} - Z_{100}}{Z_{200} + Z_{100}} \right) V_1^+ = \frac{Z_{200} - 1}{Z_{200} + 1} V_1^+ = \Gamma_V V_1^+$$

Per le correnti sappiamo che in linea senza perdite $i_1^- = -\frac{V_1^-}{Z_{100}}$

$$V_2^+ = V_1^+ + V_1^- = V_1^+ (1 + \Gamma_V) = V_1^+ \left(1 + \frac{Z_{200} - Z_{100}}{Z_{200} + Z_{100}} \right) = V_1^+ \left(\frac{2Z_{200}}{Z_{200} + Z_{100}} \right)$$

$$\frac{V_2^+}{Z_{200}} = i_2^+ = \frac{V_1^+}{Z_{100}} \cdot \frac{2Z_{200}}{Z_{200} + Z_{100}} = \frac{V_1^+ \Gamma_V}{Z_{200}} = \frac{2V_1^+}{Z_{200} + Z_{100}}$$

coeff. di trasmissione

$$V_2^+ = Z_{200} i_2^+ = V_1^+ \frac{2Z_{200}}{Z_{200} + Z_{100}}$$

$$i_2^+ = \left(\frac{V_1^+}{Z_{100}} \right) \frac{2Z_{200}}{Z_{200} + Z_{100}}$$

\downarrow
 i_1^+

$$V_2^+ = \Gamma_V V_1^+$$

$$i_2^+ = \Gamma_I i_1^+$$

$$V_2^+ = V_1^+ \frac{2Z_{200}}{Z_{200} + Z_{100}} \Rightarrow V_1^+ \left(\frac{2\alpha}{1+\alpha} \right)$$

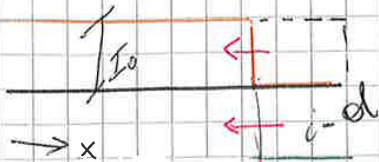
- $Z_{200} = \alpha Z_{100}$ $\alpha > 1$ tensione su 2 > tensione su 1
- tensione su 2 < : se $\alpha < 1$

$t=0$ $\begin{cases} i = E_0/R_u \\ V_0 = E_0 \end{cases}$ stato iniziale $\begin{cases} i(x,0) = E_0/R_u \\ V(x,0) = E_0 \end{cases}$

intercuttori ideali
 1) Aperto Int 2 in $t=0^+$
 $i = I_0 + (i^-) = 0$
 $i^- = -I_0 = -E_0/R_u$
 $V^- = -Z_{00}(i^-) = Z_{00}I_0 = Z_{00}E_0/R_u$

linea aperta, onde regressive
 siamo a fine linea
 corrente regressiva

aprendo e' interruttore
 e' annullamento
 istantaneo corrente
 impongo corrente

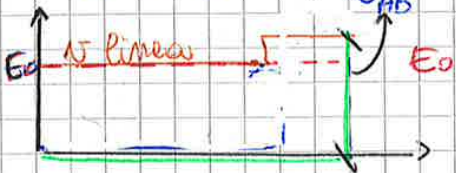


tensione compensata
 sulla linea

$V = E_0 + V^- = E_0 + Z_{00}I_0 = E_0 + Z_{00} \frac{E_0}{R_u} = E_0 \left(\frac{R_u + Z_{00}}{R_u} \right)$

$V_{AB} = V_{AB} + V_{BB} \rightarrow V_{AB} = V_{AB} - V_{BB}$
 $V_{AB} = E_0$
 $V_{BB} = E_0 - V$

regimi stazionari



se $Z_{00} \gg R_u$
 si ha una
 sovratensione
 su R_c ; e' > +
 grande e' Z_{00}

Parto da E_0 , aprio interruttore e c'e' V^-
 onda regressiva
 Istante intermedio ho 0 linea
 V_{AB} limitata a morsetti interruttore, una sorta
 di impulso
 Sovratensione su interruttore che si propaga
 V lineas cresce, su interruttore + E_0

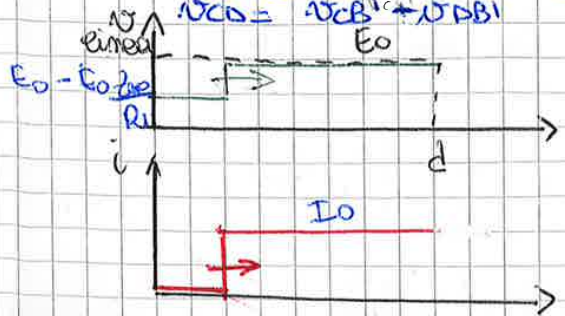
2) Aprio int 1
 $x=0 \quad t > 0 \quad i = i^+ + I_0$
 $i = I_0 = \frac{E_0}{R_u} \quad i^+ = -I_0$

onda di i progressiva, va avanti
 annullate:

$V^+ = Z_{00}i^+$
 $V^+ = Z_{00}(-I_0)$

$V_{lineas} = E_0 + V^+ = E_0 - Z_{00}I_0 = E_0 - Z_{00} \frac{E_0}{R_u}$

V lineas decresce



Per trovare tensione su
 interruttore devo + 0 - E_0
 In questo caso -

$v(x=d)$
 $v_u = Ri + L \frac{di}{dt}$ eq. del bipolo

$E_0 + v^- = R(i^+ + i^-) + L \frac{d}{dt}(i^+ + i^-)$ $v^- = -Z_{00} i^-$

$E_0 - Z_{00} i^- = R(i^+ + i^-) + L \frac{d}{dt}(i^+ + i^-)$
R derivata \rightarrow cercare il numero

$E_0 - Z_{00} i^- = R \left(\frac{E_0}{Z_{00}} + i^- \right) + L \frac{d}{dt} i^-$

$L \frac{di^-}{dt} + (R + Z_{00}) i^- + E_0 \left(\frac{R}{Z_{00}} - 1 \right)$

(1) soluz. particolare

(soluz. a regime $\frac{di^-}{dt} = 0$ i_{∞})

(2) integre. omog. associata $\rightarrow (E_0 = 0)$

(1) $i_{\infty} = -E_0 \left(\frac{R}{Z_{00}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{R + Z_{00}}$

$i_{\infty} = \frac{E_0}{Z_{00}} \frac{Z_{00} - R}{Z_{00} + R}$

(2) $L \frac{di^-}{dt} + (R + Z_{00}) i^- = 0$

$\frac{di^-}{i^-} = - \frac{(R + Z_{00})}{L} dt$

$\int_{i_0}^{i^-} \frac{di^-}{i^-} = \int_{t_0}^t - \frac{dt}{\tau}$

$i_{\infty} = i_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$
↑ omogenea associata

$i = i_{\infty} + i_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} = i_{\infty} + \frac{E_0}{Z_{00}} \frac{Z_{00} - R}{Z_{00} + R}$

costante di tempo che tiene conto anche di Z_{00} impedenza caratteristica della linea

Stato iniziale della corrente?

$t = t_0 = 0 \quad i = 0$ inoltro scarico prima $i = \frac{E_0}{Z_{00}}$ poi va a 0

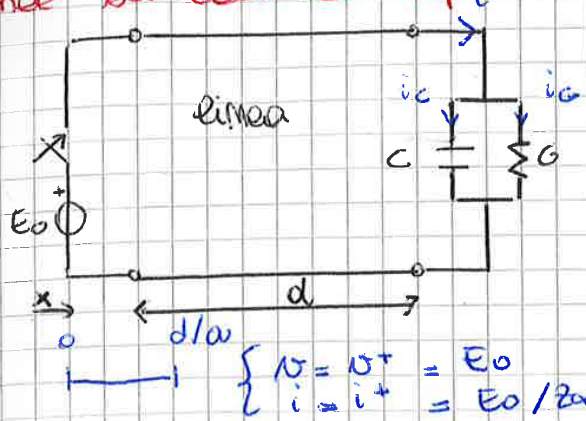
$i = i^+ + i^- = 0$

$\frac{E_0}{Z_{00}} + i_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}} + \frac{E_0}{Z_{00}} \frac{Z_{00} - R}{Z_{00} + R} = 0$

$i_0 = \frac{E_0}{Z_{00}} \left[\frac{R - Z_{00}}{R + Z_{00}} - 1 \right] = - \frac{E_0}{Z_{00}} \frac{2Z_{00}}{R + Z_{00}} = - \frac{2E_0}{R + Z_{00}}$

5/10/2017

Linee su carico capacitivo



$$i(x,0) = 0 \quad v(x,0) = 0 \quad \forall x \quad v_c = 0 \quad (t=0)$$

$v(x,t)$ ampiezza costante
velocità costante

$$v = E_0 \sqrt{x-at} \quad \begin{matrix} v^+ \\ \rightarrow \end{matrix}$$

$$\begin{cases} v = v^+ + v^- = E_0 + v^- \\ i = i^+ + i^- = \frac{E_0}{Z_0} - \frac{v^-}{Z_0} \\ v = vG + C \frac{dv}{dt} \rightarrow \text{eq. lato carico} \end{cases}$$

$$(E_0 + v^-)G + C \frac{d}{dt} (E_0 + v^-) = \frac{E_0}{Z_0} - \frac{v^-}{Z_0}$$

$$E_0 G + v^- G + C \frac{dv^-}{dt} = \frac{E_0}{Z_0} - \frac{v^-}{Z_0}$$

$$C \frac{dv^-}{dt} + \left(G + \frac{1}{Z_0}\right) v^- + E_0 \left(G - \frac{1}{Z_0}\right) = 0$$

$$C \frac{dv^-}{dt} + \frac{G Z_0 + 1}{Z_0} v^- + E_0 \left(\frac{G Z_0 - 1}{Z_0}\right) = 0$$

- soluz. particolare: soluz. a regime $\frac{dv^-}{dt} = 0$

$$v_{part}^- = - \frac{E_0 \left(\frac{G Z_0 - 1}{Z_0}\right)}{\frac{G Z_0 + 1}{Z_0}} = - E_0 \frac{G Z_0 - 1}{G Z_0 + 1}$$

- omogenea associata ($E_0 = 0$)

$$C \frac{dv^-}{dt} + \frac{G Z_0 + 1}{Z_0} v^- = 0$$

$$\frac{dv^-}{v^-} = - \frac{1}{C} \left(\frac{G Z_0 + 1}{Z_0}\right) dt$$

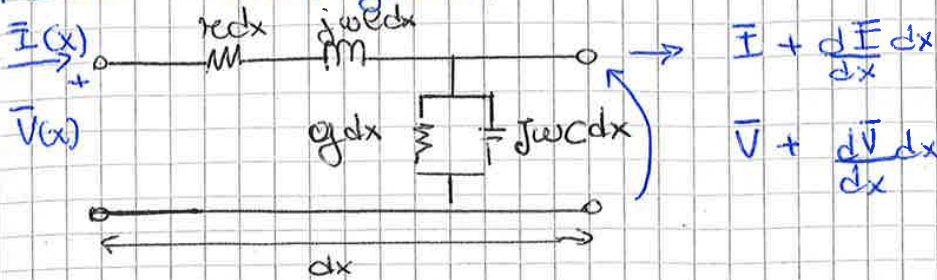
$$\tau = \frac{C}{G_{eq}}$$

$$G_{eq} = G + \frac{1}{Z_0} = \frac{G Z_0 + 1}{Z_0}$$

Linee in regime sinusoidale
 Linee con come sono, nessuna ipotesi

$$a(t) = \sqrt{2} A \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\bar{A} = A e^{j\varphi} = A \cos\varphi + j A \sin\varphi$$



$$\begin{cases} -\frac{dV}{dx} = (r + j\omega L) I \\ -\frac{dI}{dx} = (g + j\omega C) V \end{cases} \quad \text{Equazioni dei telegrafisti}$$

eq. lungo linea
 in regime
 sinusoidale

$$\begin{cases} -\frac{d^2V}{dx^2} = (r + j\omega L) \frac{dI}{dx} = -(r + j\omega L)(g + j\omega C) V \\ -\frac{d^2I}{dx^2} = (g + j\omega C) \frac{dV}{dx} = -(g + j\omega C)(r + j\omega L) I \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = \gamma^2 V \\ \frac{d^2I}{dx^2} = \gamma^2 I \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha + j\beta \\ \gamma^2 &= (r + j\omega L)(g + j\omega C) \end{aligned}$$

costante di propagazione

$$\gamma^2 = \underbrace{rg - \omega^2 LC}_m + j \underbrace{(\omega Lg + r\omega C)}_m = m + jn$$

$$\gamma^2 = (\alpha + j\beta)^2 = (\alpha^2 - \beta^2) + j2\alpha\beta = m + jn$$

$$\begin{cases} m = \alpha^2 - \beta^2 \\ n = 2\alpha\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2 = \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 \\ m^2 = 4\alpha^2\beta^2 \\ m^2 + m^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{m^2 + n^2} = \alpha^2 + \beta^2 \\ m = \alpha^2 - \beta^2 \end{cases}$$

caso particolare

$$\alpha = \sqrt{\frac{m + \sqrt{m^2 + n^2}}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{-m + \sqrt{m^2 + n^2}}{2}}$$

$$\gamma^2 = -\omega^2 LC + j\omega^2 LG$$

$$\alpha = 0 \quad \beta = \omega \sqrt{LC}$$

$$r = 0 \quad g = 0$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 &= -\omega^2 LC \\ \gamma &= j\omega \sqrt{LC} = j\beta \end{aligned}$$

Linea di lunghezza infinita alimentata da generatore ideale di tensione
 Se la linea è illimitata ($x \rightarrow \infty \rightarrow A=0$) la tensione all'infinito è trascurabile

$$V = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}$$

$$Ae^{\alpha x} e^{j\beta x} + Be^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$$

$$\begin{cases} V = Be^{-\gamma x} \\ I = \frac{B}{Z_0} e^{-\gamma x} \end{cases}$$

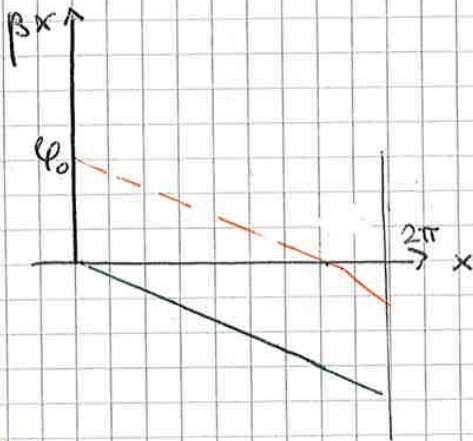
generatore ideale di tensione
 $x=0 \quad V=V_0=B \rightarrow B$ come tensione in un punto

$$\begin{cases} V = V_0 e^{-\gamma x} \\ I = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\gamma x} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} \end{cases}$$

$$Z(x) = \frac{V(x)}{I(x)} = Z_0 \quad \forall x$$

$$V_0 = |V_0| e^{j\phi_0}$$

$e^{-\alpha x} \rightarrow$ attenuazione
 $e^{-j\beta x} \rightarrow$ rotazione in ritardo



rotazione di fase θ

$$\beta x_0 = 2\pi m$$

$$x_0 = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{lunghezza di propagazione}$$

$$\gamma \approx 0 + j\beta$$

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{2\pi f}{v} \left(\frac{1}{\sqrt{LC}} \right) \leftarrow \text{dimensionalmente e' una velocita}$$

$$\beta = \frac{2\pi f}{v} \rightarrow = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \quad 0.5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda \approx \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{v}{f} = vT$$

Se dimensioni ^{del circuito} r per _{piccole rispetto} alla ^{lunghezza d'onda} approccio circuitale devono essere

Guadagno in tensione e guadagno in corrente

$$\frac{V_u}{V_o} = \frac{V_o \cancel{c h \delta d} - V_o \frac{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}}{V_o} = \frac{(z_c \cancel{c h^2 \delta d} + z_o \cancel{c h \delta d} \cancel{A h \delta d} - z_o \cancel{c h \delta d} \cancel{A h \delta d} - z_c \cancel{A h^2 \delta d})}{(z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d})} \cdot 1$$

$$\frac{V_u}{V_o} = \frac{z_c}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}$$

$$\frac{I_u}{I_o} = \frac{V_u}{z_c} \cdot \frac{1}{\frac{V_o}{z_o}} = \frac{V_u}{V_o} \cdot \frac{z_o}{z_c}$$

calcolare z_c e z_o

$$\frac{V_u}{I_o} = z_o = \frac{V_o}{?}$$

$$I = -\frac{1}{z_o} (Q \cancel{c h \delta x} + P \cancel{A h \delta x})$$

imporre corrente a inizio lineas → trova Q ma già trovata

$$\begin{cases} x=0 \\ I_o = -\frac{1}{z_o} Q \end{cases}$$

$$I_o = -\frac{1}{z_o} \left[-V_o \frac{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}} \right] = \frac{V_o}{z_o} \frac{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}$$

$$\frac{V_u}{I_o} = z_o = \frac{V_o}{\frac{V_o}{z_o} \frac{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}} = z_o \frac{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}$$

$$\frac{I_u}{I_o} = \frac{V_u}{V_o} \cdot \frac{z_o}{z_c} = \frac{z_c}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}} \cdot \frac{1}{z_c} \cdot z_o \frac{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{I_u}{I_o} = \frac{z_o}{z_o \cancel{c h \delta d} + z_c \cancel{A h \delta d}}$$

$$\Rightarrow \frac{V_u}{V_o} = \frac{z_c}{z_c \cancel{c h \delta d} + z_o \cancel{A h \delta d}}$$

- 1) lineas adattata
- 2) lineas a vuoto
- 3) lineas in corto circuito

$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma x & -z_0 \text{sh} \gamma x \\ \frac{\text{sh} \gamma x}{z_0} & \text{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$T(\alpha)$ matrice di trasmissione

$\det T = \text{ch}^2 \gamma x - \text{sh}^2 \gamma x = 1$

$T(\alpha=d)$ $I_u = -I_u$ convenzione opposta all'uscita

$$\begin{bmatrix} V_u \\ I_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma d & -z_0 \text{sh} \gamma d \\ +\frac{\text{sh} \gamma d}{z_0} & -\text{ch} \gamma d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$I_u = -I_u$

matrice di trasmissione in $x=d$

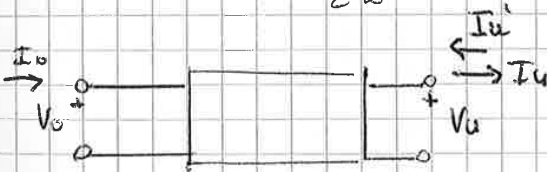
$\det(T) = -1$

$\det T = -\text{ch}^2 \gamma d + \text{sh}^2 \gamma d$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{-1} = T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u \\ I_u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma d & -z_0 \text{sh} \gamma d \\ \frac{\text{sh} \gamma d}{z_0} & -\text{ch} \gamma d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_u \\ I_u \end{bmatrix}$$

11/10/2017



$$\begin{cases} V = P \text{ch} \gamma x + Q \text{sh} \gamma x \\ I = -\frac{1}{z_0} (Q \text{ch} \gamma x - P \text{sh} \gamma x) \end{cases}$$

$x=0 \rightarrow \begin{cases} V_0 = P \\ I_0 = -\frac{Q}{z_0} \end{cases}$

$$\begin{cases} V = V_0 \text{ch} \gamma x - z_0 I_0 \text{sh} \gamma x \\ I = -\frac{1}{z_0} (V_0 \text{sh} \gamma x - z_0 I_0 \text{ch} \gamma x) \end{cases}$$

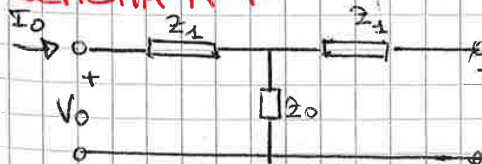
$$\begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma x & -z_0 \text{sh} \gamma x \\ -\frac{1}{z_0} \text{sh} \gamma x & \text{ch} \gamma x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

$I_u = -I_u$

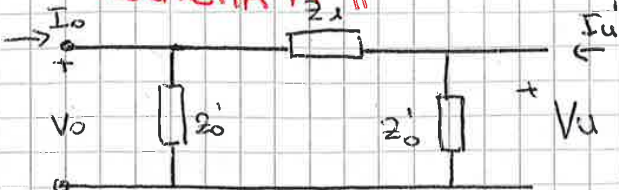
$$\begin{bmatrix} V_u \\ I_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ch} \gamma d & -z_0 \text{sh} \gamma d \\ +\frac{\text{sh} \gamma d}{z_0} & -\text{ch} \gamma d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_0 \\ I_0 \end{bmatrix}$$

l'ingresso e l'uscita si possono scambiare senza difficoltà

SCHEMA A T



SCHEMA A Π



Modello a parametri concentrati \rightarrow elemento corto
 Approssimazioni \rightarrow circuiti approssimati già visto in impianti

2) secondario a cortocircuito, circuito π

$$\frac{I_u}{V_o} \Big|_{V_o=0} = -\frac{1}{Z_i} = -\frac{1}{Z_o \sinh \delta}$$

$$V_o = -(Z_o \sinh \delta) I_u$$

$$Z_i = Z_o \sinh \delta$$

$$\frac{I_u}{I_o} \Big|_{V_u=0} = -\frac{Z_o'}{Z_o + Z_i} = -\frac{1}{\cosh \delta}$$

$$Z_o' = \frac{(Z_o + Z_i)}{\cosh \delta} \rightarrow Z_o' (\cosh \delta - 1) = Z_i$$

$$Z_o' = \frac{Z_o \sinh \delta}{\cosh \delta - 1}$$

Fate i calcoli:

$$Z_i = Z_o \sinh \delta = Z_o \delta = \frac{\sqrt{r+j\omega c}}{\sqrt{g+j\omega c}} d$$

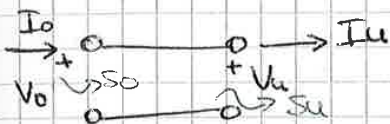
$$Z_o = \frac{Z_o}{\tanh \frac{\delta}{2}} = Z_o \cdot \frac{1}{\frac{\delta}{2}} = \frac{\sqrt{r+j\omega c}}{\sqrt{g+j\omega c}} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{r+j\omega c}(\sqrt{g+j\omega c})}{2}}$$

$$\rightarrow Z_i \cong (r+j\omega c) d$$

$$\rightarrow Z_o = (g+j\omega c) \frac{d}{2}$$

$$Z_o' = \frac{1}{\frac{g+j\omega c}{2} d} = \frac{2}{(g+j\omega c) d}$$

Potenze elettriche



ingresso \rightarrow $S_o = S_u + S_e$ \leftarrow uscita

Metodo del potenziale ai nodi
Si sostituiscono le eq. delle correnti con tensioni

$$V_o = V_u \cosh \delta + Z_o \sinh \delta I_u$$

$$I_u = \frac{V_o}{Z_o \sinh \delta} - \frac{V_u}{Z_o \cosh \delta}$$

uso matriciale

$$I_o = \frac{V_u \sinh \delta}{Z_o} + \cosh \delta \left(\frac{V_o}{Z_o \sinh \delta} - \frac{V_u}{Z_o \cosh \delta} \right)$$

$$\frac{V_u \sinh^2 \delta}{Z_o \sinh \delta} - \frac{V_u \cosh^2 \delta}{Z_o \cosh \delta} + \frac{V_o}{Z_o \cosh \delta}$$

$$I_o = -\frac{V_u}{Z_o} \frac{1}{\sinh \delta} + \frac{V_o}{Z_o \cosh \delta}$$

$$\begin{cases} Z_1 = Z_o \cosh \delta \\ Z_2 = Z_o \sinh \delta \end{cases} \text{ chiamo } \cos c$$

$$\hookrightarrow I_o = \frac{V_o}{Z_1} - \frac{V_u}{Z_2}$$

$$S_o = V_o I_o^* \text{ potenza entrante}$$

$$S_o = V_o I_o^* = \frac{|V_o|^2}{Z_1^*} - \frac{|V_o| |V_u| e^{j(\varphi_o - \varphi_u)}}{Z_2^*}$$

$$S_u = V_u I_u^* = \frac{|V_u| |V_o| e^{j(\varphi_u - \varphi_o)}}{Z_2^*} - \frac{|V_u|^2}{Z_1^*} \text{ potenza uscente}$$

Linee (regime sinusoidale) rappresentazione con onde stazionarie

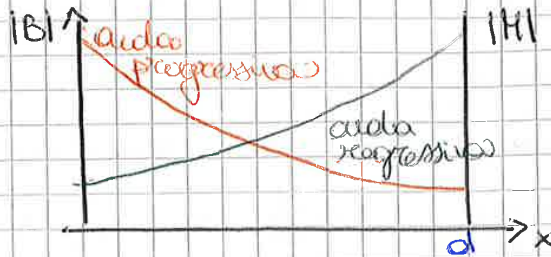
$$V = Ae^{j\omega x} + Be^{-j\omega x}$$

$$I = -\frac{1}{Z_{00}} Ae^{j\omega x} + \frac{1}{Z_{00}} Be^{-j\omega x}$$

moltiplico e divido $e^{j\omega d}$

$$V = Ae^{-j\omega d} e^{j\omega d} e^{j\omega x} + Be^{-j\omega d} e^{j\omega d} e^{-j\omega x} = \underbrace{Ae^{j\omega d}}_M e^{-j\omega(d-x)} + Be^{-j\omega x}$$

$$V = Me^{-j\omega(d-x)} + Be^{-j\omega x}$$



Usiamo l'espressione originaria con esponenziali al posto delle funzioni iperboliche o grandezze ingresso/uscita. Trovare cost. di integrazione \rightarrow condizioni al contorno

$$P = A + B$$

$$Q = A - B$$

$$A = \frac{P+Q}{2}$$

$$B = \frac{P-Q}{2}$$

$$V = P \cosh \gamma x + Q \sinh \gamma x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = V_0 \\ Q = -V_0 \frac{Z_{00} \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_{00} \sinh \gamma d} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P = V_0 \\ Q = -V_0 \frac{Z_{00} \cosh \gamma d + Z_c \sinh \gamma d}{Z_c \cosh \gamma d + Z_{00} \sinh \gamma d} \end{array} \right.$$

$t = t_d$

$\Gamma_L = \frac{R_L - Z_0}{R_L + Z_0} = \frac{1}{3}$

La tensione torna indietro come perturbazione

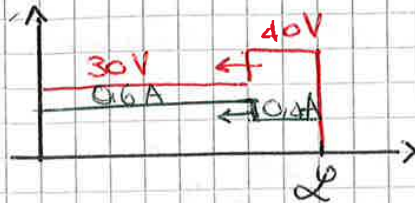
$U^- = \Gamma_L U^+ = 10 \text{ V}$
 $i^- = -\Gamma_L i^+ = -\frac{10}{20} = -0,2 \text{ A}$

$t_d < t < 2t_d$

$U = U^+ + U^-$ (sovrapposizione informatica, valore precedente + U^-)

$U = 30 + 10 = 40 \text{ V}$

$i = i^+ + i^- = 0,6 - 0,2 = 0,4 \text{ A}$



$t = 2t_d$

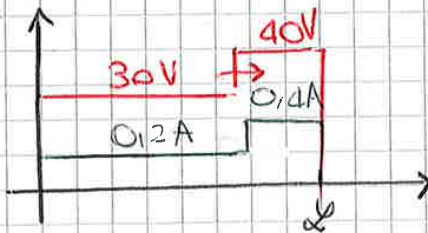
$\Gamma_S = \frac{0 - Z_0}{Z_0 + 0} = -1$

$U^{2+} = \Gamma_S U^- = -10 \text{ V}$

$i^{2+} = -\Gamma_S i^- = 0,2 \text{ A} = \frac{U^{2+}}{Z_0}$

$2t_d < t < 3t_d$

$U = U + U^{2+} = 30 \text{ V}$
 $i = i + i^{2+} = 0,2 \text{ A}$

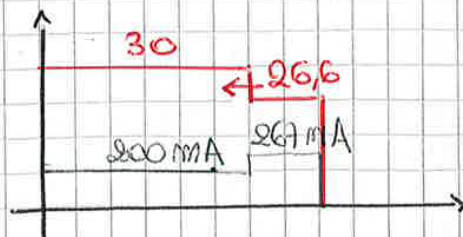


$t = 3t_d$

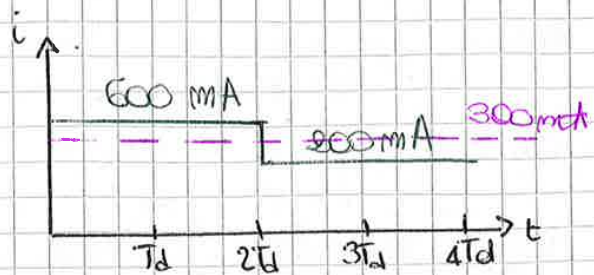
$U^{2-} = \Gamma_L U^{2+} = -3,333 \text{ V}$
 $i^{2-} = -\Gamma_L i^{2+} = 66,667 \text{ mA}$

$3t_d < t < 4t_d$

$U = U + U^{2-} = 26,667 \text{ V}$
 $i = i + i^{2-} = 266,667 \text{ mA}$



$x = 0$



$t = 0$

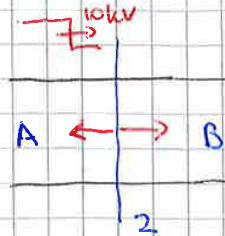
$V^+ = E_0 = 10 \text{ kV}$

$i^+ = \frac{V^+}{20\Omega} = \frac{E_0}{20\Omega} = 21,33 \text{ A}$

$0 < t < T_{dA}$

$V_A = V^+$
 $i_A = i^+$

$E = T_{dA}$

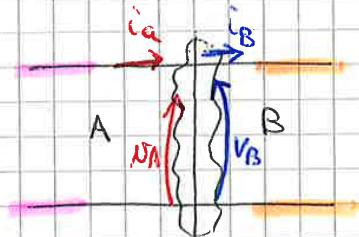


Linea A

$V_A^- = \Gamma_{AB} V^+ = -7,592 \text{ kV}$
 $i_A^- = -\Gamma_{AB} i^+ = 16,04 \text{ A}$ } $t = T_{dA}$

$V_A = V^+ + V_A^- = 2,408 \text{ kV}$
 $i_A = i^+ + i_A^- = 37,37 \text{ A}$ } $t > T_{dA}$

Questo tensioni e correnti sono uguali a quelle in B



piccolo zero \Rightarrow
parametri concentrati
dove $V_A = V_B$ $i_A = i_B$

Linea B

$V_B = V_A = 2,408 \text{ kV} = V_B^+$ (prima perturbazione)

$i_B^+ = \frac{V_B^+}{20\Omega} = 37,37 \text{ A}$ } $T_{dA} < t < T_{dA} + T_{dB}$

$i_B = 0 + i_B^+ = 37,37 \text{ A}$ (corrente iniziale + perturbazione)
 $i_B = i_A = 37,37 \text{ A}$

$V_B \rightarrow V_B^+$
 $i_B \rightarrow i_B^+$

$E = T_{dA} + T_{dB}$

$V_B^- = \Gamma_L V_B^+ = -0,348 \text{ kV}$
 $i_B^- = -\Gamma_L i_B^+ = 5,24 \text{ A}$

$T_{dA} + T_{dB} < t < T_{dA} + 2T_{dB}$
 $V_B = V_B^+ + V_B^- = 2,06 \text{ kV}$
 $i_B = i_B^+ + i_B^- = 42,61 \text{ A}$

A inizio l'impedenza partitore se avessi R_s

• $t < 0$ (regime)
 sul carico $V_0 = E_0 = 100V$ $I_0 = \frac{V_0}{R_0} = 0,129A$

• $t = 0$
 eq. carico $\left(\begin{array}{c} i \\ \uparrow \\ R_0/2 \end{array} \right)^{(1)} \quad V = \frac{R_0}{2} i$ appena chiuso interruttore

eq. onda $\begin{cases} (2) V = V_0 + V^- = E_0 + V^- \\ (3) i = i_0 + i^- = \frac{E_0}{R_0} + i^- \end{cases}$

eq. linea $(4) V^- = -Z_0 i^-$

$\frac{R_0}{2} i = V_0 + V^-$

$\frac{R_0}{2} \left(\frac{E_0}{R_0} + i^- \right) = V_0 - Z_0 i^-$

$(Z_0 + \frac{R_0}{2}) i^- = E_0 - \frac{E_0}{2} = \frac{E_0}{2} \rightarrow i^- = \frac{E_0}{2Z_0 + R_0} = 43mA$

$V^- = -Z_0 i^- = -33,33V$

$V = E_0 + V^- = 66,67V$

$i = \frac{E_0}{R_0} + i^- = 172,1mA$

$t = T_d$

$V^+ = V_s V^- = 33,33V$
 $i^+ = -V_s i^- = 43mA$

$T_d < t < 2T_d$

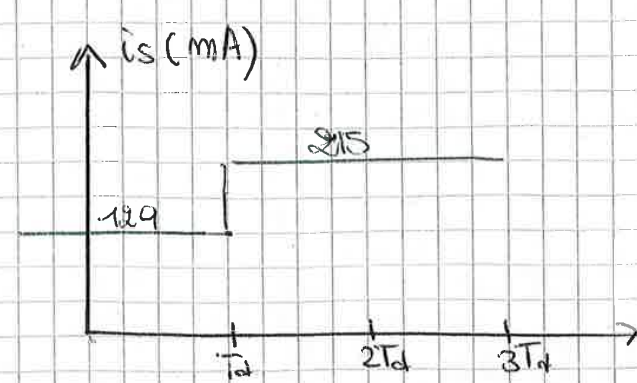
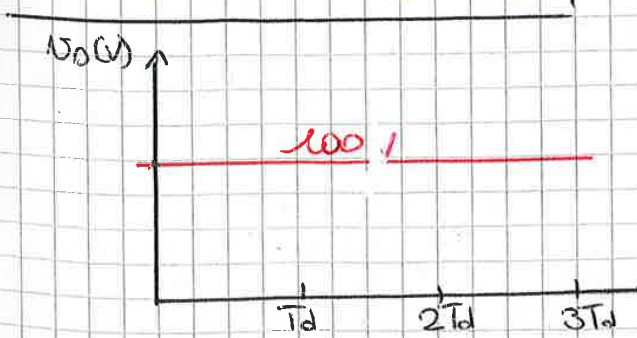
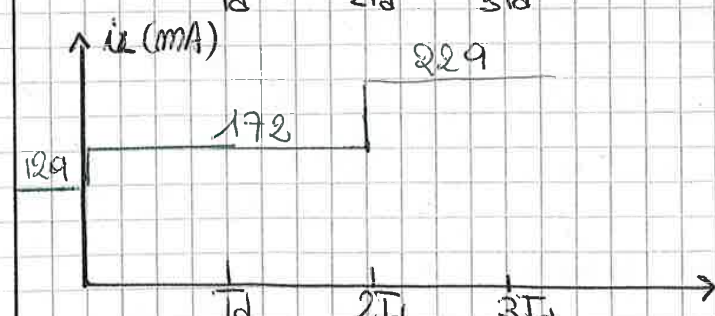
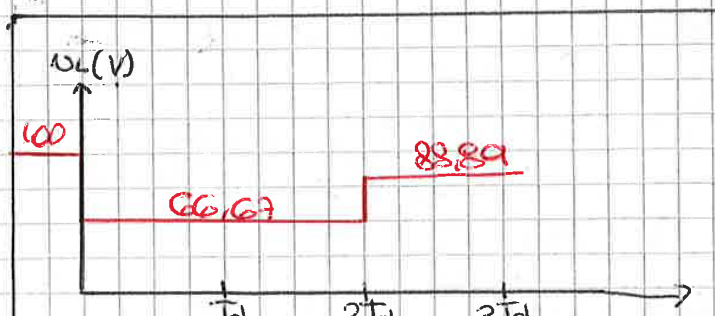
$V = V + V^+ = 100V$
 $i = i + i^+ = 215,2mA$

$t = 2T_d$

$V^{2-} = V_s V^+ = -11,11V$
 $i^{2-} = -V_s i^+ = 14,3mA$

$2T_d < t < 3T_d$

$V = V + V^{2-} = 88,89V$
 $i = i + i^{2-} = 229,5mA$



$$R_{eq} = Z_0 + R_L = 577 \Omega$$

$$E_{eq} = \frac{230ES}{Z_0 + R_S} = 158,07 \text{ kV}$$

$$\frac{dV_C}{dt} + \frac{1}{R_{eq}C} V_C = \frac{E_{eq}}{R_{eq}C}$$

$$V_C(t) = E_{eq} \left[1 - e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}} \right]$$

$$\tau = R_{eq}C = 2,88 \mu\text{s}$$

$$V_L = V = R_L i + V_C$$

$$i = C \frac{dV_C}{dt} = -CE_{eq} e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}} \cdot \left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{C}{R_{eq}} E_{eq} e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}}$$

$$V_L = \frac{R_L}{R_{eq}} E_{eq} e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}} + E_{eq} \left[1 - e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}} \right] =$$

$$E_{eq} \left[\left(\frac{R_L}{R_{eq}} + 1 \right) e^{-\frac{t - t_{1/4}}{\tau}} + 1 \right]$$



$x=0 \quad V=V_0$

$$V(x=0) = V_0' + V_0'' e^{-\alpha d} = V_0$$

$$V_0'' = \alpha V_0' = \alpha (V_0' e^{-\alpha d}) \rightarrow V_0'$$

$$V_0' + \alpha V_0' e^{-2\alpha d} = V_0$$

$$\begin{cases} V_0' = \frac{V_0}{1 + \alpha e^{-2\alpha d}} \\ V_0'' = \alpha V_0' = \alpha V_0' e^{-\alpha d} = \frac{V_0 \alpha e^{-\alpha d}}{1 + \alpha e^{-2\alpha d}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_0' = \frac{1}{Z_0} \frac{V_0}{1 + \alpha e^{-2\alpha d}} \\ I_0'' = -\frac{1}{Z_0} \frac{V_0 \alpha e^{-\alpha d}}{1 + \alpha e^{-2\alpha d}} \end{cases}$$

CASI IN ESAME

$$\alpha = \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0}$$

$\alpha = 1$

$$V_0'' = \frac{V_0 e^{-\alpha d}}{1 + e^{2\alpha d}} = \frac{V_0}{e^{\alpha d} + e^{-\alpha d}} = \frac{V_0}{2 \cosh \alpha d}$$

$$V_0' = \frac{V_0}{1 + e^{2\alpha d}}$$

Z_c	α
$Z_c = Z_0$	0
$Z_c \rightarrow \infty$	1
$Z_c = 0$	-1

$$\begin{cases} \alpha = z + jy \\ \rho = x + jy \end{cases}$$

$$\rho = \frac{Z_c}{Z_0}$$

$$\rho = \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

$$\alpha = z + jy = \frac{\rho - 1}{\rho + 1} = \frac{x + jy - 1}{x + jy + 1}$$

$$(z + jy)(x + jy + 1) = x + jy - 1$$

separo parte reale e immaginaria

$$(zx + z - wy) + j [wx + w + yz] = (x - 1) + jy$$

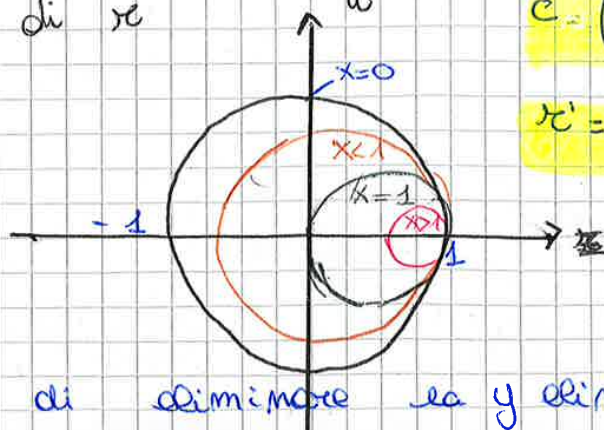
$$\begin{cases} zx + z - wy = x - 1 \\ wx + w + yz = y \end{cases} \quad \begin{cases} F(z, w, x) \\ G(z, w, y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + z - x_0 + 2x_0 = yw \\ w + x_0 w = y(1 - z) \end{cases}$$

Piano di Gauss di α

$$e = \left(\frac{x}{4x}, 0 \right)$$

$$\alpha' = \frac{1}{1 + x}$$



se al posto di eliminare la y eliminiamo la x

$$\frac{dI_c}{dx} = \frac{V_0}{2Z_0} e^{-\gamma x} \frac{-1 - e^{-2\gamma d}}{(1 + \gamma e^{-2\gamma d})^2} = 0 \rightarrow e^{-2\gamma d} = -1 \quad m = 0, 1, 2$$

$$e^{-2\gamma d} = e^{-j\beta(2m+1)\pi} = 1$$

$\alpha = 0 \rightarrow$ linea senza perdite
 $2\beta d = (2m+1)\pi$

$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$
 $d = (2m+1) \frac{\lambda}{4}$ $d = \frac{\lambda}{4} (2m+1)$

\rightarrow sostituendo $e^{-\gamma d} = -1$ im $I_c = \frac{V_0}{2Z_0} \left[\frac{e^{-\gamma d} (1 - \gamma)}{1 + \gamma e^{-2\gamma d}} \right]$

$$I_c = \frac{V_0}{2Z_0} e^{\gamma d} \left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right)$$

$$I_c = \frac{V_0}{2Z_0} e^{j\beta d} e^{-j\beta d} \quad \alpha = 0$$

$$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} (2m+1) \frac{\lambda}{4} d$$

$$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} (2m+1) = \frac{\pi}{2} (2m+1)$$

$$e^{j\beta d} = \begin{cases} m=0, 2, 4 & e^{j\frac{\pi}{2}} = j \\ m=1, 3 & e^{j\frac{3\pi}{2}} = -j \end{cases}$$

$$I_c \quad d = \frac{\lambda}{4} (m=0, 1, 2)$$

$$I_c = j \frac{V_0}{2Z_0} \quad I_c = -j \frac{V_0}{2Z_0} \quad d = \frac{3\lambda}{4}$$

$$\lambda f = a \quad \frac{\lambda}{T} = a \quad a = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \lambda = a/f \quad f = 10^6 \text{ Hz} \quad \lambda = 300 \text{ m}$$

Effetto Ferranti:

$$V_u = V(x=d)$$

$$V = \frac{V_0 e^{-\gamma x}}{1 + \gamma e^{-2\gamma d}} + \frac{V_0 e^{\gamma d} \gamma}{1 + \gamma e^{-2\gamma d}} e^{-\gamma(d-x)}$$

$$x = d$$

$$V_u = \frac{V_0 e^{-\gamma d}}{1 + \gamma e^{-2\gamma d}} + \frac{V_0 \gamma e^{-\gamma d}}{1 + \gamma e^{-2\gamma d}}$$

Linea a vuoto: $|Z_c| \rightarrow \infty$

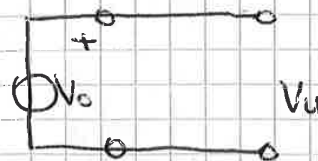
$$\gamma = \frac{\gamma_c - Z_0}{Z_c + Z_0} \quad \gamma \rightarrow 1 \quad -\gamma d$$

$$V_u = \frac{V_0}{e^{\gamma d} + e^{-\gamma d}} = \frac{V_0}{\cosh \gamma d}$$

$$\frac{|V_u|}{|V_0|} = \left| \frac{1}{\cosh \gamma d} \right| > 1$$

il valore efficace della tensione in uscita può essere > di quella in ingresso

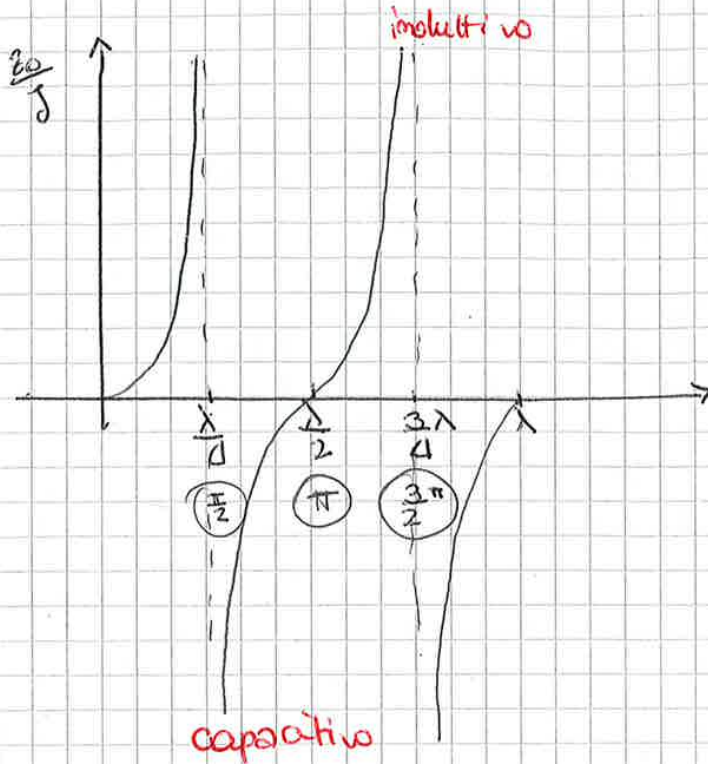
isolamento regge anche 2x 3x nel transitorio, dura poco



Linea come operatore che modifica le impedenze

Comportamento duale: linea chiusa su $Z_c = Z_0$

LINEA IN CORTO



Linea $d = \frac{\lambda}{4}$ lunghezza = 1/4 lungh. onda

$$\beta d = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0 = Z_{oc} \frac{Z_{sc}}{Z_c} = \frac{Z_{oc}^2}{Z_c}$$

$$Z_0 = Z_{oc} \frac{Z_c + j Z_{oc} \tan \beta d}{Z_{oc} + j Z_c \tan \beta d}$$

Linea $d = \frac{\lambda}{2}$

$$\frac{\omega}{\alpha} = 2\pi f \quad \beta d = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \frac{\lambda}{2} = \pi \quad Z_{0\frac{\lambda}{2}} = Z_c$$

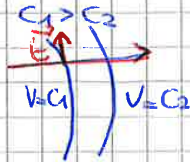
$$Z_0 \frac{\lambda}{4} Z_0 \frac{\lambda}{2} = Z_{oc}^2$$

$\text{rot} E = 0 \rightarrow \vec{E} = -\text{grad} V \rightarrow$ problema vettoriale in scalare

$\text{rot grad} V = 0 \quad \forall V$

$V' = V + \text{cost} \rightarrow \text{grad} V' = \text{grad} V$

$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} : E_x, E_y, E_z$



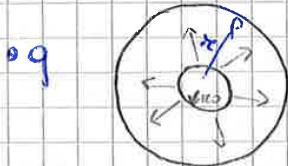
luoghi in cui il potenziale è costante sono le superfici equipotenziali. Campo elettrico \perp alle superfici equipotenziali.

$\text{grad} V \cdot \vec{ds} = \frac{dV}{ds} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{dV}{ds}$

$\vec{E} \cdot \vec{E} = 0 = E_0 = \frac{dV}{dt}$



cariche mescolate che si dispongono su sup. metalliche, carica soggetta a $E \perp$ sup senza componente tangenziale \rightarrow Campo stazionario. All'interno della sup il campo è nullo perché le cariche sono sulla superficie!



$\vec{E} = E_r \vec{u}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$

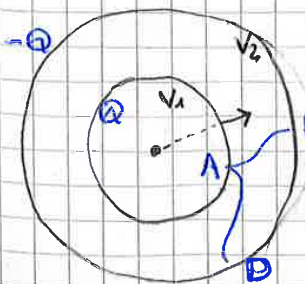


$E = -\text{grad} V$

$E = -\frac{dV}{dr}$

$dV = -E dr$

$V = \int -E dr = \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cost}$



Due sfere concentriche \rightarrow le metallizzo stesso campo tra 2 sup equipotenziali immaginarie. Si costruiscono i condensatori: oggetti con carica Q con differenza di potenziale $Q = C(V_1 - V_2)$

25/10/2017

Studio condizionale statico tempo
 contro di $\epsilon = \epsilon_0 e^{-t/\tau}$ tempo

$$\begin{cases} \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{rot } \vec{E} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{E} &= -\text{grad } V \\ \text{div } \epsilon \vec{E} &= \rho \end{aligned}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad \epsilon = \text{cost}$$

$$\text{div } (-\text{grad } V) = \frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$V = -\int \vec{k} d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \int \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} + \text{cost}$$

~~$V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} d\tau$~~ condizioni alle es normali
 ~~$V = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\rho}{r} d\tau + \int_{S=\partial\Omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{\partial V}{\partial r} \right) ds$~~ di Green in dominio illimitato

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon r} + \text{cost}$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{div } \text{rot } \vec{A} = 0$$

$$\text{div } (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) = 0 \rightarrow \text{div } \vec{j} = -\text{div } \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} * \text{div } \vec{D} &= \rho \\ - \text{div } \vec{j} &= -\frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \end{aligned}$$

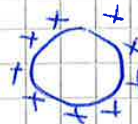
$$\begin{aligned} * \text{div } \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon} \\ - \text{div } \vec{E} &= -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\frac{\rho}{\epsilon} = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt = -\frac{dt}{\tau} \quad \rho = \rho_0 e^{-t/\tau}$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} = \frac{8.86 \cdot 10^{-12}}{18 \cdot 10^9}$$

$$\tau_a = \frac{1}{\rho_{cu}} = \frac{1}{18 \cdot 10^9 \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}$$



$$\tau = \rho_{cu} \epsilon = 18 \cdot 10^9 \cdot 8.86 \cdot 10^{-12} [\text{s}] \quad \text{tempo di confinamento}$$

tempo di confinamento dei conduttori

$$\tau \approx 160 \text{ ps} \approx 10^{-10} \text{ s} \text{ isolante}$$

materiali isolanti \rightarrow fenomeno stazionario tempo ∞
 materiali conduttori \rightarrow fenomeno istantaneo tempo 0

$$\frac{a+b-x_0}{x_0-b} = k \quad \left\{ \begin{array}{l} a+b-x_0 = kx_0 - kb \\ a+b+x_0 = kx_0 + kb \end{array} \right.$$

$$\frac{a+b}{d} = kx_0 \quad \bullet \quad a+b = d = kx_0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b-x_0 \\ kx_0 - x_0 = kx_0 - kb \\ \dots \end{array} \right. \bullet \quad b = \frac{x_0}{k}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b = kx_0 \\ a+b = k^2 b \end{array} \right. \quad \bullet \quad x_0 = kb$$

$$b = x_0/k$$

$$a + \frac{x_0}{k} = kx_0$$

$$a = x_0 \left(k - \frac{1}{k} \right) = x_0 \left(\frac{k^2 - 1}{k} \right)$$

$$\bullet \quad x_0 = \frac{ak}{k^2 - 1}$$

$$\bullet \quad b = \frac{x_0}{k} = \frac{a}{k^2 - 1}$$

$$\bullet \quad d = kx_0 = \frac{ak^2}{k^2 - 1}$$

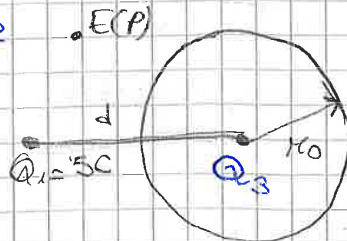
$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{a}{k^2 - 1} \\ x_0 = \frac{ak}{k^2 - 1} \\ d = \frac{ak^2}{k^2 - 1} \end{array} \right.$$

esiste ed è unica la superficie sferica con quelle caratteristiche

(Abbiamo risolto il problema diretto)

calcolare il campo elettrico all'esterno di una rep. sferica

Metaffica → equipotenziale
 Il potenziale ad esempio è 100 kV



Sfera a potenziale zero, carica diventa

carica 1, carica 2 : problema delle 2 cariche

$$Q_3 \rightarrow V_s = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0 r_0} \quad \text{potenziale della sfera}$$

sfera carica $Q_2 + Q_3 = 0$

$$Q_3 = -Q_2 = +\frac{Q_1}{k} = \frac{Q_1 \epsilon_0}{d}$$

$$Q_2 = -\frac{Q_1 \epsilon_0}{d}$$

$$Q_3 = -Q_2 = \frac{Q_1 \epsilon_0}{d}$$

$$V_{sfera} = \frac{Q_3}{4\pi\epsilon_0} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\epsilon_0}{d}$$

Campo elettrico calcolato
con precedenti prodotto da
 Q_1 nel centro sfera



$$3\epsilon_0 = 3 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 d^2}$$

Campo elettrico triplicato nelle' isolate

Addensamento tracce sup. equipotenziali $\rightarrow F \uparrow$

$$\epsilon = \frac{e}{S} = \frac{e}{\pi r_2^2}$$



Dal punto di vista energetico è come se la corrente si concentrasse in una zona di spessore S

potente costante j_0 in spessore S

equivalente corona circolare

$$\kappa = \frac{e}{\pi r_1^2 - \pi (r_1 - S)^2} \approx \frac{e}{2\pi r_1 S}$$

in realtà c'è anche il conduttore di ritorno $\kappa = \frac{e}{2\pi r_1 S} + \frac{e}{2\pi r_2 S} =$

$$= \frac{e}{2\pi S} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\kappa = \begin{cases} 2.24 \text{ mA/m} @ f_1 \\ 5 \text{ mA/m} @ f_2 \end{cases}$$

induttanza per unità di lunghezza $L = L_i + L_e \approx L_e$ 

$$L_e \approx L_e = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

$$L_i = \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{2S}{r_1} + \frac{2S}{r_2} \right) = \begin{cases} 3.56 \text{ mH/m} \\ 1.59 \text{ mH/m} \end{cases}$$

$$\text{capacità } C = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} > 688.03 \text{ pF/m}$$

conduttanza $g = 0 \text{ Sim} \rightarrow \text{testo}$

Applico sovrapposizione degli effetti perché ho f_1 e f_2
Prendo $E = \begin{cases} 10 \text{ V} = 10 \angle 0^\circ \text{ V} @ f_1 & \text{uso valore picco} \\ j \text{ eV} = 2 \angle 90^\circ \text{ V} @ f_2 \end{cases}$

$$\omega L = \begin{cases} 50.95 \Omega / \text{m} \gg \kappa \\ 2.54.76 \Omega / \text{m} \gg \kappa \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{molto tempo per calcolare } \kappa \text{ che} \\ \text{poi è trascurabile} \rightarrow \text{limite} \\ \text{perdite} \end{array}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 19.879 \Omega$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\beta = j\omega \sqrt{LC} = \begin{cases} j 4.636 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} @ f_1 \\ j 23.432 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1} @ f_2 \end{cases}$$

$$\cosh \gamma L = \cosh j\beta L = \cos \beta L = \begin{cases} -0.69788 \\ 0.65090 \end{cases} \rightarrow \text{PROVA}$$

$$\sinh \gamma L = \sinh j\beta L = j \sin \beta L = \begin{cases} j 0.71682 \\ -j 0.75164 \end{cases}$$

$$Z_{im} = Z_0 \frac{Z_L \cosh \gamma L + Z_0 \sinh \gamma L}{Z_0 \cosh \gamma L + Z_L \sinh \gamma L} = \begin{cases} 2.2788 + j 10.352 \Omega \\ 2.0745 + j 9.3483 \Omega \end{cases}$$

linea B

$$\gamma_B = 243,168 \cdot 10^9 + j 1,074 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$$

$$\gamma_B \alpha_B = 0,486 \cdot 10^3 + j 2,147 \cdot 10^3 \rightarrow 0$$

$$\cosh \gamma_B \alpha_B \approx 1$$

$$\sinh \gamma_B \alpha_B \approx \gamma_B \alpha_B$$

$$Z_{0B} = 123,374 - j 24,943 \Omega$$

Per linea A vede come carico l'impedenza di ingresso della linea B
 $Z_{inB} = Z_{0B}$

$$Z_{inA} = Z_{0A} \frac{Z_{inB} \cosh \gamma_A \alpha_A + Z_{0A} \sinh \gamma_A \alpha_A}{Z_{inB} \sinh \gamma_A \alpha_A + Z_{0A} \cosh \gamma_A \alpha_A} = 124,303 - j 19,206 \Omega$$

$$I_{inA} = \frac{E_s}{Z_{inA}} = 78,573 + j 12,140 \text{ A}$$

$$V_{outA} = V_{inB} = \frac{Z_{0B}}{Z_{0B} \cosh \gamma_A \alpha_A + Z_{0A} \sinh \gamma_A \alpha_A} E_s = 10,046 e^{-j 0,0752} \text{ kV}$$

$$I_{outA} = I_{inB} = \frac{V_{inB}}{Z_{inB}} = 79,40 e^{j 0,1476} \text{ A}$$

$$- V_{outB} = \frac{V_{inB}}{\sinh \gamma_B \alpha_B + \cosh \gamma_B \alpha_B} = 10,039 e^{j 0,0773} \text{ kV}$$

formule + semplici
perche linea B
e' adattata

$$I_{outB} = \frac{V_{outB}}{Z_{0B}} = 79,369 e^{j 0,1454} \text{ A}$$

$$S_{outB} = V_{outB} I_{outB}^* = 777,055 - j 175,992 \text{ kVA}$$

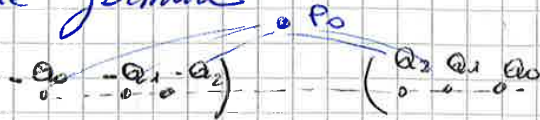
↑
1/2 ?

$$Q_2 = \frac{Q_1}{k_2} = Q_1 \frac{r_0}{d-b}$$

Carica un po' meno della metà diventa ancora più piccola
 cioè carica complessiva diventa sempre + piccola

$$b_2 = \frac{r_0^2}{\frac{d-b}{d_1}} = r_0 \frac{r_0}{d_1}$$

Cariche immagine: sempre messa sopra sempre decrescenti
 Successione di infinite cariche sulle conduttori.
 Sfera metalizzata, le tolgo. Problema delle 2 sfere
 diventano 2 luoghi geometrici con cariche alle distanze
 date dalle formule

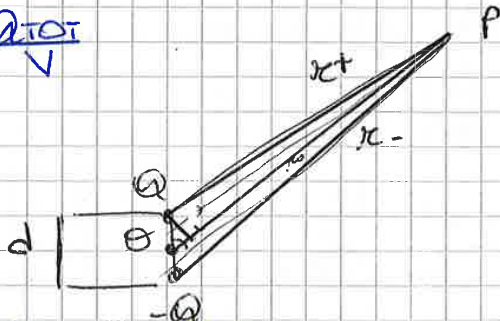


Se di fuori della sfera ho solo un campo, una
 sola soluzione unica
 Sommo potenziali prodotto da 6-8 cariche
 Campi sono radicali, forme geometriche
 Piano a $V=0$ a metà, cariche simmetriche

A ogni sfera associato carica:

Carica TOTALE Sfera 1 = $Q_0 + Q_1 + Q_2 \dots = Q_{TOT}$
 Sfera 2 = $-Q_0 - Q_1 - Q_2 \dots = -Q_{TOT}$
 Posso pensarlo come un condensatore

$$C = \frac{Q_{TOT}}{V}$$



bipolo elettrico

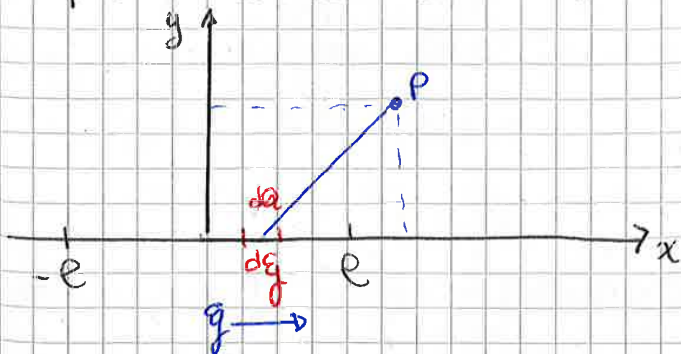
$$E = -\text{grad } V$$

$$V(P) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_+} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_-}$$

→ fatto a fisica, applicazioni formule bipolo elettrico
 del campo elettrostatico
 Capacità

Cariche lineari

prima analizziamo caso bidimensionale

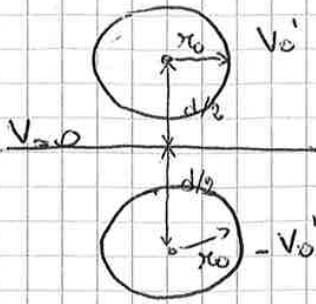


Posizione simmetrica
 Carica distribuita uniformemente
 sul segmento 2e

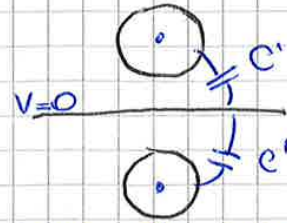
$$\text{considero } dq = \frac{Q}{2e} dg$$

$$dV(P, g) = \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$r = \sqrt{(x-g)^2 + y^2}$$

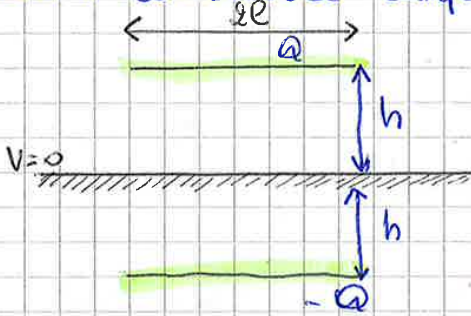


Caso spinterometrico
Nello spinterometrico si usano V tra le due sfere. Per il resto è uguale

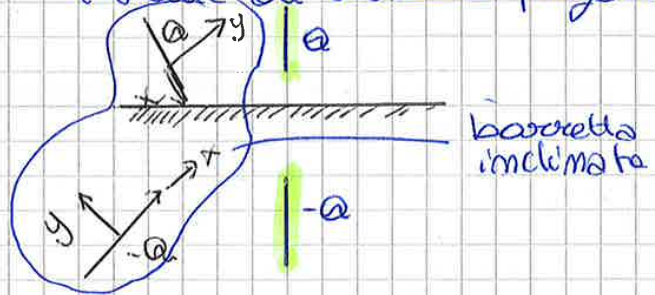


Capacità equivalente tra sfere e piano
 $\frac{1}{C} = \frac{1}{C'} + \frac{1}{C'} = \frac{2}{C'}$

Esercizio su un segmento: anche questa deriva da cariche puntiformi. Calcolare campo elettrico, capacità.



Uso anche qui cariche immagine
Posso calcolare anche se il segmento è verticale. È sempre un insieme di cariche puntiformi



Sistema di riferimento di verso, può usare le stesse formule

Con + cariche posso usare sovrapposizione degli effetti: una carica alla volta e annullo le altre V_0 bene finché non hanno dimensioni trasversali

Per turbazione locale prodotta dall'oggetto non c'è
se un influente è metallico equipotenziale. Nel caso di segmento verticale se un po' + complicato, non sarebbe equipotenziale.



Approssimazioni usando il potenziale del baricentro. Si può usare perché i potenziali decrescono + si allontanano dalla sorgente. Sono potenziali diversi ma approssimabili

Sovrapposizione $V_{sorgente} + V_{immagine} = V_{tot}$

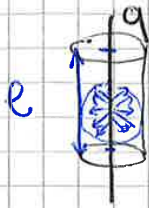
$$V_{sorg} (x=0, y=\frac{d}{2}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4\epsilon}{d}$$

$$V_{imm} (x=0, y=2h+\frac{d}{2})$$



8/11/2017

cariche in allungamento lungo linea infinita



campo radiale

considero cilindro sistema cilindrico

$$Q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \rho dz$$

div $\vec{D} = \rho$ divergenza dell'induzione è la densità elettrica di cariche

$$Q = \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{\Sigma} \rho dz$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

reg. cilindrico (r, θ, z)

$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r$$

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{s} ?$$

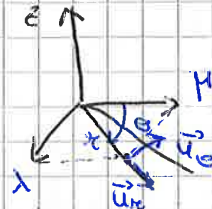
coste $d\vec{s} ?$

$$d\vec{s} = r d\theta dz$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^l D_r r d\theta dz = D_r r 2\pi l$$

$$D_r = \epsilon E_r \quad Q = \epsilon E_r 2\pi r l$$

$$E_r = \frac{Q}{2\pi \epsilon r l} = \frac{q}{2\pi \epsilon r}$$



$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

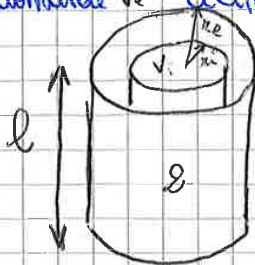
$$dV = -E_r dr$$

$$V = -\int \frac{q}{2\pi \epsilon r} dr$$

potenziale ha andamento logaritmico

$$V = \text{cost} \rightarrow \epsilon n r = \text{cost} \rightarrow r = \text{cost}$$

Superfici cilindriche con stesso raggio, stesso asse sono equipot. condensatore a cilindrico



$$V_i - V_e = \frac{q}{2\pi \epsilon} \epsilon n r_e \left\{ \begin{array}{l} V_e = -\frac{q}{2\pi \epsilon} \epsilon n r_e + \text{cost} \\ V_i = -\frac{q}{2\pi \epsilon} \epsilon n r_i + \text{cost} \end{array} \right.$$

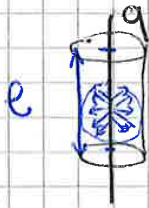
$$r_e > r_i$$

$$\epsilon n > 0$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon}{\epsilon n \ln \frac{r_e}{r_i}}$$

8/11/2017

Cariche in allungamento lungo linea infinita



campo radiale

considero cilindro sistema cilindrico

$$Q = \int \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho dz$$

$\text{div } \vec{D} = \rho$ divergenza dell'induzione è la densità elettrica di cariche

$$Q = \int_{S=10\pi} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int \rho dz$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

reg. cilindrico (r, θ, z)

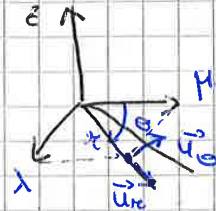
$$\vec{E} = E_r \vec{u}_r$$

$$\int \vec{D} \cdot d\vec{s} ?$$

$$\text{cos'è } d\vec{s} ?$$

$$d\vec{s} = r d\theta dz$$

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} D_r r d\theta dz = D_r r 2\pi r$$



$$D_r = \epsilon E_r \quad Q = \epsilon E_r 2\pi r r$$

$$E = \frac{Q}{2\pi \epsilon r} = \frac{q}{2\pi \epsilon r}$$

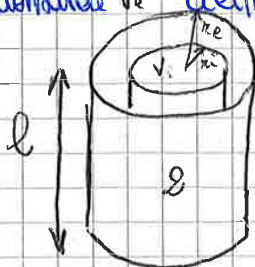
$$\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r$$

$$dV = -E_r dr$$

$$V = -\int \frac{q}{2\pi \epsilon r} dr$$

potenziale ha andamento logaritmico

$V = \text{cost} \rightarrow \ln r = \text{cost} \rightarrow r = \text{cost}$
 Superfici cilindriche con stesso raggio, stesso
 asse sono equipot.
 Condensatore cilindrico

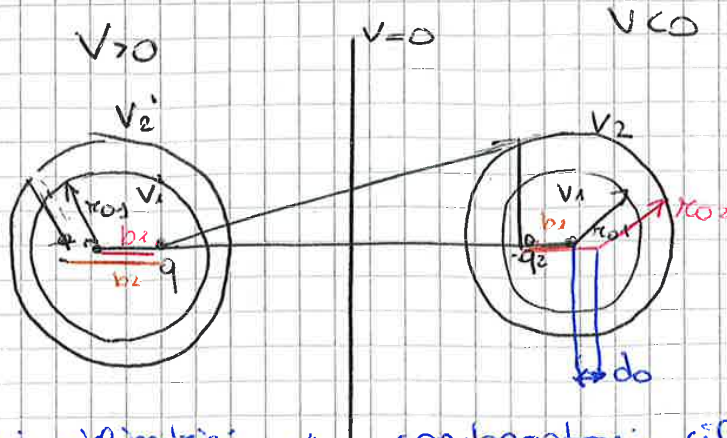


$$V_i - V_e = \frac{q}{2\pi \epsilon} \ln \frac{r_e}{r_i} \quad \left\{ \begin{array}{l} V_e = -\frac{q}{2\pi \epsilon} \ln r_e + \text{cost} \\ V_i = -\frac{q}{2\pi \epsilon} \ln r_i + \text{cost} \end{array} \right.$$

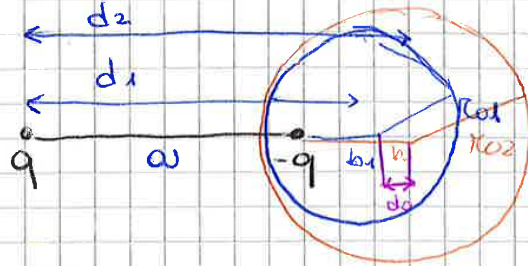
$$r_e > r_i$$

$$\ln > 0$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon}{\ln \frac{r_e}{r_i}}$$



Due assi cilindrici // , condensatori cilindrici



$$d_0 = d_2 - d_1$$

$$d_0 = b_2 - b_1$$

$$\begin{cases} d_0 = \kappa_{02} k_2 - \kappa_{01} k_1 \\ d_0 = \frac{\kappa_{02}}{k_2} - \frac{\kappa_{01}}{k_1} \end{cases}$$

$$k_2 = \frac{d_0 + \kappa_{01} k_1}{\kappa_{02}}$$

$$d_0 = \frac{\kappa_{02}^2}{d_0 + \kappa_{01} k_1} - \frac{\kappa_{01}}{k_1}$$

$$d_0 = \frac{(\kappa_{02}^2 - \kappa_{01} (d_0 + \kappa_{01} k_1))}{k_1 (d_0 + \kappa_{01} k_1)}$$

$$k_1 (d_0^2 + d_0 \kappa_{01} k_1) = \kappa_{02}^2 - \kappa_{01} (d_0 + \kappa_{01} k_1)$$

$$k_1^2 d_0 \kappa_{01} + k_1 (d_0^2 + \kappa_{01}^2 - \kappa_{02}^2) + \kappa_{01} d_0 = 0$$

$$k_1 = \frac{(\kappa_{02}^2 - \kappa_{01}^2 - d_0^2) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4 \kappa_{01}^2 d_0^2}}{2 d_0 \kappa_{01}}$$

$$k_1' = \frac{(\quad) + \sqrt{\quad}}{2 d_0 \kappa_{01}}$$

$$k_2 = \frac{(\kappa_{02}^2 - \kappa_{01}^2 + d_0^2) \pm \sqrt{(\quad)^2 - 4 \kappa_{02}^2 d_0^2}}{2 d_0 \kappa_{02}}$$

$$k_1'' = \frac{(\quad) - \sqrt{\quad}}{2 d_0 \kappa_{01}}$$

$$k_2' \cdot k_2'' = 1$$

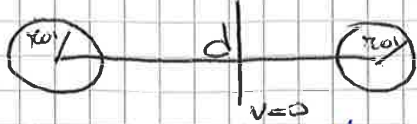
$$k_1' \cdot k_1'' = 1$$

$$\frac{(\quad) + \sqrt{\quad}}{2 d_0 \kappa_{01}} \cdot \frac{(\quad) - \sqrt{\quad}}{2 d_0 \kappa_{01}}$$

$$\frac{(\kappa_{02}^2 - \kappa_{01}^2 - d_0^2)^2 - [(\kappa_{02}^2 - \kappa_{01}^2 - d_0^2)^2 - 4 \kappa_{01}^2 d_0^2]}{4 d_0^2 \kappa_{01}^2} = 1$$

$$V = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^{k_1}$$

Conduttori non abbracciatesi e di r uguale



$$a_1 = \frac{d}{2}$$

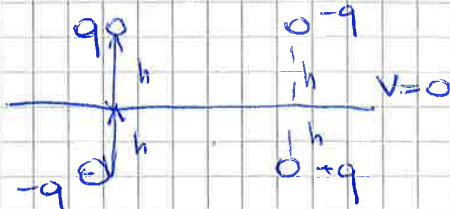
$$a_2 = \frac{d}{2}$$

$$k_1 = \frac{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - r^2}}{r}$$

$$k_2 = \frac{\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} - r^2}}{r}$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln k_1^2 = \frac{q}{\pi\epsilon} \ln k_1 = \frac{q}{\pi\epsilon} \ln \frac{d}{r_0} = \frac{q}{C}$$

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln d/r_0} \quad \frac{F}{m}$$



$k^{(2)} = \frac{d^{(1)}}{r_0}$ $q_A^{(2)} = -\frac{q_A^{(1)}}{k^{(2)}}$ $b^{(2)} = \frac{r_0^2}{d^{(1)}}$ $d^{(2)} = d - b^{(2)}$

Adesso siamo ho una serie di cariche $q_A^{(n)}$. Il metodo converge se:

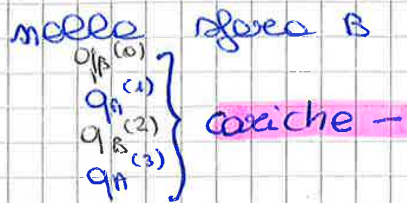
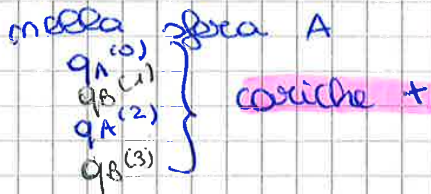
$\lim_{m \rightarrow \infty} q_A^{(m)} = 0$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} b^{(m)} = B$ finito (punto di accumulazione)

Si ha convergenza perché aggiungo cariche sempre + piccole.

Non siamo ancora al caso precedente. Però mettiamo una carica in B

$V_B = \frac{q_B^{(0)}}{4\pi\epsilon_0 r_0} \rightarrow q_B^{(0)} = 4\pi\epsilon_0 r_0 V_B = -2\pi\epsilon_0 r_0 \Delta V = -q_A^{(0)}$

Non dobbiamo fare nulla, stesse cariche \uparrow stesse distanze \uparrow con \ominus



$q_A^{TOT} = \sum_{m=0}^{\infty} q_A^{(2m)} + \sum_{m=0}^{\infty} q_B^{(2m+1)} = -q_B^{TOT}$

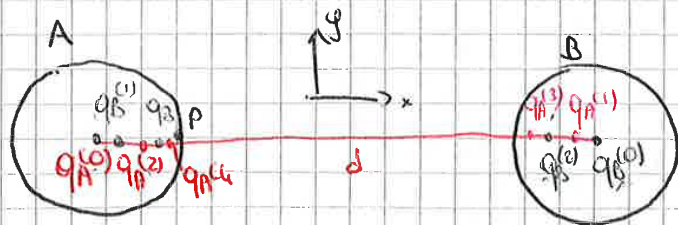
$C = \frac{q_A^{TOT}}{\Delta V}$

Sovrapponiamo effetti con cariche puntiformi: per trovare V in un punto

es. numerico

es. 3.4

$\Delta V = 20 \text{ kV}$
 $r_0 = 1 \text{ m}$
 $d = 5 \text{ m}$
 $\epsilon_r = 1$



$V_A = 10 \text{ kV}$
 $V_B = -10 \text{ kV}$

m	k	$q_A^{(m)}$ (C)	$b^{(m)}$ (m)	$d^{(m)}$ (m)
0	-	$1.1127 \cdot 10^6$	0	5
1	5	$-2.2254 \cdot 10^7$	0,2	4,8
2	4,8	$4.6356 \cdot 10^8$	0,2083	4,792
3	4,792	$-9.675 \cdot 10^9$	0,2087	4,7913
4	4,7913	$2.0196 \cdot 10^{10}$	0,20871	4,79129

Per B q cambia segno, $b^{(m)}$ (m) altro significato

Se voglio altro divisione di potenziale tra due risolti?

$a \rightarrow \infty \rightarrow \frac{\Delta V}{2}$

Non abbiamo due cariche per unità di lunghezza, abbiamo i potenziali:

$$V(x,y) = \ln \left(\frac{x+l + \sqrt{(x+l)^2 + y^2}}{x-l + \sqrt{(x-l)^2 + y^2}} \right) \cdot \frac{qL}{2\pi\epsilon_0}$$

$$V_1 = V_1^{(re)} + V_1^{(i)} = V(x=0, y=\frac{d}{2}) + V(x=0, y=2d) + V_{=0 \text{ plane}} = 0 \text{ plane } V_0=0$$

$$V_1 = \frac{qL}{2\pi\epsilon_0} \left[\ln \frac{l + \sqrt{l^2 + d^2/4}}{-l + \sqrt{l^2 + d^2/4}} - \ln \frac{l + \sqrt{l^2 + 4d^2}}{-l + \sqrt{l^2 + 4d^2}} \right] = 100 \text{ kV}$$

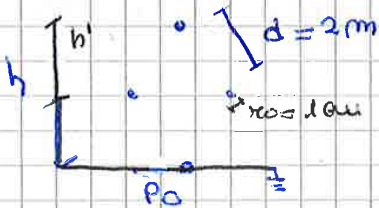
$6,5628 \cdot 10^{10} qL$

$$qL = 3,0474 \mu\text{C/m}$$

$$V(P_0) = V^{(re)}(P_0) + V^{(i)}(P_0) = V^{(re)}(x=l, y=-\frac{d}{2}) + V^{(i)}(x=l, y=\frac{3}{2}d) = 29,561 \text{ kV}$$

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial V}{\partial y} \vec{u}_y \rightarrow \text{gradiente di } (*)$$

es. 31



$$\begin{aligned} V_1 &= 100 \text{ kV} \\ V_2 &= -100 \text{ kV} \\ V_3 &= 0 \text{ V} \\ E = E_0 &= 8,85 \cdot 10^{12} \text{ F/m} \end{aligned}$$

Calcolo carica per unità di lunghezza

$$h' = d \sqrt{\epsilon_r} = 1,732 \text{ m}$$

$$\begin{cases} V_1 = p_{11} q_1 + p_{12} q_2 + p_{13} q_3 \\ V_2 = p_{21} q_1 + p_{22} q_2 + p_{23} q_3 \\ V_3 = p_{31} q_1 + p_{32} q_2 + p_{33} q_3 \end{cases}$$

p: coeff di potenziale
CpJ = m/F

$$\{V\} = [P]\{q\} \rightarrow \text{risolvere sistema } 3 \times 3, \text{ calcolatrice}$$

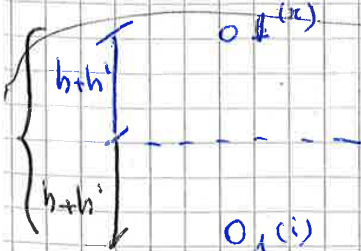
$$p_{11} = \frac{V_1}{q_1} \Big|_{q_2=q_3=0}$$

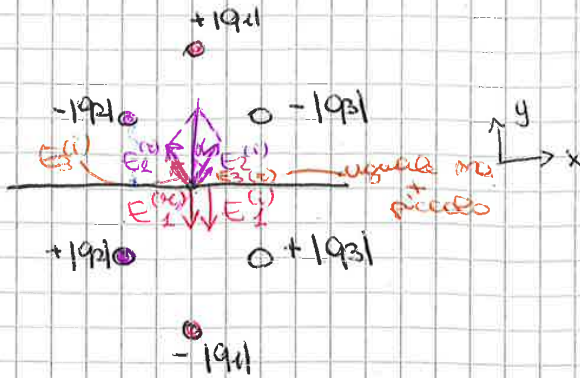
formula

$$V_1 = V_1^{(re)} + V_1^{(i)} = \left(-\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r_0} \right)^{(re)} + \left(\frac{q_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{2(h+h')} \right)^{(i)} =$$

$$= \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2(h+h')}{r_0}$$

$$p_{11} = \frac{V_1}{q_1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2(h+h')}{r_0} = 150,58 \cdot 10^9 \text{ m/F}$$





$$|\vec{E}_1^{(2)}| = \frac{1921}{2\pi\epsilon_0(h+h')} = |\vec{E}_2^{(1)}| = 866,14 \text{ V/m}$$

$$|\vec{E}_2^{(2)}| = |\vec{E}_2^{(1)}| = \frac{1921}{2\pi\epsilon_0\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}} = 934,93 \text{ V/m}$$

$$|\vec{E}_3^{(2)}| = |\vec{E}_3^{(1)}| = \frac{1921}{2\pi\epsilon_0\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}} = 2,73 \text{ V/m}$$

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}} = 0,99875$$

$$E(P_0) = [-2|E_1| + 2|E_2|\cos\alpha + 2|E_3|\cos\alpha] \hat{u}_y$$

teorema come riferimento
 3 armatura partenze
 3 " " immagini
 Abbiamo gemelle "capacità"

Nodo elettrico 

$$q_1 = t_{11} V_{1m} + t_{12} V_{2m} + \dots + t_{1m-1} V_{m-1m}$$

Passare da t a $C \rightarrow$ abbiamo le regole per passare da una all'altra, uguagliando le righe

$$\begin{cases} q_1 = (C_{11} + C_{12} + \dots + C_{1m-1}) V_{1m} - C_{12} V_{2m} - C_{13} V_{3m} - \dots - C_{1m-1} V_{m-1m} \\ q_1 = t_{11} V_{1m} + t_{12} V_{2m} + \dots + t_{1m-1} V_{m-1m} \end{cases}$$

trovo che

$$\begin{aligned} C_{12} &= -t_{12} \\ C_{13} &= -t_{13} \\ C_{1m} + C_{12} + \dots + C_{1m-1} &= t_{11} \\ C_{1m} &= \underbrace{-C_{12}}_{t_{12}} - \dots - \underbrace{C_{1m-1}}_{t_{1m-1}} + t_{11} \end{aligned}$$

fuori dalla diagonale a meno del segno che corrisponde tra t_{ij} e C_{ij}

campo di corrente statico
sede nei materiali conduttori

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{E} = 0 \\ \text{div } \vec{J} = 0 \\ \vec{J} = \sigma \vec{E} \end{cases}$$

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$



Analizziamo tubi di flusso del campo
campo tangente in ogni punto
poiché $\text{div } \vec{J} = 0$ individuo una sup. chiusa

$$\oint_{\partial V} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_1 \cup S_2 \cup S_e$$

$$\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \underbrace{\int_{S_e} \vec{J} \cdot d\vec{s}}_0 + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$
 $I_1 = I_2$

Conduttori con conducibilità diversa

Terreno
conduttore
"mediocre"

conduttore
metallico

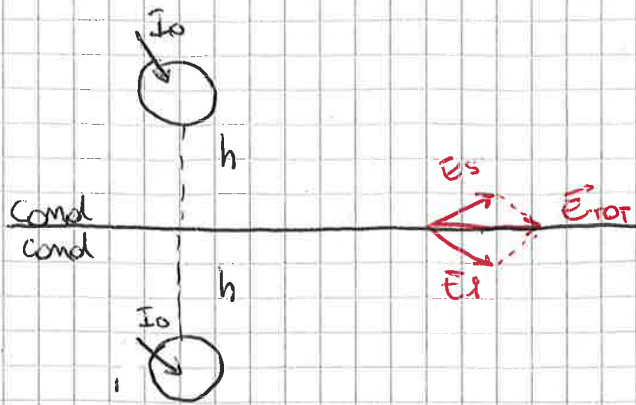
$$\begin{aligned} \vec{J} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{E} &= \rho \vec{J} \end{aligned}$$

• $\rho_{cu} = 20 \cdot 10^3 \Omega \text{mm/m} \rightarrow 20 \cdot 10^9 \Omega \text{m}$

Il terreno normalmente non è conduttore.

• $\rho_{terreno} = 10 - 1000 \Omega/\text{m}$

Elementi dispersivi metallici che immettono corrente nel terreno \rightarrow resistenze di terra
impianti di terra



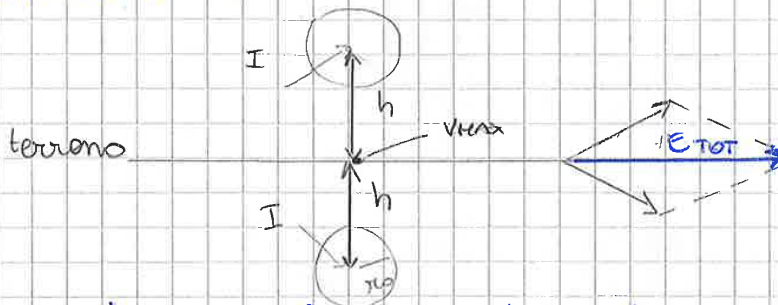
15/11/2017

Dispensori a sfera appiandata

$$V = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

Approccio delle immagini
Otteniamo campo risultante lungo x



Trascuriamo la presenza di una sfera, dopo l'altra e poi sovrapposizione degli effetti

- potenziale sulla sup. dispersore
→ resistenza di terra

$$V_0 = V_{0s} + V_{0i}$$

↑ sorgente ↑ immagine

$$V_{0s} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$

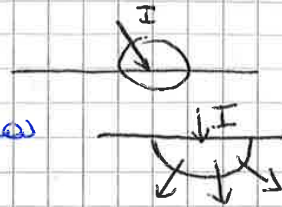
V_{0i} → calcolo nel baricentro, coordinata radiale = 2h

$$V_{0i} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 2h}$$

$$V_0 = \frac{I}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{2h} \right) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right)$$

$$R_T = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_0} \left(1 + \frac{r_0}{2h} \right) \quad V_0 = I R_T$$

- Avviciniamo due sfere cariche superficie
 Ne possiamo usare solo metà → semisfere



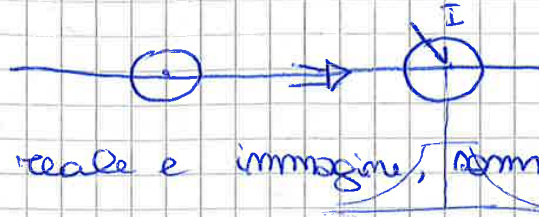
$$J = \frac{I}{2\pi r^2} \quad E = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$E_x = -\frac{dV}{dx} \rightarrow dV = -E_x dx \quad V = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r}$$

1/2 sfera → $R_{12} = \frac{1}{2\pi \epsilon_0 r_{12}}$
 Posso vedere anche come

$$V = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r_1} + \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r_2} = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 r}$$

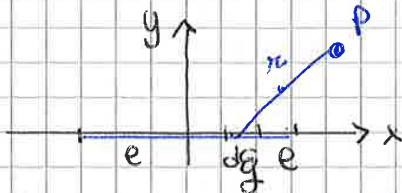
due sfere sovrapposte, quella reale e immagine, sommo i potenziali



- segmento di retta interessato da corrente. Ha una densità di corrente

segmento lungo $2e$

$$\frac{I}{2e} dq$$



$$dV = \frac{I}{2e} dq \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r} \quad V = \int_{-e}^e \frac{I dq}{8\pi \epsilon_0 e \sqrt{(x-g)^2 + y^2}} = \frac{I}{8\pi \epsilon_0 e} \ln \frac{(x+e)\sqrt{(x+e)^2 + y^2} + (x-e)\sqrt{(x-e)^2 + y^2}}{(x-e)\sqrt{(x-e)^2 + y^2} + (x+e)\sqrt{(x+e)^2 + y^2}}$$

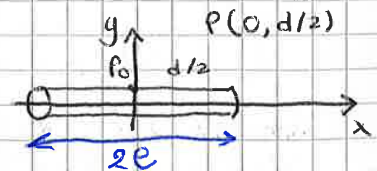
Formula del potenziale in un qualsiasi punto dello spazio



vale nel piano in cui c'è punto e sorgente
 $P(x', y', z')$
 $x = x' \cos \alpha$
 $y = \sqrt{y'^2 + z'^2}$

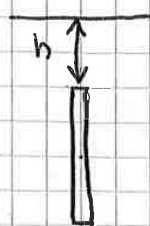
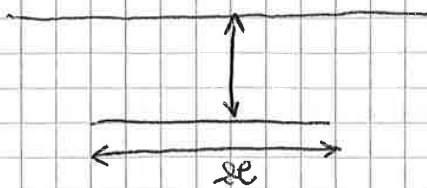
Ellissoidi

conduttore senza dimensione trasversale
 $2e \gg \frac{d}{8}$

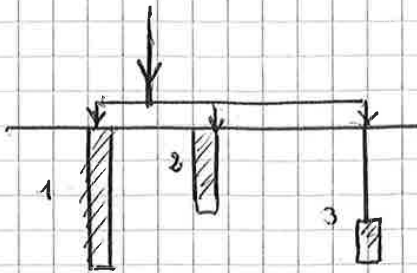


circosferenze
 ellissi

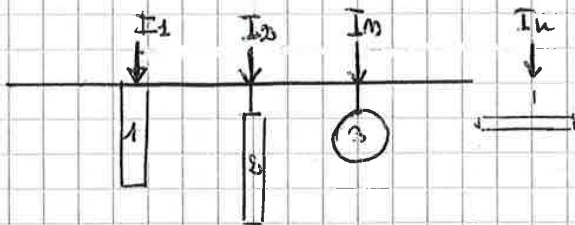
dipende da come taglie, vedo sup.
 equipotenziali diverse



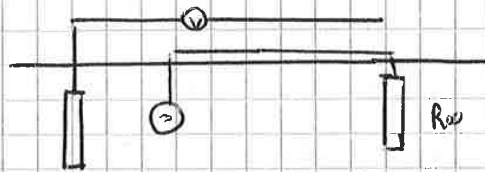
Problemas + dispersori
 sono suff. distanti → resistenze in parallelo
 quando immetto corrente solo in uno e negli altri il
 potenziale è prossimo a zero
 Dispersori che si avvicinano → interagiscono



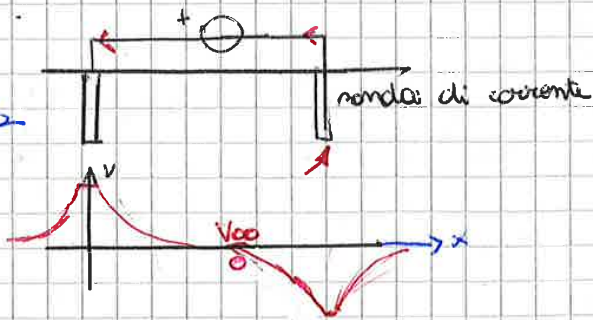
16/11/2017



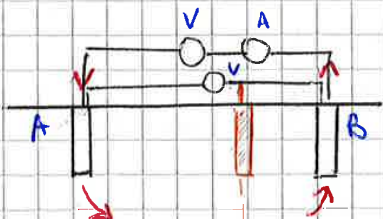
$$V_1 = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 + \dots + R_{1n} I_n$$



imp. teoria

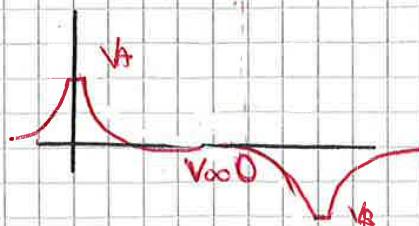


è la stessa corrente, sono in serie



$$\frac{V_{AB}}{I} = R_{T1} + R_{T2}$$

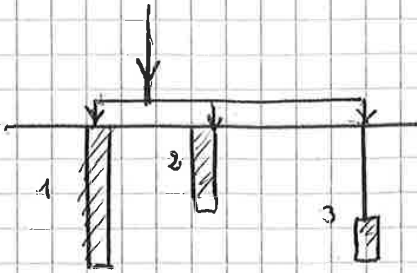
se $R_{T2} \rightarrow 0$ "conosco" R_{T1}
 $R_{T2} \approx 0$
 $R_{T2} \ll R_{T1}$



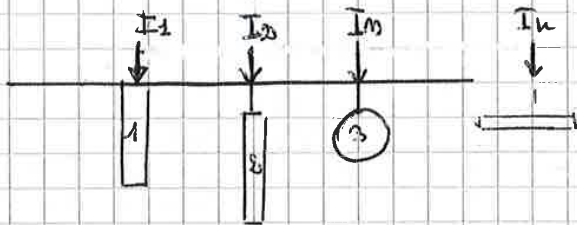
Misura tensione applicata a dispersore 1, metto un picchetto dove c'è lo zero. Avvicino e allontano la sonda al dispersore A.

Dopo trovare una regione "piatta", 5 volte distanze impianto di terra

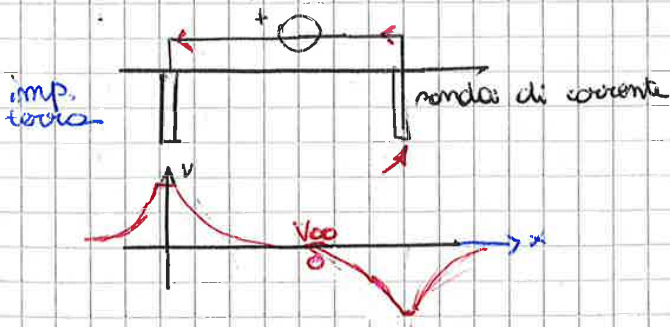
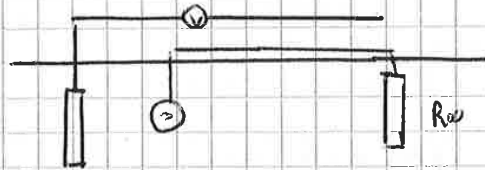
Problema + dispersori
 Sono suff. distanti \rightarrow resistenze in parallelo
 Quando immetto corrente solo in uno e negli altri il potenziale è prossimo a zero
 Dispersori che si avvicinano \rightarrow interagiscono



16/11/2017



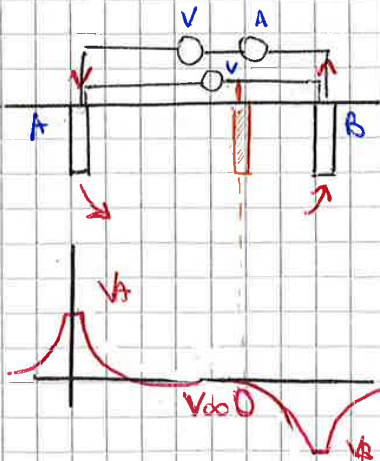
$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots + R_{1N}I_N$$



è la stessa corrente, sono in serie

$$\frac{V_{AB}}{I} = R_{T1} + R_{T2}$$

se $R_{T2} \rightarrow 0$ "conosco" R_{T1}
 $R_{T2} \approx 0$
 $R_{T2} \ll R_{T1}$



Misura tensione applicata a dispersore 1, metto un picchetto dove c'è lo zero. Avvicino e allontano la sonda al dispersore A.

Dopo trovato una regione "piatta", si volte distanza impianto di terra

Tutto l'impianto è interessato da
somma di tutti i termini (conduttanze)
della matrice

$$I = \sum_{k=1}^m I_k = \left(\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m G_{kj} \right) \cdot V$$

$$I = G_{eq} V$$

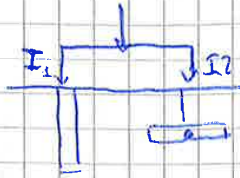
$$V = I / G_{eq}$$

$$\frac{I_k}{I} = \frac{\sum_{j=1}^m G_{kj}}{\sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^m G_{kj}}$$

esempio con 3 picchetti

$$R_{eq} = \frac{1}{G_{eq}} = \frac{1}{G_{11} + G_{12} + G_{21} + G_{22}}$$

$$\begin{cases} V = R_{11} I_1 + R_{12} I_2 \\ V = R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \end{cases}$$



$\frac{1}{\rho} = \rho \approx 10 \div 100 \text{ } \Omega/\text{m}$ valori buoni, sali minerali
 $200 \div 500 \text{ } \Omega/\text{m}$ composizione mista

sostituire terreno nei dintorni del dispersore \rightarrow sparisce
 con la pioggia nel tempo



picchetto suddiviso in parti
 piccole. così corrente cambia
 perché si disperde

Verificare che un impianto non influisca su altro

$$v = Ae^{\alpha x} + Be^{-\alpha x}$$

$$i = -\frac{1}{r} (\alpha A e^{\alpha x} - \alpha B e^{-\alpha x}) = -\frac{\alpha}{r} A e^{\alpha x} + \frac{\alpha}{r} B e^{-\alpha x}$$

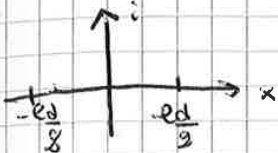
$$\alpha = \sqrt{rg}$$

$$\frac{\alpha}{r} = \frac{\sqrt{rg}}{r} = \sqrt{\frac{g}{r}} = \frac{1}{Z_{00}}$$

$$Z_{00} = \sqrt{\frac{r}{g}} \quad \alpha = \sqrt{rg}$$

$$i = -\frac{A}{Z_{00}} e^{\alpha x} + \frac{B}{Z_{00}} e^{-\alpha x}$$

Applico le condizioni al contorno per vedere andamenti di tensione e corrente

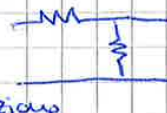


$$x = -\frac{l_d \text{ disp}}{2}$$

$$x = \frac{l_d \text{ disp}}{2}$$

$$i \left(-\frac{l_d}{2} \right) = I_0 \text{ disp}$$

$$i \left(\frac{l_d}{2} \right) = I_0 \text{ convenziona}$$



$$\begin{cases} I_0 = -\frac{A}{Z_{00}} e^{-\alpha \frac{l_d}{2}} + \frac{B}{Z_{00}} e^{\alpha \frac{l_d}{2}} \cdot e^{-\alpha \frac{l_d}{2}} & e^{\alpha \frac{l_d}{2}} \\ I_0 = -\frac{A}{Z_{00}} e^{\alpha \frac{l_d}{2}} + \frac{B}{Z_{00}} e^{-\alpha \frac{l_d}{2}} \cdot e^{+\alpha \frac{l_d}{2}} & -e^{-\alpha \frac{l_d}{2}} \end{cases}$$

$$I_0 (e^{-\alpha \frac{l_d}{2}} - e^{\alpha \frac{l_d}{2}}) = -\frac{A}{Z_{00}} e^{-\alpha l_d} + \frac{A}{Z_{00}} e^{\alpha l_d} = \frac{1}{Z_{00}} A (e^{\alpha l_d} - e^{-\alpha l_d})$$

$$A = -Z_{00} I_0 \frac{1}{e^{\alpha \frac{l_d}{2}} + e^{-\alpha \frac{l_d}{2}}} \quad B = \frac{Z_{00} I_0}{e^{\alpha \frac{l_d}{2}} - e^{-\alpha \frac{l_d}{2}}}$$

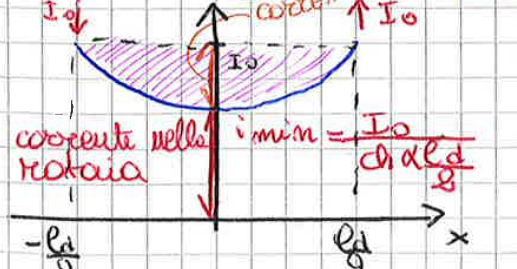
ricavo B moltiplico per $e^{\alpha \frac{l_d}{2}}$

$$I_0 (e^{\alpha \frac{l_d}{2}} - e^{-\alpha \frac{l_d}{2}}) = \frac{B}{Z_{00}} (e^{\alpha l_d} - e^{-\alpha l_d})$$

$$B = \frac{Z_{00} I_0}{e^{\alpha \frac{l_d}{2}} + e^{-\alpha \frac{l_d}{2}}} = -A$$

$$i = \frac{I_0}{e^{\alpha \frac{l_d}{2}} + e^{-\alpha \frac{l_d}{2}}} [e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}] \Rightarrow i = \frac{I_0}{2 \text{ch } \alpha \frac{l_d}{2}} \text{ ch } \alpha x$$

$$v = -\frac{Z_{00} I_0}{2 \text{ch } \alpha \frac{l_d}{2}} [e^{\alpha x} - e^{-\alpha x}] = -\frac{Z_{00} I_0}{2 \text{sh } \alpha \frac{l_d}{2}} \text{ sh } \alpha x$$



$I_0 - i_{\text{min}}$
Potenza nel terreno non passa tutto nel conduttore

grafico del coseno iperbolico
derivata $2 \text{sh} \rightarrow \text{ch}$
 $\text{ch} \rightarrow 2 \text{sh}$

$$I_0 - i_{\text{min}}$$

Mezzi a permeabilità costante e circuiti fili formi:

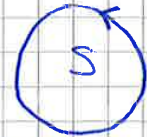


$$i_1 \rightarrow H_1, B_1$$

$$i_2 \rightarrow H_2, B_2$$

$$i_1 + i_2 \rightarrow H = H_1 + H_2$$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A} \quad \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S} \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad \partial S = \partial S$$



$$\lambda_2 = \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial S_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2 = \int_{L_2} \vec{A} \cdot d\vec{l}_2$$

se il campo è sinusoidale
sup. chiusa, flusso totale = 0

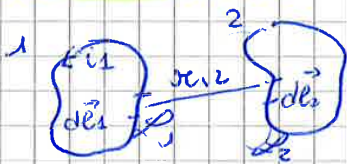
Semplice il calcolo, flusso concatenato con linea

$$= \oint_{L_2} \left(\oint_{L_1} \frac{\mu_0 i_1}{4\pi r_{12}} d\vec{l}_1 \right) \cdot d\vec{l}_2 \quad \text{formule di Neumann}$$

su L_2 voglio calcolare il flusso concatenato
su L_1 quello (potenziale vettore) che ho ottenuto

$$\lambda_2 = i_1 [L_{21}]$$

L_{21} : mutua induttanza tra 2 e 1



potenziale vettore associato a flusso magnetico

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_m \end{bmatrix} = [L] \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_m \end{bmatrix}$$

di permeabilità dei conduttori

prodotto scalare: se cambio verso cambia il prodotto.
Scelgo ad arbitrio e correnti, cambia il risultato
con + o con -

$$\gamma = cV = 13,326 \text{ pF/m}$$

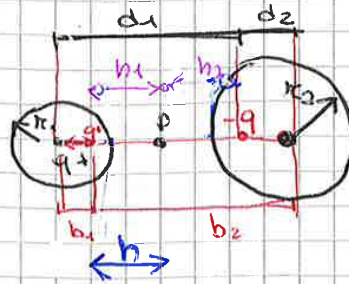
$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{r_1}{k_1} = 0,0314 \text{ m} \\ b_2 &= \frac{r_2}{k_2} = 0,3656 \text{ m} \end{aligned} \right\} \text{cariche } q > 0$$

$$\begin{aligned} d_1 &= k_1^+ r_1 = 0,2906 \text{ m} \\ d_2 &= k_2^+ r_2 = 0,1094 \text{ m} \end{aligned}$$

$$h = d - r_1 - r_2 = 0,05 \text{ m}$$

$$h_1 = h + r_1 - b_1 = 0,1156 \text{ m}$$

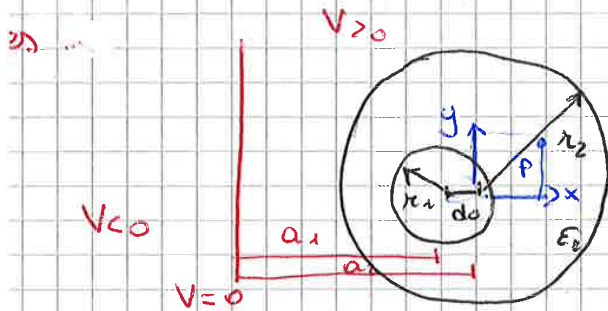
$$h_2 = h + r_2 - d_2 = 0,1406 \text{ m}$$



$$\vec{E}^+(P_0) = \frac{|q|}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 h_1} \vec{u}_x = 1,0362 \cdot 10^6 \vec{u}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{E}^-(P_0) = \frac{|-q|}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0 h_2} \vec{u}_x = 0,8519 \cdot 10^6 \vec{u}_x \text{ V/m}$$

$$\vec{E}(P_0) = \vec{E}^+(P_0) + \vec{E}^-(P_0) = 1,8881 \vec{u}_x \text{ kV/mm}$$



$$\begin{aligned} d_0 &= 115 \text{ cm} \\ r_1 &= 4 \text{ cm} \\ r_2 &= 8 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\epsilon_r = 20$$

capacità per unità di lunghezza

$$a_1 = \frac{r_2^2 - r_1^2 - d_0^2}{2d_0} = 15,25 \text{ cm}$$

$$a_2 = \frac{r_2^2 - r_1^2 + d_0^2}{2d_0} = 16,75 \text{ cm}$$

$$k_1 = \frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - r_1^2}}{r_1} = \begin{cases} \oplus 7,4915 = k_1^+ \\ \ominus 0,1335 = k_1^- \end{cases}$$

$$k_2 = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - r_2^2}}{r_2} = \begin{cases} \oplus 3,9333 = k_2^+ \\ \ominus 0,2542 = k_2^- \end{cases}$$

ad arbitrio scelto
 \oplus , nel caso il rapporto deve essere > 0

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{k_1^+}{k_2^+}} = 863,451 \text{ pF/m}$$

1) lavoro meccanico richiesto per avere $d_0 = 0$
 $V = 10 \text{ kV} \rightarrow$ ho condensatore cilindrico

\ominus lavoro spontaneo

$$\Delta W = \Delta E = E_2 - E_1 = \frac{1}{2} c_2 V^2 - \frac{1}{2} c_1 V^2 = \frac{1}{2} V^2 (c_2 - c_1) = -3,0417 \text{ mJ/m}$$

conduttore
cilindrico

$$c_2 = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = 802,228 \text{ pF/m}$$