NUMERO: 2279A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Locci Federico

MATERIA: Fisica I + Esercizi Svolti + Teoria - Prof. Penna

Esercizi svolti e suggeriti dal corso:

1

1.3.

$d = 1000$ m

Parte e arriva con $v=0$.

$a_1 = 2.5$ m/s²

$a_2 = -3.8$ m/s²

$t = ?$

SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} d = \frac{1}{2}a_1 t_1^2 + a_1 t_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_2 (t_2 - t_1)^2 \\ 0 = a_1 t_1 + a_2 (t_2 - t_1) \end{cases}$$

$$t_2 - t_1 = -\frac{a_1}{a_2} t_1$$

$$t_2 = t_1 - \frac{a_1}{a_2} t_1 = 36.5 \text{ s}$$

$$d = \frac{1}{2} a_1 t_1^2 - \frac{a_1^2 t_1^2}{a_2} + \frac{1}{2}\frac{a_1^2 t_1^2}{a_2}$$

$$2d = \cancel{\tfrac{1}{2}} a_1 t_1^2 - \cancel{\tfrac{1}{2}} \frac{a_1^2 t_1^2}{a_2}$$

$$2d = t_1^2 \left(a_1 - \frac{a_1^2}{a_2}\right)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a_1 - \frac{a_1^2}{a_2}}} = 22 \text{ s}$$

1.5.

$t=0$ con v_0 dall'origine lungo il verso positivo con $-a$.
Un secondo punto con v nulla da $x_0 > 0$ con a.
Il primo può raggiungere il secondo?

SVOLGIMENTO:

$x_1 = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$

$x_2 = x_0 + \frac{1}{2} a t^2$

$x_1 = x_2$

$v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 = x_0 + \frac{1}{2} a t^2$

$a t^2 - v_0 t + x_0 = 0$

$x_{1,2} = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 4 a x_0}}{2a} \rightarrow$ si incontrano se $\boxed{v_0^2 \geq 4 a x_0}$

caso numerico

$36 \geq 36$

si incontrano

1.12.

$R = 0.2\ m$

$\omega_0 = 15\ rad/s$

$t = 0 \quad t_1 = 16\ s \qquad \alpha_1 = -0.1\, t\ rad/s^2$

$t \geq t_1 \quad \alpha_2 = -1.6\ rad/s^2$ fino a che si ferma.

$|a|$ in t_1?

$t_2 = ?$

SVOLGIMENTO:

$|a| = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = 1.02\ m/s^2$

$a_T = \alpha_1 R_1 = -0.32\ m/s^2 \qquad a_N = \frac{v_0^2}{R} = \omega^2(t_1) R = 0.97\ m/s^2$

$\omega(t_1) = \omega_0 + \int_0^{t_1} -0.1\, t\, dt = \omega_0 - \left[\frac{0.1}{2} t_1^2\right] = 2.2\ rad/s$

$0 = \omega(t_1) + \alpha_2 (t_2 - t_1)$

$0 = \omega_1 + \alpha_2 t_2 - \alpha_2 t_1$

$\cancel{0 =}\ t_2 = \frac{\omega_1 + \alpha_2 t_1}{+\alpha_2} = 17.4\ s$

1.16.

$v_2 < v_1$

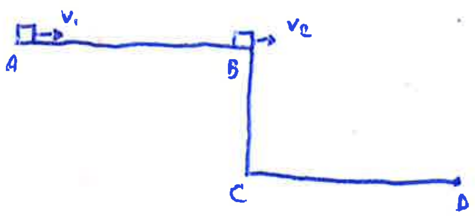
$a = -kv$

$k = 2.3\ s^{-1}$

$b = AB = 2.14\ m$

$h = BC = 1.5\ m$

$d = CD = 1.35\ m$



SVOLGIMENTO:

$dv = -K v\, dx$

$v_2 - v_1 = -K dx$

$v_1 = v_2 + k dx = v_2 + kb = 7.36\ m/s$

$h - \frac{1}{2} g t^2 = 0 \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v_2 t = d$

$d = \sqrt{\frac{2h}{g}}\, v_2 \rightarrow v_2 = d \sqrt{\frac{g}{2h}} = 2.44\ m/s$

2.10

$m = 5\ Kg$

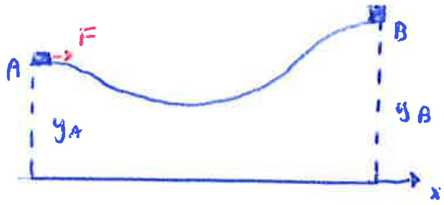
In A: $x_A = 0\ m$ $y_A = 0.5\ m$

In B: $x_B = 2\ m$ $y_B = 0.8\ m$

$F = 20\ N$

1) $W = ?$

2) Se $v_0 = 0$, $v_f = ?$



SVOLGIMENTO:

$W = -\Delta E_p + F\Delta x = mg(y_A - y_B) + F\Delta x = 25.3\ J$ ← se ci da le coordinate di x e y, dovremo sempre usare le x per ciò che lavora parallelo a x, in questo caso F e le y per l'energia potenziale.

$W = \Delta E_K = \frac{1}{2} m v^2$ ← il fatto che ci dica che $v_0 = 0$, ci deve ricordare di usare la variazione di energia cinetica

→ $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 3.18\ m/s$

2.8.

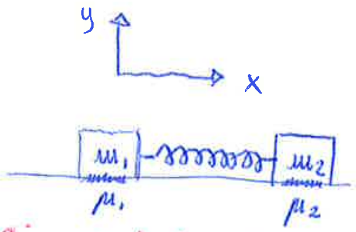
$m_1 = 1.5\ kg$

$m_2 = 1.8\ Kg$

$K = 50\ N/m$ con molla a riposo

$\mu_1 = 0.4$ $\mu_2 = 0.3$

Calcolare di quanto si può allungare la molla mantenendo il sistema in equilibrio statico.



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} \mu_1 m_1 g - K\Delta x = m_1 a_1 < 0 \\ \mu_2 m_2 g - K\Delta x = m_2 a_2 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 m_1 g < K\Delta x \\ \mu_2 m_2 g < K\Delta x \end{cases}$$ → $x_i \cdot x_f$ quindi ribalto il segno della disequazione

$K\Delta x > \mu_1 m_1 g \rightarrow \Delta x < 0.117\ m$

$K\Delta x > \mu_2 m_2 g \rightarrow \Delta x < 0.106\ m$

→ prendiamo la minore.

In questi esercizi, la prima cosa da fare è calcolare la forza di attrito statico delle due masse. Il fatto che sono diverse ci deve far scattare un campanello d'allarme, in quanto con la stessa costante della molla svilupperanno forze diverse che faranno percorrere spazi diversi e quindi non possiamo impostare il bilancio delle energie perché lo spazio percorso è diverso. Pertanto possiamo risolverlo soltanto dinamicamente, con risultato la Δx minore.

2.13.

m_1 e m_2, d

$t = 0$, il sistema viene messo in moto da F costante durante τ.

μ_1, μ_2.

Dopo ℓ, 2 entra in una zona senza attrito.

Scrivere F_0 di F tale che il sistema abbia velocità nulla quando anche 1 arriva nella zona senza attrito.

Eseguire il calcolo con $m_1 = m_2 = m = 0.7$ Kg

$\mu_1 = \mu_2 = \mu = 0.6$

$d = \ell = 3$ m

$\tau = 10^{-3}$ s

SVOLGIMENTO:

$$F_0 \tau = (m_1 + m_2) v_0$$

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_0^2 = \mu_1 m_1 g (d + \ell) + \mu_2 m_2 g \ell$$

$$v_0^2 = \frac{2[\mu_1 m_1 g (d + \ell) + \mu_2 m_2 g \ell]}{m_1 + m_2}$$

$$F_0^2 \tau^2 = (m_1 + m_2)^{\cancel{2}} \frac{2[\mu_1 m_1 g (d + \ell) + \mu_2 m_2 g \ell]}{\cancel{m_1 + m_2}}$$

$$F_0^2 = \frac{2[\mu_1 m_1 g (d + \ell) + \mu_2 m_2 g \ell]}{\tau^2} (m_1 + m_2)$$

Numericamente:

$$F_0^2 = \frac{2g[\mu m 2d + \mu m d]}{\tau^2} 2m = \frac{2g[3\mu m d]}{\tau^2} 2m = \frac{4m^2}{\tau^2} 3 g d \mu$$

$$F_0 = \frac{2m}{\tau} \sqrt{3\mu g d} = 10.1 \times 10^3 \text{ N}$$

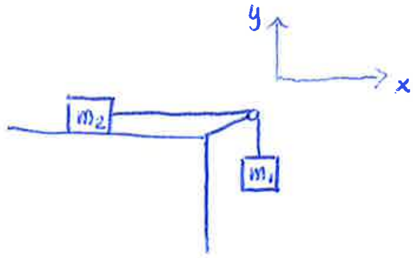
2.17.

m_1, m_2 note.

μ tra m_2 e piano.

$a, T = ?$

C'è movimento in ogni caso?



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T \\ m_2 a = T - \mu m_2 g \end{cases}$$

$$a(m_1 + m_2) = m_1 g - T + T - \mu m_2 g$$

$$a = \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$T = m_1 g - m_1 \frac{g(m_1 - \mu m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$T = m_1 g \left(1 - \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

C'è movimento se $m_1 g > \mu m_2 g$, quindi se $m_1 > \mu m_2$

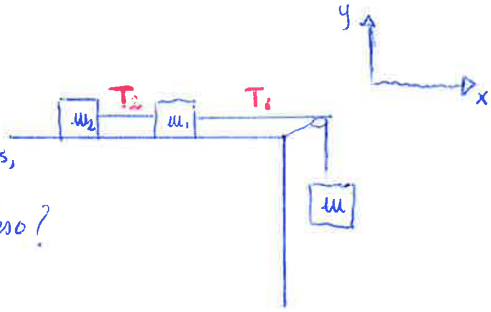
2.16.

Noti μ_1, m_1, μ_2, m_2.

Relazione tra m, m_1, m_2 affinché il moto sia uniforme.

Se tale relazione è soddisfatta e $m_1 = 8$ Kg, $m_2 = 6$ Kg, $\mu_1 = 0,3$, $\mu_2 = 0,5$, calcolare T_1 e T_2.

Ad un certo punto m si stacca, il filo tra m_1 e m_2 resta teso?



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} m a = mg - T_1 \\ m_1 a = T_1 - T_2 - \mu_1 m_1 g \\ m_2 a = T_2 - \mu_2 m_2 g \end{cases} \Rightarrow mg - T_1 + T_1 - T_2 - \mu_1 m_1 g + T_2 - \mu_2 m_2 g = 0 \rightarrow$$

affinché il moto sia uniforme, l'accelerazione deve essere nulla

$$m = \mu_1 m_1 + \mu_2 m_2 = 5.4 \text{ Kg}$$

$$T_1 = m(g - a) = 52.9 \text{ N}$$

$$T_2 = m_2(a + \mu_2 g) = 29.4 \text{ N}$$

Quando m si stacca:

$$\begin{cases} m_1 a = -T - \mu_1 m_1 g \\ m_2 a = T - \mu_2 m_2 g \end{cases} \Rightarrow a = -g \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} = -3,8 \frac{m}{s^2}$$

$T = m_2(a + \mu_2 g) = 6,6$ N > 0 quindi il filo è teso

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 112

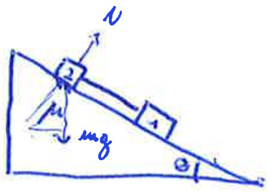
2.21

$m_1 = 0.48\ kg$

$m_2 = 0.76\ kg$

$\theta = 16°$

μ solo su m_2, quale μ affinché moto uniforme?



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} (1)\ m_2 g \sin\theta - \mu m_2 g \cos\theta + T = ma = 0 \\ (2)\ m_1 g \sin\theta - T = 0 \end{cases}$$

→ perché affinché il moto sia uniforme $a = 0$

$$(1)+(2) = m_2 g \sin\theta - \mu m_2 g\cos\theta + \cancel{T} + m_1 g \sin\theta - \cancel{T} = 0$$

$$\mu m_2 \cancel{g} \cos\theta = \cancel{g} \sin\theta (m_1 + m_2)$$

$$\mu = \frac{\sin\theta (m_1 + m_2)}{m_2 \cos\theta} = \boxed{0.47}$$

2.22.

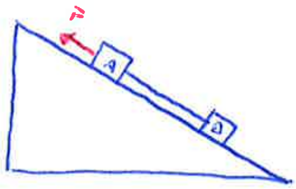
$m_A = 3\ kg$

$m_B = 2\ kg$

$F = 2t\ N$

$T_{max} = 40\ N$

$t_{rottura}$?



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} F - m_A g \sin\theta - T = m_A a \\ T - m_B g \sin\theta = m_B a \end{cases}$$

→ $T = m_B (a + g\sin\theta) = m_B \left(\frac{F}{m_A + m_B} - g\sin\theta + g\sin\theta\right)$

$$a(m_A + m_B) = F - m_A g \sin\theta - m_B g \sin\theta$$

$$a = \frac{F}{m_A + m_B} - g\sin\theta$$

$\Downarrow$

$$\frac{F m_B}{m_A + m_B} = 40\ N$$

$$\Rightarrow \frac{2t\, m_B}{m_A + m_B} = 40\ N$$

$$t = \frac{T_{max}(m_A + m_B)}{2 m_B} = \boxed{50\ s}$$

2.28.

$m = 0.34$ Kg sotto F costante parallela a y

$y = 1,28x - 0.31x^2$

In P (culmine) si ha $v = 5.29$ m/s

$|F| = ?$

E_K in O ?

2.29

Cilindro cavo che ruota con ω ha corpo appoggiato che ruota e non cade.
μ_s minimo tra corpo e parete?

SVOLGIMENTO:

La forza di attrito statico deve essere maggiore della forza peso

$\mu_s m a_N \geq mg$

$\mu_s m \omega^2 r \geq mg$

$\mu_s \geq \dfrac{g}{\omega^2 r}$

2.30

$m = 2.5$ kg si muove con moto uniformemente accelerato

$\alpha = 3.9$ rad/s²

$R = 0.46$ m

1) forza tangente ?

2) la forza è conservativa ?

SVOLGIMENTO:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

$$a_T = \alpha R = 1.794 \ m/s^2$$

$$F = m a_T = 4.48 \ N$$

il punto lungo la traiettoria, in un giro compie un lavoro di $W = F \cdot s = F_T 2\pi R = 12.9 \ J$

2.31.

$m_1 = 8.4$ kg

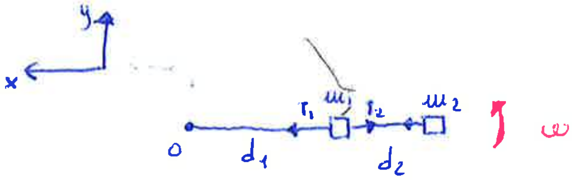
$m_2 = 10$ kg

$d_1 = 0.21$ m

$d_2 = 0.16$ m

$\omega = 3$ rad/s costante

$T_1, T_2 = ?$



SVOLGIMENTO:

$$T_1 - T_2 - m_1 \omega^2 d_1 = m_1 a_T = 0$$ → la componente tangenziale a_T è nulla in un moto circolare uniforme

$$T_2 - m_2 \omega^2 (d_1 + d_2) = 0$$

$$T_2 = m_2 \omega^2 (d_1 + d_2) = 33.3 \ N$$

$$T_1 = T_2 + m_1 \omega^2 d_1 = 49.2 \ N$$

2.32.

$m = 2.5$ kg

$K = 120$ N/m

$r_0 = 0.3$ m

ω costante $= 4$ rad/s

1) raggio r della circonferenza ?

$$m\omega^2 r - K(r - r_0) = m a_T = 0$$ → per lo stesso motivo dell'esercizio precedente

Nb: $F_{elastica} = -K\Delta x$

$E_{p, elastica} = -\frac{1}{2} K \Delta x^2$

$$m\omega^2 r = Kr - Kr_0$$

$$r = \frac{K r_0}{(K - m\omega^2)} = 0{,}45 \ m$$

2) Discutere il risultato e studiare il caso con $r_0 = 0$ m.

$K - m\omega^2 > 0$

$\omega^2 < \frac{K}{m}$ affinché la forza sia efficiente

Se $r_0 = 0$, si ha: $m\omega^2 r = kr$, per cui qualsiasi raggio è possibile purché $K = m\omega^2$

2.39.

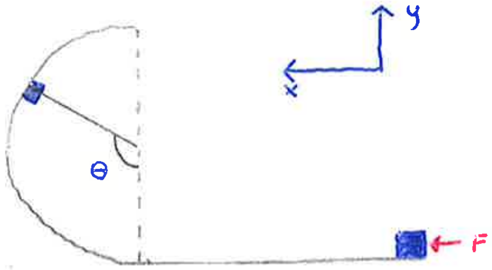
$m = 0.5\ Kg$

$F = 470\ N$

$t = 10^{-2}\ s$

$R = 1.6\ m$

R_N quando il blocco passa in $\theta = 120°$



SVOLGIMENTO:

$F\Delta t = mv_0$

$v_0 = 9.4\ m/s$

$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 + \sin 30°)$ ← Imponendo la conservazione dell'energia riesco a trovare la velocità con cui il corpo passa in $\theta = 120°$

$v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 + \sin 30°)} = 6.4\ m/s$

$m a_N = mg\cos 60° + R$ → in questo caso l'accelerazione è centripeta → $a_N = \frac{v^2}{R}$

$R = m\frac{v^2}{r} - mg\cos 60° = \boxed{10.35\ N}$

2.40.

$m = 0.3\ Kg$

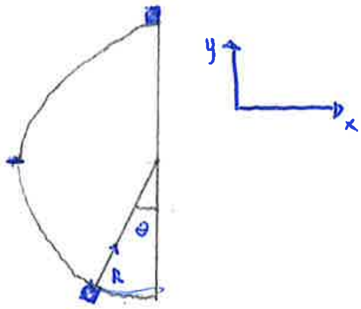
$R = 2.2\ m$

A $t = 0$ ha $v_0 = 5.8\ m/s$

Nella prima metà c'è F di attrito con modulo costante $F = 3.1\ N$

nella seconda metà è liscia.

R quando il blocco passa in $\theta = 30$.



SVOLGIMENTO:

$$mg2R + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos 30°) + F\frac{\pi R}{2}$$

$$v = \sqrt{\frac{2\left(mg2R + \frac{1}{2}mv_0^2 - F\frac{\pi R}{2} - mgR(1 - \cos 30°)\right)}{m}} = 6.53\ m/s$$

$m a_N = R_6 - mg\cos 30°$

$m\frac{v^2}{R} + mg\cos 30° = R_6 = \boxed{3.27\ N}$

L'unico dubbio in questo tipo di esercizi è come impostare l'energia potenziale del corpo quando passa nel punto richiesto. È un ragionamento prettamente geometrico in quanto mettendo solo $mgR\cos 30°$ calcoleremo l'energia potenziale

di questo tratto, ma il corpo percorre

questo tratto, quindi percorre $mgR(1 - \cos 30°)$

36.

Pendolo

$l = 0.4\ m$

$a = 5\ m/s^2$

$\theta_{eq} = ?$

$T = ?$

SVOLGIMENTO:

$\theta_{eq} = \arctan \frac{a}{g} = 27°$

$a' = \sqrt{a^2 + g^2} = 11$

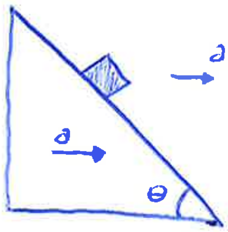
$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{a'}} = 1.2\ s$

38.

a in funzione di θ e μ_s

SVOLGIMENTO:

Se μ_s c'è avremo un corpo fermo rispetto al sistema di riferimento non inerziale solidale al piano inclinato



$mg \sin\theta - \mu mg \cos\theta = ma \cos\theta$

$mg \sin\theta = f + ma \cos\theta$ $\qquad$ $N = mg\cos\theta + ma \sin\theta$

$f \leq \mu_s mg \cos\theta + \mu_s ma \sin\theta$

$\cancel{m}g \sin\theta - \cancel{m}a \cos\theta < \mu_s \cancel{m}g \cos\theta + \mu_s \cancel{m}a \sin\theta$

$g \sin\theta - \mu_s g \cos\theta < \mu_s a \sin\theta + a \cos\theta$

$g(\sin\theta - \mu_s \cos\theta) < a(\mu_s \sin\theta + \cos\theta)$

$$a > g \frac{\sin\theta - \mu_s \cos\theta}{\mu_s \sin\theta + \cos\theta}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 21 di 112

4.3.

$\theta = 30°$

$m_1 = m_2 = 2\ kg$

$\mu_1 = 0.4$

$\mu_2 = 0.2$

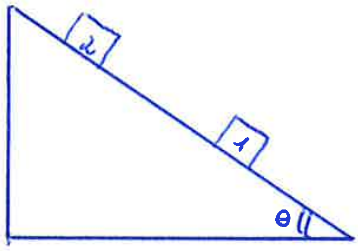
I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1\ m$, vengono liberati a $t=0$

1) Dopo quanto si urtano?

2) V sistema dopo urto?

3) A sistema?

4) F che il cubo a monte esercita su quello a valle



SVOLGIMENTO:

$m_1 a_1 = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m g \cos\theta$ $\qquad a_1 = g(\operatorname{sen}\theta - \mu_1 \cos\theta) = 1.51\ m/s^2$

$m_2 a_2 = m_2 g \operatorname{sen}\theta - \mu_2 m g \cos\theta$ $\qquad a_2 = g(\operatorname{sen}\theta - \mu_2 \cos\theta) = 3.2\ m/s^2$

$\frac{1}{2} a_2 t^2 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + d$ ← siccome si urtano la legge oraria è uguale

$t = \sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} = 1.09\ s$

2) $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v^*$

$v^* = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2.57\ m/s$

$v_1 = a_1 t$ $\qquad v_2 = a_2 t$

perché $v_0 = 0$

3) $2ma = mg \operatorname{sen}\theta - \mu_1 mg \cos\theta + mg \operatorname{sen}\theta - \mu_2 mg \cos\theta$ → Divido tutto per $2m$

$a = g \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2) \cos\theta = 2.35\ m/s^2$

4) $mg \operatorname{sen}\theta - \mu_1 mg \cos\theta + F = ma$

$F = m(a - g \operatorname{sen}\theta + \mu_1 g \cos\theta) = 1.7\ N$

4.6.

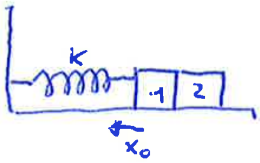
$m_1 = 0.15$ kg

$m_2 = 0.37$ kg

m_1 è attaccato ad una molla in condizioni di riposo

$x_0 = 0.12$ m, lo si rilascia e abbiamo un urto anelastico

Spostamento massimo verso destra del sistema?



SVOLGIMENTO:

$\frac{1}{2} K x_0^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$] Conservazione dell' energia prima dell' urto

$v_1 = \sqrt{\frac{K x_0^2}{m_1}}$

$m_1 V_1 = (m_1 + m_2) v_2$] Conservazione della quantità meccanica

$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \sqrt{\frac{K x_0^2}{m_1}}$

$\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_2^2 = \frac{1}{2} K x^2$] Conservazione dell' energia dopo l' urto.

$\cancel{\frac{1}{2}} \cancel{(m_1 + m_2)} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\cancel{K} x_0^2}{\cancel{m_1}} = \cancel{\frac{1}{2}} K x^2$

$x = x_0 \sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 0.064$ m

4.7.

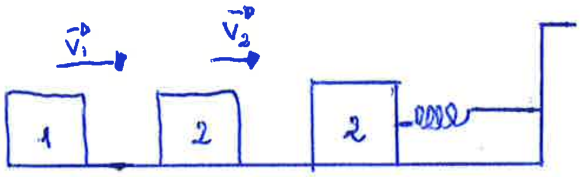
$\vec{v}_1 = 10$ m/s e $\vec{v}_2 = 5$ m/s

$m_1 = m_2 = 0.5$ kg

Si urtano elasticamente, $\vec{v}_2$ rispetto a $\vec{v}_1$?

Si aggancia a k, con $A = 0.30$?

$k = ?$



SVOLGIMENTO:

Siccome $m_1 = m_2$ le velocità si scambiano $v_1 = 5$ m/s $v_2 = 10$ m/s

$v_r = V_1 - V_2 = 5$ m/s

2) $\frac{1}{2} m V_2^2 = \frac{1}{2} k A^2$

$K = \frac{m V_2^2}{A^2} = 346.3$ N/m

Esercizi gravitazione (Capitolo 5)

5.1

$r_L = 1.74 \cdot 10^6\ m$

Satellite lungo orbita circolare di raggio $2r_L$

$T = 306.8$ minuti.

1) $g_L = ?$

2) $v_f = ?$

SVOLGIMENTO:

$$F = \gamma \frac{mM}{(2r_L)^2} = m\,\omega^2 (2r_L)$$

← il primo passaggio in questi esercizi è imporre la risultante delle forze sul satellite.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

→ il fatto che ci dice il periodo mi deve far scattare un campanello d'allarme e ricordare questa formula dalla quale posso arrivare a calcolare la massa della luna che mi serve per calcolare la gravità.

$$\gamma \frac{\cancel{m} M}{(2r_L)^2} = \cancel{m} \frac{4\pi^2}{T^2}(2r_L)$$

$$M = \frac{4\pi^2}{\gamma T^2}(2r_L)^3$$

$$g_L = -\gamma \frac{M}{r_L^2} = -\gamma \frac{4\pi}{\gamma T^2} \cdot \frac{(2r_L)^3}{r_L^2} = -\frac{32\pi^2}{T^2} r_L = -1.62\ m/s^2$$

$$v_f = \sqrt{2 g_L r_L} = 2.37 \cdot 10^3\ m/s$$

5.2.

Corpo di massa trascurabili, lanciato radialmente da un pianeta m_2 e r_2 con v_0, si arresta a $d = 2r_2$.
v_0 è la velocità di un corpo che descrive un'orbita circolare $r_1 = 4.6 r_2$ attorno ad un pianeta di massa m_1.

$\frac{m_2}{m_1} = ?$

SVOLGIMENTO:

$$-\gamma \frac{\cancel{m} m_2}{r_2} + \frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 = -\frac{\gamma \cancel{m} m_2}{3r_2}$$

← in questo caso dobbiamo risolvere rispetto a v_0 che è quel valore in comune tra i due pianeti, quindi imponiamo la conservazione dell'energia.

nel testo dice che si ferma a $2r_2$ dalla superficie, che sarebbe $r_2 + 2r_2 = 3r_2$ dal centro del pianeta

conservazione energia

$$\frac{1}{2} v_0^2 = \frac{2}{3}\gamma \frac{m_2}{r_2} \Rightarrow v_0^2 = \frac{4}{3}\gamma \frac{m_2}{r_2}$$

Forze

$$\gamma \frac{\cancel{m} m_1}{r_1^{\cancel{2}}} = \cancel{m} \frac{v_0^2}{\cancel{r_1}} \Rightarrow v_0^2 = \gamma \frac{m_1}{r_1}$$

$$\left.\right\} \frac{4}{3}\cancel{\gamma} \frac{m_2}{r_2} = \cancel{\gamma} \frac{m_1}{r_1} \rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{3}{4 \cdot 4.6} = 0.163$$

il fatto che ci dica che la velocità dei due pianeti è la stessa mi deve far pensare che devo risolvere per i due corpi rispetto alla velocità e poi uguagliarle.

5.5.

$$E_p(r) = -K \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

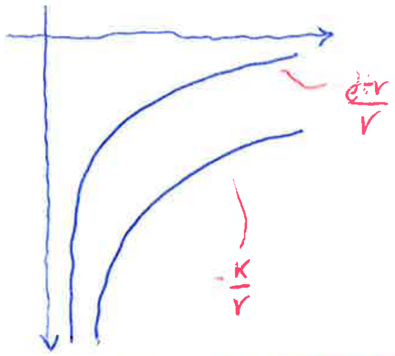
K, r_0 costanti

r distanza dal centro della forza.

1) Disegna $E_p(r)$ e confronta con $-\frac{K}{r}$, qual'è il significato di r_0?

2) Determinare l'espressione della forza.

SVOLGIMENTO:



r_0 indica quanto velocemente la curva va a zero

$$2)\ F = -\frac{dE_p}{dr} = -\frac{K}{r} e^{-r/r_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

→ La forza equivale alla variazione di energia potenziale gravitazionale nello spazio

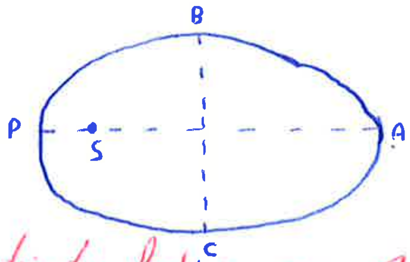
5.6.

$\overline{PA} = 2a \qquad \overline{PS} = r_p$

$\overline{BC} = 2b \qquad \overline{AS} = r_a$

v_A e v_p in funzione dei parametri dell'orbita?

SVOLGIMENTO:



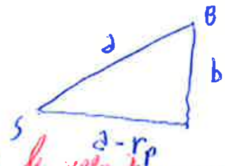
$$2a = \underbrace{r_a + r_p}_{\text{distanze da afelio e perielio}}$$

L'ellisse è quel luogo dei punti la cui somma delle distanze dai due fuochi è sempre costante e siccome B è equidistante dai due fuochi $\overline{BS} = a$

$$a^2 = (a - r_p)^2 + b^2$$

$$a^2 = a^2 + r_p^2 - 2ar_p + b^2 \rightarrow r_p = a - \sqrt{a^2 + b^2} = a(1 - \varepsilon)$$

$$r_a = 2a - r_p = 2a - a(1 - \varepsilon) = a(1 + \varepsilon)$$



A questo punto abbiamo trovato le espressioni di r_a e r_p, per trovare le velocità imponiamo la conservazione del momento angolare.

$$\cancel{m} r_A v_A = \cancel{m} r_p v_p$$

$$v_A = \frac{r_p}{r_a} v_p \rightarrow \boxed{v_A = \frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon} v_p}$$

6.3.

Cilindro cavo ha raggio interno R_1 e esterno R_2

m, l noti

$I = ?$

SVOLGIMENTO:

$$I = \frac{1}{2}(m_1 + m)R_2^2 - \frac{1}{2} m_1 R_1^2$$

$$m = \rho\pi(R_2^2 - R_1^2)\,l$$

$$m_1 = \rho\pi R_1^2 l \rightarrow \rho\pi R_1^2 \frac{m}{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$l = \frac{m}{\rho\pi(R_2^2 - R_1^2)}$$

m_1 è la massa interna

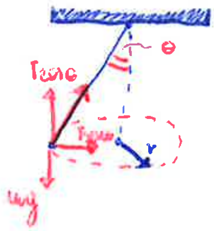
Il fatto che ci dice l ci deve far venire in mente la formula della densità.

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{mR_1^2}{R_2^2 - R_1^2} + m\right)R_2^2 - \frac{1}{2}\frac{mR_1^4}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{mR_1^2R_2^2 + mR_2^4 - mR_1^2R_2^2}{2(R_2^2 - R_1^2)} - \frac{mR_1^4}{2(R_2^2 - R_1^2)}$$

$$= \frac{m(R_2^4 - R_1^4)}{2(R_2^2 - R_1^4)} = \frac{m\cancel{(R_2^2 - R_1^2)}(R_2^2 + R_1^2)}{2\cancel{(R_2^2 - R_1^2)}} = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2)$$

6.4.

Dimostrare che $\frac{dL}{dt} = M_{FP}$.



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} T\,\mathrm{sen}\theta = m\frac{v^2}{r} \rightarrow \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$r = l\,\mathrm{sen}\theta$

$v = \omega r$

$\cos\theta = g/\omega^2 l$

$L = mvl = m\omega l^2 \mathrm{sen}\theta$

$L_z = L\,\mathrm{sen}\theta = m\omega^2 l^2 \mathrm{sen}^2\theta$

$L_\perp = L\cos\theta = m\omega l^2 \mathrm{sen}\theta\cos\theta$

$L_\perp = m\omega l^2 \mathrm{sen}\theta \frac{g}{\omega^2 l} = mgl\,\mathrm{sen}\theta/\omega$ che è costante solo in modulo

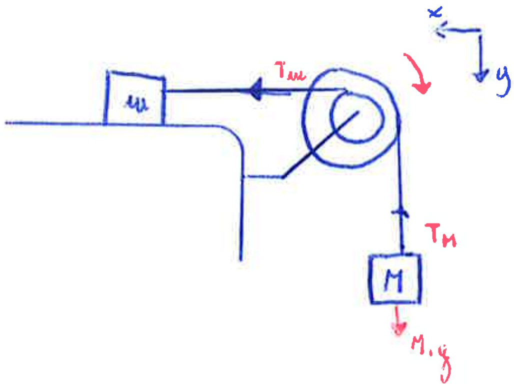
$$\frac{dL}{dt} = \omega L_\perp = mgl\,\mathrm{sen}\theta$$

Per questo esercizio leggere bene la parte di teoria a pg 199-200

6.8.

$m = 10\ Kg$
$r = 0.2\ m$
$M = 4\ Kg$
$R = 0.5\ m$
$I = 6\ Kg\,m^2$

1) v_M dopo $h = 1\ m$?
2) T_1, T_2 ?
3) v se tra piano e m ci fosse $\mu = 0.25$.



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} Mg - T_M = M\alpha R \\ T_m = m a_m = m\alpha r \\ I\alpha = T_M R - T_m r \end{cases} \qquad \begin{aligned} T_M &= M(g - \alpha R) = 33.94\ N \\ T_m &= m\alpha r = 5.3\ N \end{aligned}$$

$$I\alpha = MgR - M\alpha R^2 - m\alpha r^2$$

$$\alpha = \frac{MgR}{I + MR^2 + mr^2} = 2.65\ rad/s^2 \qquad v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2\alpha R h} = 1.62\ m/s$$

Se ci fosse μ:

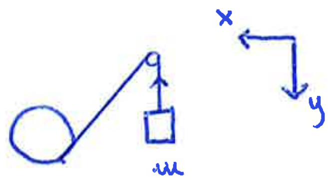
$$\begin{cases} Mg - T_M = M\alpha R \\ T_m - \mu m g = m\alpha r \\ I\alpha = T_M R - T_m r \end{cases} \qquad \begin{aligned} T_M &= M(g - \alpha R) \\ T_m &= m(\alpha r - \mu g) \end{aligned}$$

$$I\alpha = MgR - M\alpha R^2 - m\alpha r^2 - \mu m g r$$

$$\alpha = \frac{MgR - \mu m g r}{I + MR^2 + mr^2} = 1.99\ rad/s^2 \qquad v = \sqrt{2\alpha R h} = 1.41\ m/s$$

6.9.

v costante $= 0.5\ m/s$
$m = 100\ Kg$
T = ?
P = ?



SVOLGIMENTO:

$T = mg = 980\ N$ ← Questo è dovuto al fatto che la velocità sia costante

$M = Tr$

$P = M\omega = Tr\omega = Tv = 490\ W$

Questa formula la si trova a pagina 203

$$\frac{dW}{dt} = M\frac{d\theta}{dt} = M\omega$$

6.12.

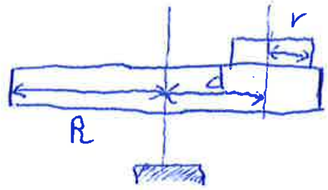
$M = 40\ Kg$

$R = 2\ m$

$m = 8\ Kg$

$r = 0.6\ m$

$d = 1.2\ m$



Piattaforma ferma, disco ruota con $\omega = 14\ rad/s$

Tra piattaforma e disco μ affinché dopo t si ferma.

ω_f sistema ?

$\Delta E_K = ?$

Si consideri stato iniziale diverso con tutto fermo e senza attrito, un motore porta la piattaforma a $\omega = 6\ rad/s$

$W_{Motore} = ?$

SVOLGIMENTO:

$L_{in} = L_{fin} \rightarrow \omega' = \frac{I}{I'}\omega = 0.216\ rad/s$

$I\omega = I'\omega'$

Dove $I = \frac{1}{2}mr^2$ perché si muove solo il disco

$I' = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}mr^2 + md^2$

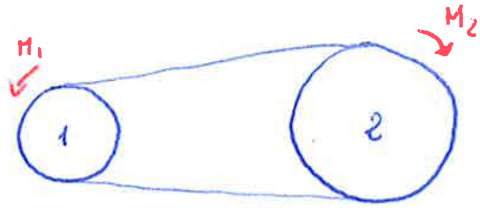
$\Delta E_K = \frac{1}{2}I'\omega'^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -138.8\ J$

$W = \Delta E_K = \frac{1}{2}I_{fin}\Omega^2 = 1647.4\ J$

$I_{fin} = \frac{1}{2}MR^2 + \underbrace{\frac{1}{2}md^2}_{\text{d è la distanza dall'asse di rotazione}}$

6.14.

$m_1 = 5\ Kg$
$r_1 = 0.1\ m$
$m_2 = 20\ Kg$
$r_2 = 0.2\ m$
$M_1 = 8\ Nm$
$M_2 = 7\ Nm$



A $t=0$ il motore fa ruotare il primo disco.

1) ω_2 a $t = 5\ s$ = ?

2) W_{motore} = ?

SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} M_1 - T r_1 = I_1 \alpha_1 \\ T r_2 - M_2 = I_2 \alpha_2 \end{cases}$$

A questo punto abbiamo due equazioni e tre incognite, da dove ricaviamo la terza? Noi sappiamo che la cinghia è indeformabile e quindi l'accelerazione tangenziale si distribuirà egualmente su tutta la cinghia!

$\alpha_1 r_1 = \alpha_2 r_2$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \frac{r_2}{r_1} = 36\ rad/s^2$$

$$M_1 - T r_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \alpha_2 \frac{r_2}{r_1}$$

$$T = \frac{M_1}{r_1} - \frac{1}{2} m_1 \alpha_2 r_2$$

$$\frac{M_1 r_2}{r_1} - \frac{1}{2} m_1 \alpha_2 r_2^2 - M_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \alpha_2$$

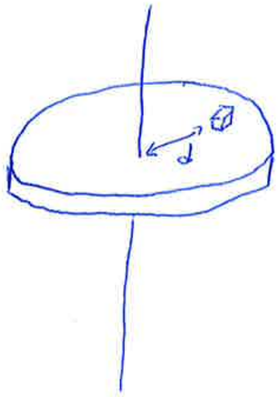
$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\alpha_2 r_2^2 = M_1 \frac{r_2}{r_1} - M_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{2\left(M_1 \frac{r_2}{r_1} - M_2\right)}{r_2^2 (m_1 + m_2)} = 18\ rad/s^2$$

$$\omega_2 = \alpha_2 t = 90\ rad/s$$

$$W_{motore} = M_1 \theta_1 = \frac{1}{2} M_1 \alpha_1 t^2 = 3600\ J$$

6.16.

Disco $m_1 = 2$ Kg
$R = 0.15$ m
A $d = 0.12$ m dall'asse $m_2 = 0.3$ Kg
μ tra corpo e disco
Sistema in quiete
A $t=0$, $M = 6,23$ Nm e il ... ruota.
Dopo $t_0 = 1.2$ s cessa l'applicazione del momento
1) ω di regime?
2) M dei supporti dell'asse?



SVOLGIMENTO:

$$\int_0^{t_0} M dt \rightarrow M t_0 = I\omega \rightarrow \omega = \frac{M t_0}{\frac{1}{2} m_1 R^2 + m_2 d^2} = 10.3 \text{ rad/s}$$

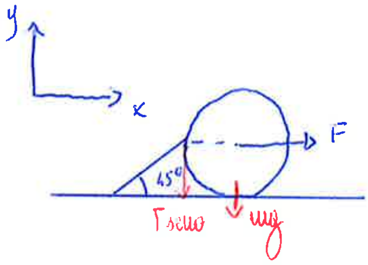
c'è conservazione solo per $t > t_0$

Quando chiede M dei supporti dell'asse, dobbiamo valutare le forze parallele all'asse, ossia solo la forza peso del corpo, per cui:

$mgd = 0.353$ N.m

6.17.

Anello $m = 3$ Kg
$F = 12$ N ed è tenuto fermo da filo come in figura.
1) T?
2) Equilibrio è possibile?
Si taglia il filo: μ_s minimo affinché moto sia di puro rotolamento.



SVOLGIMENTO

$$\begin{cases} F - f - T\sin\theta = 0 \\ rf - T\sin\theta\, r = 0 \end{cases} \quad F - 2T\sin\theta = 0 \rightarrow T = \frac{F}{2\sin\theta} = 8.5 \text{ N}$$

$f = T\sin\theta = 6$ N

Il sistema è fermo

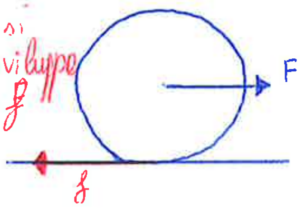
Affinché ci sia equilibrio la forza di attrito che si sviluppa deve essere minore di $\mu_s R_N$.

$R_N = mg + T\sin\theta = 35.43$

$f \leq \mu_s R_N \rightarrow \forall \mu_s \geq \frac{f}{R_N} = 0.17$ c'è equilibrio.

$$2) \begin{cases} F - f = m a_{cm} \\ I\alpha = fr \end{cases} \rightarrow F = 2 m a_{cm} \quad a_{cm} = \frac{F}{2m}$$

Dopo che si stacca si sviluppa una forza f di attrito

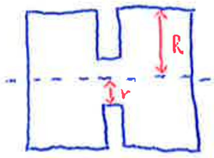


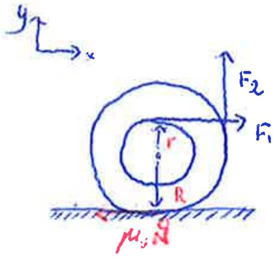
$m r^2 \frac{a_{cm}}{r} = fr \rightarrow f = m a_{cm}$

Affinché il moto sia di puro rotolamento $f = \mu_s mg$

$m a_{cm} \leq \mu_s mg \rightarrow m \frac{F}{2m} \leq \mu_s mg \rightarrow \mu_s \geq \frac{F}{2mg} = 0.2$

6.19.
Cilindro
$R = 0.1\ m$
$m = 5\ kg$
$\mu = 0.3$
$r = 0.066\ m$
$F_1 = 9,5\ N$, F_2





F_2 affinché resti in equilibrio?
$t=0$ F_1 cessa di agire mentre F_2 ha il valore trovato.
Moto di puro rotolamento?
SVOLGIMENTO:
Essendoci soltanto un corpo rigido, dobbiamo applicare soltanto l'equazione del momento delle forze.
Per comodità pongo il polo in O, in questo riesco a eliminare la forza di attrito statico che non avrebbe braccio.

$F_2 R - F_1 (r+R) = 0$ ← equilibrio

$$F_2 = \frac{F_1(r+R)}{R} = 15.77\ N$$

2) $\begin{cases} f = m a_{cm} \\ F_2 R - fR = I\alpha \end{cases}$ $\to a_{cm} = \frac{f}{m}$

$F_2 R - fR = \frac{1}{2} mR^2 \frac{f}{mR}$

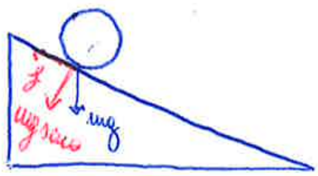
$F_2 R = \frac{3}{2} f \to f = \frac{2}{3} F_2 = 10,5\ N$

Affinché ci sia puro rotolamento, $f \le \mu_s N$

$N = mg - F_2$

$\mu_s(mg - F_2) = 9.98$ quindi $10.5\ N \le 9.98\ N$ pertanto non c'è puro rotolamento.

6.20.
Anello
$m = 6\ kg$ $r = 0.12\ m$
Scende lungo piano inclinato con $\mu = 0.27$.
1) θ affinché ci sia più puro rotolamento.
Partendo da e con il centro a quota $h = 0.98\ m$, l'anello scende con puro rotolamento.
$\omega_{finale} = ?$



SVOLGIMENTO:

$\begin{cases} mg\,\text{sen}\theta - f = m a_{cm} \\ fr = mr^2 \frac{a_{cm}}{r} \end{cases}$ $mg\,\text{sen}\theta = 2 m a_{cm} \to a_{cm} = \frac{1}{2} \cdot g\,\text{sen}\theta$

$f = \frac{1}{2} mg\,\text{sen}\theta \le \mu mg\cos\theta$

$tg\theta \le 2\mu$

$\theta \le 23.75°$

6.22.

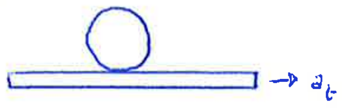
$a_t = 3\ m/s^2$

Cilindro m e r rotola senza strisciare sulla piattaforma.

a cilindro rispetto al suolo?

a_r cilindro rispetto alla piattaforma?

μ_s minimo?



SVOLGIMENTO:

$a = a_t + a_r$ Equazioni dei moti relativi

$a_r = -\alpha r$

$f = ma$

$f r = I(-\alpha) = \frac{I}{r}(a_T - a)$ Siccome il corpo va a sinistra avremo $-I\alpha$

$mar^2 = I a_T - I a$

$a(I + mr^2) = I a_T$

$$a = \frac{\frac{1}{2}\cancel{mr^2}\, a_T}{\frac{3}{2}\cancel{mr^2}} = \frac{a_T}{3} = 1\ m/s^2$$

$a_r = a - a_T = -2\ m/s^2$

Affinché non ci sia moto dobbiamo imporre che $f \leq \mu_s mg$

$f \leq \mu_s mg$

$\cancel{m} a \leq \mu_s \cancel{m} g$

$$\mu_s \geq \frac{a}{g} = 0.1$$

6.26

$l = OA = 1\ m$

$M = 10\ Kg$ incernierata in O

L'estremo A è connesso a m.

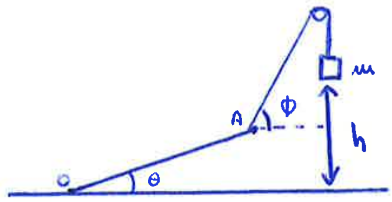
$\theta = 30°$

$\phi = 75°$

$m = ?$

$R_O = ?$

Filo tagliato, h affinché m cada con la stessa v di A.



SVOLGIMENTO:

Sul polo la reazione agisce sia su x che su y.

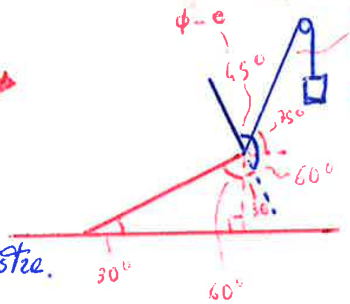
$T = mg$

$R_x = T\cos\phi = mg\cos\phi = 15.5\ N$

$R_y = Mg - T\operatorname{sen}\phi = 40.1\ N$

$Mg\,\frac{l}{2}\cos\theta = mg\,l\operatorname{sen}(\phi-\theta)$ perché $(\phi-\theta)$?

$$m = \frac{M\cos\theta}{2\operatorname{sen}(\phi-\theta)} = 6.12\ Kg$$



Noi abbiamo questo, ma ci serve la componente perpendicolare alla forza peso dell'asta che genera momento

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 43\ N$ diretta verso l'alto a sinistra.

Con angolo a terra $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = 68.9°$

Affinché scendano a terra con la stessa velocità, eguagliamo le velocità dei due corpi.

$\omega l = \sqrt{2gh} \rightarrow h = \frac{\omega^2 l^2}{2g} = 0.75\ m$

incognita

$mg\,h_{cm} = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2mg\frac{l}{2}\operatorname{sen}\theta}{I}} = 3.83\ rad/s$$

6.30.

$R = 0.22\ m$

$v = 3.6\ m/s$; ω

$r = 0.16\ m$

Dopo l'urto resta in quiete.

$|\omega| = ?$

SVOLGIMENTO:

$I\omega = mrv$ $I\omega$ è entrante quindi il senso è orario

$\cancel{m} R^2 \omega = \cancel{m} r v$

$\omega = \frac{r}{R^2} v = 11.9\ rad/s$

6.34.

$m = 10.5\ Kg$

Senza attrito, viene abbandonato con $\omega_i = 0$

Urto anelastico

$m_1 = 8\ Kg$

$m_2 = 6\ Kg$

$\mu_1 = 0.4$

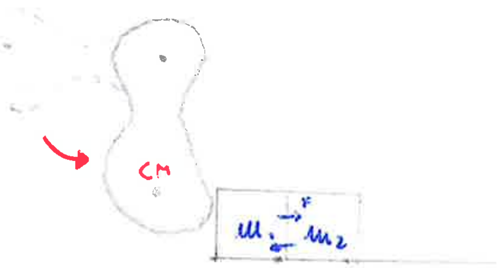
$\mu_2 = 0.6$

Si fermano dopo $t = 1.45\ s$

1) F tra m_1 e m_2?

2) $v_{in} = ?$

3) ω prima dell'urto?



SVOLGIMENTO:

$$\begin{cases} -F - \mu_1 m_1 g = m_1 a & (1) \\ F - \mu_2 m_2 g = m_2 a & (2) \end{cases} \rightarrow a = \frac{-\mu_1 m_1 - \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} g = -4.76\ m/s^2$$

$F = m_2 (a + \mu_2 g) = 6.72\ N$

2) $v = v_0 + at \rightarrow$ perché $v = 0$

$v_0 = -at = 6.9\ m/s$

3)

$$\begin{cases} I\omega = (m_1 + m_2) v_0 \ell \\ \frac{1}{2} I\omega^2 = mg\ell \end{cases} \rightarrow I = \frac{(m_1 + m_2) v_0 \ell}{\omega}$$

$\rightarrow \Delta E_K = W$

$\frac{1}{2} \frac{(m_1 + m_2) v_0 \cancel{\ell}}{\cancel{\omega}} \omega^{\cancel{2}} = mg \cancel{\ell}$

$\omega = \frac{2mg}{(m_1 + m_2) v_0} = 2.13\ rad/s$

5.33.

Asta AB, $l = 1.2$ m

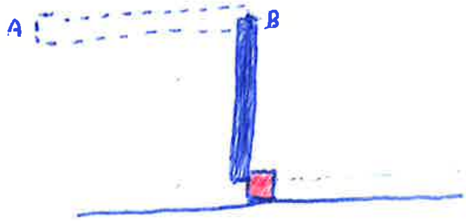
$M = 0.5$ Kg

incernierata in B

A $t=0$, quiete e lasciata ruota attorno a B.

m, inizialmente ferma

$m = 0.25$ Kg parte con v_0 orizzontale e l'asta si ferma.



$\omega_i = ?$

$v_0 = ?$

E_k dissipata $= ?$

$J = ?$

SVOLGIMENTO:

$Mgl = Mg\frac{l}{2} + \frac{1}{2}I\omega^2$ Impostiamo la conservazione dell'energia, il cm parte da quota l e arriva a $l/2$, mentre il cm compie solo rotazione e otteniamo solo $\frac{1}{2}I\omega^2$

$Mg\frac{l}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{3}Ml^2\omega^2 \rightarrow g\frac{l}{2} = \frac{1}{6}l^2\omega^2 \rightarrow g = \frac{1}{3}l\omega^2 \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 4.95\ \text{rad}/s^2$

2) $I\omega = \int M\,dt$

$I\omega = \int F \cdot l\,dt \rightarrow I\omega = \int mal\,dt \rightarrow I\omega = ml\int a\,dt \rightarrow I\omega = mv_0 l$

$\rightarrow v_0 = \frac{I\omega}{ml} = \frac{\frac{1}{3}Ml^2 \cdot \omega}{m \cdot l} = 3.96\ m/s$ Quando il corpo è incernierato ad un vincolo, non si conserva il momento angolare, pertanto per risolvere questo tipo di esercizi dobbiamo eguagliare il momento angolare della sbarra all'inizio (in questo moto) al momento dell'impulso dopo l'urto, ovviamente (per comodità) analizziamo le situazioni in un $dt \rightarrow 0$ prima dell'urto, dove la sbarra ha ancora una ω e subito dopo l'urto, dove l'impulso è già avvenuto.

3) Energia cinetica dissipata $\rightarrow \Delta E_K$

$\Delta E_K = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = -0.98$ J

4) Ricorda sempre: $J = \Delta p$

$J = mv_0 - M\omega\frac{l}{2} = -0.5$ Ns Quindi è diretto verso sinistra, questo perché l'impulso è una forza che si scarica sul perno, che affinché permetta al corpo (sbarra) di stare fermo (per bilanciare quindi la forza applicata).

6.36.

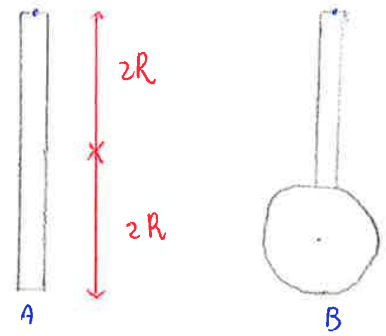
Due pendoli A e B di $m = 0.5$ kg
$R = 0.05$ m

1) Periodo delle piccole oscillazioni di B.

Si imprime J orizzontale e pendente per c del disco che porta fino ad avere velocità nulla quando l'asta è orizzontale.

$J = ?$

x delle une di sospensione di A affinché arrivi con v nulla con asta orizzontale?



SVOLGIMENTO:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I}} \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\,3R}} = 0.8 \text{ s}$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2 + m (3R)^2 = \frac{19}{2} m R^2$$

Nb: l'asta ha massa trascurabile

② Qui è necessario conoscere il momento dell'impulso. (pg 220 .. 221)

$$\int M dt = \int (r \times F) dt = r \times \int F dt = r \times J = \Delta L$$

$$J\,3R = I_B\,\omega_i \qquad \text{2 incognite}$$

$$\frac{1}{2} I_B \omega^2 = mg\,3R \qquad \omega = \frac{J\,3R}{I_B}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{I_B} \frac{J^2 \cancel{9} R^2}{I_B^{\cancel{2}}} = mg\,3\cancel{R}$$

$$J = \sqrt{\frac{2 m g I_B}{R}} = 0.88 \text{ Ns}$$

③ $$I_A = \frac{1}{12} m (4R)^2 + (2R^2) m = \frac{16}{3} m R^2$$

$$x J = I_A\,\omega \qquad \omega = \frac{xJ}{I_A}$$

posizione dell'impulso

$$\frac{1}{2} I_A \omega^2 = mg\,2R$$

$$\frac{1}{2} I_A \frac{x^2 J^2}{I_A^2} = mg\,2R$$

$$x = \sqrt{\frac{2 I_A\, mg\, 2R}{J^2}} = 0.29 \text{ m}$$

6.38.

$m = 1.4\ kg$ Disco

$R = 0.26\ m$

In quiete

$m_1 = m_2 = 0.5\ kg$

$m_3 = m_4 = 0.3\ kg$

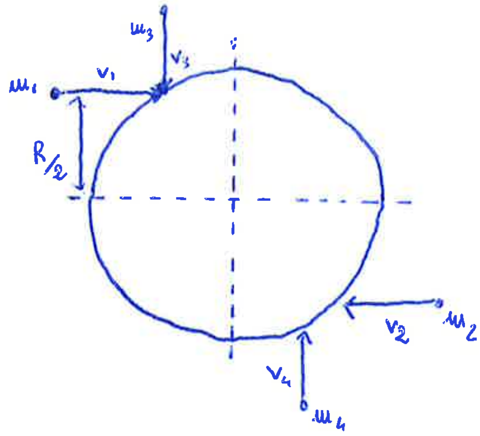
$v_1 = 2.4\ m/s$

$v_2 = 1.8\ m/s$

$v_3 = v_4 = 5.0\ m/s$

v_{cm} dopo urto?

ω?



Se il centro del disco fosse bloccato in modo che urti e basta:

$J = ?$

SVOLGIMENTO:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2 + m_3 v_3 - m_4 v_4}{m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4} = 0.1\ m/s$$

$\xrightarrow{}$ 0 perché $m_3 = m_4$ e $v_3 = v_4$

$$(m_1 v_1 + m_2 v_2)\frac{R}{2} - (m_3 v_3 + m_4 v_4)\frac{R}{2} = I\omega$$

$I \rightarrow \frac{1}{2} m R^2 + (2m_1 + 2m_3)R^2 \rightarrow$ la correzione di Steiner è necessaria perché quando ruotano il corpo cambia.

$\rightarrow \omega = -0.75\ rad/s$

$J = \Delta p = m_1 v_1 - m_2 v_2 + \cancel{m_3 v_3}^{0} - \cancel{m_4 v_4}^{0} = 0.3\ Ns$ discorde a x perché si oppone al moto con p più alto

Esercizi Termodinamica

11.21

$n = 0.5$ moli di gas biatomico

A: $T_A = 300\ K$ $\quad p_A = 1\ bar$

Espansione AB $\quad p = a + bV \quad$ con $\quad a = 0.14\ bar$, $\quad b = 70\ bar/m^3$

$V_B = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3$

BC è un'espansione adiabatica

$T_C = T_A$

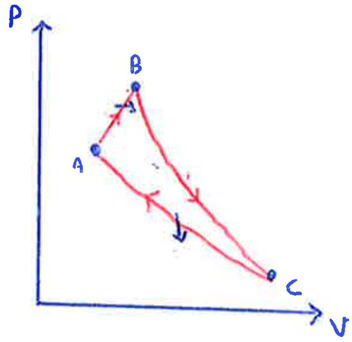
CA è una compressione isoterma

$T_B = ?$

$Q_{AB} = ?$

$Q_{CED} = ?$

$\eta = ?$



Biatomico

$c_p = \frac{7}{2}R \qquad c_v = \frac{5}{2}R$

$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\frac{7}{2}R}{\frac{5}{2}R} = \frac{7}{5}$

SVOLGIMENTO:

$p_B = a + bV_B = 1.54\ bar$

$T_B = \frac{p_B V_B}{nR} = 741\ K$

$? \rightarrow \frac{nRT_A}{p_A} = 1.25 \cdot 10^{-2}\ m^3$

$$Q_{AB} = U_{AB} + W_{AB} = nc_v(T_B - T_A) + \int_A^B (a + bV)\, dV = nc_v(T_B - T_A) + a(V_B - V_A) + \frac{b}{2}(V_B^2 - V_A^2)$$

$$= 4583\ J + 962\ J = 5545\ J$$

$$Q_{CED} = Q_{CA} = nRT \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = -3407\ J$$

$? \rightarrow T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

$$V_C = \left(\frac{T_B}{T_C}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} V_B = 0.192\ m^3$$

Nota bene: compressione $\rightarrow Q_{CED}$; espansione $\rightarrow Q_{ASS}$

$$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 1 + \frac{Q_{CA}}{Q_{AB}} = 0.385$$

11.16.

1 mole di gas

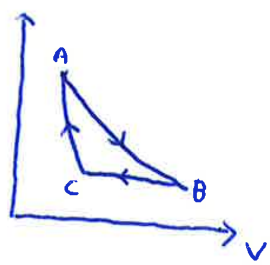
$T_A = T_B = 500\ K$

$V_A = 10^{-3}\ m^3$

$V_C = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$W_{AB}, W_{BC}, W_{CA} = ?$

$\eta = ?$



SVOLGIMENTO:

$W_{AB} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) > 0$

incognita: $p_C = p_B \rightarrow \frac{nRT_C}{V_C} = \frac{nRT_B}{V_B} \rightarrow V_B = V_C \frac{T_B}{T_C} = \frac{V_C T_A}{T_C} = 3.17 \cdot 10^{-3}\ m^3$

$W_{BC} = p_C (V_C - V_B) < 0 = -1538\ J$

$W_{CA} = -\int_C^A dU = -(U_A - U_C) = -nc_V(T_A - T_C)$

incognita $\rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1}$

$T_C = T_A \left(\frac{V_A}{V_C}\right)^{\gamma-1}$

$\gamma = \frac{R}{c_V} = \frac{2}{3+f}$ → in gas monoatomico vale zero

con $c_V = \frac{3+f}{2} R$

$dQ = dU + pdV$

$dW = -dU$ nell' adiabatica

$T_C = T_A \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} = 315\ K$

$W_{AB} = 4796\ J$

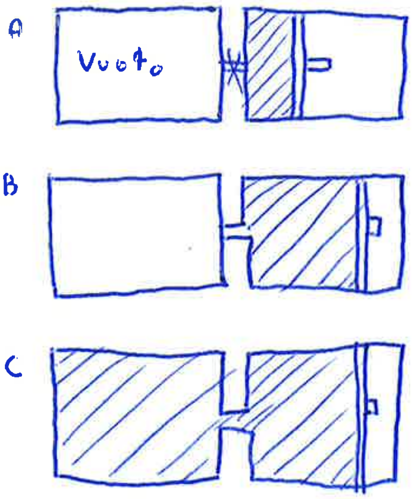
$W_{BC} = -1538\ J$

$W_{CA} = -2307\ J$

$\eta = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = \frac{W_{TOT}}{Q_{AB}} =$

W_{AB}

12.7.



$T_1 = 523,18\ K$

V_1 non dato

$V_B' = 4V_1$

n=5 di gas biatomico

AB adiabatica reversibile

$\Delta U = ?$

$\Delta S = ?$

SVOLGIMENTO:

$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1} \rightarrow T_B = T_A \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = T_A \left(\frac{1}{4}\right)^{2/5} = 300.5\ K$

con $\gamma - 1 = \frac{R}{c_V} = \frac{R}{\frac{5}{2}R} = \frac{2}{5}$

$\Delta U_{AB} = 5 \frac{5}{2} R (T_B - T_A) = -23.14 \cdot 10^3\ J$

$nc_V dT$

$\Delta S_{AB} = 0$ perché è adiabatica

↳ $nc_V \ln\left(\frac{TV^{R/c_V}}{\lambda}\right)$ è formula generale

$\Delta U_{BC} \Rightarrow T_B = T_C$ quindi $\Delta U = 0$

$\Delta S_{BC} = S_C - S_B \geq \oint_B^C \frac{dQ}{T} = 0$

$S_C - S_B = nR \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = 28,8\ J/K$

11.20

$p_A = p_B = 10^5\ Pa$

$p_C = 2 \cdot 10^4\ Pa$

$V_A = 10^{-2}\ m^3$

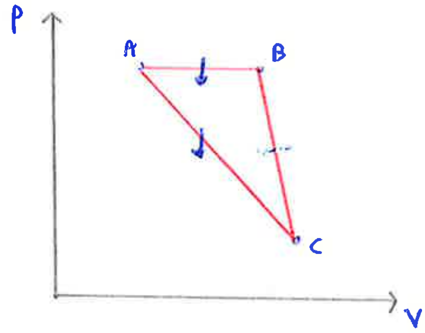
$V_B = 3 \cdot 10^{-2}\ m^3$

$V_C = 4 \cdot 10^{-2}\ m^3$

Monoatomico

$W_{TOT} = ?$

$\eta = ?$



SVOLGIMENTO:

$T = \frac{pV}{nR}$ ⟨ $T_A = 120\ K$, $T_B = 361\ K$, $T_C = 96\ K$

$W = \int_{V_i}^{V_f} P\,dV$

$\frac{P - P_f}{P_i - P_f} = \frac{V - V_f}{V_i - V_f} \rightarrow P = \left(\frac{V - V_C}{V_B - V_C}(P_B - P_C) \right) + P_C$

$W_{AB} = P(V_B - V_A) = 2000\ J$

$W_{BC} = \int_{V_B}^{V_C} P\,dV = 600\ J$ $\rightarrow W_{TOT} = 800\ J$

$W_{CA} = \int_{V_C}^{V_A} P\,dV = -1800$

$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = 5000\ J$ ASS

$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B) + W_{BC} = -2700\ J$ CED

$Q_{CA} = nc_v(T_A - T_C) + W_{CA} = -1500\ J$ CED

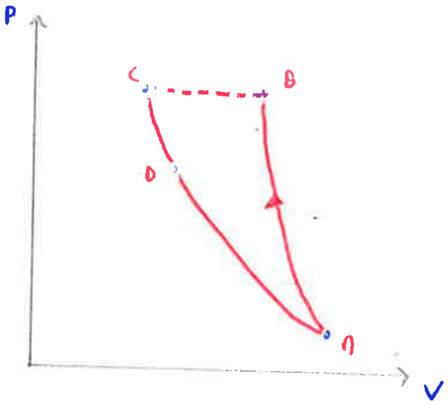
$\eta = \frac{W}{Q_{ASS}} = 0.16$

11.23.

1 mole monoatomico
AB compressione adiabatica
$V_A = 2\cdot 10^{-2}\ m^3$
$T_A = 300\ K$
$V_B = 10^{-2}\ m^3$
BC isobara irreversibile
$T_C = 200\ K$
CD isoterma
$V_D = 0.6\cdot 10^{-2}\ m^3$
DA espansione reversibile
Q e W in tutte le trasformazioni?
$W_{TOT} = ?$

$c_p = \frac{5}{2}R \quad c_v = \frac{3}{2}R$
$\gamma = \frac{5}{3}$

$p_D V_D = nRT_D$
$p_D = 277{,}1 \times 10^3\ Pa$



SVOLGIMENTO:

$Q_{AB} = 0 \qquad W_{AB} = -nc_v(T_B - T_A) \rightarrow\ ? \rightarrow T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

$= -2.2\ kJ$

$T_B = T_A\left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1} = 476.2\ K$

$Q_{BC} = \int_{T_B}^{T_C} nc_p\, dT = c_p(T_C - T_B) = -5.7\ kJ$

$W_{BC} = p_B(V_C - V_B) = nR(T_C - T_B) = -2.3\ kJ$

$\rightarrow p_C = p_B = \frac{nRT_B}{V_B} = 395{,}9 \times 10^3\ Pa$

$Q_{CD} = W_{CD} = nRT\ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right) = 593\ J$

$\rightarrow\ ? \rightarrow p_C V_C = nRT_C$

$V_C = \frac{p_C}{nRT_C} = 4.2\cdot 10^{-3}\ m^3$

In una trasformazione generica:

$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$

$\Delta Q = -nc_v(T_D - T_A) + \int_{V_D}^{V_A}\left(\frac{V-V_D}{V_A-V_D}(p_A - p_D) + p_D\right)dV = 1.2kJ + 2.8kJ = 4000\ J$

? → sappiamo che la trasformazione è descritta dalla retta $\frac{P - P_B}{P_A - P_D} = \frac{V - V_D}{V_A - V_D}$ quindi si ottiene la formula di sopra in funzione di P

$W_{TOT} = -1107\ kJ$

Q scambiato a $T_C = Q_{CD} + Q_{BC} = -5100\ J$

Q scambiato ad altre sorgenti: $Q_{DA} = 4000\ J$

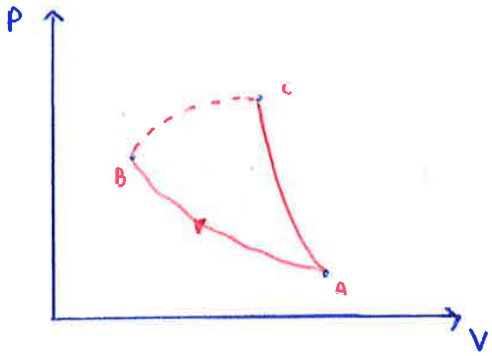
12.32.

Equilibrio in a

$(p_A = 10^5\ Pa,\ V_A = 20 \cdot 10^{-3}\ m^3,\ T_A = 288\ K)$

AB compressione isoterma a $V_B = 5 \cdot 10^{-3}\ m^3$

CA espansione adiabatica e torna allo stato A.



$Q_{BC} = 4.56\ kJ$

$\Delta S_{amb,BC} = -9.62\ J/K$

$W_{TOT} = ?$

$\eta = ?$

BC reversibile o no?

SVOLGIMENTO:

$$n = \frac{p_A V_A}{R T_A} = 0.83\ mol$$

$$p_B = \frac{n R T_A}{V_B} = 4 \cdot 10^5\ Pa$$

$$Q_{AB} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -2755.25\ J$$

$$Q_{CA} = 0\ J$$

$$\eta = \frac{Q_{ASS} + Q_{CED}}{Q_{ASS}} = 0.396$$

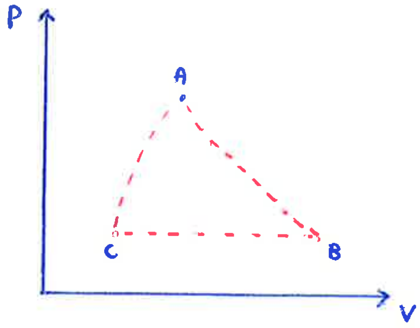
$$\Delta S_{amb,AB} = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = nR \ln \frac{V_B}{V_A} = +9.62\ J/K \rightarrow \text{è reversibile}$$

$-\Delta S_{gas,BC} = \Delta S_{gas}$

12.33.

$n = 5$ mol monoatomico

AB isoterma adiabatica
BC isobara — irreversibili
CA generica



$Q_{BC} = -15.6\ kJ \quad W_{CA} = 8.74\ kJ$

$\frac{V_B}{V_C} = 1.5 \qquad V_B - V_A = V_A - V_C \qquad \eta = ? \qquad \Delta S_{gas,CA} ?$

SVOLGIMENTO.

$W_{AB} = 0$

$\frac{T_B}{V_B} = \frac{T_C}{V_C} \rightarrow T_B = \frac{T_C}{\cancel{V_C}} 1.5 \cancel{V_C}$

$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B)$

$n c_p (-0.5 T_C)$

$T_C = \frac{2 Q_{BC}}{n c_p} = 300\ K \quad \rightarrow T_B = 450\ K$

$W_{BC} = P_C (V_C - V_B) = \frac{nRT_C}{V_C}(V_C - 1.5 V_C) = -0.5\, nRT_C = -6235.5\ J$

$P_C = \frac{nRT_C}{V_C}$

$\Delta U_{CA} = n c_v (T_A - T_C) = 9353.2\ J \rightarrow Q_{CA} = 18.1\ kJ$

$\eta = \frac{Q_{TOT}}{Q_{ASS}} = 0.15$

$\Delta S_{CA} = n c_v \ln \frac{T_B}{T_A} + nR \ln \frac{V_B}{V_A} = 34.6\ J/K$

↳ Formule a pg 467, paragrafo 12.9

mentre la velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile vista dal sistema fisso è:

$$v_{O'} = \frac{dOO'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z$$

Derivando $r = OO' + r'$ si ha:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dOO'}{dt} + \frac{dr'}{dt} = \underbrace{\frac{dx_{O'}}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt}\hat{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt}\hat{u}_z}_{\frac{dOO'}{dt}} + \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}}_{\frac{dr'}{dt}} + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

ovvero:

$$v = v_{O'} + v' + x'\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt} + y'\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt} + z'\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}$$

Grazie alle formule di Poisson conosciamo la derivata di un versore:

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \omega \times \hat{u}$$

Pertanto possiamo scrivere gli ultimi tre termini come:

$$x'(\omega \times \hat{u}_{x'}) + y'(\omega \times \hat{u}_{y'}) + z'(\omega \times \hat{u}_{z'}) = \omega \times r'$$

Sostituendo nella formula avremo il teorema delle velocità relative:

$$\boxed{v = v_{O'} + v' + \omega \times r'}$$

Il teorema delle velocità relative, le misure delle velocità compiute nei due sistemi di riferimento sono differenti ma correlate.
La differenza $v_t = v - v' = v_{O'} + \omega \times r'$ è pari alla velocità del punto P^* rispetto al sistema fisso, che coincide con P. Infatti P^* ha $v' = 0$, in quanto è solidale con il sistema mobile. Se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento.

TEOREMA DELLE ACCELERAZIONI RELATIVE:

Rispetto al sistema fisso, l'accelerazione assoluta è:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{u}_z$$

mentre rispetto al sistema mobile è:

$$a' = \frac{d^2x'}{dt^2}\hat{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}\hat{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}\hat{u}_{z'}$$

L'accelerazione dell'origine di O' rispetto a O è data da $a_{O'} = \frac{dv_{O'}}{dt}$, derivando rispetto al tempo avremo:

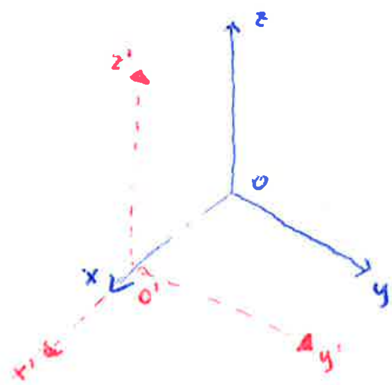
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} + \frac{d\omega}{dt} \times r' + \omega \times \frac{dr'}{dt}$$

Notiamo che se $F = ma$ nel sistema inerziale, in quello mobile in moto accelerato non può sussistere $F = ma'$ perché $a \neq a'$, ma avremo:

$$\boxed{F - m a_T - m a_C = m a'}$$

Quindi l'accelerazione misurata in quel sistema è uguale alle forze vere agenti sul punto più le forze apparenti, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono anche chiamate forze di inerzia perché costituiscono il termine correttivo che permette di tenere $F = ma'$.
In un sistema accelerato vediamo che $F = 0$ non comporta $a' = 0$, questo risultato giustifica il concetto di sistema non inerziale.

Moto di trascinamento rettilineo uniforme:



Consideriamo due sistemi inerziali in moto uno rispetto all'altro, con gli assi paralleli e con S' che si sposta con velocità costante v_0 parallela a x.
Proiettando $r' = r - OO'$ sugli assi:

$x' = x - v_0 t$
$y' = y$
$z' = z$

Mentre per le velocità usiamo $v' = v - v_0$ e avremo:

$v'_x = v_x - v_0 \quad v'_y = v_y \quad v'_z = v_z$

e le accelerazioni sono uguali perché $a = a'$

"Tutte queste trasformazioni determinano una trasformazione galileiana."

Moto di trascinamento rettilineo accelerato:

Supponiamo che O' abbia accelerazione costante $a_{O'} = a_t$ e velocità iniziale v_{in}, entrambe parallele e concordi a $x = x'$. Quindi posizione e velocità di O' sono espresse da:

$$x_0 = v_{in} t + \frac{1}{2} a_t t^2 \qquad v_0 = v_{in} + a_t t$$

Le formule di trasformazione diventano:

$r' = r - OO' \quad x' = x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_t t^2, \; y' = y, \; z' = z$

$v' = v - v_{O'} \quad v_{x'} = v_x - v_{in} - a_t t, \; v_{y'} = v_y, \; v_{z'} = v_z$

$a' = a - a_{O'} \quad a_{x'} = a_x - a_t, \; a_{y'} = a_y, \; a_{z'} = a_z$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 112

Dinamica dei sistemi di punti materiali

19-04-2016

Centro di massa: $\vec{R}_{cm} = \dfrac{\sum_j m_j \vec{r}_j}{\sum_j m_j}$ → posizione media del sistema di particelle

Nel caso le masse siano tutte uguali, e quindi $m_1 = m_2 = m$

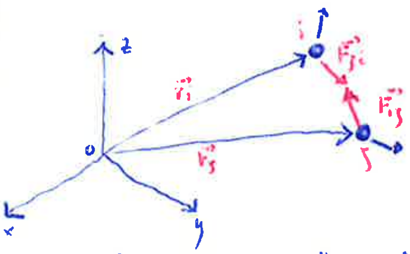
$\vec{R}_{cm} = \dfrac{m \sum_j \vec{r}_j}{N m} = \dfrac{1}{N} \sum_j \vec{r}_j$ → valore medio del vettore posizione.

Casi speciali:

$m_1 >> m_j \rightarrow M \simeq m_j$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + \dots}{M} = \underbrace{\frac{m_1}{M}}_{1} \vec{r}_1 + \underbrace{\frac{m_2}{M}}_{0} r_2$$

Moto del centro di massa (Teorema del CdM)



$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_j^I = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$

$\vec{R}_j = F_j^I + F_j^E$

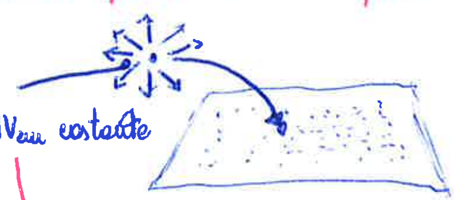
$$V_{cm} = \frac{dR_{cm}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} m_j r_j\right) = \frac{1}{M}\sum_j m_j \frac{dr_j}{dt} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{v}_j$$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \vec{a}_j = \frac{1}{M}\sum_j F_j = \frac{1}{M}\sum_j (F_j^I + F_j^E)$$

$$A_{cm} = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} F_j^E + \underbrace{\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{N} F_j^I}_{\sum_j \sum_{i \neq j} F_{ij} = 0}$$

Applicazione: corpo che viaggia ed esplode in mille pezzi:

$M A_{cm} = \sum_j m_j \vec{g} = Mg$



Corollario:

Se $\vec{R}^E = 0 \rightarrow M A_{cm} = 0 \rightarrow M V_{cm}$ costante

$A_{cm} = \dfrac{dV_{cm}}{dt}$

$$M \underbrace{\frac{1}{M}\sum_j m_j v_j}_{P_{TOT} = \text{cost}}$$

P_{TOT} = cost → conservazione della qdm

1) $R'_{cm} = \dfrac{1}{N}\sum_j m_j r_j' = 0$ (posizione e velocità del cdM quando sono nel Cdm)

2) $V'_{cm} = \dfrac{1}{M}\sum_j m_j v_j' = 0$

$\vec{r}_j' = r_j - R_{cm}$

$v_j' = v_j - V_{cm}$

$$R'_{cm} = \frac{1}{M}\sum_j (m_j r_j - m_j R_{cm}) = \underbrace{\frac{1}{M}\sum_j m_j r_j}_{R_{cm}} - \frac{1}{\cancel{M}}\overbrace{\left(\sum_j m_j\right)}^{\cancel{M}} R_{cm} = R_{cm} - R_{cm} = 0$$

Corollario: se $M^E = 0 \rightarrow \frac{dL}{dt} = 0 \rightarrow L$ costante

$$\begin{cases} F_j^E = 0, \forall j \\ \Sigma_j r_j' \wedge F_j^E = 0 \text{ anche se } F_j^E \neq 0 \end{cases}$$

Applicazione:

Polo ≡ cdM per ipotesi

$$\begin{cases} \vec{r_j} = r_j' + R_{cdM} \\ \vec{v_j} = \vec{v_j}' + V_{cm} \end{cases}$$

$$\vec{L}' = \Sigma_j m_j \vec{r_j}' \wedge \vec{v_j}' = \Sigma_j m_j r_j' \wedge (v_j' + V_{cm})$$
$$= \Sigma_j \vec{r_j}' \wedge \vec{v_j}' + \underbrace{(\Sigma_j m_j \vec{r_j}')}_{zero} \wedge \vec{V_{cm}}$$

$$\vec{L} = \Sigma_j m_j r_j \wedge v_j = \dots = \Sigma_j \underset{zero}{m_j} \vec{r_j}' \wedge \vec{v_j}' = L'$$

I risultati sono:

$\vec{L} = \vec{L}'$

$\vec{M}'^E = \Sigma_j \vec{r_j}' \wedge \vec{F_j}$ con $F_j' = \vec{F}_j^E + F_j^I$

Teorema di Koenig:

ci permettono di capire come vediamo le cose in un sistema inerziale e nel sistema di riferimento del CdM.

1° teorema di Koenig: come collego il momento angolare visto da S e S'?

$$\vec{L} = \Sigma_j m_j \vec{r_j} \wedge \vec{v_j} = \Sigma_j m_j (r_j' + R_{cm}) \wedge (V_{cm} + v_j')$$
$$= \Sigma_j m_j (r_j' \wedge v_j' + r_j' \wedge v_{cm} + R_{cm} \wedge v_j' + R_{cm} \wedge V_{cm})$$
$$= \Sigma_j m_j r_j' \wedge v_j' + \underbrace{(\Sigma_j m_j r_j')}_{zero} \wedge V_{cm} + \underbrace{\Sigma_j R_{cm} \wedge m_j v_j'}_{R_{cm} \wedge \Sigma_j m_j v_j' \,\rightarrow\, zero} + (\Sigma_j m_j) \vec{R_{cm}} \wedge \vec{V_{cm}}$$

$$\vec{L} = \underset{\text{momento angolare con moto puro nel cdM}}{\vec{L}'} + \underset{\text{momento angolare orbitale}}{M \vec{R_{cm}} \wedge \underset{\text{quantità di moto totale}}{\vec{V_{cm}}}}$$

02-05-2016

Urto elastico:

$$\begin{cases} \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' \\ E_K^B = E_K^A \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases}$$

Urto anelastico:

$$\begin{cases} \vec{p_1} + \vec{p_2} = \vec{p_1}' + \vec{p_2}' \\ E_K^B - E_K^A = -(E_p^B - \cancel{E_p^A}) + W_{AB}' \end{cases}$$

$\rightarrow$ lavoro delle forze non conservative da A a B.

Applicazioni:

1) corpi che si urtano

Corpi di cui uno con molla di massa trascurabile.

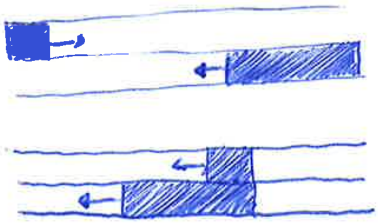
PRIMA

x_1 x_2

DOPO

2) urto anelastico

Due corpi che scorrono lungo due binari



Caso 1: durante l'interazione so che E_M si conserva e quindi:

$$E = \underbrace{\frac{m_1}{2} v_1^2(t) + \frac{m_2}{2} v_2^2(t)}_{E_K} + \frac{K}{2}(x_2 - x_1 - \ell)^2$$

A) $E = \frac{m_1}{2} \vec{v_1}^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v_2}^2 + \cancel{E_p}$ contatto per $x_2 - x_1 = \ell$

B) $E = \frac{m_1}{2} \vec{v_1}'^2 + \frac{m_2}{2} \vec{v_2}'^2 + \cancel{E_p}$

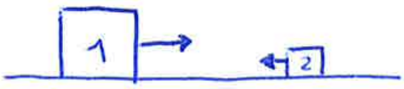
$$F_{21} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{K}{2}(x_2 - x_1 - \ell)^2\right) < 0 \rightarrow x_2 - x_1 < \ell$$

$$F_{12}(x_2) = -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{K}{2}(x_2 - x_1 - \ell)^2 = -K(x_2 - x_1 - \ell) > 0$$

$$v_1' = v_2 - v_1 + \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{cases} v_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] v_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Se $m_1 >> m_2$

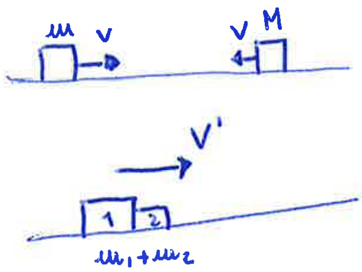


$v_1' \simeq v_1$, $v_2' \simeq 2v_1 - v_2$

Se $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} v_1 = v_2 \\ v_2' = v_1 \end{cases}$$

Perdita di energia cinetica nell'urto anelastico:



$$mv + MV = (m+M)V'$$

$$V' = \frac{mv + MV}{m+M}$$

ΔE_k : calcolo la variazione

$$E_k = \frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}V^2$$

$$E_k' = \frac{(m+M)}{2}V'^2 = \frac{\cancel{m+M}}{2}\,\frac{m^2v^2 + M^2V^2 + 2mMvV}{(m+M)^{\cancel{2}}}$$

$$E_k - E_k' = \Delta E_k = \frac{mv^2 + MV^2}{2} - \frac{m^2v^2 + M^2V^2 + 2mMvV}{2(m+M)}$$

$$= \frac{Mm(v-V)^2}{2(m+M)} > 0 \rightarrow \text{la perdita è positiva.}$$

Campi gravitazionali

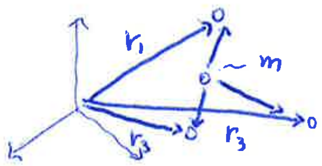
$$\vec{F}_{12} = m_2 \left(- \frac{\gamma m_1 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|r_1 - r_2|^3} \right) = m_2 \vec{G}_1(\vec{r}_2)$$ → Campo generato da m_1 in funzione di $\vec{r}_2$

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{G}_2(\vec{r}_1)$$

Con N masse e una massa di prova m con posizione $\vec{r}$.

$$\vec{G}_j(\vec{r}) = - \frac{\gamma m_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|r - r_j|^3}$$ Campo gravitazionale di una massa j-esima

$$\vec{G}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \vec{G}_j(\vec{r}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{-\gamma m_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$



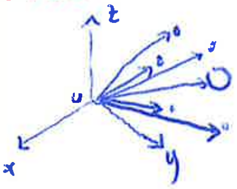
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 79 di 112

$E_p(r) = mV(r) = -\gamma \frac{mM}{r}$

$V(r) = V(R+z) = -\gamma \frac{M}{R+z} = -\gamma \frac{M}{R(1+z/R)} = -\gamma \frac{M}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \dots\right)$

$= -\frac{\gamma M}{R} + \frac{\gamma M}{R^2} z = \text{cost} + gz \rightarrow E_p = \text{cost} + gz$

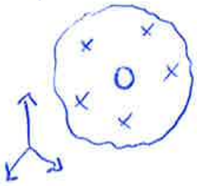
Sistema solare: riduzione di un problema ad N corpi in molti problemi a 2 corpi



$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{N} m_j \vec{r}_j$

$M A_{cm} = R^E \simeq 0 \rightarrow \vec{V}_{cm} = \text{costante}$

Siccome V_{cm} è costante, possiamo pensare il sistema all'interno del CdM come un sistema d'inerzia con punto di vista nel CdM.



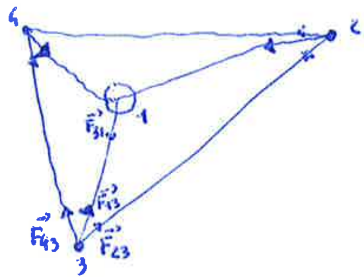
$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1}{M}\vec{r}_1 + \sum_{j\neq 1} \frac{m_j}{M}\vec{r}_j$ per $m_j \ll M$

m_1 = massa sole $M = \sum_j m_j \simeq m_1$

$\vec{R}_{cm} = \vec{r}_1 + \sum_{j\neq 1} \underbrace{\frac{m_j}{M}}_{\ll 1} r_j \simeq \vec{r}_1$

Quindi il centro di massa è preso nel Sole, perché la massa del sistema è tanto grande che è come se "risucchiasse" il sistema.

Esempio:



$|\vec{F}_{1j}| \gg |\vec{F}_{ij}|$

Le forze causate dal Sole sono molto maggiori rispetto a quelle interplanetarie.

$|\vec{F}_{ij}| = \frac{\gamma m_i m_j}{|r_i - r_j|^2}$

Per rendere l'idea: Sole 1.99×10^{30} Kg

Terra 5.97×10^{24} Kg

Giove 1.9×10^{27} Kg

Luna 7.33×10^{22} Kg

Questo è il motivo per cui trascuriamo le forze interplanetarie e contiamo quelle del sistema pianeta - Sole e quindi riduciamo i nostri problemi a problemi a due pianeti.

Dimostrazione seconda legge di Keplero:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mu \vec{r} \wedge \vec{v}) = \mu \vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} = \mu \vec{r} \wedge \vec{a} = \frac{\mu}{m_2} \vec{r} \wedge \underbrace{m_2 a}_{\vec{F}_{21}} = 0$$ perché sono paralleli

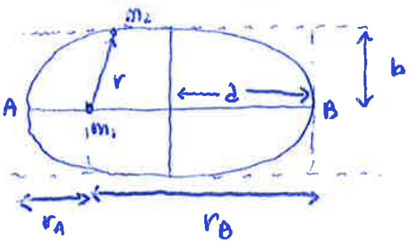
Per cui:

$$\vec{L} = \cos t = \mu \vec{r} \wedge \vec{v} = \underbrace{\mu r^2 \dot{\theta}}_{\text{costante}} \hat{u}_z$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$$

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2\mu}(\underbrace{\mu r^2 \dot{\theta}}_{L_z \text{ costante}}) = \text{costante}$$

Dimostrazione terza legge di Keplero:



$$r_A + r_B = 2a$$
$$r_A r_B = b^2$$
$$A = \pi a b$$

$$E = \frac{\mu}{2} v^2 - \gamma \frac{m_1 m_2}{r} \quad ; \quad \vec{L}_z = \mu r^2 \dot{\theta}$$

$L_z = \mu r_A v_A$ in A $\qquad L_z = \mu r_B v_B$ in B] perché braccio e velocità sono ortogonali

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L_z}{2\mu} = \frac{\pi a b}{T}$$

Sicuramente:

$$\frac{\mu}{2}\vec{v}_A^{\,2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{\vec{r}_A} = \frac{\mu}{2}\vec{v}_B^{\,2} - \frac{\gamma m_1 m_2}{\vec{r}_B}$$

Poi:

$$2\mu \frac{\pi a b}{T} = \mu r_A v_A \qquad 2\mu \frac{\pi a b}{T} = \mu r_B v_B$$

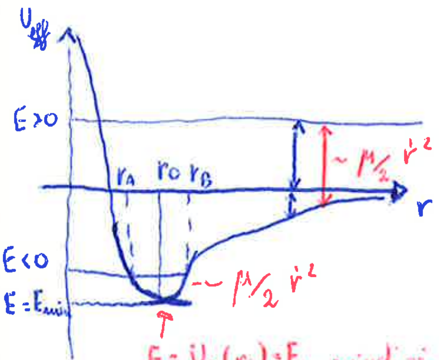
$$v_A = \frac{2\pi a b}{T r_a} \qquad v_B = \frac{2\pi a b}{T r_B}$$ sostituiamo nella conservazione

$$\frac{\mu}{2} \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_a^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_a} = \frac{\mu}{2} \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 r_B^2} - \gamma \frac{m_1 m_2}{r_B}$$

$$\mu \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2}\right) = \gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A}\right)$$

$$\mu \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{T^2}\cancel{\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)}\left(\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_B}\right) = \gamma m_1 m_2 \cancel{\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)}$$

$$\underbrace{}_{\frac{r_A + r_B}{r_A r_B}}$$



$E = E_{min}$ = circonferenza

$E = E < 0$ = ellisse

$E = E > 0$ = iperbole

$E = 0$ = parabola

$E = U_B(r_0) = E_0$, quindi qui il moto è descritto da una circonferenza con solo energia cinetica rotazionale, evidenziato da L_z^2

r_0 punto di minimo di U_{eff}

Possiamo trovare il minimo?

$$\frac{dU_B}{dr} = \frac{-L_z^2}{\mu r^3} + \frac{\gamma m_1 m_2}{r^2} = 0 \rightarrow \frac{L_z^2}{\mu \gamma m_1 m_2} = r_0$$

Nella situazione $E<0$ che succede?

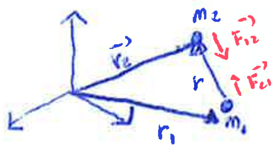
$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}$$

Moto vincolato tra r_A e r_B, quindi ellisse.

E se $E>0$?

Per $r=\infty$ avremo tutta energia cinetica $E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2}$

Risoluzione delle equazioni del moto per il problema a 2 corpi (riduzione ad un solo corpo)



$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} \\ m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} \end{cases}$$

$$\vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2 (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_{21}$$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

$$M\ddot{\vec{R}}_{cm} = MA_{cm} = \frac{m_1}{M}\frac{d^2 r_1}{dt^2} + \frac{m_2}{M}\frac{d^2 r_2}{dt^2} = \frac{m_1}{M}\frac{1}{m_1}\vec{F}_{21} + \frac{m_2}{M}\frac{1}{m_2}\vec{F}_{12} = 0$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_1}F_{21} = \underbrace{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}_{1/\mu}\vec{F}_{12}$$

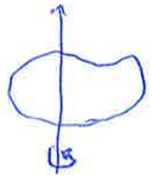
$$\mu \ddot{r} = \vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$\boxed{\mu \ddot{r} = -\gamma \frac{m_1 m_2 r}{r^3}} \rightarrow \quad \vec{r} = r\hat{u}_r; \quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\hat{u}_r + (2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta$$

$$\mu(\ddot{r} - \dot{\theta}^2 r)\hat{u}_r + \mu(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta = -\gamma \frac{m_1 m_2 \hat{u}_r}{r^2}$$

$$\begin{cases} (r) \quad \mu\ddot{r} - \mu r\dot{\theta}^2 = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r} \\ (\theta) \quad \mu(2\dot{\theta}\dot{r} + r\ddot{\theta}) = 0 \rightarrow L_z = \text{costante} = \mu r^2\dot{\theta} \rightarrow 2\mu r\dot{r}\dot{\theta} + \mu r^2\ddot{\theta} \end{cases}$$

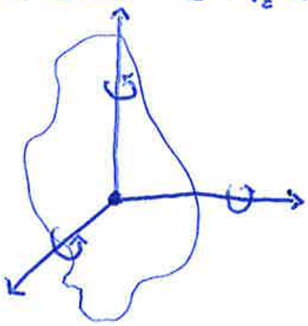
Se il corpo è piatto come lo calcoliamo L?



$\vec{L} = I_z \vec{\omega}$

Situazioni in cui $L_\perp = 0$

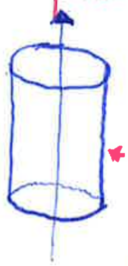
Si definiscono gli assi principali d'inerzia: "si può dimostrare che per ogni punto di un corpo generico esistono tre assi ortogonali (assi principali d'inerzia) tali che se l'asse di rotazione coincide con uno di assi, allora $\vec{L} = I_z \vec{\omega}$, $\vec{L}_\perp = 0$"



Se il punto preso come polo è il cdM, gli assi principali d'inerzia sono detti assi centrali d'inerzia.

Caso semplice: corpi omogenei dotati di simmetria.

simmetria, la rotazione non modifica lo stato del corpo.



se $m_J = m_i$

$$\vec{L}_J = \cancel{\sum_K m_K R_K}\ \sum_K m_K z_K \vec{R}_K$$
$$= \dots + \underbrace{m_i z_i R_i + \dots + m_J z_J R_J}_{=0} \quad \Rightarrow \vec{L}_\perp = 0$$

$m_i \to m_J$, $R_i \to -R_J$

Equazione del moto rotazionale di un corpo rigido:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$$

se $\vec{L} \parallel \vec{\omega} \leftrightarrow \vec{L}_\perp = 0$ allora $\vec{L} = I\vec{\omega}$

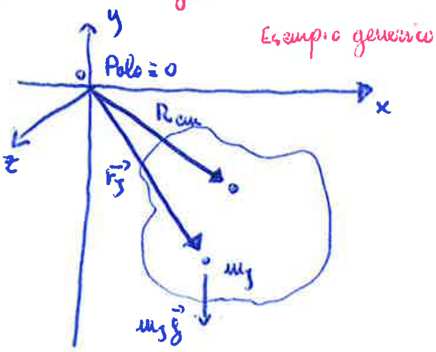
$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = M^E \Rightarrow \boxed{I\vec{\alpha} = \vec{M}^E}$$

Condizione di equilibrio di un corpo rigido:

$$\begin{cases} M\vec{A}_{cm} = \vec{R}^E = 0 \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E_{TOT} = 0 \end{cases}$$

Pendolo fisico:

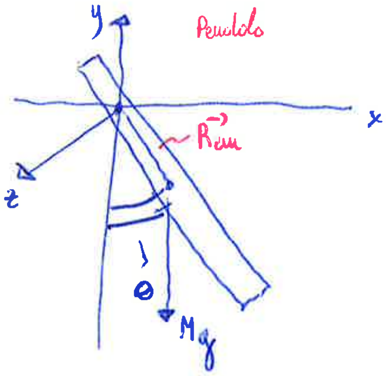
Esempio generico



$$\vec{M}^E = \Sigma_j \vec{r}_j \wedge (m_j \vec{g})$$
$$= (\Sigma_j m_j r_j) \wedge \vec{g}$$
$$= M\vec{R}_{cm} \wedge g$$

$$\vec{M}^E = \vec{R}_{cm} \wedge M\vec{g}$$

Pendolo



$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ $\quad \vec{L} = I_z \omega \quad$ con $\vec{\omega} = \dot{\theta}\hat{u}_z$

$I_z = I_{cm} + a^2 M$

$a = |R_{cm}|$

$$\frac{d}{dt}(I_z \dot{\theta} \hat{u}_z) = R_{cm} \wedge Mg$$
$$I_z \cancel{\hat{u}_z} \ddot{\theta} = R_{cm} Mg\, \text{sen}\theta\, (-\cancel{\hat{u}_z})$$
$$I_z \ddot{\theta} = -R_{cm} Mg\, \text{sen}\theta$$
$$\ddot{\theta} + \frac{Mg R_{cm}}{I_z} \text{sen}\theta = 0$$

→ caso generico

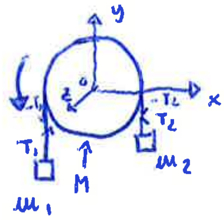
con $I_z = R_{cm}^2 M$

Cas

caso limite:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R_{cm}} \cancel{\text{sen}\theta}\, \text{sen}\theta = 0$$

Esercizio:



$\downarrow \vec{g}$

$I = MR^2$ da dimostrare.

$m_1 > m_2$

$$\begin{cases} m_2 a = -m_2 g + T_2 \\ -m_1 a = -m_1 g + T_1 \\ I\alpha = M^E \end{cases}$$

$$I\alpha \hat{u}_z = \vec{R} \wedge (-\vec{T}_2) + (-\vec{R}) \wedge (-\vec{T}_1)$$
$$= -R\hat{u}_x \wedge (T_2 \hat{u}_y) + R\hat{u}_x \wedge (T_2 \hat{u}_y)$$

Quindi:

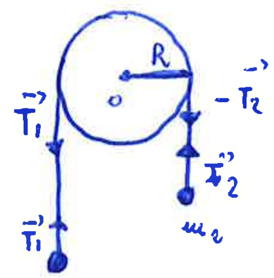
$$I_\alpha \cancel{\hat{u}_z} = -RT_2 \cancel{\hat{u}_z} + RT_1 \cancel{\hat{u}_z}$$

$$I\alpha = R(T_1 - T_2) \qquad \alpha = \cancel{v}\frac{a}{r}$$

$$I\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$$

Fine esercizio precedente: 26-09-2016

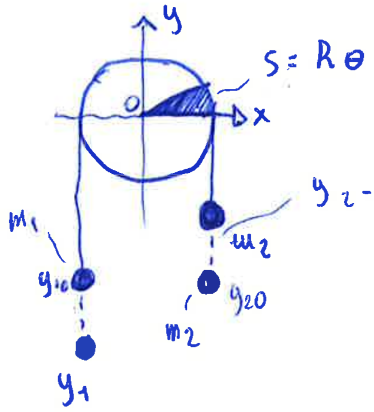
1



$$\begin{cases} m_2 a = T_2 - m_2 g \\ -m_1 a = T_1 - m_1 g \\ I\alpha \hat{u}_z = \vec{R} \wedge (-\vec{T_2}) + R \wedge (-T_1) \longrightarrow I\alpha = R(T_1 - T_2) \end{cases}$$

*

Questo è un moto vincolato, perché il filo trasmette in maniera solidale al disco



$$y_2 - y_{20} = -(y_1 - y_{10}) = s$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dy_2}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

$$v_2 = -v_1 = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\underbrace{a_1}_{a} = -a_1 = R\underbrace{\ddot{\theta}}_{\alpha} = R\alpha \qquad a = R\alpha$$

$$* \quad T_2 = m_2(g+a)$$

$$T_1 = m_1(g-a)$$

$$I\frac{a}{R} = R(T_1 - T_2)$$

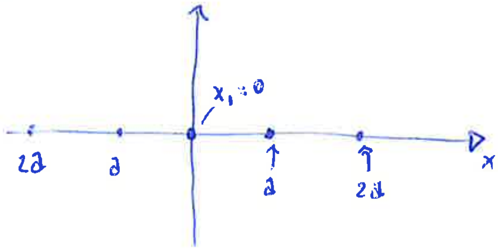
$$I\frac{a}{R^2} = m_1 g - m_1 a - m_2 g - m_2 a$$

$$a\left(\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2\right) = m_1 g - m_2 g$$

$$\boxed{a = \frac{g(m_1 - m_2)}{\frac{I}{R^2} + m_1 + m_2}}$$

In generale $\boxed{I = mR^2\sigma}$ dove σ varia in base alla forma del corpo.

Applicazione:

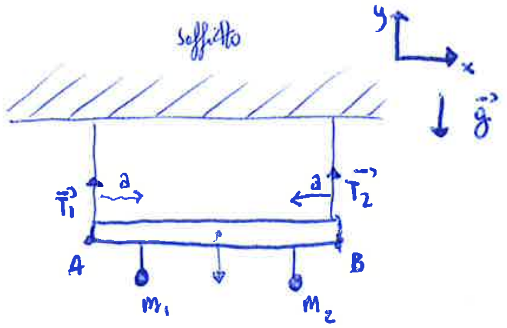


$m_j = m$

$$I = \sum_j m_j x_j^2 = m \sum_j x_j^2 = m\left(2(2a)^2 + 2a^2 + 0\right)$$

$$I = 2m \cdot 5a^2 = 10ma^2$$

Esercizio:



Conosco l, a, m_1, m_2, m

$\vec{T}_1, \vec{T}_2 = ?$

$$\left.\begin{aligned} M A_{cm} &= R^E = 0 \\ \frac{dL}{dt} &= M^E = 0 \end{aligned}\right]$$ condizioni per l'equilibrio

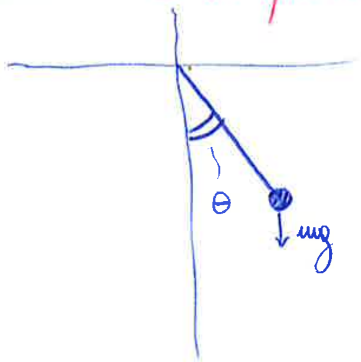
Scelgo A come polo:

$$\begin{cases} T_1 \cancel{u_y} + T_2 \cancel{u_y} - mg \cancel{u_y} - m_1 g \cancel{u_y} - m_2 g \cancel{u_y} = 0 \\ + l T_2 - (l-a) m_2 g - m \frac{l}{2} g - a m_1 g = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = (m_1 + m_2 + m) g \\ T_2 = \frac{1}{l}\left[(l-a) m_2 + \frac{l}{2} m - a m_1\right] g = 0 \end{cases}$$

Con i valori trovo T_2 e sostituisco sopra

Esercizio: derivare equazione pendolo



$$m a_T = -mg \operatorname{sen}\theta$$

$\downarrow$ $R\ddot{\theta}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = M^E$$

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + E_p(\theta) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 + mgR(1 - \cos\theta)$$

$$E = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + mgR - mgR\cos\theta$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m}{2} R^2 \frac{d}{dt}\dot{\theta} - mgR \frac{d}{dt}\cos\theta = 0$$ → Energia si conserva

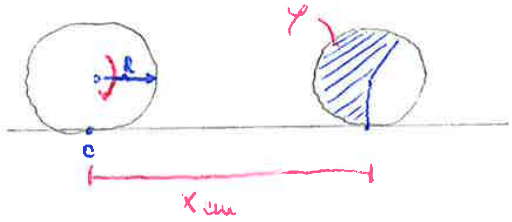
$$= \frac{1}{2} m R^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} - mgR(-\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} = 0$$

$$= mR^2\dot{\theta}\,\underbrace{\left[\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\operatorname{sen}\theta\right]}_{\text{Equazione del pendolo}} = 0$$

28-04-2016

Moto di puro rotolamento:

situazione in cui l'asse di rotazione è un asse geometrico che si sposta insieme al corpo rigido. Se le velocità di tutti i punti sono uguali tra loro e parallele al piano abbiamo un moto di traslazione, ma se la velocità del punto di contatto è nulla, si ha un moto di puro rotolamento.



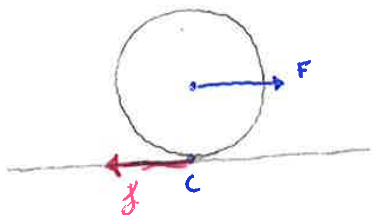
La velocità del punto c (punto di contatto) si può scrivere $v_c = v_{cm} + \omega \times R$, ma siccome sappiamo che essa è nulla, avremo $v_{cm} = -\omega R$.

Modo alternativo per trovare v_{cm}:

$$\varphi = -\frac{x_{cm}}{R}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = -\frac{1}{R}\cdot\frac{dx_{cm}}{dt} = -\frac{v_{cm}}{R} \Rightarrow v_{cm} = -\omega R$$

È evidente che debba essere presente una forza che per un istante dt mantiene fermo il punto di contatto c del disco con la superficie d'appoggio.



Ma è essenziale notare che f (forza di attrito) non può assumere qualsiasi valore, ossia non può superare la forza di attrito statico massima.

$$f < f^{max} = \mu_s N = \mu_s mg$$

Le leggi del moto del centro di massa è:

$$\begin{cases} \vec{F} + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{N} = m a_{cm} \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E \end{cases}$$

che proiettata sugli assi sarà:

$$\begin{cases} F - f = m a_{cm} \\ N - mg = 0 \\ I\alpha = -rf \quad \text{quindi } f = I\dfrac{a}{R^2} \end{cases}$$

Ricorda $a_{cm} = \alpha R \rightarrow \alpha = \dfrac{a_{cm}}{R}$

da cui:

$$ma = F - I\frac{a}{r^2} \rightarrow \left(m + \frac{I}{R^2}\right)a = F \rightarrow \boxed{a_{cm} = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}}}$$

$$\text{mentre } f = \frac{I}{R^2}\,\frac{F}{m + \frac{I}{R^2}} = \boxed{\frac{IF}{mR^2 + I}}$$

Lavoro e energia potenziale:

$$W_{AB} = \sum_j \int_A^B \vec{R}_j \, d\vec{r}_j = \sum_j \int_A^B \left(\vec{F}_j^E + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_j$$

$$= \sum_j \int_A^B F_j^E \, d\vec{r}_j + \sum_j \int_A^B \sum_{i \neq j} F_{ij} \cdot dr_j$$

$$\vec{F}_j^E = -\nabla_j U_j^E (r_j)$$

$$= \sum_j \left[-\left(\mathcal{U}_j^E (\vec{r}_{jB}) - \mathcal{U}_j^E (\vec{r}_{jA}) \right) \right] + \sum_j \int_A^B \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j = -\left(\mathcal{U}_B^E - \mathcal{U}_A^E \right)$$

$$W_{AB} = E_K^B - E_K^A = -\left(\mathcal{U}_B^E - \mathcal{U}_B^E \right)$$

Caso con $N > 2$

$$E_K^B - E_K^A = -\left(\mathcal{U}_B^E - \mathcal{U}_B^E \right) - \left(\mathcal{U}_B^I - \mathcal{U}_A^I \right)$$

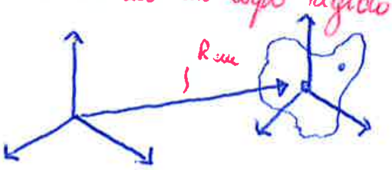
$$E_K^{A,B} = \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{2} v_{j\,A,B}^2$$

$$\mathcal{U}_{A,B}^E = \sum_{j=1}^N \mathcal{U}_{j\,A,B} \left(\vec{r}_{j\,A,B} \right)$$

$$\mathcal{U}_B^I = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \mathcal{U}_{ij} \left(\vec{r}_{iB} - r_{jB} \right)$$

$$\mathcal{U}_A^E = \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \mathcal{U}_{ij} \left(\vec{r}_{iA} - \vec{r}_{jA} \right)$$

Applicazione ad un corpo rigido:



$$E = E_K + E_p = E_K + \mathcal{U}^E + \mathcal{U}^I$$

$$= \sum_j \frac{m_j}{2} \vec{v}_j^{\,2} + \sum_j \mathcal{U}_j^E (\vec{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_j \sum_{i \neq j} \mathcal{U}_{ij}$$

$$= \frac{1}{2} M V_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^{\,\prime\,2} - \sum_j m_j \, g \cdot \vec{r}_j$$

$$\vec{v}_j^{\,\prime} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_j^{\,\prime}$$
$$= \vec{\omega} \wedge \vec{r}_j^{\,\prime}$$

da cui:

$$\frac{1}{2} \sum_j m_j \vec{v}_j^{\,\prime\,2} = \frac{1}{2} \sum_j m_j R_j^{\prime} \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - g \cdot \sum_j m_j \vec{r}_j$$

$$\boxed{E = \frac{M}{2} V_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 - M g R_{cm}}$$