appunti
www.centroappunti.it
Corso Luigi Einaudi, 55/B - Torino

Appunti universitari
Tesi di laurea
Cartoleria e cancelleria
Stampa file e fotocopie
Print on demand
Rilegature

NUMERO: 2281A ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Marangi Flavio

MATERIA: Fluidodinamica Computazionale - Prof. D'ambrosio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell’autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTI E NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 166

FLUIDODINAMICA COMPUTAZIONALE

ESAME: 3 DOMANDE ORALI DI CUI 1 SU ESERCITAZIONI DA PORTARE ALL'ESAME.

EQUAZIONI DI GOVERNO

TUTTE LE EQUAZIONI DI GOVERNO PARTONO DALL'EQUAZIONE DI BOLTZMANN, E ATTRAVERSO LE ESPANSIONI IN SERIE DI QUEST'ULTIMA SI RICAVA IL SET DI EQUAZIONI. TALE TECNICA È DOVUTA A CHAPMAN-ENSKOG: EULERO → ORDINE 0, N-S → ORDINE 1, BURNETT → ORDINE 2.

LA DIFFERENZA TRA EULERO E N-S È DOVUTA AI TERMINI DI TRASPORTO E DIFFUSIONE. TALI EQUAZIONI SONO LA RAPPRESENTAZIONE DI TRE PRINCIPI BASE: CONSERVAZIONE DELLA MASSA, CONSERVAZIONE DELLA Q.D.M. E CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA. LE EQUAZIONI SI RISOLVONO UNA VOLTA NOTE LE CONDIZIONI AL CONTORNO CHE IDENTIFICANO IL PROBLEMA. INOLTRE IL LIMITE DI VALIDITÀ DI QUESTE EQUAZIONI È CHE IL FLUIDO SIA CONTINUO. INFATTI SE NON FOSSE CONTINUO, NON POTREBBERO ESSERE SCRITTE LE EQUAZIONI IN TERMINI DIFFERENZIALI. IL PARAMETRO CHE INDICA SE IL FENOMENO È CONTINUO O MENO È IL NUMERO DI KNUDSEN

$$Kn = \frac{\lambda}{L}$$

λ = MEAN FREE PATH
L = CHARACTERISTIC LENGTH

IL CAMMINO LIBERO MEDIO INDICA LA DISTANZA MEDIA PERCORSA DALLE MOLECOLE TRA UNA COLLISIONE ED UN'ALTRA.
ARIA: $O_2 - N_2$ (AD ESEMPIO) HO PARTICELLE CHE POSSIEDONO $\lambda \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$. SALENDO CON LA QUOTA λ SALE.
L IDENTIFICA LA SCALA DI RIFERIMENTO CHE DEVE ESSERE SUFFICIENTEMENTE GRANDE, ALTRIMENTI L'IPOTESI DI FLUIDO CONTINUO DECADREBBE. GENERALMENTE AFFINCHÉ IL FLUIDO SIA CONTINUO $Kn < (Kn)_{cr} \sim 0,1 \div 0,01$

SOPRA 0,01 LE N-S CONTINUANO A VALERE, MA DEVO MODIFICARE LE CONDIZIONI AL CONTORNO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 166

SE APPLICO IL NABLA AD UNO SCALARE HO IL GRADIENTE

$$\nabla\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\rho}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\rho}{\partial z}\hat{k}$$

PASSANDO DAL VOLUME FISSO AL VOLUME IN MOVIMENTO, LE EQUAZIONI CHE OTTENGO MI DICONO SEMPLICEMENTE CHE LA MASSA CONTENUTA ALL'INTERNO DEL VOLUME CHE CONSIDERO È COSTANTE.

IL SIMBOLO D/Dt INDICA LA DERIVATA LAGRANGIANA MENTRE $\partial/\partial t$ QUELLA EULERIANA.

FISICAMENTE LA D/Dt INDICA UNA VARIAZIONE NEL TEMPO CHE IO OSSERVO MUOVENDOMI A CAVALLO DELLA PARTICELLA. TALE VARIAZIONE NEL TEMPO È DOVUTA A TRE EFFETTI:

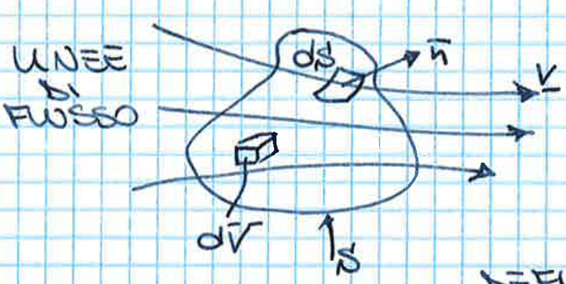
- VARIAZIONE LOCALE DELLA GRANDEZZA $(\partial/\partial t)$
- VELOCITÀ CON CUI MI MUOVO
- VARIAZIONE SPAZIALE DELLA GRANDEZZA PROIETTATA LUNGO LA DIREZIONE IN CUI MI MUOVO. VALE A DIRE:

$$\frac{D(\cdot)}{Dt} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} + \underline{v}\,\nabla(\cdot)$$

BILANCIO DELLA MASSA

CONSIDERO UN VOLUME DI CONTROLLO FISSO NEL TEMPO.
SUPPONGO CHE LA MASSA FLUISCA TRA LE PARETI DEL VOLUME.
SI HA CHE LA MASSA SI CONSERVA QUANDO:

FLUSSO NETTO IN INGRESSO O IN USCITA DALLA SUPERFICIE $\bar{S}$ DEL VOLUME DI CONTROLLO = RIDUZIONE O AUMENTO DELLA MASSA CONTENUTA NEL VOLUME $\bar{V}$.



DIMENSIONALMENTE IL FLUSSO È $\frac{Kg}{m^2 s}$, MASSA CHE PASSA IN UN m^2 IN UN s.

PER CALCOLARE IL FLUSSO DEVO DEFINIRE UNA DIREZIONE USCENTE OD ENTRANTE DAL VOLUME. PER FARE CIÒ SI DEFINISCE IL VERSORE NORMALE.

SE ESCE PIÙ DI CIÒ CHE ENTRA, IL FLUSSO NETTO È POSITIVO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 5 di 166

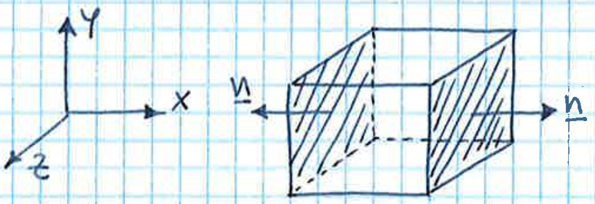
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 166

FORMA DIFFERENZIALE CONSERVATIVA

PER SCRIVERE LA CONSERVAZIONE DELLA MASSA IN FORMA CONSERVATIVA DEVO CONSIDERARE UNA PARTICELLA DEFINITA COME IL PIÙ PICCOLO VOLUME dV CHE MI CONSENTE DI DEFINIRE UNA $p, \rho, \underline{u}, T$ MEDIA SU UN NUMERO ELEVATO DI PARTICELLE.

QUESTA È UNA OPERAZIONE CHE ASSOMIGLIA MOLTO A QUELLA DI LIMITE PER $dV \to 0$ E CONSIDERARE LE PROPRIETÀ PUNTIFORMI, IN MODO DA CALCOLARE LA DIPENDENZA FUNZIONALE COME UNA $f(x,y,z,t)$. TUTTAVIA IL dV DEVE CONTENERE SEMPRE UN NUMERO ELEVATO DI PARTICELLE: TALE PROPRIETÀ DIPENDE DALLA DENSITÀ E DALLA SCALA DEL PROBLEMA (E QUINDI DAL NUMERO DI KNUDSEN).

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA LOCALE



CALCOLO IL FLUSSO DI MASSA CHE ATTRAVERSA LE SUPERFICI DEL VOLUMETTO INFINITESIMO (CHE RAPPRESENTA IL VOLUME DI CONTROLLO).

DEVO PERTANTO SVOLGERE I PRODOTTI $\rho \underline{V} \cdot \underline{n}$:
LUNGO X, HO LA NORMALE DIRETTA LUNGO X. PERTANTO IL CONTRIBUTO SARÀ DOVUTO ALLA VELOCITÀ u. ANALOGAMENTE LUNGO v E w. SI HA QUINDI:

$$-(\rho u)dydz + \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}dx\right)dydz +$$
$$-(\rho v)dxdz + \left(\rho v - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y}dy\right)dxdz +$$
$$-(\rho w)dxdy + \left(\rho w - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}dz\right)dxdy$$

ELIMINANDO I FATTORI UGUALI HO:

$$\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right)dxdydz$$

(FLUSSO NETTO USCENTE DAL VOLUME dV)

OVVERO $\nabla \cdot (\rho \underline{u}) dV = -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV$

↳ VARIAZIONE DI MASSA NEL VOLUME dV

SI RICAVA

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 166

EQ. DI CONSERVAZIONE DELLA Q.D.M.

CONSIDERO UN VOLUME INFINITESIMO $d\bar{V}$. APPLICO IL PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO, OVVERO LEGGE DI NEWTON, CHE DICE

$$\vec{F} = \frac{D}{Dt}(m\underline{v}) \quad \text{A LIVELLO INFINITESIMO}$$

$$\delta\vec{F} = \frac{D}{Dt}(\delta m \bar{V}) \quad \text{RICORDANDO CHE } \frac{D}{Dt}(\delta m) = 0$$

$$\Rightarrow \delta\underline{F} = \delta m \frac{D}{Dt}\underline{v} \quad \text{CON } \delta m = \rho\,\delta\bar{V} = \rho\,dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \delta\underline{F} = \rho\,dx\,dy\,dz \frac{D\underline{v}}{Dt}$$

PER SCRIVERE L'EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEVO SCRIVERE TUTTE LE FORZE AGENTI. PER FARE QUESTO DEVO RICORDARE CHE LE FORZE SI DIVIDONO IN SUPERFICIALI E VOLUMETRICHE. QUELLE SUPERFICIALI SONO DOVUTE A PRESSIONE E VISCOSITÀ, MENTRE QUELLE VOLUMETRICHE SONO GRAVITAZIONALE ED ELETTROMAGNETICHE (PARTICOLARMENTE IMPORTANTE NEI PLASMI).

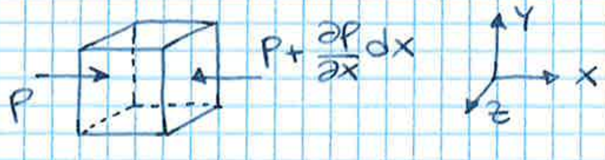
TUTTAVIA LE FORZE GRAVITAZIONALI SONO GENERALMENTE TRASCURABILI SE HO ~~[illegible]~~ MOVIMENTO A DENSITÀ BASSE (ARIA).

- LA FORZA GRAVITAZIONALE È $\underline{g}$ (FORZA IN UNITÀ DI MASSA). SE MOLTIPLICO PER $\rho d\bar{V} = \rho\,dx\,dy\,dz$ HO UNA FORZA

$$\rho\underline{g}\,dx\,dy\,dz$$

- ORA ELABORO LE FORZE DI SUPERFICIE. SE CONSIDERO CHE QUESTE SONO PRESSIONE E SFORZI VISCOSI SI HA:

LUNGO X:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 166

NELLE ALTRE DIREZIONI HO:

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial y} - \nabla \cdot \underline{\tau_y} = \rho g_y}$$

$$\boxed{\rho \frac{Dw}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial z} - \nabla \cdot \tau_z = \rho g_z}$$

ABBIAMO VISTO CHE:

$$[\tau] = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = [\{\tau_x\} \; \{\tau_y\} \; \{\tau_z\}]$$

E CIÓ ERA UTILE PER SCRIVERE LE RELAZIONI CHE ESPRIMONO LA CONSERVAZIONE DELLA Q.D.M.

LA FORMA SCRITTA NON ERA CONSERVATIVA.

RICORRENDO ALLA DEFINIZIONE DI DERIVATA LAGRANGIANA

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla g$$

IN FLUIDODINAMICA È SEMPRE UTILE, PER MANEGGIARE LE EQUAZIONI, IL BILANCIO DELLA MASSA. PER LA u, HO:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} \qquad (1)$$

POSSO AGGIUNGERE UN TERMINE NULLO COME IL BILANCIO DI MASSA: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = 0$

MA $\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = \underline{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \underline{u})$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \underline{u}) = 0$$

AGGIUNGENDO QUESTO TERMINE ALL'EQUAZIONE (1) HO:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla \underline{u} + u \underbrace{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho + \rho (\nabla \cdot \underline{u}) \right]}_{\text{TERMINE NULLO MOLTIPLICATO PER } u.}$$

MA VEDO CHE $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho u)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 166

ORA POSSO RISALIRE ALLA FORMULAZIONE INTEGRALE ATTRAVERSO IL TEOREMA DI GAUSS.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{g} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

INTEGRANDO LA RELAZIONE LOCALE NEL VOLUME DI CONTROLLO, SI HA (PER LA I COMPONENTE)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho u \underline{u}) \, d\Omega = -\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{\tau}_x \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho g_x \, d\Omega$$

POSSO APPLICARE GAUSS:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho u (\underline{u} \cdot \underline{n}) \, d\sigma =$$

PER IL TERMINE DI PRESSIONE HO CHE

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{g} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

MA

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (g_x n_x + g_y n_y + g_z n_z) \, d\sigma$$

DA CUI PASSANDO ALLE COMPONENTI, IN QUALCHE MANIERA POSSO PENSARE CHE SE p LO VEDO COME $\underline{P_x} = \{p, 0, 0\}^T$

HO CHE $\nabla \cdot \underline{P_x} = \frac{\partial p}{\partial x}$

QUINDI

$$\int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{P_x} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{P_x} \cdot \underline{n} \, d\sigma$$

MA $\underline{P_x} \cdot \underline{n} = p n_x + 0 + 0 = p n_x$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\Omega = \int_{\partial\Omega} p n_x \, d\sigma$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 13 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 166

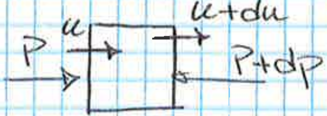
VARIAZIONE NEL TEMPO DELL'ENERGIA CONTENUTA NEL VOLUME DI CONTROLLO = FLUSSO TERMICO ATTRAVERSO LA SUPERFICIE + LAVORO FATTO DALLE FORZE SUL VOLUME DI CONTROLLO

INNANZITUTTO NOTO CHE LE EQUAZIONI SONO SCRITTE IN TERMINI DI POTENZA. PERTANTO UN PRIMO CONTRIBUTO È DATO DALLE FORZE DI VOLUME:

$$\boxed{\rho\, \underline{g}\cdot \underline{u}\, dx\,dy\,dz}$$

OVVERO È UNA FORZA · VELOCITÀ = POTENZA

ORA ANALIZZO LA COMPONENTE DI FORZA SUPERFICIALE.



IL LAVORO FATTO DALLE FORZE DI PRESSIONE LUNGO x, COINVOLGERÀ SOLO LE VELOCITÀ LUNGO LA NORMALE IN x.

$$\left\{up - \left[up + \frac{\partial (up)}{\partial x}dx\right]\right\} dy\,dz = -\frac{\partial up}{\partial x}dx\,dy\,dz$$

LUNGO y: $-\frac{\partial vp}{\partial y}dx\,dy\,dz$

ANALOGAMENTE LUNGO z. ALLORA HO UNA DIVERGENZA

$$\boxed{-\nabla\cdot(p\underline{u})\,dx\,dy\,dz}$$

PER GLI SFORZI VISCOSI LUNGO x, y E z HO:

LUNGO x

$$\left[-u\tau_{xx} + \left(u\tau_{xx} + \frac{\partial u\tau_{xx}}{\partial x}dx\right)\right]dy\,dz +$$

$$+\left[-v\tau_{xy} + \left(v\tau_{xy} + \frac{\partial v\tau_{xy}}{\partial x}dx\right)\right]d\cancel{x}\,dz +$$

$$+\left[-w\tau_{xz} + \left(w\tau_{xz} + \frac{\partial w\tau_{xz}}{\partial x}dy\right)\right]dy\,dz +$$

LUNGO y

$$+\left[-u\tau_{yx} + \left(u\tau_{yx} + \frac{\partial u\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)\right]dx\,dz +$$

$+ \ldots$

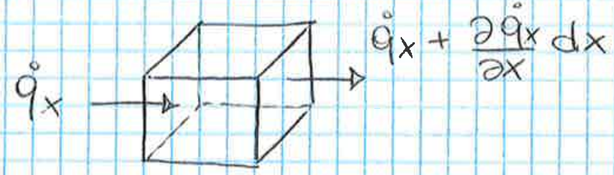
LUNGO z

$$+\left[-u\tau_{zx} + \left(u\tau_{zx} + \frac{\partial u\tau_{zx}}{\partial z}dz\right)\right]dy\,dx +$$

$+ \ldots$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 166



$$\dot q_x - \left[\dot q_x + \frac{\partial \dot q_x}{\partial x} dx\right] dy\,dz = -\frac{\partial \dot q_x}{\partial x} dx\,dy\,dz$$ LUNGO X

ANALOGAMENTE LUNGO Y E Z ⇒ HO DI NUOVO UNA DIVERGENZA

$$\boxed{-(\nabla \cdot \underline{\dot q})\, dx\,dy\,dz}$$

MA $\dot q = -k\nabla T$ (LEGGE DI FOURIER)

IN CUI IL SEGNO '−' INDICA CHE VA DAL CALDO AL FREDDO, CHE LA PROPORZIONALITÀ È DIRETTA (COSTANTE) E VALE LA CONDUCIBILITÀ TERMICA.

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \underline{\dot q} = \nabla \cdot (k\nabla T)$$

DEVO PERTANTO SCRIVERE IL TERMINE DI VARIAZIONE.
L'ENERGIA CHE HO IN UNITÀ DI MASSA VALE e (ENERGIA INTERNA) PIÙ UN CONTRIBUTO CINETICO DOVUTO ALLE FLUTTUAZIONI MOLECOLARI CHE POSSIEDONO ENERGIA SOTTO FORMA:

- TRASLAZIONALE
- ROTAZIONALE

} ANCHE A BASSE TEMPERATURE

- VIBRAZIONALE → A TEMPERATURE ELEVATE A CAUSA DI COLLISIONI
- ELETTRONICA → A TEMPERATURE ANCORA PIÙ ELEVATE

TUTTAVIA L'EFFETTO CHE IO CONSIDERO È IL SOLO TERMINE CINETICO CHE CALCOLO COME $\frac{1}{2}V^2$

TEORICAMENTE DOVREI METTERE ANCHE UN'ENERGIA POTENZIALE CHE PERÒ È SEMPRE TRASCURABILE.

IL CONTRIBUTO TOTALE È

$$dx\,dy\,dz\,\rho \frac{D}{Dt}\left(e + \frac{V^2}{2}\right)$$

ELIMINANDO $\delta V = dx\,dy\,dz$ HO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 17 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 166

CON $E + p = \rho\left(e + \frac{V^2}{2}\right) + p = \rho e + p + \rho\frac{u^2}{2} = \rho h + \rho\frac{u^2}{2} =$
$= \rho h^0 = H$ (ENTALPIA TOTALE)

PER TROVARE LA FORMULAZIONE INTEGRALE INTEGRO:

$$\int_\Omega \frac{\partial E}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} H(\underline{u}\cdot\underline{n})d\sigma - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{u})\cdot\underline{n}\, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \underline{q}\cdot\underline{n}\, d\sigma =$$

$$= \boxed{\int_\Omega \rho\underline{f}\cdot\underline{u}\, d\Omega + \int_\Omega \rho\dot{\xi}\, d\Omega} \rightarrow \text{TERMINI SORGENTE}$$

CHE INDICA CHE L'ENERGIA CONTENUTA ALL'INTERNO DEL VOLUME DI CONTROLLO VARIA A CAUSA DI FLUSSI DI E, LAVORO FATTO SULLE FACCE ($p\underline{u}$), LAVORO DELLE FORZE D'ATTRITO, FLUSSI TERMICI, FORZE DI VOLUME, SORGENTI TERMICHE.

RIASSUNTO SULLE EQ. DI NAVIER-STOKES IN FORMA CONSERVATIVA

MASSA
$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\underline{u}) = 0 \\ \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \rho(\underline{u}\cdot\underline{n})\, d\sigma = 0 \end{cases}$$

Q.D.M.
$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho\underline{u})}{\partial t} + \nabla\cdot(p\underline{\underline{I}} + \rho\underline{u}\underline{u}) - \nabla\cdot\underline{\underline{\tau}} = 0 \\ \int_\Omega \frac{\partial(\rho\underline{u})}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (p\underline{\underline{I}} + \rho\underline{u}\underline{u})\cdot\underline{n}\, d\sigma - \int_{\partial\Omega} \underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{n}\, d\sigma = 0 \end{cases}$$

ENERGIA
$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla\cdot[(E+p)\underline{u}] - \nabla\cdot(\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{u}) + \nabla\cdot\underline{q} = 0 \\ \int_\Omega \frac{\partial E}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (E+p)(\underline{u}\cdot\underline{n})d\sigma - \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{u})\cdot\underline{n}\, d\sigma + \int_{\partial\Omega} \underline{q}\cdot\underline{n}\, d\sigma = 0 \end{cases}$$

RIASSUMENDO LE VARIABILI CONSERVATIVE ALL'INTERNO DI VETTORI

$$W = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho\underline{u} \\ E \end{Bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \text{DENSITÀ} \\ \rightarrow \text{Q.D.M. IN UNITÀ DI VOLUME} \\ \rightarrow \text{ENERGIA IN UNITÀ DI VOLUME} \end{matrix}$$

$$F_{\substack{\text{NON}\\\text{VISCOSA}}} = \begin{Bmatrix} \rho\underline{u} \\ \rho\underline{u}\underline{u} + p\underline{\underline{I}} \\ (E+p)\underline{u} \end{Bmatrix} \qquad F_{\text{VISC.}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\underline{\underline{\tau}} \\ -\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{u} + \underline{q} \end{Bmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 19 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 166

$$\xi = \frac{\ell^t}{2} RT + \frac{\ell^R}{2} RT$$

$$e = \frac{\ell^t}{2} \frac{R}{\mathcal{M}} T + \frac{\ell^R}{2} \frac{R}{\mathcal{M}} T = \frac{\ell^t + \ell^R}{2} \frac{R}{\mathcal{M}} T = \frac{\ell^t + \ell^R}{2} R^* T$$

CON $R^* = \frac{8{,}314}{\mathcal{M}}$

MA $\frac{5}{2} R^* = C_v \Rightarrow \boxed{e = C_v T} \Rightarrow e = e(T)$

HO QUINDI 5 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE. IL PROBLEMA SI CHIUDE CON L'EQUAZIONE DI STATO $\boxed{p = \rho R^* T}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 166

6) <u>SOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO</u> (TIPICAMENTE ME=TODI ITERATIVI PERCHÉ NON LINEARE)

7) <u>DEFINIZIONE DEI METODI DI CONVERGENZA</u>

OLTRE AI METODI DI SOLUZIONE VI SONO ALCUNE PROPRIETÀ:

→ <u>CONSISTENZA</u>: FACENDO TENDERE LA GRIGLIA A ZERO DEVO OTTENERE LE EQUAZIONI ESATTE.

→ <u>STABILITÀ</u>: DURANTE IL PROCESSO DI SOLUZIONE POSSONO GENERARSI DELLE ~~IN~~ INSTABILITÀ, DOVUTE ALLE AMPLIFICAZIONI DEGLI ERRORI DELLA SOLUZIONE NUMERICA A CAUSA DEL MODEL=LO DISCRETO.

→ <u>CONVERGENZA</u>: AL TENDERE A ZERO DELLA GRIGLIA LA SO=LUZIONE DEVE TENDERE A QUELLA ESATTA. ESISTONO DEI MO=DELLI MATEMATICI CHE DICONO CHE PER PROBLEMI LINEARI CONSISTENZA + STABILITÀ = CONVERGENZA. IN FLUIDODINA=MICA CIÒ NON È VERO E QUINDI LA CONVERGENZA VIENE TESTA=TA SOLO DOPO CHE LA SOLUZIONE È OTTENUTA, UNA VOLTA CHE LA GRIGLIA È SUFFICIENTEMENTE PICCOLA.
UNA GRIGLIA FITTA CONSENTE DI CALCOLARE LE ZONE PIÙ DE=LICATE DEL SISTEMA COME LE ZONE DI RICIRCOLO DELLA CORRENTE.

→ <u>CONSERVAZIONE</u>: LO SCHEMA NUMERICO DEVE ESSERE RI=SPETTATO SIA A LIVELLO <u>GLOBALE</u> CHE <u>LOCALE</u>. (AD ESEMPIO SU TUTTO IL BORDO).

→ <u>BOUNDEDNESS</u>: È LA LIMITATEZZA DELLA SOLUZIONE, PER CUI NON DEVE OSCILLARE TROPPO E DEVE RIMANERE ALL'INTERNO DI UN INTERVALLO.

→ <u>REALIZZABILITÀ</u>: AD ESEMPIO, SE DEVO SIMULARE IL FENOMENO DELLA TURBOLENZA, DEVO AVERE UN METODO CHE PERMETTA DI ARRIVARE A DESCRIVERE ANCHE LA PIÙ PICCOLA SCALA. MA CIÒ NON POSSO FARLO CON UNA GRIGLIA RADA. ⇒ LE SOLUZIO=NI DEVONO ESSERE <u>REALISTICHE</u>.

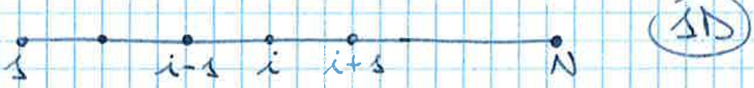
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 23 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 166

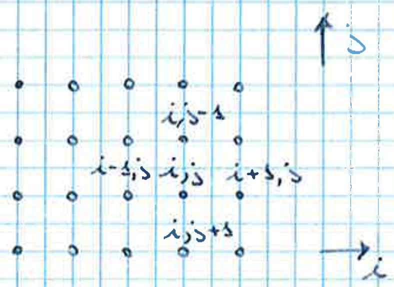
ORA INIZIO CON L'APPLICARE A TALE EQUAZIONE LE DIFFERENZE FINITE NEL CASO 1D

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u\phi) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - q_\phi = 0$$

LA DISCRETIZZAZIONE IN 1D È FATTA DA UN INDICE i CHE IDENTIFICA UNA STAZIONE



IN 2D



LE CONDIZIONI AL CONTORNO SONO DATE DA:

- VALORE DELLA ϕ (CONDIZIONI DI DIRICHLET)
- VALORE DELLA DERIVATA DI ϕ (CONDIZIONE DI NEUMANN)

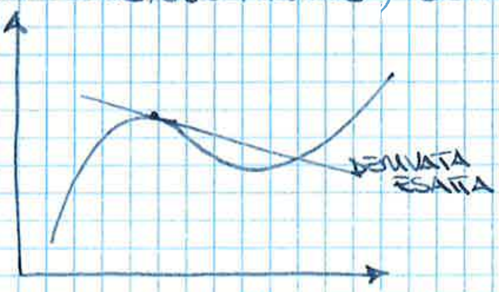
LA SECONDA CONDIZIONE AGGIUNGE UN'INCOGNITA SUL BORDO STESSO E PERMETTE DI RISOLVERLA AGGIUNGENDO UN'ULTIMA CONDIZIONE (EQUAZIONE)

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{bordo} = X_{NEUMANN} \quad \text{OPPURE} \quad \phi/_{BORDO} = 0 \quad (\text{DIRIC.})$$

LE DIFFERENZE FINITE PROVENGONO DIRETTAMENTE DALLA DEFINIZIONE DI DERIVATA

$$\lim_{\Delta x_j \to 0} \frac{\phi(x_j+\Delta x_j) - \phi(x_j)}{\Delta x_j} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\right)_{x_j}$$

PER CAPIRE IL SIGNIFICATO DI DIFFERENZE FINITE, CONSIDERO UNA FUNZIONE $\phi(x)$ (1D)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 25 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 166

IL TERMINE CHE TRASCURO CON POTENZA PIÚ BASSA MI DETERMINA L'ORDINE DI ACCURATEZZA DELLO SCHEMA. $\Delta x \rightarrow$ ORDINE 1!

PER LA BACKWARD DIFFERENCE È LA STESSA COSA MA L'INDICE È $j-1$.

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_j} = \frac{\phi(x_j) - \phi(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_j} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_{x_j} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{n!}\right)^n$$

ANCHE QUI $O(\Delta x)$ ORDINE 1!

PER CALCOLARE QUESTE APPROSSIMAZIONI HO BISOGNO DI DUE PUNTI $\Rightarrow$ CON DUE PUNTI OTTENGO UN ORDINE DI ACCURATEZZA UNITARIO.

CIÒ VUOL DIRE CHE APPROSSIMANDO LA FUNZIONE CON UNA RETTA (DUE PUNTI) OTTENGO ACCURATEZZA DI ORDINE 1.

SE PENSASSI DI APPROSSIMARE LA FUNZIONE CON UNA PARABOLA, COSA OTTENGO?

$$\phi(x_{j-1}) = \phi(x_j) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_j} (x_j - x_{j-1}) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_j} \left(\frac{x_j - x_{j-1}}{2}\right)^2 + \dots + (-1)^n \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x}\right)_{x_j} \frac{(x_j - x_{j-1})^n}{n!}$$

$$\phi(x_{j+1}) = \phi(x_j) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_j} (x_{j+1} - x_j) + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_{x_j} \frac{(x_{j+1} - x_j)^2}{2} + \dots + \left(\frac{\partial^n \phi}{\partial x^n}\right)_{x_j} \frac{(x_{j+1} - x_j)^n}{n!}$$

SOTTRAENDO LA SECONDA ALLA PRIMA

$$\phi(x_{j+1}) - \phi(x_{j-1}) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_j} (x_{j+1} - x_{j-1}) + \dots$$

SI NOTI CHE LA GRIGLIA È EQUISPAZIATA, IL $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ È UGUALE E SI ELIMINA. TUTTAVIA NON HO UNA GRIGLIA EQUISPAZIATA E $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ RIMANE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 166

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + O(\Delta x)$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x_i} = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} + O(\Delta x^2)$$

INFATTI AVENDO TRONCATO L'ESPRESSIONE DI TAYLOR, COMMETTO CIÓ CHE É NOTO COME ERRORE DI TRONCAMENTO

$$\varepsilon_{\tau} = (\Delta x)^m \alpha_{m+1} + (\Delta x)^{m+1} \alpha_{m+2} + \dots + (\Delta x)^n \alpha_{n+1}$$

CON α CHE INDICA UNA DERIVATA. AD ESEMPIO:

FORWARD:

$$\varepsilon_{\tau} = \Delta x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \dots$$

LA PARTE PIÙ GRANDE È LA PRIMA, PERTANTO PER LA FORWARD OTTENGO $\boxed{\varepsilon_{\tau} \propto \Delta x}$

SE RADDOPPIO I PUNTI (IL Δx SI DIMEZZA) ED USO UNO SCHEMA AL PRIMO ORDINE, L'ERRORE SI DIMEZZA

$$\varepsilon_{\tau}' \propto \Delta x' \propto \Delta x/2$$

CIÓ VALE ANCHE PER LA BACKWARD SUBSTITUTION.
SE UTILIZZO UNA DIFFERENZA CENTRATA, INVECE, HO

$$\varepsilon_{\tau} = \Delta x^2 \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} + \Delta x^3 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \dots$$

TUTTAVIA LA PARTE PRINCIPALE È ANCORA $\Delta x^2 \rightarrow \boxed{\varepsilon_{\tau} \propto \Delta x^2}$

ORA, RADDOPPIANDO I PUNTI E DIMEZZANDO IL Δx, HO

$$\varepsilon_{\tau}' \propto \Delta x'^2 = \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 = \frac{\Delta x^2}{4}$$

L'ERRORE DIMINUISCE AL 25% DELL'ERRORE INIZIALE.
CIÓ VALE PER QUALUNQUE TIPO DI DERIVATA DI ORDINE SUPERIORE, ANCHE SE NON HANNO UN COMPORTAMENTO REGOLARE.

SI NOTI CHE NON HA SENSO CONFRONTARE L'ERRORE TRA IL PRIMO ORDINE ED IL SECONDO, PERCHÉ TRA LA DERIVATA PRIMA E LA SECONDA POTREBBE ESSERE PIÙ GRANDE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 166

LA SITUAZIONE CAMBIA SE INTERPOLO CON UNA PARABOLA:

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = a + b\tilde{x} + c\tilde{x}^2 \Rightarrow \frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}} = b + 2c\tilde{x}$$

SE IL SISTEMA È CENTRATO IN x_i, $\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}\right)_0$

E DEFINENDO $\Delta x_{i+1} = x_{i+1} - x_i$ E $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, HO

$$\begin{cases} \tilde{\phi}(\tilde{x}_i) = a = \tilde{\phi}(0) \\ \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i+1}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}_i) + b\Delta x_{i+1} + c\Delta x_{i+1}^2 \\ \tilde{\phi}(\tilde{x}_{i-1}) = \tilde{\phi}(\tilde{x}_i) + b\Delta x_i + c\Delta x_i^2 \end{cases}$$

RISOLVENDO OTTENGO

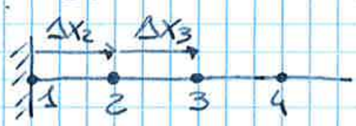
$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \left.\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}\right|_0 = b = \frac{\phi(x_{i+1})\Delta x_i^2 - \phi(x_{i-1})\Delta x_{i+1}^2 + \phi(x_i)(\Delta x_{i+1}^2 - \Delta x_i^2)}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$$

PER GRIGLIA UNIFORME (STESSA SPAZIATURA $\Delta x_i = \Delta x_{i+1}$) HO CHE TUTTO SI SEMPLIFICA:

$$b = \frac{\phi(x_{i+1}) - \phi(x_{i-1})}{2\Delta x}$$

TALE SCHEMA È ACCURATO AL SECONDO ORDINE, ED È IN QUALCHE MODO ANALOGO ALLE DIFFERENZE CENTRATE. IL SISTEMA DEL POLYNOMIAL FITTING PUÒ ESSERE ANCHE USATO CON ACCURATEZZE SUPERIORI: CIÒ CHE CAMBIA È IL NUMERO DI PUNTI NECESSARI PER LA VALUTAZIONE DELLA FUNZIONE.

LO SCHEMA FUNZIONA ANCHE QUANDO IL PUNTO NON È CENTRATO: VOLENDO APPROSSIMARE LA DERIVATA IN x_1, HO



$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_1} \Rightarrow \left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial\tilde{x}}\right)_0 = b + 2c\underbrace{\cancel{x_1}}_{=0}$$

CON $\tilde{\phi}(\tilde{x}) = a + b\tilde{x} + c\tilde{x}^2$

CENTRATO SI RICAVA CHE $\tilde{\phi}(\tilde{x}_1) = a$, MA DEVO USARE ALTRI DUE PUNTI (CHE POSSONO ESSERE I PUNTI 2 E 3). PERTANTO SI HA:

$$\tilde{\phi}(x_2) = a + b\Delta x_2 + c\Delta x_2^2$$
$$\tilde{\phi}(x_3) = a + b(\Delta x_2 + \Delta x_3) + c(\Delta x_2 + \Delta x_3)^2$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 166

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_{i-1}} = -a_1 + 2a_2\Delta x - 3a_3\Delta x^2 + 4a_4\Delta x^3$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_{i-1}} \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_{i+1}}$$

$$x_{i-1} \qquad x_i \qquad x_{i+1}$$

$$\phi_{i-1} \qquad \phi_i \qquad \phi_{i+1}$$

SCRIVENDO QUESTO SISTEMA (E RISOLVENDOLO NELLE INCOGNITE a_i), IN OGNI PUNTO DEL DOMINIO OTTENGO UNA ESPRESSIONE CHE PERMETTE DI CALCOLARE TUTTE LE DERIVATE CHE COMPETONO AI PUNTI DEL DOMINIO. SI HA CHE LA SOLUZIONE É:

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x_i} = a_1 = \frac{3\phi_{i+1} - 3\phi_{i-1} - \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i+1} - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i-1}\right]\Delta x}{4\Delta x}$$

ESPLICITANDO LE DERIVATE

$$\boxed{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i-1} = \frac{3\phi_{i+1} - 3\phi_{i-1}}{4\Delta x}}$$

PER RICAVARE LE DERIVATE DEVO SCRIVERE UN SISTEMA:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 0 & \cdots & & 0 \\ 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/4 & 1 & 1/4 & 0 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1/4 & 1 & 1/4 \\ 0 & \cdots & & 0 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\partial\phi/\partial x)_1 \\ (\partial\phi/\partial x)_2 \\ \vdots \\ (\partial\phi/\partial x)_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{3\phi_{i+1} - 3\phi_{i-1}}{4\Delta x} \end{Bmatrix}$$

IL VANTAGGIO DI AVERE MENO PUNTI (É NECESSARIO CONOSCERE IN OGNI STAZIONE ϕ_{i+1} E ϕ_{i-1}) É BILANCIATO DA UN MAGGIOR COSTO COMPUTAZIONALE. UNA SOLUZIONE ESTESA AL 6° ORDINE É LA SEGUENTE:

$$\alpha\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i+1} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_i + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{i-1} = \beta\,\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} + \gamma\,\frac{\phi_{i+2} - \phi_{i-2}}{4\Delta x}$$

TALI SCHEMI SONO DETTI DI <u>PADÉ</u> E NEL CASO DI $\Delta x \neq cost$, α, β E γ SONO FUNZIONI DEI VARI Δx_i. CON $\alpha = 0$ SI RITORNA AGLI SCHEMI DI ORDINE 2° E 4°.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 33 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 166

SI OSSERVA CHE L'ACCURATEZZA NEL CASO DI $\Delta x = \text{cost}$ È DI ORDINE 2. SE $\Delta x \neq \text{cost}$ LA FORMULA SI COMPLICA ED IN AGGIUNTA VI COMPARE UN TERMINE DI ORDINE 3 CHE PERÒ AL TENDERE DI $\Delta x \to 0$ SCOMPARE E NON FORNISCE PIÙ ALCUN EFFETTO.

CONDIZIONI AL CONTORNO E RISOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO

DI FATTO AL CONTORNO VI SONO DUE TIPI DI CONDIZIONI: QUELLE CHE INTERESSANO IL VALORE DELLA VARIABILE (DIRICHLET) E QUELLE CHE INTERESSANO LA DERIVATA. SI HA COSÌ:

IN 0: $\phi(x_0) = \phi_0$ OPPURE $\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_0$

IN N: $\phi(x_N) = \phi_N$ OPPURE $\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{x=x_N} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_N$

ORA DISCRETIZZO L'EQUAZIONE MODELLO 1D NEL CASO PIÙ SEMPLICE STAZIONARIO, CON PARAMETRI u, ρ, Γ COSTANTI. SUPPONGO INOLTRE CHE LE CONDIZIONI AL CONTORNO SIANO DATE:

$$\boxed{\underbrace{\rho\frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \phi}{\partial x}} - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0}$$

AMENO DELLA ρ, QUESTO È COME SCRIVERE $\frac{D\phi}{Dt}$, CIOÈ UN SEGNALE ϕ TRASPORTATO CON VELOCITÀ u

TALE EQUAZIONE PUÒ ESSERE APPROSSIMATA CON TERMINI:

- DI I ORDINE O ~~DI~~ II ORDINE PER LA $\partial/\partial x$;
- DI II ORDINE PER LE DERIVATE SECONDE.

PERTANTO HO DUE CASI POSSIBILI:

① $u\frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho}\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$ (OPPURE IL PRIMO TERMINE $\phi_i - \phi_{i-1}$)

ENTRAMBE CON GRIGLIA EQUISPAZIATA

② $u\frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho}\frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{\Delta x^2} = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 166

IL SISTEMA RISOLVENTE FUNZIONA BENE DA 1 A N-1, MA NEL NODO 0 E N DEVO RAGIONARE SULLE BOUNDARY CONDITION

$$\begin{bmatrix} \cdots & & & & \\ a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & a_i & b_i & c_i & 0 \\ 0 & 0 & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} \\ \cdots & & & & \\ & & & a_{N-1} & b_{N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_{i-1} \\ \phi_i \\ \phi_{i+1} \\ \vdots \\ \phi_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a_0\phi_0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -c_{N-1}\phi_N \end{Bmatrix}$$

LA MATRICE È TRIDIAGONALE ED IL SISTEMA È SPARSO, PERTANTO AVRÒ ELEVATO COSTO COMPUTAZIONALE. AL BORDO POSSO AVERE CONDIZIONI DI DIRICHLET

$\phi(0) = \phi_0$	$\phi(L) = \phi_N$

ϕ_{LEFT} $\qquad$ ϕ_{RIGHT}

SE LE EQUAZIONI SONO QUESTE, IN 0 ED IN L NON È NECESSARIO SCRIVERE UN'EQUAZIONE, MA SOSTITUIRE I VALORI NELL'EQUAZIONE MODELLO:

NODO 1

$$\max(u,0)\,\frac{\phi_1-\phi_0}{\Delta x} + \min(u,0)\,\frac{\phi_2-\phi_1}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho}\,\frac{\phi_2-2\phi_1+\phi_0}{\Delta x^2} = 0$$

DA CUI

$$a_0\phi_0 + b_1\phi_1 + c_1\phi_2 = 0$$

NODO N-1

$$\max(u,0)\,\frac{\phi_{N-1}-\phi_{N-2}}{\Delta x} + \min(u,0)\,\frac{\phi_N-\phi_{N-1}}{\Delta x} - \frac{\Gamma}{\rho}\,\frac{\phi_N-2\phi_{N-1}+\phi_{N-2}}{\Delta x^2} = 0$$

DA CUI

$$a_{N-1}\phi_{N-2} + b_{N-1}\phi_{N-1} + c_{N-1}\phi_N = 0$$

I TERMINI CHE CONTENGONO ϕ_0 E ϕ_N SONO CONSIDERATI TERMINI NOTI E VANNO QUINDI INSERITI NELL'APPOSITO VETTORE. IN FORMA COMPATTA:

$$[S]\{\phi\} = \{R\}$$

SE LA CONDIZIONE FOSSE STATA DI NEUMANN, LE COSE SAREBBERO STATE DIFFERENTI. INFATTI È NOTO IL VALORE DELLA DERIVATA E NON DELLA FUNZIONE IN 0 O IN N. PER QUESTO DEVO AGGIUNGERE UN'EQUAZIONE, DISCRETA, CHE RAPPRE=

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 166

IL SISTEMA DI EQUAZIONI ①, ② E ③ LO POSSO VEDERE COME

$$\begin{bmatrix} 1 & -2\Delta x & +4\Delta x^2 \\ 1 & -\Delta x & +\Delta x^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{N-2} \\ \phi_{N-1} \\ \phi_N \end{Bmatrix}$$

MOLTIPLICANDO ② x2 E SOMMANDO A ① OTTENGO

$$-2\phi_{N-1} + \phi_{N-2} = -2\phi_N + \phi_N - 2c\Delta x^2 + 4c\Delta x^2$$

$$\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N = 2c\Delta x^2$$

$$2c = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N}{\Delta x^2}$$

SI VEDE CHE NELLE DIFFERENZE FINITE NON VI È DIFFERENZA TRA I PUNTI ESTERNI ED INTERNI!!

$$u\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_N - \frac{\Gamma}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right)_N = 0$$

$$uk - \frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N}{\Delta x^2} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\Gamma}{\rho} \frac{\phi_{N-2} - 2\phi_{N-1} + \phi_N}{\Delta x} = \boxed{uk} \leftarrow \text{TERMINE NOTO}$$

QUESTA È LA PRIMA EQUAZIONE DEL NOSTRO SISTEMA CON CONDIZIONI DI NEUMANN.

GRIGLIE NON UNIFORMI

IL CONCETTO CHE RISIEDE ALLA BASE DELLE GRIGLIE NON UNIFORMI È DI FATTO L'IDEA DI RENDERE L'ERRORE UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO NEL DOMINIO. TALE CONCETTO SI PUÒ METTERE IN PRATICA TENENDO CONTO CHE L'ERRORE È UN PRODOTTO TRA DERIVATA ED INTERVALLI Δx. PER QUESTO SI PUÒ PENSARE DI ABBASSARE Δx DOVE LE DERIVATE CRESCONO E VICEVERSA. TALE CONCETTO È CHIAMATO "RAFFINAMENTO DI GRIGLIA LOCALE".

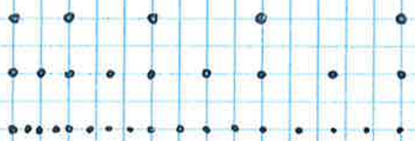
CONSIDERANDO LA DERIVATA PRIMA CENTRATA (APPROSSIMAZIONE AL SECONDO ORDINE)

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{x_{i+1} - x_i}$$ ERA OTTENUTA ATTRAVERSO LA SOTTRAZIO-

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 166

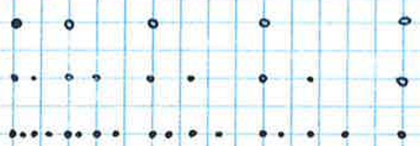
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 166

1) SI CREA UN RETICOLO DI SOTTOGRIGLIE EQUISPAZIATE IN CUI LA SPAZIATURA È UNIFORME ATTORNO AI NUOVI PUNTI MENTRE r_e RESTA LO STESSO NEI VECCHI PUNTI.



SE IL COMPORTAMENTO DI QUESTO TIPO CONTINUA, LA GRIGLIA TENDE A DIVENTARE UNIFORME OVUNQUE, TRANNE CHE NEI VECCHI PUNTI. QUINDI IL TERMINE PIÙ PESANTE DELL'ERRORE SPARISCE QUASI OVUNQUE, ECCETTO NEI VECCHI PUNTI, E SI AVRÀ UNO PSEUDO ORDINE DUE, SIMILE AL CASO $\Delta x = cost$, MA LEGGERMENTE PIÙ LENTO.

2) SI OPERA CON RAFFINAMENTI SUCCESSIVI IN MODO TALE CHE IL FATTORE r_e VENGA PRESERVATO PER LO PIÙ OVUNQUE:



GRID 4h $\Rightarrow \Delta x_{i+1} = r_e^{4h}\Delta x_i$

GRID 2h $\Rightarrow \Delta x_{i+1} = r_e^{2h}\Delta x_i$

GRID 1h $\Rightarrow \Delta x_{i+1} = r_e^{h}\Delta x_i$

IL FATTORE r_e È COSTANTE IN OGNI SINGOLA GRIGLIA, MA CAMBIA TRA UNA GRIGLIA E L'ALTRA. PARTENDO DAL Δx PIÙ FINE, SI PUÒ ARRIVARE AD UN Δx SUPERIORE. INFATTI:

$$\Delta x_{i+1} = r_e \Delta x_i = r_e r_e \Delta x_{i-1} = r_e r_e r_e \Delta x_{i-2} = r_e^{i}\Delta x_1 .$$

CON Δx_1 IL PRIMO INTERVALLO.

ORA CERCO IL LEGAME TRA LE GRIGLIE: SE CONSIDERO LA GRIGLIA 2h, POSSO OTTENERE L'INTERVALLO DELLA GRIGLIA h COME

$$\Delta x_{i+1}^{2h} = \Delta x_{2i+1}^{h} + \Delta x_{2i+1}^{h}$$

MA RICORDANDO CHE

$$\Delta x_{i+1} = r_e^{i}\Delta x_1 ,$$

RICAVO

PERCHÉ RISPETTO AL PEDICE DEL Δx È SEMPRE UN'UNITÀ IN MENO

$$(r_e^{2h})^{i}\Delta x_1^{2h} = (r_e^{h})^{2i}\Delta x_1^{h} + (r_e^{h})^{2i+1}\Delta x_1^{h} =$$

$$= (r_e^{h})^{2i}(r_e^{h}+1)\Delta x_1^{h} \quad \circledast$$

DA CUI $\boxed{\Delta x_1^{2h} = (r_e^{h}+1)\Delta x_1^{h}}$

MA ANCORA $(r_e^{2h})^{i}(\Delta x_1^{h} + \Delta x_2^{h}) = (r_e^{2h})^{i}[\Delta x_1^{h}(1+r_e^{h})]$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 166

$$\begin{cases} \phi_{i+1} = a + b\Delta x_{i+1} + c\Delta x_{i+1}^2 \\ \phi_i = a \\ \phi_{i-1} = a - b\Delta x_i + c\Delta x_i^2 \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial x} = b$$

SI RICAVA IN GENERALE CHE

$$b = \frac{\phi_{i+1}\Delta x_i^2 - \phi_{i-1}\Delta x_{i+1}^2 + \phi_i(\Delta x_{i+1}^2 - \Delta x_i^2)}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}$$

PER RICAVARE L'ERRORE SCRIVO L'ESPANSIONE IN SERIE DI TAYLOR, PRIMA IN x_{i+1} E POI IN x_{i-1}, POI MOLTIPLICO LA PRIMA PER Δx_i^2 E LA SECONDA PER Δx_{i+1}^2, E POI SOTTRAGGO LA SECONDA ALLA PRIMA:

$$\phi_{i+1} = \phi_i + \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{x_i} \Delta x_{i+1} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\bigg|_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1}^2}{2!} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\bigg|_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1}^3}{3!} + H$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i - \frac{\partial \phi}{\partial x}\bigg|_{x_i} \Delta x_i + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\bigg|_{x_i} \frac{\Delta x_i^2}{2!} - \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\bigg|_{x_i} \frac{\Delta x_{i+1}^3}{3!} + H$$

SOTTRAENDO LA SECONDA ALLA PRIMA SI HA:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_{x_i} = \frac{\Delta x_i^2 \phi_{i+1} + \phi_i(\Delta x_{i+1}^2 - \Delta x_i^2) - \Delta x_{i+1}^2 \phi_{i-1}}{\Delta x_{i+1}\Delta x_i(\Delta x_{i+1} + \Delta x_i)} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3}\right)_{x_i} \frac{\Delta x_i^2 \Delta x_{i+1}^2 (\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}{6\Delta x_i \Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} + H$$

DA CUI SI VEDE CHE $\varepsilon_T \propto \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \Delta x^2$ (PERCHÉ DIPENDE DAL PRODOTTO $\Delta x_i \Delta x_{i+1}$).

PERTANTO LA SOLUZIONE È IN QUESTO CASO SEMPRE AL SECONDO ORDINE, PER QUALSIASI DISTRIBUZIONE DI INTERVALLI.

ERRORI DI DISCRETIZZAZIONE

GLI ERRORI DI DISCRETIZZAZIONE SONO DOVUTI AL FATTO CHE L'EQUAZIONE CHE RISOLVO NON SONO QUELLE ESATTE MA QUELLE DISCRETE. INFATTI LA SOLUZIONE CHE RICAVO LA OTTENGO DAL SEGUENTE SISTEMA:

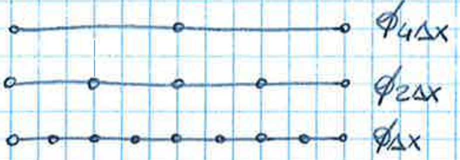
$[A]\{\phi\} = \{R\}$ CON $\{\phi\}$ SOLUZIONE APPROSSIMATA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 166

NON LINEARE SI PUÓ LINEARIZZARE ALL'INTERNO DI UNA SOLUZIONE ESATTA E TALI ARGOMENTI SAREBBERO VALIDI.

È POSSIBILE INFINE VALUTARE L'ACCURATEZZA DI UNO SCHEMA A PARTIRE DALL'USO DI PIÚ GRIGLIE IN MODO CONSECUTIVO SEMPRE PIÚ FITTE: IN TAL CASO OTTENGO UNA STIMA DELL'AREA.



IN REALTÁ É POSSIBILE FARE ANCHE IL CONTRARIO.

LA STIMA DELL'ERRORE È $\varepsilon_{\Delta x}^{d} = \alpha \Delta x^{P} + H$ (IN GENERALE) ED È DATO AL PRIMO TERMINE TRASCURATO DELLO SVILUPPO IN SERIE DI TAYLOR.

PERTANTO $\bar{\phi} = \phi_{\Delta x} + \varepsilon_{\Delta x}^{d} = \phi_{\Delta x} + \alpha \Delta x^{P}$. LA SOLUZIONE NELLO STESSO PUNTO COMUNE A TUTTA LA GRIGLIA È DATA DALLA SOLUZIONE NUMERICA PIÚ ERRORE DI DISCRETIZZAZIONE:

$$\bar{\phi} = \phi_{\Delta x} + \alpha \Delta x^{P} = \phi_{2\Delta x} + \alpha (2\Delta x)^{P}$$

$$\bar{\phi} = \phi_{2\Delta x} + \alpha (2\Delta x)^{P} = \phi_{4\Delta x} + \alpha (4\Delta x)^{P}$$

OTTENGO CHE:

$$\phi_{\Delta x} - \phi_{2\Delta x} = \alpha (2^{P} - 1) \Delta x^{P} \quad \text{(DISCRETIZZAZIONE FINE)}$$

$$\phi_{2\Delta x} - \phi_{4\Delta x} = 2^{P} \alpha (2^{P} - 1) \Delta x^{P} \quad \text{(DISCRETIZZAZIONE GROSSOLANA)}$$

SE VOLESSI STIMARE L'ACCURATEZZA DELLO SCHEMA FACCIO IL RAPPORTO TRA LE DUE:

$$2^{P} = \frac{\phi_{2\Delta x} - \phi_{4\Delta x}}{\phi_{\Delta x} - \phi_{2\Delta x}} \quad \text{DA CUI} \quad P = \frac{\log\left(\frac{\phi_{2\Delta x} - \phi_{4\Delta x}}{\phi_{\Delta x} - \phi_{2\Delta x}}\right)}{\log 2}$$

SE UNO SCHEMA È PREVISTO ESSERE ACCURATO AL 2° ORDINE E POI NON LO È DOPO AVER RICALCOLATO LA SOLUZIONE DOPO AVER RAFFINATO LA GRIGLIA DI CALCOLO, ALLORA È PROBABILE CHE CI SIA UN ERRORE IN ESSO.

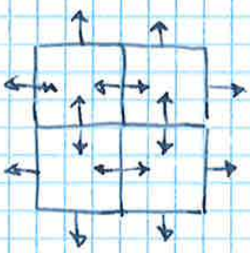
POSSO STIMARE L'ERRORE COME:

$$\varepsilon_{\Delta x}^{d} \simeq \alpha \Delta x^{P} = \frac{\phi_{\Delta x} - \phi_{2\Delta x}}{2^{P} - 1}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 45 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 166

VALE SIA IN OGNI CELLA CHE NELLE CELLE GLOBALI (OVVERO IN TUTTO IL DOMINIO).
OGNI CELLA AVRÀ DEI BORDI, CHE AVRANNO DELLE NORMALI USCENTI.
LA LEGGE DI CONSERVAZIONE VALE SU TUTTE LE CELLE:

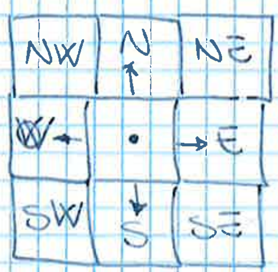


SE VADO A RISOLVERE GLI INTEGRALI DI SUPERFICIE, DEVO TRASFORMARE L'INTEGRALE IN UNA SOMMA:

$$\int_S \rho\varphi \underline{u}\cdot\underline{n}\,dS = \sum_i \int_{S_i} \rho\varphi\underline{u}\cdot\underline{n}_i\,dS_i$$

UNA PROPRIETÀ IMPORTANTE È CHE SOMMANDO I CONTRIBUTI IN TUTTE LE CELLE DEVO AVERE IL SOLO FLUSSO IN TUTTO IL DOMINIO ESTERNO, IN QUESTO I FLUSSI INTERNI SI ELIDONO ESSENDO UGUALI IN MODULO (ALL'INTERFERENZA DEVO AVERE CONTINUITÀ) MA OPPOSTI (È OPPOSTO IL SEGNO DELLA NORMALE)

DEFINENDO UNA CELLA DI RIFERIMENTO ED INDIVIDUANDO CON NORD, SUD, EST, OVEST LE CELLE ADIACENTI, HO:



L'INTEGRALE CALCOLATO È DATO DALLA RELAZIONE

$$\int_S f\,dS = \sum_k \int_{S_k} f\,dS_k$$

L'INTEGRALE SULLA SUPERFICIE K-ESIMA È NOTO SULLA BASE DELLE CONOSCENZE DEI VALORI AL BORDO. TUTTAVIA QUESTI VALORI NON SONO NOTI, PERCHÉ QUELLO CHE CALCOLO È NOTO A CENTRO CELLA. QUELLO AL BORDO DEVE ESSERE APPROSSIMATO ATTRAVERSO UNA INTERPOLAZIONE DELLA FUNZIONE O ALTRO.
APPROSSIMANDO GLI INTEGRALI SULLA FACCIA ASSUMENDO COME VALORE PER f UN VALORE UGUALE A QUELLO CHE LA STESSA f ASSUME AL CENTRO DELLA FACCIA, SI HA UN'APPROSSIMAZIONE CHE PORTA UN'ACCURATEZZA AL SECOND'ORDINE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 166

TALE INTEGRALE È ESATTO SE $\bar{q}$ È LINEARE ⇒ VARIA COME UN PIANO. SE VOGLIO UTILIZZARE APPROSSIMAZIONI DI ORDINE SUPERIORE, POSSO FARLO CONOSCENDO I VALORI AI NODI. NOI NON USEREMO QUESTO APPROCCIO.

DISCRETIZZAZIONE DELL'EQUAZIONE MODELLO

$$\int_S \rho \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS - \int_S \Gamma \nabla \underline{\phi} \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

MA PER OGNI CELLA VALE CHE

$$\sum_k \int_{S_k} \rho \phi \underline{u} \cdot \underline{n}_k \, dS - \sum_k \int_{S_k} \Gamma \nabla \underline{\phi} \cdot \underline{n} \, dS = 0$$

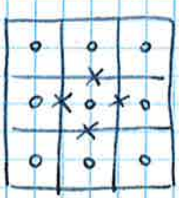
ORA APPROSSIMO GLI INTEGRALI

$$\sum_k \underbrace{(\rho \phi \underline{u} \cdot \underline{n})_k}_{\text{VALORI CALCOLATI A CENTRO-FACCIA}} \Delta S_k - \sum_k \underbrace{(\Gamma \cancel{\phi} \nabla \underline{\phi} \cdot \underline{n})}_{\text{CENTRO FACCIA}} \Delta S_k = 0$$

TALE EQUAZIONE VALE PER OGNI CELLA, MA SULLA CELLA IO CONOSCO I VALORI AL CENTRO CELLA E NON SULLA FACCIA: DEVO INTERPOLARE

IL TERMINE CONVETTIVO È CORRISPONDENTE ALLA DIVERGENZA:

$$\int_S \rho \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS \Rightarrow \nabla \cdot (\rho \phi \underline{u})$$

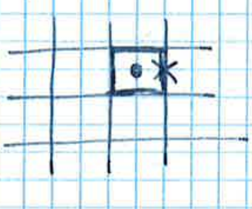


X → VALORI INCOGNITI PER CALCOLARE I FLUSSI

o → VALORI NOTI

TUTTAVIA C'È UN'ANALOGIA TRA APPROCCIO INTEGRALE E DIFFERENZIALE:

$$\int \rho \phi \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(\rho \phi u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \phi v)$$



L'APPROCCIO CHE AVEVAMO USATO NELLE D.F. ERA QUELLO UPWIND, OVVERO DISCRETIZZARE NELLA DIREZIONE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 166

$$(\rho \phi u)_e = (\rho \phi u)_P + \rho u \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P (x_e - x_P) + \rho u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \left(\frac{(x_e - x_P)^2}{2}\right) + H$$

DICENDO CHE $(\rho \phi u)_e = (\rho \phi u)_P$, TRASCURO IL PRIMO TERMINE CHE È LA PARTE PREDOMINANTE DELL'ERRORE.
SCRIVENDO IL PRIMO TERMINE COME:

$$\rho u \frac{\Delta x}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_P \qquad \text{CON} \qquad (x_e - x_P) = \frac{\Delta x}{2}$$

CIÒ VUOL DIRE CHE NELL'EQUAZIONE NUMERICA, HO INSERITO UN ERRORE CHE HA LA FORMA DI UNA VISCOSITÀ NUMERICA Γ_{num} PER UN GRADIENTE:

$$\Gamma_{num} \left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_P$$

TALE TERMINE "ENTRA" NELL'EQUAZIONE IN QUANTO FA PARTE DELL'ERRORE NUMERICO. TALE ERRORE NUMERICO SI COMPORTA COME UN TERMINE CHE NELL'EQUAZIONE ESISTE, CHE È IL FLUSSO DIFFUSIVO.
CIÒ VUOL DIRE CHE FACENDO COSÌ HO INTRODOTTO UN TERMINE CHE ANDRÀ A SOMMARSI ALLA DIFFUSIONE CHE È DENTRO L'EQUAZIONE VERA.
TALE ERRORE PERTANTO NON POTRÀ OSCILLARE PERCHÉ VIENE SMUSSATO.
UN'ALTRA POSSIBILITÀ È QUELLA DI FARE UN'INTERPOLAZIONE LINEARE, CHE MI ELIMINA IL PROBLEMA DEL COMPORTAMENTO DIFFUSIVO DELL'ERRORE LINEARIZZANDO IL VALORE DEL FLUSSO CHE UTILIZZO.

TALE PROCEDIMENTO È ACCURATO AL SECOND'ORDINE PERCHÉ TENGO DENTRO IL TERMINE DEL PRIM'ORDINE. L'ERRORE HA A CHE FARE CON LA DERIVATA SECONDA, CHE NON HA A CHE FARE CON NULLA DI FISICO DELL'ERRORE.
L'INTERPOLAZIONE LINEARE SU UNA GRIGLIA NON EQUISPAZIATA È DATA DA

$$\varphi_e = \varphi_E \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} + \varphi_P \frac{x_E - x_e}{x_E - x_P} = \varphi_E \lambda + \varphi_P (1 - \lambda)$$

TALE APPROSSIMAZIONE È ACCURATA AL II ORDINE ED IN QUESTO MODO HO UN'INTERPOLAZIONE MIGLIORE. IL PROBLEMA È PERÒ DI STABILITÀ. UNO SCHEMA DI LINEARIZZAZIONE DEI FLUSSI DI QUESTO TIPO RISULTA INSTABILE. VEDIAMO CHE CI SONO SCHEMI UPWIND COSTRUITI SULLA BASE DELL'APPROSSIMAZIONE AL II ORDINE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 166

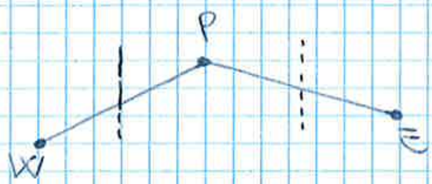
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 166

TALI PENDENZE SONO SIMILI A DELLE DERIVATE. IN QUALCHE MODO DEVO UTILIZZARE TALE INFORMAZIONE PER RICOSTRUIRE LA SOLUZIONE ALL'INTERNO DELLA CELLA. TALE VALORE SI RICOSTRUISCE ATTRAVERSO UNA FUNZIONE DETTA LIMITER:

$$\sigma_p = \text{LIMITER}\left(\sigma_p^L, \sigma_p^R\right)$$

LA σ_p VERRÀ POI ASSEGNATA ALLA CELLA. UNA POSSIBILITÀ NELLA SCELTA È, AD ESEMPIO, SCEGLIERE QUELLA CHE TRA LE DUE È MENO GRANDE, ED ASSEGNARLE TUTTA LA CELLA. CIÒ PERCHÉ IL FINE ULTIMO È RICOSTRUIRE LINEARMENTE LA SOLUZIONE ALL'INTERNO DELLA CELLA.

MI PIACEREBBE CHE TUTTAVIA IL LIMITER SIA UN MODO DI SMORZARE EVENTUALI OSCILLAZIONI CHE POTREBBERO VENIR FUORI NUMERICAMENTE. CIÒ È IMPORTANTE AD ESEMPIO QUANDO HO DUE PENDENZE DI SEGNO DISCORDE.



TALE MECCANISMO POTREBBE ESSERE FATTO INTRODUCENDO DELLA VISCOSITÀ ARTIFICIALE ATTRAVERSO LA SCELTA DI METTERE IN P UNA DISTRIBUZIONE COSTANTE CHE FA SÌ CHE L'OSCILLAZIONE EVENTUALE VENGA SMORZATA. CIÒ INTRODUCE UN PICCOLO ERRORE (SOPRATTUTTO SE HO EFFETTIVAMENTE UN MASSIMO LOCALE).

UN OPERATORE DI QUESTO TIPO È DETTO MINMOD

$$\sigma_p = \text{minmod}\left(\sigma_p^L, \sigma_p^R\right) = \begin{cases} \text{SE } \sigma_p^L \cdot \sigma_p^R > 0 \Rightarrow \sigma_p = \text{sign}(\sigma_p^L) \cdot \min(\sigma_p^L, \sigma_p^R) \\ \text{SE } \sigma_p^L \cdot \sigma_p^R < 0 \Rightarrow \sigma_p = 0 \end{cases}$$

OVVERO SCELGO IL MINIMO TRA LE DUE SE SONO CONCORDI, ALTRIMENTI LO ANNULLO SE DISCORDI.

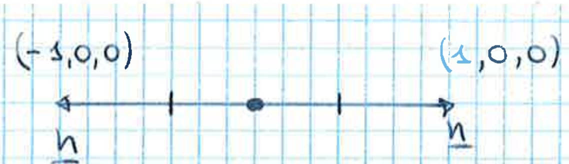
POSSO EFFETTUARE UN'ALTRA SCELTA SULLA BASE DEL RAPPORTO

$$\theta_p = \sigma_p^R / \sigma_p^L$$

PER TROVARE σ_p UTILIZZO LA θ_p IN UNA FUNZIONE Λ CHE ELABORA θ_p ED È MOLTIPLICATA PER σ_p^L

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 166



FACENDO IL PRODOTTO $\underline{u}\cdot\underline{n} = \begin{cases} +u & \text{SE SONO A DX} \\ -u & \text{SE SONO A SX}\end{cases}$

A LIVELLO SIMBOLICO SI HA INVECE CHE GLI INDICI DEI BORDI SONO <u>SEMI-INTERI</u>. SE

$\underline{u} = \{u, v, w\}$

L'EQUAZIONE DIVENTA

$$(\rho\phi u)_{N+\frac{1}{2}} - (\rho\phi u)_{N-\frac{1}{2}} - \left[\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{N+\frac{1}{2}} - \left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{N-\frac{1}{2}}\right] = 0$$

IL ΔS SAREBBE SCOMPARSO PERCHÉ FATTORE COMUNE. SE CI FOSSE STATO L'INTEGRALE DI VOLUME SAREBBE STATO

$$\int_V q\,dV = q\Delta S\Delta x \Rightarrow \text{IL TERMINE NOTO SAREBBE STATO}$$

$\boxed{q\Delta x}$ E ΔS SAREBBE SCOMPARSO.

SE CI FOSSE STATA LA DERIVATA TEMPORALE SAREBBE STATO LO STESSO. ORA C'È IL SOLITO PROBLEMA DEI VOLUMI FINITI: DEVO TROVARE $\rho\phi u$ IN $N+\frac{1}{2}$ E $N-\frac{1}{2}$, COSÌ COME $\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}$ (FLUSSI CONVETTIVI E FLUSSI DIFFUSIVI).

ORA, SE VOLESSI VALUTARE LE GRANDEZZE AL PRIMO ORDINE, SI OTTIENE LO SCHEMA <u>UPWIND</u> SEMPLICE PONENDO:

$$(\phi)_{N+1/2} = \begin{cases}\phi_{N+1} & \text{SE } u<0\\ \phi_N & \text{SE } u>0\end{cases} \qquad \text{E COSÌ VIA}$$

POTREI ANCHE APPLICARE UNO SCHEMA DEL SECOND'ORDINE CON I LIMITERS.

ORA PER IL TERMINE <u>DIFFUSIVO</u> CI SONO DELLE DERIVATE. PER CALCOLARE LE DERIVATE POSSO UTILIZZARE LE <u>DIFFERENZE FINITE</u>.

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) = \frac{\phi_{i+1}-\phi_{i-1}}{\Delta x_i + \Delta x_{i+1}} + O(\Delta x^2)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 166

VERGENZA IN TEMPO. QUANDO DEVO CONTROLLARE LA CONVERGENZA ~~[illegible]~~ DOVRÓ VERIFICARE L'ERRORE COMPIUTO NELLA SOLUZIONE DAL SISTEMA ALGEBRICO:

$$[A]\{\phi\} = \{R\}$$

E LA DERIVATA TEMPORALE (CHE TENDE A ZERO NEL TEMPO).

NELLE ESERCITAZIONI SI POTRÁ VEDERE CHE CI SONO CONSIDERAZIONI DI STABILITÁ NEL TEMPO ΔT - LA SOLUZIONE INIZIALE CHE CONSIDERO PER RISOLVERE È UNA SOLUZIONE COSTANTE UNIFORME AL VALORE DELLA CONDIZIONE AL CONTORNO.
LA STABILITÁ DIPENDE ANCHE DAL TIPO DI SCHEMA CHE UTILIZZO.

PER CONFRONTARE LA SOLUZIONE NUMERICA E VERIFICARE SE È CORRETTA SI UTILIZZERÁ LA SOLUZIONE ESATTA:

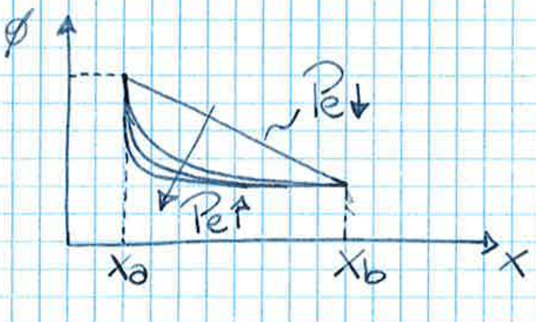
$$\phi(x) = \phi_a + \left(\frac{e^{\frac{\rho u L}{\Gamma}\frac{x}{L}} - 1}{e^{\frac{\rho u L}{\Gamma}} - 1} \right)(\phi_b - \phi_a)$$

CON $L = x_b - x_a$ E LA CONDIZIONE AL CONTORNO

$$\phi(x_a) = \phi_a \quad , \quad \phi(x_b) = \phi_b$$

SI VEDE CHE NELLA SOLUZIONE ESATTA CHE È UNA ESPONENZIALE SI HA UN TERMINE $\frac{\rho u L}{\Gamma}$ CHE IN QUALCHE MODO È PARENTE DEL REYNOLDS:
È CHIAMATO NUMERO DI PECLÉT $\quad Pe = \frac{\rho U L}{\Gamma}$

SE $Pe \downarrow$, VUOL DIRE Γ MOLTO ELEVATO: CIÓ VUOL DIRE CHE LE SOLUZIONI SONO MOLTO SMORZATE E MOLTO DIFFUSIVE.
SE $Pe \uparrow$, ALLORA LA SOLUZIONE DIFFONDE POCO E PER QUESTO I GRADIENTI SONO ELEVATI.

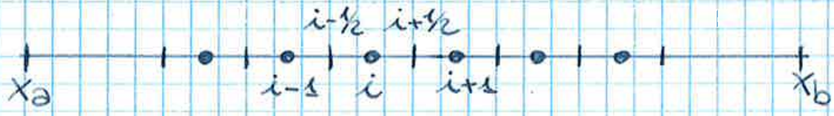


IL Pe È IN QUALCHE MODO LA MISURA DELLO "STRATO LIMITE" DELL'EQUAZIONE MODELLO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 57 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 166

VALE IL NUMERO DI PECLET.
D'ORA IN POI LE EQUAZIONI SARANNO TUTTE DISCRETIZZATE.
SE IL DOMINIO È COMPRESO TRA a E b, SI HA:



$$L = x_b - x_a \Rightarrow \Delta x = \frac{L}{NCL}$$ NCL → NUMERO DI CELLE

OVVERO $\Delta \bar{x} = \frac{1}{NCL}$

DEFINENDO GLI INDICI i, $i+1$ E $i-1$, E GLI INDICI SEMINTERI CHE DEFINISCONO LE SUPERFICI $i+\frac{1}{2}$ E $i-\frac{1}{2}$.
SE QUESTE EQUAZIONI DEBBONO VALERE PER LE CELLE, APPLICO AL POSTO DI $b \to i+\frac{1}{2}$ E $a \to i-\frac{1}{2}$

$$\left[(\rho\phi u)_{i+\frac{1}{2}} - (\rho\phi u)_{i-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{Pe}\left[(\Gamma\phi_x)_{i+\frac{1}{2}} - (\Gamma\phi_x)_{i-\frac{1}{2}}\right] = 0$$

ORA LE VARIABILI SONO ADIMENSIONALI.
MA DEVO APPLICARE LO SCHEMA NUMERICO PER CORRELARE LE GRANDEZZE SULLE FACCE A QUELLE DI CENTRO CELLA. SI HA:

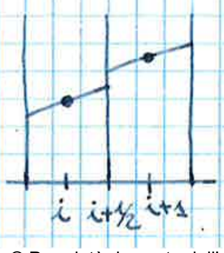
$$(\rho u\phi)_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} (\rho u\phi)_{i+1} & \text{SE } u<0 \\ (\rho u\phi)_i & \text{SE } u>0 \end{cases}$$

OVVERO

$$(\rho u\phi)_{i+\frac{1}{2}} = \max\left[(\rho u\phi)_i, 0\right] + \min\left[(\rho u\phi)_{i+1}, 0\right]$$

SE $u>0$, $\rho\phi u>0$ E PRENDO IL VALORE IN i; ALTRIMENTI SE $u<0$, $\rho\phi u<0$ E PRENDO IL VALORE IN $i+1$. TALE SCHEMA È PROPRIO LO SCHEMA <u>UPWIND</u>.

SE VOGLIO TROVARE UNA SOLUZIONE ACCURATA AL SECOND'ORDINE, POSSO CERCARE DI RICOSTRUIRE LA SOLUZIONE ALL'INTERFACCIA SULLA BASE DEI VALORI DI CENTRO CELLA.



LA SOLUZIONE PUÒ ESSERE RICOSTRUITA IN MODO LINEARE:
SE C'È DISCONTINUITÀ, USO ANCORA IL METODO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 59 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 166

RISOLVENDO, RICAVO (FACENDO $\varphi_{i+1} - \varphi_i$)

$$\varphi_{i+1} - \varphi_i = b\Delta x \Rightarrow b = \frac{\varphi_{i+1} - \varphi_i}{\Delta x}$$

(CHE È SOSTANZIALMENTE UNA DERIVATA CENTRATA AL SECONDO ORDINE) ED È ACCURATA AL SECONDO ORDINE.

SI PUÒ USARE NEI TERMINI DIFFUSIVI PERCHÉ SONO GIÀ SMORZATI INTRINSECAMENTE, MENTRE QUELLI CONVETTIVI PORTANO AD UNA OSCILLAZIONE DELLA SOLUZIONE SE USO QUESTO METODO.
L'EQUAZIONE DISCRETA SI SCRIVE INFINE:

$$\max\left[(\rho u\phi)_i, 0\right] + \min\left[(\rho\phi u)_{i+1}, 0\right] +$$
$$-\left\{\max\left[(\rho u\phi)_{i-1}, 0\right] + \min\left[(\rho u\phi)_i, 0\right]\right\} +$$
$$-\frac{1}{Pe}\left\{\Gamma\frac{\phi_{i+1}-\phi_i}{\Delta x} - \Gamma\frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{\Delta x}\right\} = 0$$

RISCRIVENDO E RICORDANDO CHE $\Delta x = cost$ E $\rho u \Gamma$ SONO COSTANTI, E RACCOGLIENDO LA ϕ_i, ϕ_{i+1}, ϕ_{i-1} OTTENGO:

$$-\max\left[\rho u\phi_{i-1}, 0\right] - \frac{\Gamma}{Pe_{rif}\Delta x}\phi_{i-1} +$$
$$+\max\left[\rho u\phi_i, 0\right] - \min\left[\rho u\phi_i, 0\right] + \frac{2}{Pe}\frac{\Gamma}{\Delta x}\phi_i +$$
$$-\min\left[\rho u\phi_{i+1}, 0\right] - \frac{\Gamma}{Pe\Delta x}\phi_{i+1} = 0$$

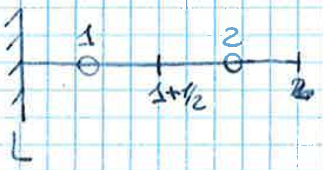
SI NOTI CHE IL TERMINE DIFFUSIVO È COME SE FOSSE UNA DERIVATA SECONDA CENTRATA MOLTIPLICATA PER Δx. CIÒ PERCHÉ L'EQUAZIONE È TUTTA MOLTIPLICATA PER Δx CHE SI È SEMPLIFICATO CON L'INTEGRAZIONE NELLA RELAZIONE. ORA POSSO TIRAR FUORI ϕ_i, ϕ_{i-1} ϕ_{i+1} DALLE RELAZIONI MAX E min COSÌ DA AVERE UN SISTEMA:

$$\left\{-\rho\max[u,0] - \frac{\Gamma}{Pe\Delta x}\right\}\phi_{i-1} +$$
$$+\left\{\rho\max[u,0] - \rho\min[0,u] + \frac{2\Gamma}{Pe\Delta x}\right\}\phi_i +$$
$$-\left\{\rho\min[0,u] + \frac{\Gamma}{Pe\Delta x}\right\}\phi_{i+1} = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 166

POSSO FARLO CON UN FITTING POLINOMIALE:



$$\varphi(x) = a + bx + cx^2$$

SI HA INOLTRE $\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_0 = b + 2cx\Big|_0 = b$

CALCOLANDO IL L, 1, 2, HO:

$$\begin{cases} \phi_L = a \\ \phi_1 = a + b\frac{\Delta x}{2} + c\frac{\Delta x^2}{4} \\ \phi_2 = a + b\,3\frac{\Delta x}{2} + c\,9\frac{\Delta x^2}{4} \end{cases}$$

RICAVO LA b MOLTIPLICANDO PER -9 LA II EQ E SOMMANDO

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_L = b = \frac{3\phi_1 - \frac{1}{3}\phi_2 - \frac{8}{3}\phi_L}{\Delta x}$$

QUESTA È L'APPROSSIMAZIONE DELLA DERIVATA PRIMA FORWARD NEL PUNTO DI SX. NEL PUNTO DI DX È ANALOGO MA CAMBIANO I SEGNI. PERTANTO LA PRIMA EQUAZIONE È:

$$\left[\max[0,u] + 4\frac{\Gamma}{\rho\Delta x Pe}\right]\phi_1 + \left[\min[0,u] - \frac{4}{3}\frac{\Gamma}{\rho\Delta x Pe}\right]\phi_2 =$$

$$= -\left[-u - \frac{8}{3}\frac{\Gamma}{\rho\Delta x Pe}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1\phi_1 + c_1\phi_2 = -r_1}$$

CON r: RESIDUO CHE VA NEL TERMINE NOTO.

ANALOGAMENTE, PER L'ULTIMA RELAZIONE:

$$\boxed{a_{NCL}\phi_{NCL-1} + b_{NCL}\phi_{NCL} = -r_{NCL}}$$

DOVE NCL È IL NUMERO DI CELLE.

SI NOTA CHE AL PRIM'ORDINE (TERMINI CONVETTIVI), LA MATRICE DEI COEFFICIENTI È INDIPENDENTE DA ϕ. SE FACESSI IL SECONDO ORDINE SI AVREBBE NEI COEFFICIENTI UNA SOMMA DOVUTA ALLA PRESENZA DELLE σ. TALE CORREZIONE DIPENDE DALLE σ, CHE A LORO VOLTA DIPENDONO DALLA SOLUZIONE.

PERTANTO SE COSÌ STANNO LE COSE, IL PROBLEMA DIVENTA NON LINEARE E IL SISTEMA VIENE RISOLTO CON UN METODO ITERATIVO. PER TROVARE LA SOLUZIONE ITERATIVA SI UTILIZZANO METODI

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 166

NAVIER-STOCKS INCOMPRIMIBILE

PER EQ. DI N-S SI INTENDONO LE TRE EQUAZIONI DI CONS. DELLA MASSA, DELLA Q.D.M. ED ENERGIA.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}\,\underline{v}) + \nabla p = \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}$$

CON $\underline{\underline{\tau}} = \mu \left(\frac{\nabla \underline{v} + \nabla \underline{v}^T}{2} \right) + \lambda (\nabla \cdot \underline{v}) \underline{\underline{I}}$

→ POI ENERGIA

LA CONDIZIONE PER AVERE DENSITÀ COSTANTE È CHE LE VARIAZIONI DI VELOCITÀ DEVONO ESSERE MINORI DELLE VELOCITÀ DI OSCILLAZIONE ACUSTICA

$\Rightarrow M \ll 1 \; ; \; M < 0{,}3 \div 0{,}4$

IL REGIME INCOMPRIMIBILE SI HA QUANDO LE VARIAZIONI DI DENSITÀ SONO MOLTO PICCOLE. SI HA:

$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = -(\nabla \cdot \underline{v})$ MA SE $\frac{D\rho}{Dt} \simeq 0$ (LE VARIAZIONI SONO ESTREMAMENTE PICCOLE)

SI HA $\nabla \cdot \underline{v} \simeq 0$ → LA DENSITÀ NON È PIÙ UN'INCOGNITA MA UN PARAMETRO DEL PROBLEMA.

LA CONS. DELLA Q.D.M. DIVENTA

$$\frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} + \underline{v}\, \nabla \cdot (\rho \underline{v}) + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0$$

$$\equiv \quad \frac{\partial \rho \underline{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \underline{v} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \right) + \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \underline{v} \cdot \nabla \underline{v} + \nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0$$

SI RICAVA CHE IN FORMA LAGRANGIANA

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} + \nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0$$

TUTTAVIA TORNANDO INDIETRO POSSO AGGIUNGERE IL TERMINE FITTIZIO $\rho \underline{v} (\nabla \cdot \underline{v})$ (CHE È NULLO) E PERTANTO

$$\boxed{\rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\underline{v}\,\underline{v}) + \nabla p - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} = 0}$$

QUESTA EQUAZIONE È UN IBRIDO TRA IL PUNTO DI VISTA EULERIANO E LAGRANGIANO ED È MOLTO UTILE DAL PUNTO DI VISTA NUMERICO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 166

L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA È UNA EQUAZIONE CHE NEL CASO INCOMPRIMIBILE DIVENTA DISACCOPPIATA DALLE ALTRE DUE E POSSONO ESSERE RISOLTE IN SEQUENZA E NON INSIEME.
CIÒ PERCHÉ RICORDANDO L'EQUAZIONE

$$\rho \frac{D}{Dt}\left(e+\frac{V^2}{2}\right) + \nabla\cdot(p\underline{v}) - \nabla\cdot(\underline{\underline{\tau}}\cdot\underline{v}) + \nabla\cdot\underline{q} = 0$$

SE NOTO IL PRIMO, IL SECONDO E IL TERZO TERMINE, VEDO CHE OTTENGO PIÙ ENERGIA CHE VIENE TRASPORTATA DAL CAMPO DI VELOCITÀ.

TALE EQUAZIONE È QUELLA CHE SI OTTIENE DALLA TRATTAZIONE DELL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA.

RISCRIVENDO LE PRIME DUE EQUAZIONI CHE HO E CONSIDERANDO CHE ρ E μ SONO DUE COSTANTI, HO

$$\rho = cost \qquad \mu = cost$$

$$\nabla\cdot\underline{v} = 0$$

$$\rho\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \rho\nabla\cdot(\underline{v}\,\underline{v}) + \nabla p - \mu\nabla^2\underline{v} = 0$$

ORA LA PRESSIONE È UN'INCOGNITA CHE IN REALTÀ DÀ PROBLEMI. INFATTI LA PRIMA EQUAZIONE È UN VINCOLO NEL CAMPO DI VELOCITÀ MENTRE LA SECONDA MI DICE COME LA VELOCITÀ SI MUOVE NEL TEMPO.
NON C'È UN TERMINE CHE MI DICE IN QUALCHE MODO COME LA PRESSIONE AVANZA NEL TEMPO. PER RICAVARE UN'EQUAZIONE PIÙ UTILE FACCIO LA DIVERGENZA DELLA Q.D.M. CIÒ VUOL DIRE FARE EQUAZIONE PER EQUAZIONE LA DERIVATA SPAZIALE.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}(uu) + \rho\frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial P}{\partial x} - \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right] = 0$$

RICAVO, INVERTENDO LA DERIVATA

$$\rho(u_{,x})_{,t} + \rho(uu)_{,xx} + \rho(uv)_{,xy} + P_{xx} - \mu\left(u_{,xxx} + u_{,yyx}\right) = 0$$

PER L'EQUAZIONE IN Y HO ANALOGAMENTE

$$\rho(u_{,y})_{,t} + \rho(vu)_{,xy} + \rho(vv)_{,yy} + P_{yy} - \mu(v_{,xxy} + v_{,yyy}) = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 67 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 166

POI NOTO IL CAMPO $\underline{V}$, RICAVO IL NUOVO CAMPO DI PRESSIONE COME

$$\nabla^2 p + \rho(\underline{V} \cdot \nabla u)_{,x} + \rho(\underline{V} \cdot \nabla v)_{,y} = 0$$

CHE È L'EQUAZIONE DI POISSON.

LO SCHEMA DI CALCOLO È UN PO' CONTRO CORRENTE RISPETTO A QUANTO ACCADE FISICAMENTE. INFATTI QUESTO MODELLO DICE CHE LA PRESSIONE SI ADATTA ISTANTANEAMENTE AL CAMPO DI VELOCITÀ. IN REALTÀ LE ONDE DI PRESSIONE VIAGGIANO A VELOCITÀ

$$a = \sqrt{\gamma R T} = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_{s=cost}}$$

PERCIÒ L'ADATTAMENTO AVVIENE DOPO UN CERTO INTERVALLO DI TEMPO.

TUTTAVIA SE $\rho = cost$, ALLORA $a \to \infty$. PER QUESTO IL MODELLO MI FA CALCOLARE LA p ISTANTANEAMENTE. INFATTI NON C'È UNA VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE ACUSTICA DELLA PERTURBAZIONE. O MEGLIO, CIÒ CHE SI DICE È CHE LE VELOCITÀ CARATTERISTICHE DEL CAMPO ACUSTICO SONO MOLTO PIÙ GRANDI DI QUELLE DEL CAMPO FLUIDODINAMICO.

OVVERO $\boxed{\frac{u}{a} \ll 1}$

PIÙ u DIVENTA GRANDE, E PIÙ LE VELOCITÀ DI PROPAGAZIONE SI AVVICINANO A QUELLE DEL FENOMENO FLUIDODINAMICO. ALLORA SI HA CHE IL MODELLO NON HA PIÙ SENSO FISICO. IN GENERE IL LIMITE È $\boxed{M < 0,3}$.

L'EQUAZIONE DI POISSON VA NEL SET DI EQUAZIONI A SOSTITUIRE $\nabla \cdot \underline{V} = 0$.

TUTTAVIA SE DAL PUNTO DI VISTA MATEMATEMATICO L'EQUAZIONE È CORRETTA, DAL PUNTO DI VISTA NUMERICO IL FATTO CHE $\underline{V}$ SIA SOLENOIDALE NON È ASSICURATO: DOVRÒ CONTROLLARLO E VERIFICARLO AD OGNI ITERAZIONE. INFATTI UNA VOLTA ANDATI A DISCRETIZZARE LA CONS. DELLA Q.D.M. E L'EQUAZIONE DI POISSON, LA $\nabla \cdot \underline{V}$ NON È AFFATTO GARANTITA.

UNA VISIONE ALTERNATIVA DELLA PRESSIONE È TALE CHE QUESTA SIA UN PARAMETRO CHE DEVO TROVARE AFFINCHÉ $\nabla \cdot \underline{V} = 0$ SIA

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 166

IN FORMA VETTORIALE COMPATTA HO

$$\rho \int_{\Omega} \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} d\Omega + \rho \int_{\sigma} \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n}) d\sigma + \int p \underline{\underline{I}} \cdot \underline{n} d\sigma - \mu \int_{\sigma} \nabla \underline{v} \cdot \underline{n} d\sigma = 0$$

CON LA SOLITA NOTAZIONE CHE SE HO DUE VETTORI, UNO È INTESO COME COMPONENTE.

QUESTA È LA FORMA INTEGRALE DELL'EQUAZIONE DI Q.D.M. TALE EQUAZIONE ASSOMIGLIA A QUELLA MODELLO SE NON PER IL TERMINE DI PRESSIONE.
L'EQUAZIONE DI POISSON, INVECE, È PIÙ COMODA PERCHÉ POSSO PENSARE CHE UN VETTORE SIA

$$\underline{z} = \begin{Bmatrix} \underline{v} \cdot \nabla u \\ \underline{v} \cdot \nabla v \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{HO } \boxed{\nabla \cdot \underline{z}}$$

PERTANTO HO CHE

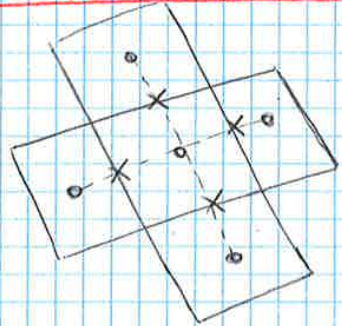
$$\int_{\Omega} \nabla^2 p \, d\Omega + \rho \int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{z} \, d\Omega = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\sigma} \nabla p \cdot \underline{n} \, d\sigma + \rho \int_{\sigma} \underline{z} \cdot \underline{n} \, d\sigma = 0} \quad \text{VALE A DIRE}$$

$$\boxed{\int_{\sigma} \nabla p \cdot \underline{n} \, d\sigma + \rho \int_{\sigma} \left[(\underline{v} \cdot \nabla u) n_x + (\underline{v} \cdot \nabla v) n_y \right] d\sigma = 0}$$

ORA HO DUE EQUAZIONI INTEGRALI, CHE RISOLTE IN SEQUENZA DOVREBBERO PORTARE ALLA PRIMA. ORA UTILIZZO LO STESSO SCHEMA PER DISCRETIZZARE.

DISCRETIZZAZIONE DELLE EQUAZIONI



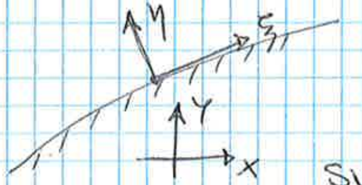
PER CALCOLARE I FLUSSI DEVO UTILIZZARE LA STESSA TECNICA UPWIND NEL CASO 1D PER QUEL CHE RIGUARDA LA VELOCITÀ.
PER LA PRESSIONE, DEVO VALUTARE LA PRESSIONE ALL'INTERFACCIA SULLA BASE DEI VALORI DI CENTRO CELLA.
LA PRESSIONE IN REALTÀ NON VIENE TRASPORTATA DALLA VELOCITÀ QUINDI DOVRÒ FARNE UNA MEDIA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 166

SIONE P.

PER CAPIRE COME LA CONDIZIONE AL CONTORNO SI DISPONGA NEL BORDO, DEFINISCO UN SISTEMA DI RIFERIMENTO LOCALE (ξ, η)



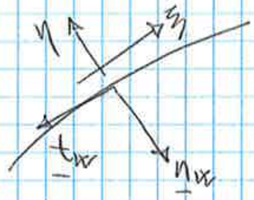
NEL PIANO $\xi, \eta \rightarrow \underline{v} = \{\tilde{u}, \tilde{v}\}$

IN $x, y \rightarrow \underline{v} = \{u, v\}$

SI HA CHE SE $\underline{t}$ È IL VERSORE TANGENTE E $\underline{n}$ QUELLO NORMALE,

$$\tilde{u} = -\underline{t} \cdot \underline{v}$$
$$\tilde{v} = -\underline{n} \cdot \underline{v}$$

TENENDO CONTO CHE I VERSORI $\underline{n}$ E $\underline{t}$ SONO USCENTI:



$$\underline{n} = \{+n_x, +n_y\}^T$$
$$\underline{t} = \{+n_y, -n_x\}^T$$

SI HA
$$\begin{cases} \tilde{u} = -u n_y + v n_x \\ \tilde{v} = -u n_x - v n_y \end{cases}$$

ORA CALCOLO IL PRODOTTO $\underline{\nabla u} \cdot \underline{n}$ E $\underline{\nabla v} \cdot \underline{n}$ CHE COMPAIONO ALL'INTERNO DELL'EQUAZIONE.

SCRIVENDO LA TRASFORMAZIONE TRA $\tilde{u}, \tilde{v}$ E u, v HO

$$\begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_y & n_x \\ -n_x & -n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

IL DETERMINANTE DELLA TRASFORMAZIONE È UNITARIO. ALLORA BASTA SCAMBIARE I SEGNI SULLA DIAGONALE PER INVERTIRE. INOLTRE ESSENDO UNA MATRICE ORTOGONALE, LA TRASPOSTA È UGUALE ALL'INVERSA.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -n_y & -n_x \\ n_x & -n_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{Bmatrix}$$

SI HA $\underline{\nabla u} \cdot \underline{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \eta} n_y + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta} n_x$

MA ORA DEVO RICORDARE CHE <u>LA DIVERGENZA NULLA È UN VINCOLO INVARIANTE RISPETTO ALLA ROTAZIONE.</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 166

PERTANTO RIMANE SOLO IL $\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\mu \nabla^2 \tilde{v}$.

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w = \mu \nabla^2 \tilde{v} = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \right)$$

MA A PARETE $\tilde{v}$ NON C'È E SE MI SPOSTO LUNGO ξ LA SITUAZIONE NON CAMBIA. PERTANTO $\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \xi^2} = 0$

PERTANTO VALE

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w = \mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \right)_w$$

A PARETE NON HO NESSUNA CONDIZIONE AL CONTORNO SULLA p. MA SE SUPPONGO DI CONOSCERE LA p E LA $\tilde{v}$ SU TUTTO IL CAMPO, POSSO ESTRAPOLARE $\mu \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} \right)_w$ E QUINDI CALCOLO $\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w$. POI INTERPOLANDO DAL CAMPO ESTERNO SI ARRIVA A PARETE.

A LIVELLO OPERATIVO POSSO MUOVERMI IN TAL SENSO: IMPONENDO CHE $\tilde{v}(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2$, POSSO IMPORRE

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \eta}\right)_w = (a_1 + 2a_2 \eta)_w = a_1$$

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2}\right)_w = a_2$$

MA $\tilde{v}(0) = \tilde{v}_w = a_0$

$$\left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial \eta}\right)_w = 0 = a_1 \quad \text{(PER CONTINUITÀ)}$$

ALLORA RICAVO $\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2}$ COME COMBINAZIONE DI COSTANTI.

ORA, ESPRIMENDO LA PRESSIONE IN FUNZIONE DEL SUO GRADIENTE, FACENDO IL POLINOMIAL FITTING COME

$$p(\eta) = a_0 + a_1 \eta + a_2 \eta^2$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w = a_1 \quad \text{(NOTO DALLA SOLUZIONE)}$$

$P_w = a_0$ POSSO SCRIVERE

$$P_1 = P_w + \left(\frac{\partial P}{\partial \eta}\right)_w \frac{\Delta \eta_1}{2} + a_2 \left(\frac{\Delta \eta_1}{2}\right)^2$$

MI MANCA P_2 E LO RICAVO CON

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 166

<u>NOTA</u>: IL TERMINE A DX È NOTO PERCHÉ DIPENDE DA V_0 E V_b CHE SONO NOTE.

SE ORA INFATTI INSERISCO UN CAMPO INIZIALE CHE HA

$$\underline{V_0}^* = V_0 + \nabla\phi$$

HO CHE

$$(\underline{n}\cdot\underline{V_0}^*)_S = (n\cdot(V_0+\nabla\phi))_S - (n\cdot V_0)_S - (n\cdot V_b)_S + (n\cdot V_b)_{t=0} = (n\cdot V_b)_{t=0}$$

PERTANTO DA QUESTA CONDIZIONE HO CHE LE BOUNDARY CONDITION SONO ASINTOTICAMENTE SODDISFATTE.

SI NOTI CHE SE FOSSE UN N-S COMPRESSIBILE IL PROBLEMA POTREBBE ESSERE RISOLTO
UN ESEMPIO È QUANDO VADO A RISOLVERE UN PROFILO FERMO INVESTITO DA UNA CORRENTE UNIFORME. È COME SE IL PROFILO SI CREASSE ISTANTANEAMENTE E IL <u>CAMPO DI VELOCITÀ UNIFORME INIZIALE</u> NON SAREBBE COMPATIBILE CON LA CONDIZIONE INIZIALE AL CONTORNO, PER CUI DOVREI AVERE $\underline{V}\cdot\underline{n}=0$. PERTANTO DEVO CORREGGERE LA CONDIZIONE INIZIALE.
SE AVESSI UN CAMPO COMPRESSIBILE, AVREI CHE ALL'ISTANTE INIZIALE SI CREEREBBE UN'ONDA D'URTO (DISCONTINUITÀ) CHE PROPAGA A VELOCITÀ FINITA, E SE SONO IN SUBSONICO ESCE DAL DOMINIO. SE SONO SUPERSONICO SI POSIZIONEREBBE IN UN PUNTO AD UNA CERTA DISTANZA DA PARETE.

MATEMATICAMENTE QUESTO SPOSTAMENTO <u>NON È PREVISTO</u> SE LE EQUAZIONI SONO INCOMPRESSIBILI. PERTANTO OTTENGO SOLUZIONI CHE POTREBBERO NON AVERE SENSO. IN QUESTO IL CAMPO INCOMPRESSIBILE È MOLTO DELICATO DA RISOLVERE: SIA SECONDO LE CONDIZIONI INIZIALI CHE SECONDO LE CONDIZIONI AL CONTORNO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 77 di 166

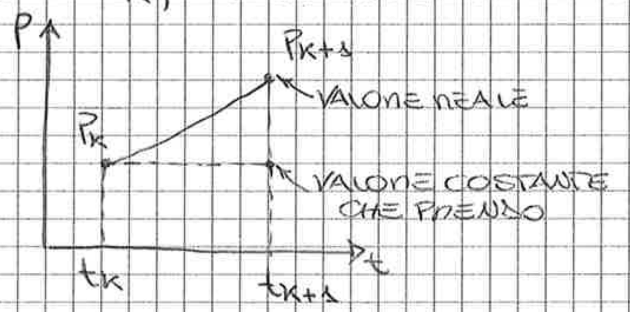
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 166

INTEGRANDO NEL TEMPO HO CHE IL PRIMO TERMINE DIVENTA

$$\boxed{\rho \Delta V (u^{k+1} - u^k)}$$

CHE È IL VALORE DELLA FUNZIONE AGLI ESTREMI DI INTEGRAZIONE.

ORA DEVO RISOLVERE IL SECONDO TERMINE. AD ESEMPIO LA PRESSIONE PUÒ VARIARE NEL TEMPO TRA t_k E t_{k+1}.
DA QUESTA VARIAZIONE DIPENDERÀ L'ACCURATEZZA DELLA SOLUZIONE NUMERICA. QUINDI DEVO DECIDERE COME AVVIENE LA VARIAZIONE.
SE DICESSI AD ESEMPIO CHE TRA t_k E t_{k+1} RIMANE COSTANTE AL VALORE IN t_k, HO UN'APPROSSIMAZIONE AL PRIMO ORDINE.



RISOLVENDO L'INTEGRALE E IMPONENDO CHE IL VALORE SIA COSTANTE, HO

$$\rho \Delta V (u^{k+1} - u^k) + \sum_s [p_s^k n_x \Delta S_s] \Delta t + \rho \sum_s u_s^k (V_s^k \cdot n_s) \Delta S_s \Delta t + - \mu \sum_s (\nabla u^k)_s \cdot n_s \Delta S_s \Delta t = 0$$

QUESTO SCHEMA TEMPORALE È UNO SCHEMA DI TIPO <u>ESPLICITO</u> AL PRIMO ORDINE.
È ESPLICITO PERCHÉ NOTA LA SOLUZIONE AL PASSO K, POSSO CALCOLARE u^{k+1}.

UN'ALTRA SCELTA POTREBBE ESSERE QUELLA DI CALCOLARE I FLUSSI ASSUMENDO CHE I VALORI SIANO COSTANTI AL VALORE K+1.
IN TALE CONDIZIONE ~~...~~ u_s E p_s NON DIPENDERANNO SOLO DAI PUNTI DI CENTRO CELLA MA ANCHE DA QUELLI DELLA CELLA CONTIGUA. PERTANTO DEVO SCRIVERE L'EQUAZIONE <u>PER TUTTE LE CELLE</u> E RISOLVERE UN SISTEMA IN CUI RICAVO ~~...~~ u^{k+1} E p^{k+1} IN TUTTO IL CAMPO. IL SISTEMA È SPARSO MA ESSENDO DA RISOLVERE È COMPUTAZIONALMENTE PIÙ FATICOSO. PERÒ <u>NON HO PROBLEMI DI STABILITÀ</u> E POSSO SCEGLIERE Δt PIÙ ALTI.
VICEVERSA NELLO SCHEMA ESPLICITO HO <u>Δt PIÙ BASSI</u> PERCHÉ HO LIMITI DOVUTI ALLA STABILITÀ MA IL COSTO COMPUTAZIONALE È MINORE.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 166

CON
$$\begin{cases} P_x = \sum_S (p n_x)_S \Delta S_S \\ H_x = \sum_S \left[u(\underline{V} \cdot \underline{n})_S \Delta S_S - \mu (\nabla \underline{u} \cdot \underline{n})_S \Delta S_S \right] \end{cases}$$

I TERMINI IN P INDICANO LA PRESSIONE MENTRE QUELLI IN H LA CONVEZIONE E DIFFUSIONE. SE LO SCHEMA È ESPLICITO, P E H SONO VALUTATI AL PASSO K. POSSO SCRIVERE

$$u^{K+1} = u^K - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} \left[P_x^K + H_x^K \right]$$
$$v^{K+1} = v^K - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} \left[P_y^K + H_y^K \right] \qquad (1)$$

SI NOTI CHE PER LA PRESSIONE SI HA UNA CERTA AMBIGUITÀ NEL DIRE IN CHE ISTANTE VIENE CALCOLATA; INFATTI È UN CAMPO SCALARE CHE MAN MANO SI AGGIORNA PER FORNIRE UN CONTRIBUTO A DIVERGENZA NULLA.

TUTTAVIA NON È SEMPRE POSSIBILE CALCOLARE UNA PRESSIONE ESATTA CHE RENDA POSSIBILE IL SODDISFACIMENTO DEL VINCOLO DI DIVERGENZA NULLA. INFATTI SE LA PRESSIONE CHE USO NON È QUELLA ESATTA LA IDENTIFICO CON p^*. PERTANTO CON QUELLA p^* SI IDENTIFICA UN CAMPO INTERMEDIO V^* CHE POI ANDRÀ AD ESSERE CORRETTO CON LE CONDIZIONI DI INCOMPRIMIBILITÀ.

LE EQUAZIONI PER IL CAMPO INTERMEDIO SONO:

$$u^* = u^K - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} \left[P_x^* + H_x^K \right]$$
$$v^* = v^K - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} \left[P_y^* + H_y^K \right] \qquad (2)$$

POSSO QUINDI SCEGLIERE IL VALORE P_x^* E P_y^* INTERMEDIO CHE MI PERMETTE DI CALCOLARE IL CAMPO INTERMEDIO, CHE POI SARANNO AGGIORNATI AL VALORE K+1. QUESTI METODI SONO DETTI <u>FRACTIONAL STEP PREDICTION CORRECTION</u>.

SOTTRAENDO LA (2) ALLA (1), HO CHE

$$\rho(u^{K+1} - u^*)\Delta V + \Delta t \left[P_x - P_x^* \right] = 0$$

ORA LA PRESSIONE $P_x - P_x^*$ È UNA <u>PRESSIONE DI CORREZIONE</u>

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 166

EQUAZIONE PER LA CORREZIONE DELLA PRESSIONE:

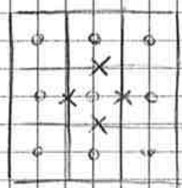
$$\boxed{\nabla^2 p' = \frac{\rho}{\Delta t}(\nabla \cdot \underline{V}^*)}$$

QUESTA EQUAZIONE DI CORREZIONE, RISOLTA, MI PERMETTE DI RICAVARE p' E $\underline{V}^{K+1}$. È FONDAMENTALMENTE UN'EQUAZIONE DI POISSON AI VOLUMI FINITI.

IN MODO OPERATIVO, UNA SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZIONE SI PUÒ RICAVARE IN QUESTO MODO. INFATTI, RICORDANDO CHE DIVERGENZA NULLA VUOL DIRE

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \Rightarrow \int_{\Delta V} \nabla \cdot \underline{V}\, dV = \int_S (\underline{V} \cdot \underline{n})\, dS$$

HO CHE PASSANDO AL DISCRETO



$$\int_S (\underline{V} \cdot \underline{n})\, dS = \sum_s (\underline{V} \cdot \underline{n})_s \Delta S_s$$

DEVO CALCOLARE QUELLA SOMMA PER TUTTE LE SUPERFICI. TUTTAVIA ESSENDO UNA RELAZIONE VETTORIALE, POSSO CALCOLARE SIA PER LA PRIMA COMPONENTE CHE PER LA SECONDA E POI SOMMARE:

$$u^{K+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} P'_x$$

$$v^{K+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} P'_y$$

INTEGRANDO SULLE SUPERFICI DELLE CELLE E SOMMANDO LE RELAZIONI HO:

$$\sum_s \left[u^{K+1} n_x + v^{K+1} n_y\right]_s \Delta S_s = \sum_s \left[u^* n_x + v^* n_y\right]_s \Delta S_s + - \frac{\Delta t}{\rho \Delta V}\left[\sum_s (P'_x n_x + P'_y n_y)_s \Delta S_s\right]$$

MA IL PRIMO TERMINE È UGUALE A ZERO. PERTANTO HO CHE:

$$\sum_s \left[u^* n_x + v^* n_y\right]_s \Delta S_s = \frac{\Delta t}{\rho \Delta V} \sum_s \left[P'_x n_x + P'_y n_y\right]_s \Delta S_s$$

SI NOTI CHE I VALORI DI P'_x E P'_y, COSÌ COME u^* E v^* SONO CALCOLATI SUL BORDO CELLA, MENTRE QUELLI A NOI NOTI SONO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 166

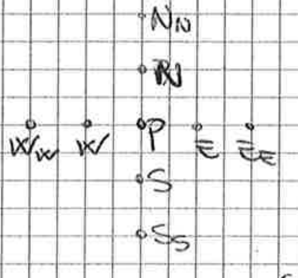
$$\frac{1}{2}\left[\frac{P_{EE}+\cancel{P_E}}{2}-\frac{\cancel{P_E}+P_P}{2}-\frac{\cancel{P_W}+P_P}{2}+\frac{\cancel{P_W}+P_{WW}}{2}\right]\Delta y^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{P_{NN}+\cancel{P_N}}{2}-\frac{\cancel{P_N}+P_P}{2}-\frac{\cancel{P_S}+P_P}{2}+\frac{\cancel{P_S}+P_{SS}}{2}\right]\Delta x^2$$

ORA, ELIMINANDO I VALORI P_E, P_W, P_S E P_N, HO:

$$\frac{1}{4}\left[P_{EE}-2P_P+P_{WW}\right]\Delta y^2+\frac{1}{4}\left[P_{NN}-2P_P+P_{SS}\right]\Delta x^2$$

IN TAL MODO VEDO CHE I PUNTI CHE COMPAIONO SONO QUELLI DISTANTI DI DUE CELLE DAL PUNTO P (CENTRO). INOLTRE, ASSOMIGLIANO A DELLE DERIVATE SECONDE MA FATTE SU UNO STENCIL CHE È IL DOPPIO DI QUELLO EFFETTIVO DELLA GRIGLIA. INFATTI:



$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}=\frac{P_{i+1}-2P_i+P_{i-1}}{\Delta x^2}$$

QUINDI RICAVO CHE CIÒ CHE COMPARE ALL'INTERNO DELLA PARENTESI È:

$$\left[P_{EE}-2P_P+P_W\right]=4\Delta x^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$\left[P_{NN}-2P_P+P_S\right]=4\Delta y^2\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

PERTANTO RICORDANDO QUESTA ESPRESSIONE OTTENGO CHE IL PRIMO TERMINE È $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}\Delta x^2\Delta y^2$

E IL SECONDO $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}\Delta x^2\Delta y^2$

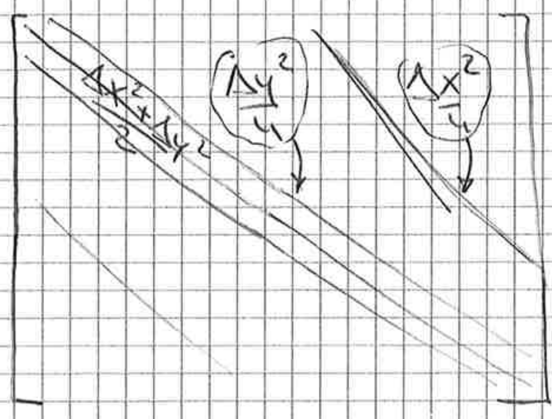
L'APPROSSIMAZIONE È QUELLA DI UN LAPLACIANO MOLTIPLICATO PER $\Delta x^2\Delta y^2$. SI NOTI COMUNQUE CHE È UN'APPROSSIMAZIONE DI DERIVATA SECONDA FATTA SU UNO STENCIL CHE HA SPAZIATURA DOPPIA RISPETTO A QUELLA DELLA GRIGLIA.

IN REALTÀ, L'EQUAZIONE OTTENUTA HA LO STESSO SIGNIFICATO DI QUELLA GIÀ SCRITTA IN TERMINI DIFFERENZIALI.
INFATTI:

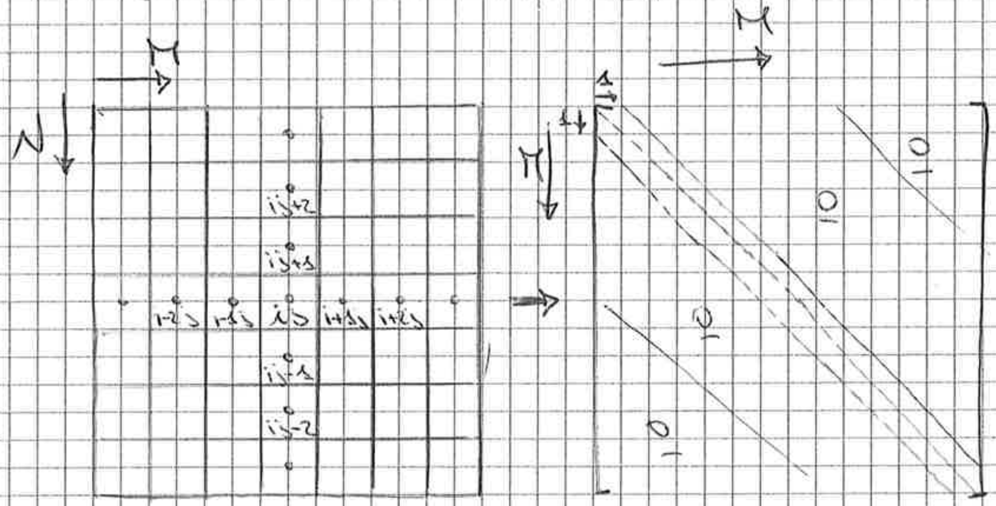
$$\left[\nabla^2 P\right]\Delta x^2\Delta y^2=\frac{\rho\,\Delta x\Delta y}{\Delta t}\left[(u_e^*-u_w^*)\Delta y+(v_n^*-v_s^*)\Delta x\right]=$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 166



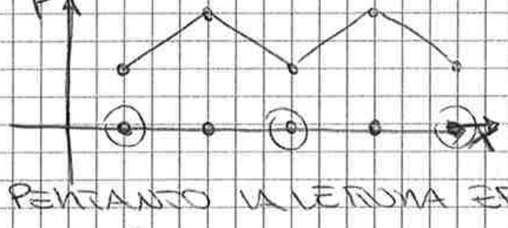
NEL CASO DI MAGLIE EQUISPAZIATE



$i^* = i + (j-1)M$

RISOLVENDO QUESTA EQUAZIONE DI POISSON TRAMITE SISTEMA, OTTENGO I VALORI DI p^*.

TUTTAVIA IL METODO NON FUNZIONA BENE IN QUANTO INSTABILE. SE PER SEMPLICITÀ VALUTO UN CASO 1D, VEDO CHE SE DISCRETIZZO LA SOLUZIONE CON VALORI OGNI DUE CELLE, NELLE CELLE INTERMEDIE LA SOLUZIONE NON È LIMITATA. SE CONSIDERO L'ANDAMENTO



DI P NELLE VARIE CELLE E ASSUMO CHE $\nabla \cdot \underline{V}^* = 0$, PER LO SCHEMA VALE CERTAMENTE $\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0$.

PERTANTO LA LETTURA EFFETTIVA DELLA SOLUZIONE È SBAGLIATA PERCHÉ MI FORNISCE DELLE p' DOVE NON DOVREBBERO ESSERCI. QUESTO SCHEMA È ANCHE DETTO A SCACCHIERA E ABBIAMO DETTO CHE AMMETTE SOLUZIONI VALIDE ANCHE SE IN REALTÀ HO UNA p' CHE HA DEI GRADIENTI NON NULLI CHE NON DOVREBBERO ESISTERE.

PER SUPERARE QUESTO, COMMETTO VOLONTARIAMENTE UNA PICCOLA INCONSISTENZA:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 166

GRADIENTI IN MANIERA DIRETTA, NON SAREBBE COERENTE.

PER SAPERE L'ERRORE CHE COMMETTO, POSSO CALCOLARE LA DIFFERENZA TRA I DUE MODI DI DISCRETIZZARE. VEDO CHE L'ERRORE È:

$$\approx \frac{1}{4}\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}\Delta x^4 \Delta y^2 + \frac{1}{4}\frac{\partial^4 p}{\partial x^4}\Delta x^2 \Delta y^4$$

CHE È MOLTO PICCOLO AL RAFFINAMENTO DI $\Delta x \Delta y$.
PERTANTO L'ERRORE CHE COMMETTO RIMANE COMUNQUE PICCOLO.

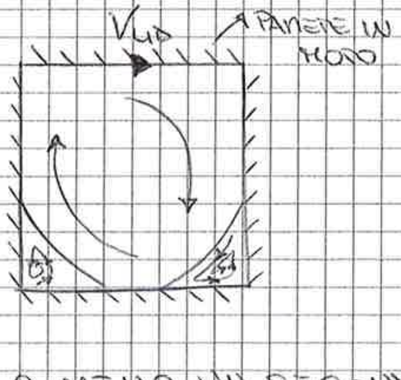
→ CONDIZIONI AL CONTORNO PER LE N-S INCOMPRESSIBILI

IL METODO CHE ABBIAMO VISTO È IL FRACTIONAL STEP PROJECTION METHOD. LA PRESSIONE IN QUESTO CASO ERA CALCOLATA PER TENTATIVI E POI CORRETTA IMPONENDO IL VINCOLO DI INCOMPRESSIBILITÀ.
LA PRESSIONE HA SEMPRE SIGNIFICATO TERMODINAMICO FISICO, MA NELLE NOSTRE APPLICAZIONI DI INCOMPRESSIBILITÀ, LA TERMODINAMICA NON ENTRA IN GIOCO E QUINDI LA PRESSIONE HA UN SIGNIFICATO DIFFERENTE.

1° STEP) CALCOLO LA VELOCITÀ V^* CON P' INCORRETTA
2° STEP) CALCOLO LA CORREZIONE P' CON $\nabla \cdot \underline{V}^* = \nabla^2 \underline{p}'$
3° STEP) RICAVO LA VELOCITÀ CORRETTA $\underline{V}^{K+1}$

ORA DEVO CAPIRE CHE CONDIZIONI AL CONTORNO IMPORRE, IN QUANTO HO 3 EQUAZIONI DIFFERENTI. NELLA PRIMA HO IL VALORE DI PRESSIONE P^* E POI HO LE ALTRE EQUAZIONI.

UN CASO TEST È IL LID DRIVEN CAVITY FLOW. IL FLUSSO SI HA



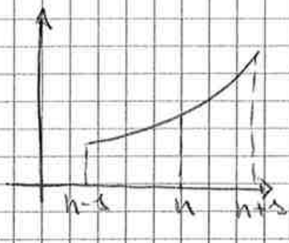
ALL'INTERNO DI UNA CAVITÀ CON LA PARETE IMMOBILE.
TALE FLUSSO È UN FLUSSO VORTICOSO CHE PERMETTE RICIRCOLI SECONDARI.
A SECONDA DEL REYNOLDS

$$Re = \frac{\rho V_{LID} L}{\mu}$$

HO O MENO UN SECONDO VORTICE INTERNO.
QUESTO POTREBBE ESSERE UN CASO REALE NELLA MISURA IN CUI TENGO IN CONSIDERAZIONE PICCOLI RICIRCOLI DI FLUSSO.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 166



UTILIZZO UN TERMINE PARABOLICO PARTENDO DAL TERMINE AL VALORE $n-1$.

PER I TERMINI DIFFUSIVI UTILIZZO UN METODO DETTO DI CRANK-NICHOLSON, CHE FA UNA MEDIA TRA PASSO * E PASSO n (PERTANTO È IMPLICITO)

L'ULTIMO STEP È $\frac{u_i^{n+1} - \hat{u}_i}{\Delta t} = -G(\phi^{n+1})$

CON ϕ SCALARE (CHE INDICA PRESSIONE) DA DETERMINARE.
LA CONDIZIONE DI INCOMPRESSIBILITÀ È:

$$D(u_i^{n+1}) = 0$$

$G \to$ GRADIENTE
$D \to$ DIVERGENZA

PER LE CONDIZIONI AL CONTORNO, SAPPIAMO QUANTO DEVONO ESSERE ALL'ISTANTE $\underline{k}$ E $\underline{k+1}$, MENTRE LO IGNORO AL TEMPO INTERMEDIO $\hat{u}_i^t$
SE HO $\underline{u^*}$ CON UNA <u>SOLUZIONE ESATTA</u> DEL PROBLEMA <u>SENZA PRESSIONE</u>, HO CHE:

$$\boxed{\frac{\partial u_i^*}{\partial t} = H_i^* + \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j} u_i^*} \qquad (a)$$

RISOLVENDO QUESTA NUMERICAMENTE CON UN METODO ESPLICITO AL SECOND'ORDINE, CON IL METODO ADAMS E IL METODO NICHOLSON PER IL TERMINE DIFFUSIVO, HO CHE DISCRETIZZANDO OTTENGO SEMPRE LA $\hat{u}_i$ (SOLUZIONE DEL PROBLEMA DISCRETO) CHE DIPENDE DALLA DISCRETIZZAZIONE E $\hat{u}$ QUINDI RISULTA LA APPROSSIMAZIONE DI u^*. LA CONDIZIONE INIZIALE È SCELTA COME

$$u_i^*(\underline{x}, t_n) = u_i(\underline{x}, t_n)$$

LA $\bar{u}_i^*(\underline{x}, t_{n+1})$ È LA SOLUZIONE DISCRETA AL TEMPO t_{n+1}.
QUINDI POSSO SCRIVERE:

$$\hat{u}_i \simeq u_i^{**}(\underline{x}, t+\Delta t)$$ SOLUZIONE DISCRETA AL TEMPO t.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 91 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 166

IN TERMINI VETTORIALI È

$$\underline{\hat{V}_b} = \underline{V_b} + \Delta t \nabla p$$

CON IL NOSTRO LINGUAGGIO IN CUI $\underline{\hat{V}} = \underline{V}^*$

SI HA PROPRIO CHE

$$\boxed{\underline{V_b}^* = \underline{V_b} + \Delta t \nabla p'}$$

QUINDI LA CONDIZIONE AL CONTORNO SUL CAMPO * È UGUALE ALLA SOMMA DELLA CONDIZIONE AL CONTORNO SUL CAMPO $\underline{V_b}$ PIÙ LA SOMMA $\nabla p'$.

IN GENERALE, VOGLIO CHE LA CONDIZIONE AL CONTORNO SIA PARI A QUELLA DATA AL CAMPO K+1. IMPONGO QUINDI CHE IL GRADIENTE SIA NULLO.

METODI NUMERICI IN REGIME COMPRIMIBILE

QUESTI METODI SONO VENUTI FUORI ATTORNO AGLI ANNI 60-70 QUANDO CI FU IL PROBLEMA DEL RIENTRO IN ATMOSFERA DELLE CAPSULE, CHE RICHIEDEVANO METODI AD HOC.
TUTTE LE TECNICHE SARANNO FATTE PER **EULERO 1D**, POI LE ESTENSIONI CHE SI FANNO SONO MOLTO SEMPLICI.

IL COMPRIMIBILE LO VEDREMO PER LE EQUAZIONI DI EULERO CHE SONO SCRITTE COME

$$W = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{Bmatrix} \qquad \boxed{\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0}$$

CON $F = \{\text{FLUSSI}\}$ CHE IN EULERO SONO SOLO FLUSSI CONVETTIVI E VALGONO

$$F = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(p+E) \end{Bmatrix}$$

L'EQUAZIONE TRIDIMENSIONALE ERA

$$\frac{d}{dt}\int_V \underline{W}\, dV + \int_V \nabla \cdot \underline{F}\, dV = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 166

QUINDI $E = \frac{P}{\gamma-1} + \frac{m^2}{2\rho}$ DA CUI $\boxed{P = (\gamma-1)\left[E - \frac{m^2}{2\rho}\right]}$

QUINDI SOSTITUENDO, HO:

$$\underline{F} = \begin{Bmatrix} m \\ (\gamma-1)\left[E - \frac{m^2}{2\rho}\right] + \frac{m^2}{\rho} \\ \left[E + (\gamma-1)E - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^2}{\rho}\right]\frac{m}{\rho} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m \\ (\gamma-1)E + \frac{3-\gamma}{2}\frac{m^2}{\rho} \\ \gamma E \frac{m}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}\frac{m^3}{\rho^2} \end{Bmatrix}$$

I FLUSSI SONO SCRITTI PERTANTO, COME FUNZIONI DELLE VARIABILI CONSERVATIVE. POSSO SCRIVERE:

$$\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{w}} \cdot \frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = 0}$$

SI NOTI CHE $\underline{w}$ ED $\underline{F}$ SONO VETTORI $\Rightarrow$ $\frac{\partial \underline{F}}{\partial \underline{w}}$ È UNA MATRICE CHE CHIAMIAMO $\underline{\underline{A}}$:

SI HA PERTANTO CHE

$$\boxed{\frac{\partial \underline{w}}{\partial t} + \underline{\underline{A}}\frac{\partial \underline{w}}{\partial x} = 0} \qquad \text{CON } \underline{w} = \begin{Bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{Bmatrix}$$

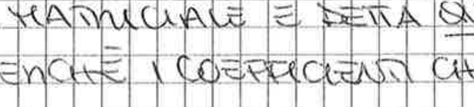
LE COMPONENTI DI $\underline{\underline{A}}$ SONO LE DERIVATE RISPETTO ALLA CONSERVATIVA:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{3-\gamma}{2}u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ (\gamma-1)u^3 - \gamma u \frac{E}{\rho} & \gamma\frac{E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}$$

QUESTA FORMA MATRICIALE È DETTA <u>QUASILINEARE</u>. NON È PROPRIO LINEARE PERCHÉ I COEFFICIENTI CHE MOLTIPLICANO LA $\partial \underline{w}/\partial x$ CONTENGONO LE VARIABILI.

NUMERICAMENTE, CIÒ CHE VOGLIO RISOLVERE È

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{x_2} \underline{w}\, dx + F(x_2) - F(x_1) = 0$$ SU UN NUMERO DI CELLE DISTRIBUITO NELL'INTERO DOMINIO



ORA I FLUSSI POSSO VEDERLI COME CALCOLATI SULLE CELLE CON VARIABILI CONSERVATIVE NELL'INTERFACCIA.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 166

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 166

FENOMENO E FANNO SÌ CHE LE EQUAZIONI ABBIANO ANCORA SENSO FISICO. SI HA:

$$\underline{W}_t + \underline{\underline{A}}\,\underline{W}_x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{U}_t + \underline{\underline{\tilde{A}}}\,\underline{U}_x = 0 \qquad \text{CON } \underline{U} = \begin{Bmatrix} a \\ s \\ u \end{Bmatrix}$$

DOVE $a = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cost}$ È LA VELOCITÀ DEL SUONO

$$\left.\begin{aligned} &\rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ &(\rho u)_t + (p)_x + (\rho u^2)_x = 0 \\ &E_t + [(E+p)u]_x = 0 \end{aligned}\right\}$$

CONSIDERANDO LE EQUAZIONI DI SINISTRA, DEVO FAR COMPARIRE LA $\underline{U}$.

SI OSSERVA QUINDI, CHE PONENDO:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=cost} = \gamma\frac{p}{\rho} = \gamma R^* T$$

DIFFERENZIANDO, HO:

$$\boxed{2a\,da = \frac{\gamma}{\rho}dp - \frac{\gamma p}{\rho^2}d\rho}$$

ANALOGAMENTE POSSO SCRIVERE PER L'ENTROPIA

$$\boxed{ds = C_v\frac{dp}{p} - C_p\frac{d\rho}{\rho}}$$

ORA È IMPORTANTE VALUTARE CHE LE EQUAZIONI VANNO SCRITTE IN TERMINI ADIMENSIONALI. CIÒ PERCHÉ È PIÙ COMODO DA UN PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE: IN QUEL MODO INFATTI LE DERIVAZIONI DIVENTANO CONFRONTABILI TRA LORO (PERCHÉ IL RANGE DI VARIAZIONE È PRESSOCHÉ LO STESSO). LA NORMALIZZAZIONE DIPENDE DA COME LA ESEGUO: LE GRANDEZZE DI RIFERIMENTO DEVONO ESSERE SCELTE IN MODO "COMODO".

LE GRANDEZZE DI RIFERIMENTO, $\square_R$, PRIMARIE SONO:

$P_R,\ T_R,\ L$ (GRANDEZZE GLOBALI)

UN ALTRO PARAMETRO È $R^* = R/\mathcal{M}$, CHE NELLA NOSTRA APPLICAZIONE È UNA COSTANTE.

SI HA:

$$\rho_R = \frac{P_R}{R^* T_R} \qquad \text{EQ. DI STATO}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 166