NUMERO: 2277A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Guerci Lorenzo

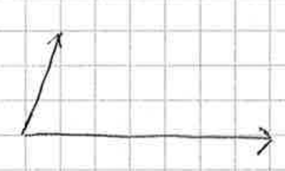
MATERIA: Geometria + Esercizi - Prof. Malaspina - Quelali

~~ESERCITAZ. 1~~ FINO SPIEGAZ. TEORIA ~~07/03/17~~

PRODOTTO SCALARE

$$V_2 \times V_2 \to \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto v \cdot w = \|v\| \cdot \|w\| \cos \widehat{vw}$$



$$\widehat{vw} \in [0, \pi]$$

$$v \cdot w > 0 \iff \widehat{vw} > 0 \iff \widehat{vw} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$v \cdot w < 0 \iff \cos \widehat{vw} < 0 \iff \widehat{vw} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$v \cdot w = 0 \iff v \perp w \iff \widehat{vw} = \frac{\pi}{2}$$

OSS. $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$, $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$

Se $v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j}$, $w = w_x \hat{i} + w_y \hat{j}$

$$v w = v_x \cdot w_x + v_y w_y$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 268

Dobbiamo ora imporre modulo pari a 5

$\|-\lambda i - 2\lambda j\| = \sqrt{(-\lambda)^2 + (-2\lambda)^2} = 5 \iff$

$\sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2} = 5$, $\sqrt{5}\lambda = 5 \iff \lambda = \pm\sqrt{5}$

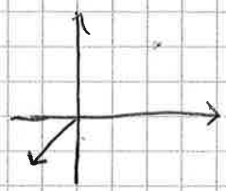
I vettori cercati sono: $-\sqrt{5} i - 2\sqrt{5} j$

$\sqrt{5} i + 2\sqrt{5} j$

b) DATO $u \in V_2$ il versore associato è $\frac{u}{\|u\|}$

$\|u\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i - j) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j}$



$\|v\| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2i + j) = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}$

Es.3

Dati $v = i + tj$ e $w = 2i - 3j$, si trovino $t \in \mathbb{R}$ tale che

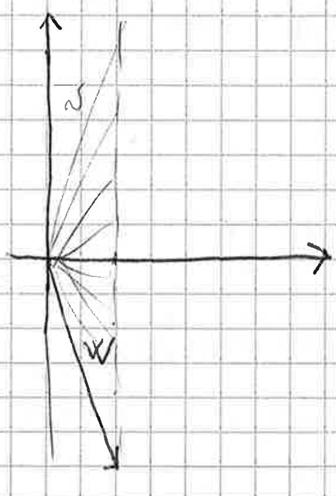
a) $v \perp w$ b) $v // w$

a) Il prodotto scalare deve essere pari a 0

~~perché $\cos \hat{vw}$ deve essere 0~~

$v \perp w \iff v \cdot w = 0$

$(i + tj) \cdot (2i - 3j) = 2 - 3t = 0 \iff t = \frac{2}{3}$



Es. 5 IMPORTANTE

Dati $u = 2i + j$, $v = i + 3j$ si trovi il vettore $w = 3i - j$ a partire da u e v usando SOMMA e ~~prodotto~~ PRODOTTO per $a \in \mathbb{R}$

[Dati 2 vettori non paralleli è possibile ricavare con SOMMA e prodotto qualsiasi punto del piano]

SOLUZ.: considero i vettori della forma au, bv con $a, b \in \mathbb{R}$ e tutte le loro somme

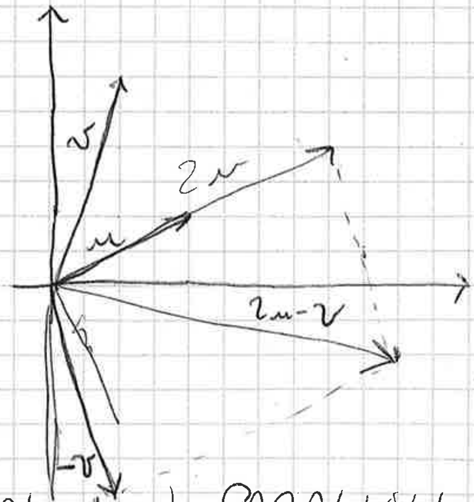
~~Le loro somme~~ $au + bv = w$ (IMPONGO $au + bv = w$)

$$a(2i + j) + b(i + 3j) = 3i - j$$

$$\begin{cases} i(2a + b) = (3)i \\ j(a + 3b) = -1j \end{cases} \quad \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a + 3b = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 3 - 2a \\ a + 9 - 6a = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} b = 3 - 4 \\ -5a = -10 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$w = 2u - v$$



PRENDENDO 2 VETTORI NON PARALLELI NELLO SPAZIO, E OPERIAMO CON SOMMA E PRODOTTO, troviamo ogni PUNTO DEL PIANO

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 268

Es. 1 8\03\17

$\vec{u} = (3,7,4)$ $\vec{v} = (2,5,-4)$ $\vec{w} = (0,4,3)$

RIP: $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$
questa somma è detta COMBINAZIONE LINEARE (c.l.)

$\vec{u} - \vec{v} + \vec{w} = ?$

$(3,7,4) - (2,5,-4) + (0,4,3) =$

SI CONFRONTA UN ELEMENTO ALLA VOLTA

$= (1,6,11)$

$2\vec{u} = ?$ $2\vec{u} = 2(3,7,4) = (6,14,8)$

$3\vec{v} = ?$ $3\vec{v} = 3(2,5,-4) = (6,15,-12)$

$2\vec{u} + 3\vec{v} = ?$ $2\vec{u} + 3\vec{v} = (6,14,8) + (6,15,-12) = (12,29,-4)$

RIP:

$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = ?$ $\vec{u} + \vec{v} = (3,7,4) + (2,5,-4) = (5,12,0)$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{5^2 + 12^2 + 0^2} = \sqrt{5 + 144} = \sqrt{169} = 13$

Non possiamo ottenere il vettore $\vec{w}$ a partire dai vettori $\vec{u}+\vec{v}$ poiché SONO PARALLELI

Es.4 $\vec{u}=\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, scrivi i vettori di modulo 3 paralleli ad $\vec{u}$ ed un versore parallelo ad $\vec{u}$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

$\vec{v} \parallel \vec{u} \Rightarrow \vec{v}=\lambda\vec{u}, \quad \lambda\in\mathbb{R}$

$\vec{v}=\lambda(1,1,-2) \Rightarrow \vec{v}=(\lambda,\lambda,-2\lambda)$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{\lambda^2+\lambda^2+4\lambda^2}=|\lambda|\sqrt{6}$

$\|\vec{v}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{u}\|=|\lambda|\sqrt{6}$

$3=|\lambda|\sqrt{6} \qquad |\lambda|=\pm\frac{3}{\sqrt{6}}$

$\vec{v}=3/\sqrt{6}\,(1,1,-2) \qquad \vec{w}=-\frac{3}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

VERSORE PARALLELO AD $\vec{u}$: $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

Def: PRODOTTO SCALARE

$\vec{u}=(u_1,u_2,u_3) \quad \vec{v}=(v_1,v_2,v_3) \quad \vec{u}\cdot\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3$

il risultato è un numero reale (UNO SCALARE)

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\widehat{uv})$

se $\widehat{uv}=\frac{\pi}{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff$ VETTORI PERPENDICOLARI $\vec{u}\perp\vec{v}$

Es.5 $\vec{u}=(3,7,4) \quad \vec{v}=(2,5,-4) \quad \vec{w}=(0,4,5)$

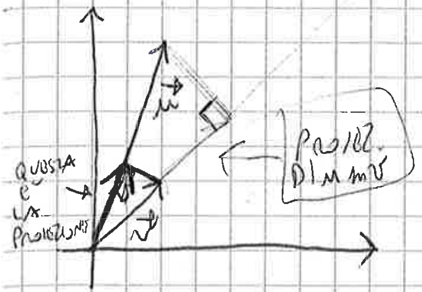
$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,7,4)\cdot(2,5,-4)=6+35-16=25$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=(3,7,4)\cdot(3,7,4)=3^2+7^2+4^2=\|\vec{u}\|^2$

$\vec{u}\cdot\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$

Es. 6 Calcolare la proiezione ortogonale di $\vec{v} = (1,1)$ su $\vec{u}(1,3)$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ $\qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

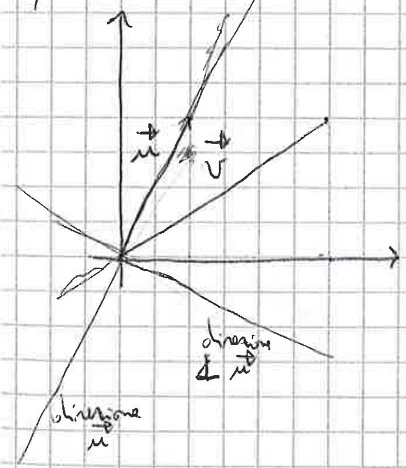


$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|u\|^2}(1,3) = \frac{(1,1)(1,3)}{10}(1,3) = \frac{1+3}{10}(1,3) = \frac{2}{5}(1,3)$$

PROIEZIONE DI $\vec{u}$ LUNGO LA DIREZ INDIV. DA $\vec{v}$:

$$P_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|v\|^2}(1,1) = \frac{4}{2}(1,1) = (2,2)$$

~~Determ~~ Es. 7 Determinare la decomposizione di $\vec{v} = (3,2)$ come somma di un vettore parallelo a $\vec{u} = (1,2)$ ed uno perpendicolare a $\vec{u}$



$$\vec{v} = P_{\vec{v}}(\vec{u}) + P_{\vec{v}}(\vec{u}_\perp)$$

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{(3,2)(1,2)}{1+4}(1,2) = \frac{3+4}{5}(1,2) = \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right)$$

$$P_{\vec{v}}(\vec{u}_\perp) = \vec{v} - P_{\vec{v}}(\vec{u}) = (3,2) - \left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right) = \left(3-\frac{7}{5}, 2-\frac{14}{5}\right) =$$

$$= \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) = \frac{4}{5}(2,-1)$$

MODO 2

$$\lambda(1,2) + \beta\left(1, -\frac{1}{2}\right) = (3,2)$$

$$\begin{cases}\lambda+\beta = 3 \\ 2\lambda - \frac{1}{2}\beta = 2\end{cases} \quad \begin{cases}\beta = 3-\lambda \\ 2\lambda + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2} = 2\end{cases} \quad \begin{cases}\beta = 3-\lambda \\ 5\lambda = 7\end{cases} \quad \begin{cases}\beta = \frac{8}{5} \\ \lambda = \frac{7}{5}\end{cases}$$

$$\left(\frac{7}{5}, \frac{14}{5}\right) + \left(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5}\right) = (3,2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$ MATRICE 2×2

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

ES.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$ QUANDO LE RIGHE SONO UGUALI IL DETERMINANTE È SEMPRE NULLO

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 24 - 24 = 0$$ LO STESSO VALE QUANDO UNA RIGA È MULTIPLO DELL'ALTRA

MATRICE 3×3 - SI POSSONO CALCOLARE I DETERMINANTI SOLO DI RANGO QUADRATO (2×2, 3×3, 4×4, 5×5, ...)

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{+} & a_{12}^{-} & a_{13}^{+} \\ a_{21}^{-} & a_{22}^{+} & a_{23}^{-} \\ a_{31}^{+} & a_{32}^{-} & a_{33}^{+} \end{vmatrix} =$$

CALCOLIAMO IL DET. RISPETTO ALLA PRIMA RIGA

QUESTA DIAGONALE È SEMPRE POSITIVA

IMMAGINIAMO DI CANCELLARE LA RIGA E LA COLONNA CORRISP. AL TERMINE CONSIDERATO

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ES.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \cancel{45-48}-2$$

$$= 45 - 48 - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 + 9 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 15 di 268

$$u \cdot v = \frac{37-a^2}{4}$$

$$\cos\widehat{uv} = \frac{37-a^2}{12} \qquad -1 \le \cos\widehat{uv} \le 1 \iff -1 \le \frac{37-a^2}{12} \le 1$$

$$-12 \le 37-a^2 \le 12$$

$$\begin{cases} -12 \le 37-a^2 \\ 37-a^2 \le 12 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 \le 49 \\ a^2 \ge 25 \end{cases} \quad \begin{cases} -7 \le a \le 7 \\ a \le -5 \vee a \ge 5 \end{cases} \Rightarrow \boxed{-7 \le a \le -5 \ \vee \ 5 \le a \le 7}$$

Es3

Calcolare $\|u \wedge v\|$ sapendo che $\|u\| = 1$, $\|v\| = 2$ e $u \cdot v = 1$

$$u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\widehat{uv} \qquad \cos\widehat{uv} = \frac{1}{2}$$

$$\widehat{uv} = \pm\frac{\pi}{3} \qquad \sin\widehat{uv} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

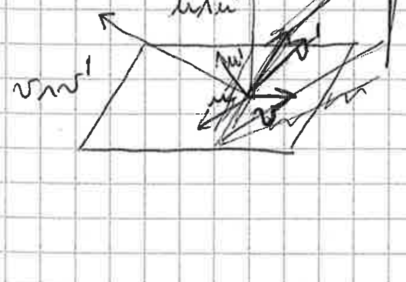
SI SCEGLIE SEMPRE L'ANGOLO TRA 0 e π

$$\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \sin\widehat{uv} = 1 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \sqrt{3}$$

Es4

Trovare i vettori complanari sia ~~alla coppia~~ con la coppia formata dai vettori $u = i - j$, $u' = i + k$, che alla coppia $v = i + j + k$, $v' = i - k$.

SOLUZ 1: FACCIO 2 PRODOTTI MISTI, IN MODO DA AVERE 2 EQUAZIONI IN 3 INCOGNITE



$$(u \wedge u') \wedge (v \wedge v')$$

$u \wedge u'$ è $\perp$ al piano α di u', u

$v \wedge v'$ è $\perp$ al piano β di v, v'

$(u \wedge u') \wedge (v \wedge v')$ è $\perp$ sia a $u \wedge u'$ (quindi è su α) che a $v \wedge v'$ (quindi è su β)

Quindi $w = 2du - 3du' = -2dv + dv'$

$w = 2d(i - j) - 3d(i + k) = -di - 2dj - 3dk$

Es. 5 Trovare la proiezione ortogonale ~~de~~ $\perp$ di $v = i + j - 2k$ su un piano di $u_1 = i - k$ e $u_2 = i + 2j - k$

SOL) Uso la formula v_π (proiezione di v su π) $= v - \frac{v \cdot u_1 \wedge u_2}{\|u_1 \wedge u_2\|^2} \cdot u_1 \wedge u_2 =$

$$u_1 \wedge u_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +2i - \cancel{0j} + 2k$$

$\|u_1 \wedge u_2\|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ $\quad v \cdot u_1 \wedge u_2 = (i + j - 2k) \cdot (2i + 2k) =$

$= 2 - 4 = -2$

$$v_\pi = i + j - 2k - \frac{-2}{8}(2i + 2k) =$$

$$= i + j - 2k + \frac{1}{4}(2i + 2k) = i + j - 2k + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}k = \frac{3}{2}i + j - \frac{3}{2}k$$

ES 2 Calcolare la distanza delle rette $r_1: x-3y-1=0$
$r_2: 2x-6y+7=0$

$$r_1: \begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{3}t-\frac{1}{3} \end{cases}$$

SOL $r_1 \perp (1,-3)$ $r_2 \perp (2,-6)$ $\Rightarrow (1,-3) \parallel (2,-6)$

$\Downarrow$

$r_1 \parallel r_2$

Prendiamo un punto su r_1: se $x=4$, $y=1 \Rightarrow P(4,1) \in r_1$

Calcolo la distanza tra P ed r_2

$$d(P,r_2)=\frac{|2\cdot 4-6\cdot 1+7|}{\sqrt{40}}=\frac{9}{\sqrt{40}}=\frac{9}{2\sqrt{10}}=\frac{9\sqrt{10}}{20}$$

Es 3 In $\mathbb{R}^3$, date le rette ~~r = {x+y~~ $r: \begin{cases} x+y-2=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$

$$s: \begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x-2z-2=0 \end{cases}$$

Date queste due rette trovare le equazioni di tutti i piani che siano paralleli sia ad r che ad s.
Esiste un piano che contenga sia r che s?

SOL Voglio scrivere r in forma parametrica

$$\begin{cases} x=2-y \\ 2-y-y-2z=0 \end{cases} \qquad \boxed{z=1-y}$$

Le soluzioni (i punti di r) sono del tipo (x,y,z) con $x=2-y$, $z=1-y$ ovvero $(2-y,\ y,\ 1-y)=(2,0,1)+y(-1,1,-1)$

$$\begin{cases} x=2-t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases} \qquad r \parallel v=(-1,1,-1)$$

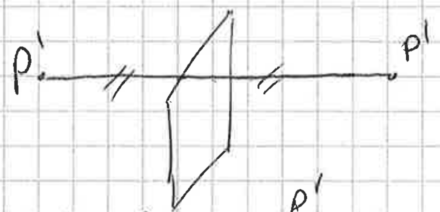
Es 4 Dato il piano $\pi: x+2y+2z-1=0$, nella simmetria ortogonale rispetto a π si trovino

a) Il simmetrico del punto $P=(1,2,3)$

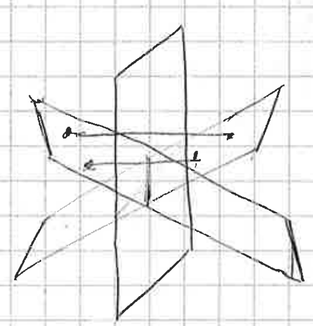
b) ~~Il~~ La retta simmetrica di $r=\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1 \end{cases}$

c) Il piano simmetrico di $\alpha: x-y+1=0$

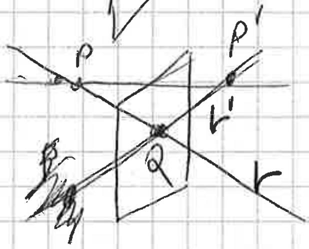
a)



c)



b)



Svolgo (a): scrivo la retta per P ed è $\perp \pi$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2+2t \\ z=3+2t \end{cases}$$

un punto su r è della forma $P(t)=(1+t, 2+2t, 3+2t)$

$$d(P,\pi)=\frac{|1+2\cdot 2+2\cdot 3-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\frac{10}{3}$$

Impongo $d(P(t),\pi)=\frac{10}{3} \iff$

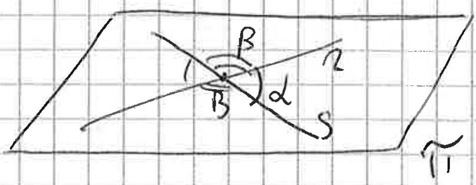
$$\iff \frac{|1+t+2(2+2t)+2(3+2t)-1|}{\cancel{3}}=\frac{10}{\cancel{3}}$$

$\cancel{10+9t=10 \Rightarrow t=0}$ $|10+9t|=10$

$10+9t=10 \Rightarrow t=0$

$10+9t=-10 \Rightarrow \boxed{t=-\frac{20}{9}}$ Il PUNTO CERCATO è $P\left(-\frac{20}{9}\right)=\left(1-\frac{20}{9}, 2-\frac{40}{9}, 3-\frac{40}{9}\right)$

$$r: \begin{cases} x - y = 1 \\ \boxed{x + y + z = 3} \end{cases}$$



$\pi: x + y + z - 3 = 0$

2) Determinare l'angolo tra le rette r ed s (NOTA: In genere si considera l'angolo più piccolo).

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = \|\vec{v}_r\| \cdot \|\vec{v}_s\| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{v}_r = (-1, -1, 2) \qquad \vec{v}_s = (-2, 1, 1)$$

$$\|\vec{v}_r\| = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}_s\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = (-1, -1, 2) \cdot (-2, 1, 1) = 2 - 1 + 2 = 3$$

$$3 = \sqrt{6} \cdot \sqrt{6} \cos\alpha \qquad \cos\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \qquad \left[\beta = \frac{5}{3}\pi\right]$$

3) Calcolare l'equazione del piano π per i punti A, B, C

$\pi: x + y + z - 3 = 0$

Se facciamo il prod vettoriale fra $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$ troviamo un vettore ⊥ al piano.

$$\vec{v}_r \wedge \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\hat{i} \cancel{+3\hat{j}} - 3\hat{k}$$

$$-3\hat{j}$$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} = \|\vec{v_r}\| \|\vec{v_s}\| \cdot \cos\alpha$

$\vec{v_r} \cdot \vec{v_s} =$

Troviamo l'intersezione di $r \wedge s$ MODO 1

$$\begin{cases} 2t + t - 1 - 4 = 0 \\ t + t - 1 - 2t - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3t = 5 \\ -7 = 0 \end{cases} \quad \nexists \text{ intersezione}$$

$r \wedge s = \emptyset$ Le due rette sono sghembe

MODO 2

$r \wedge s$

$$\begin{cases} t = \tau \\ t - 1 = -2\tau + 4 \\ 2t = -\tau - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \tau \\ t = -2\tau + 5 \\ t = -\frac{\tau}{2} - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{3}\tau = 5/\cancel{3} \\ \frac{3}{2}\tau = -1 \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$$

IMPOSSIBILE

Es 3 Date le rette $r: \boxed{\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}}$ $s: \begin{cases} x = t \\ y = t - 1 \\ z = 1 \end{cases}$

$\cancel{t + y + z = 0}$ $\begin{cases} t + t - \cancel{1} + \cancel{1} = 0 \\ t + t - 1 - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2t = 0 \\ \cancel{2}t = \cancel{2}1 \end{cases}$ => LE RETTE NON SI INCONTRANO

⇓

SONO PA// O SGHEMBE?

$\boxed{\vec{v_r} \,//\, \vec{n_1} \wedge \vec{n_2}}$

$$\vec{n_1} \wedge \vec{n_2} \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{i} + \hat{j} + \cancel{0\hat{k}} = (-1, +1, 0)$$

Es. 4

Determinare la distanza tra la retta r passante per $P_0 = (2,3,1)$ e parallela a $\vec{u} = (1,2,-3)$ e la retta s passante per $P_1 = (4,2,0)$ e parallela al vettore $\vec{v} = (3,-1,-1)$

$$\vec{w} = \overrightarrow{P_0P_1} = (4,2,0) - (2,3,1) = (2,-1,-1)$$

$$\vec{w}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -10 + 8 + 7 = 5$$

$$\hat{u} \wedge \hat{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -5\hat{\imath} - 8\hat{\jmath} - 7\hat{k} = (-5,-8,-7)$$

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \sqrt{25+64+49} = \sqrt{138}$$

$$d(r,s) = \frac{\|\vec{w} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\|}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{138}}$$

Es 5 Dire se la retta $(x,y,z) = (1+t, 2, 4+t)$ e il piano $3x + 2y - z + 1 = 0$ hanno punti in comune

$$3 + 3t + \cancel{4} - \cancel{4} - t + 1 = 0 \iff 2t = -4 \Rightarrow t = -2$$

$$P(-1, 2, 2)$$

$$s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 - t \end{cases} \qquad \pi: x + y + z - 3 = 0$$

$$1 + 2t - t + 2 - t - 3 = 0 \qquad 0 = 0$$

$$\vec{w} \wedge \vec{v}_r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -5, 3)$$ trovare l'eq. del piano.

$$-2x - 5y + 3z + d = 0$$

$$P(-3, 0, -3)$$

$$6 + \cancel{0} - 9 + d = 0 \qquad d = 3$$

$$-2x - 5y + 3z + 3 = 0$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 268

$P' = S\left(-\frac{2}{9}\right) = \left(-\frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right)$

r' è la retta per Q, P'

$$r': \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)t \\ y = -\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right)t \\ z = 1 + \left(\frac{5}{9} - 1\right)t \end{cases}$$

c) Il piano α simmetrico di $\alpha: x - y + 1 = 0$

Il piano α' appartiene al fascio generato da π ed α e passa per P' simmetrico di $P = (1,2,3)$

EQ FASCIO: $\lambda\pi + \mu\alpha = \lambda(x + 2y + 2z - 1) + \mu(x - y + 1) =$

IMPONGO IL PASSAGGIO PER P'

$\lambda\left(-\frac{11}{9} - \frac{44}{9} - \frac{26}{9} - 1\right) + \mu\left(\cancel{x} - \frac{11}{9} + \frac{22}{9} + 1\right) = 0$

$-9\cancel{0}\lambda + 2\cancel{0}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{9}$

CONSIDERO $\mu = 9$ e $\cancel{\lambda}$ $\Rightarrow \lambda = 2$

$\alpha': 2(x + 2y + 2z - 1) + 9(x - y + 1) = 0$

$\boxed{\alpha': 11x - 5y + 4z + 7 = 0}$

$$\begin{cases} a+2c=1 \\ b+2d=0 \\ 2a+c=0 \\ 2b+d=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a=1-2c \\ b=-2d \\ 2-4c+c=0 \\ -4d+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{3} \\ b=\frac{2}{3} \\ c=\frac{2}{3} \\ d=-\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$X=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ES3: Data la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calcolare la matrice A^3-2A^2+A e trovare $B\in\mathbb{R}^{3,3}$ t.c. $AB=BA=0$

$$A\cdot A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+2 & 0 & 0+0+1 \\ 2+0+2 & 0 & 0+0+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A\cdot A^2\left(\overset{\text{NOTA}}{=}A^2\cdot A\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3-2A^2+A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 8 & 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B $AB=BA=0$ $\quad B \cancel{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} = A^3-2A^2+A=A(A^2-2A+I_3)=0$

$A^3-2A^2+A=(A^2-2A+I_3)A$ poiché $A^2A=A\cdot A^2$ e $IA=AI$

(b) $n - \rho(A) = 2 \qquad \rho(A) = 2$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{SOMMA } R_1+R_2 \\ \\ \text{RICOPIO } R_2 \end{array} \qquad \rho(A|B) = 2$$

$$\begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 3y + z + 2t = 1 \\ x + 4y + 2z + 3t = 3 \\ 3y + z + 2t = 1 \\ 3y + z + 2t = 1 \end{cases}$$

POSSIAMO RIASSUMERE IN UN'EQUAZ. DIPENDENTE DA 2 VARIABILI => ∞^2 SOLUZ.

(c) $n = \rho(A) \qquad \rho(A) = 4 = \rho(A|B)$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x + y + z + t = 2 \\ 2y + z + t = 1 \\ z + 2t = 3 \\ t = 1 \\ \cancel{t = 1} \end{cases}$$

IPERPIANI CHE SI INTERSECANO IN 1 PUNTO, INFATTI:

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

(d) $n - \rho(A) = 4 \qquad \rho(A) = 0 \qquad \rho(A) = \rho(A|B) = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(e) IMPOSSIBILE: Per avere ∞^5 soluzioni ci vuole $n - \rho(A) = 5$ $\iff \rho(A) = -1$ IMPOS.: IL RANGO È SEMPRE ≥ 0

Es 2 Risolvere il sistema $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y + z + t = 1 \\ 3x + y + 3z - t = 1 \end{cases}$

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \rho(A) = 2 \neq \rho(A|B) \qquad \nexists \text{ SOLUZIONI}$$

Es5: Data $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ trovare $X \neq 0$ t.c. $AX = 0$

OSS: $\exists X \neq 0 \iff \rho(A) < 3 \iff \det(A) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (1+1) = 0$$

Risolvo $AX = 0$ sia $X = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + 2R_3 = (0,0,0) \\ R_2 + R_3 = (0,0,0) \Rightarrow R_3 = -R_2 \\ -R_1 + R_2 = (0,0,0) \Rightarrow R_1 = R_2 \end{cases}$$

$\cancel{R_2 + R_2 - 2R_2} = (0,0,0) \Rightarrow 0 = 0$

se $R_2 = (a,b,c)$ $\quad X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ -a & -b & -c \end{pmatrix}$

PROVA: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ok ✓

$\rightarrow \begin{pmatrix} h & i & 2 \\ 2 & 2i & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} hx + iy + 2z \\ 2x + 2iy + 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} hx + iy + 2z \\ 2x - 2hx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i - 2 \end{pmatrix}$

$\cancel{2(x-h}$ $\quad x = \dfrac{i-2}{2-2h} \quad x \neq 1$

$\begin{pmatrix} \dfrac{hi-2h}{2-2h} + iy + 2z \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{i-2}{2-2h} \end{pmatrix}$ se $x \neq 1$ ∞^1 soluz.

ES2

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \\ 9x - 3y = -3 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 6 & -2 & 2 \\ 9 & -3 & -3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 1 \quad \rho(A|B) = 2 \quad \rho(A) \neq \rho(A|B) \Rightarrow \nexists$ SOLUZIONI

IL SIST. NON AMMETTE SOLUZ.
IL SIST. E' INCOMPATIBILE

ES3

$$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ 2x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - 3R_1 \\ R_3 \to R_3 - 2R_1 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 - R_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rho(A) = 2 \quad \rho(A|B) = 2$$

$n = 3 \Rightarrow \infty^1$ SOLUZ.

$R_1 \to 4R_1 + R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} 4x + 3z = 0 \\ 4y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{3}{4} z \\ y = \frac{5}{4} z \end{cases}$$

LE SOLUZ. DIPENDONO DA 1 PARAMETRO

1 opzione $\rightarrow \begin{cases} z = 4t \\ x = -3t \\ y = 5t \end{cases}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 41 di 268

Es 6:

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ -x+y=0 \\ x+ky+z=1 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & k+1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

CONVIENE, GENERALMENTE, NON LAVORARE SU K =>

SCEGLIAMO DI LAVORARE SU 2

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k+3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Se $k+3=0 \Rightarrow k=-3$ $\quad \rho(A)=2 \quad \rho(A|B)=3 \quad \nexists$ SOLUZ.
- Se $k \neq -3 \Rightarrow \rho(A) = \cancel{\rho(B)} \; \rho(A|B)=3 \Rightarrow$ Il sist ammette $\infty^{3-3} = \infty^0$ SOLUZIONI

RISOLVERE IL SISTEMA per $\boxed{k=2}$: SCELTO DA ME!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} -z = \frac{1}{5} \Rightarrow z = -\frac{1}{5} \\ x = \frac{2}{5} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Se $K=2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right)$$

~~per~~ $\rho(A)=2 \neq \rho(A|B)=3$ $\nexists$ SOL. per $K=2$

Se $K\neq 2 \wedge K\neq 3$

$\rho(A)=\rho(A|B)=3 \Rightarrow \infty^0$ SOL.

per $\triangle$ RISOLVERE IL SISTEMA PER $K=5$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & -11 & -3 \end{array}\right) \quad \begin{cases} x=\frac{35}{3} \\ z=-1 \\ y=-\frac{14}{3} \end{cases}$$

?

Se $K=-\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+\frac{6}{5}+\frac{1}{2}=2 \\ z=-1 \\ y=\frac{6}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{20-12-5}{10}=\frac{3}{10} \\ z=-1 \\ y=\frac{6}{5} \end{cases}$$

Es 9

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 1 \end{array}\right) \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1 \to R_1 + 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rho(A) = \rho(A|B) = 2 \Rightarrow \infty^{4-2} = \infty^2 \text{ SOLUZIONI}$$

$$\begin{cases} 5x + 7z + 2t = 1 \\ 2x - y + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2t = -5x - 7z + 1 \\ y = 2x + 2z \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\frac{5}{2}x - \frac{7}{2}z + \frac{1}{2} \\ y = 2x + 2z \end{cases}$$

Es 13

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad 3\times 4$$

NON POSSO CALCOLARE IL DET.

Es 14

$$\det(A)=\begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -k \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-R_1} \begin{vmatrix} k & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -k \\ 2-k & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=(2-k)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -k \end{vmatrix} = (2-k)(-k+2) = (k-2)^2$$

Se $k-2\neq 0$, ossia $k\neq 2 \Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow \rho(A)=3$

Se $k=2$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det(A)=0 \quad \rho(A)=1$$

$$\cancel{\det(A)} \Rightarrow \det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & k & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-R_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & k-4 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ k-4 & 2 \end{vmatrix} = -6-k+4 = -k-2$$

$$\det(A) = -(k+2)$$

Se $k+2\neq 0$, $k\neq -2 \Rightarrow \det(A)\neq 0 \Rightarrow \rho(A)=3$

Se $k=-2$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \rho(A)=2$$

ES.5 11\04\17 (M)

Risolvere le seguenti equazioni matriciali

$AXA^{-1} = I$, $AXA^{-1} = A$

dove
$$A = \begin{pmatrix} \pi^2 & e^{\pi} & 2 \\ 0 & \pi+1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sol 1) $\det(A) = \pi^2(\pi+1)\cdot 1 \neq 0 \Rightarrow \exists\, A^{-1}$

$AXA^{-1} = I \iff AX\underbrace{\cancel{A^{-1}A}}_{=I} = IA$

$\iff AX = A \iff A^{-1}AX = A^{-1}A \iff X = I$

sol 2) $AXA^{-1} = A \iff AXA^{-1}A = A^2 \iff AX = A^2 \iff X = A$

ES.6 Risolvere il sistema lineare seguente:

$$\begin{cases} x + iy = 2 \\ ix + 3y = -i \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 3 + 1 = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists!$ soluzione (se det $\neq 0$ allora il rg è 2 $\Rightarrow \exists!$ soluz.)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{vmatrix}}{4} = \frac{6-1}{4} = 5/4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ i & -i \end{vmatrix}}{4} = \frac{-i-2i}{4} = -\frac{3i}{4}$$

OSS: I S.S.V di V_3 sono $\{0\}$, V_3, le rette per l'origine e i piani per l'origine

ES2 In $\mathbb{R}^3$ quali dei seguenti W sono S.S.V?

a) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ = W$ è 1/8 dello spazio, costituito da 3 componenti positive

b) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = W$

c) $W = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\}$

d) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{1\} = W$

e) $W = \{(t, 2t, -3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

f) $W = \{(u, u+v, u-2v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

g) $W = \{(u, u^2, u+v) \mid u, v \in \mathbb{R}\}$

h) $W = \{(t, 2t+1, t^3-t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

a) NON è S.S.V, infatti $-2(1,2,3) = (-2,-4,-6) \notin W$

b) La ① vale, però se moltiplico per $\lambda = \frac{1}{2}$ ~~[illegible]~~ andiamo all'esterno di W: $\frac{1}{2}(1,2,3) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}) \notin W$

c) È il piano Oxy, ~~[illegible]~~ ed è, quindi, S.S.V

d) Non passa per l'origine => NON è S.S.V, NON RISPETTA ①, ② e ③

e) W descrive la retta:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases}$$

Usiamo il criterio: ① $x, y \in W \Rightarrow x = (t_1, 2t_1, -3t_1)$

$y = (t_2, 2t_2, -3t_2)$

$x + y = (t_1 + t_2, 2(t_1+t_2), -3(t_1+t_2)) \in W$

②: Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (t_1, 2t_1, -3t_1) \in W$

$\lambda x = (\underbrace{\lambda t_1}_{t}, \underbrace{2\lambda t_1}_{t}, \underbrace{-3\lambda t_1}_{t}) \in W$

26\04\17

$V = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$

$f, g, h \in V$

$$\left.\begin{aligned} (f+g)+h &= f+(g+h) \\ f+g &= g+f \\ f+0 &= 0+f = f \\ f-f &= 0 \end{aligned}\right\} \text{PRIME 4 PROPRIETÀ}$$

$a, b \in \mathbb{R}$

$(ab)f = a(bf)$

$1 \cdot f = f$

$(a+b)f = af + bf$

$a(f+g) = af + ag$

L'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che $f(2) = 0 \vee f(5) = 0$

$U \subset V$

$0 \in U \qquad f, g \in U \qquad f+g \in U$

$\lambda \in \mathbb{R}, \ f \in U \Rightarrow \lambda f \in U$

PRENDIAMO AD ESEMPIO $\quad f(2) = 0 \quad f(5) = 1 \quad$ SI ANNULLANO IN 2

$\qquad g(2) = -1 \quad g(5) = 0 \quad$ O IN 5

$f, g \in U$

$f(2) + g(2) = 0 - 1 = -1 \neq 0$

$f(5) + g(5) = 1 + 0 = 1 \neq 0$

QUINDI U NON È SSV, MA È SOLO UN SOTTOINSIEME

$\mathbb{R}^{n,m}$ = L'INSIEME DELLE MATRICI $n \times m$ ~~e~~ S.V., con elementi in $\mathbb{R}$ è S.V.

$U = \{ M \in \mathbb{R}^{n,n} \mid \det M \neq 0 \}$ L'INS. DELLE MATRICI QUADRATA CON DETERM. $\neq 0$

$0 \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\det 0 = 0 \Rightarrow 0 \notin U \Rightarrow U$ NON È UN S.S.V.

$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}_3 \mid x - y + z + 1 = 0 \ , \ x = 0 \}$

$(0,0,0) \in V$? $\begin{cases} 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ NON VERO $\Rightarrow 0 \notin V \Rightarrow V$ NON È UN SSV.

UNA RETTA, UN PIANO È UN S.S.V SOLO SE PASSA PER L'ORIGINE

BASI

Verificare che $\vec{u} = \hat{\imath} - \hat{k}$, $\vec{v} = \hat{\imath} + \hat{\jmath}$, $\vec{w} = \hat{\imath}$

SONO UNA BASE PER I VETTORI APPLICATI IN O.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ SONO LINEARM. INDIPENDENTI se LA COMBINAZ. LINEARE:

$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = 0 \iff a = b = c = 0$

$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c = 0 \\ b = 0 \\ -a = 0 \end{cases}$ EQUIVALE A

$$A|B: \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ u & v & w \end{array} \end{array}$$

$\rho(A) = 3 = \rho(A|B) \Rightarrow \infty^{3-3} = \infty^0$ SOLUZ. $\Rightarrow$ 1 SOLA SOLUZ.

(a, b e c SONO LE INCOGNITE)

Poiché il sistema è omogeneo, allora l'unica soluzione è $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$ $\Rightarrow$ I 3 VETTORI SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI, ESSI FORMANO QUINDI LA BASE: $B = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$U = \mathcal{L}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$

$a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_4 = 0$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\rho(A) = 3 = \rho(Ab) \Rightarrow \infty^{3-3} = 1$ SOL. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ DATO CHE IL SIST È OMOGENEO $a=0,\ b=0,\ c=0$ È L'UNICA SOLUZIONE

$\Rightarrow$ I 3 VETTORI SONO LINEAR. IND.

POTEVAMO METTERE I 4 VETTORI IN UN UNICA MATRICE, A QUEL PUNTO: il rango di A è uguale al numero di vettori linearmente indipendenti. Però, in questo modo, non sappiamo QUALI SONO i vettori. Se ci teneva la base, di conseguenza, quest'ULTIMO metodo non va bene.

$B_U = (\hat{u}_1, \hat{u}_3, \hat{u}_4) \qquad \dim U = 3$

Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (1, -1, -8+2\alpha, 1+\alpha) \qquad \vec{v} \in U$

$\alpha u_1 + \beta u_3 + \gamma u_4 = \vec{v}$

$$\begin{array}{c} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -8+2\alpha \\ 1 & 0 & 0 & 1+\alpha \end{array}\right) \end{array} \quad \begin{array}{l} R_1 \to R_1 - R_4 \\ R_2 \to R_2 + R_4 \end{array}$$

$P_1(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$P_2(x) = 1 \cdot 1 - 1x + 2x^2$

$P_3(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1x^2$

METTIAMO I 3 VETT. IN COLONNA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad R_1 \to R_1 - R_2 \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$P(A) = 2 = P(A|B) \Rightarrow$ 2 VETT. LIN. INDIP.

$P_1(x) + P_2(x) = 2 + 2x^2 = 2P_3(x)$ ($P_3(x)$ è LIN. DIP. DA $P_1(x)$ e $P_2(x)$)

$\Rightarrow P_1$ e P_2 sono vett linearmente ~~dip~~ indip.

~~DATI~~ DATI I POLINOMI

$P_1(x) = x \quad P_2(x) = 1 - x + 2x^2, \quad P_3(x) = 1 + 2x^2$

TROVA I VETT. LINEARM. INDIP.

$P_1(x) = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$P_2(x) = 1 \cdot 1 - 1 \cdot x + 2 \cdot x^2$

$P_3(x) = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

I ~~VETT.~~ P_1 e P_3 SONO LI.

MESSI IN COLONNA:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad P_1 \text{ e } P_2 \text{ LI}$$

Es 3 2\05\17

(11)

In $\mathbb{R}^3$ si considerino

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$

$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y=0,\ x+z=0\}$

a) verificare che V, W, T sono SSV di $\mathbb{R}^3$
b) calcolare $V+W$ e dire se la somma è diretta
c) Calcolare $V+T$ e dire se è diretta

a) uso il criterio per V

1) Siano $(x_1,y_1,z_1), (x_2,y_2,z_2) \in V$

$(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \in V$

INFATTI $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)-(z_1+z_2) = \underbrace{(x_1+y_1-z_1)}_{=0}+\underbrace{(x_2+y_2-z_2)}_{=0}=0$

2) Se $\lambda \in \mathbb{R}$, $(x_1,y_1,z_1) \in V$

$\lambda(x_1,y_1,z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) \in V$

Infatti $\lambda x_1 + \lambda y_1 - \lambda z_1 = \lambda \underbrace{(x_1+y_1-z_1)}_{=0} = 0$

3) $0+0-0=0 \Rightarrow (0,0,0) \in V$

OSS Sia $AX=0$ SISTEMA LINEARE OMOGENEO con $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, l'insieme S delle soluzioni è S.S.V di $\mathbb{R}^n$

$S = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX=0\}$

Usiamo il criterio ① $X_1, X_2 \in S \Rightarrow A(X_1+X_2) = \underbrace{AX_1}_{=0}+\underbrace{AX_2}_{=0}$
$\Rightarrow X_1+X_2 \in S$

$V + W = \{ (x + x', y + y', x + y - x' - y') \mid x, y, x', y' \in \mathbb{R} \}$

Mi chiedo se $V + W = \mathbb{R}^3$

prendo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ e mi chiedo se $(a, b, c) \in V + W$

Devo risolvere il sistema 3×4

$$\begin{cases} x + x' = a \\ y + y' = b \\ x + y - x' - y' = c \end{cases}$$

Mi chiedo se esistono soluzioni $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Le incognite sono x, y, x', y'

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 1 & 1 & -1 & -1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & -2 & -1 & c-a \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & \boxed{-2} & -1 & c-a \\ 0 & 1 & 0 & 1 & b \end{array}\right)$$

È RIDOTTA, $\rho(A) = \rho(A|B) = 3$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Quindi il sistema è sempre risolubile $\Rightarrow (a, b, c) \in V + W \Rightarrow$
$\Rightarrow V + W = \mathbb{R}^3$

c) $V \cap T$ è lo spazio delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \Rightarrow y = -x \\ x + z = 0 \Rightarrow x = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 0 \\ y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

LA SOMMA È QUINDI DIRETTA

$\Rightarrow V \cap T = \{ 0_{\mathbb{R}^3} \}$

ES1 09\05\17

(M)

In $\mathbb{R}^4$ si considerino $v_1=(1,1,1,1)$, $v_2=(1,0,0,1)$, $v_3=(0,0,1,1)$, $v_4=(1,1,0,-1)$, $v_5=(0,1,0,0)$

a) Si trovi una base di $W=\mathcal{L}(v_1,\dots,v_5)$

b) Si provi che la somma $\mathcal{L}(v_1,v_2)+\mathcal{L}(v_3,v_4)$ è DIRETTA.

c) Si completi $\{v_1,v_2,v_3\}$ ad una base di $\mathbb{R}^4$

---

a) Costruisco la matrice $A=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_5 \end{pmatrix}$ e la riduco

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4 \to R_4+R_2]{R_3\to R_3-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5\to R_5+R_4]{R_4\to R_4+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}=\{(1,1,1,1),(1,0,0,1),(-1,-1,0,0),(0,-1,0,0)\}$

è una base di W

$\dim W = 4 \Rightarrow W=\mathbb{R}^4$

Inoltre v_1,v_2,v_3,v_4 SONO L.I.

b) v_1,v_2,v_3,v_4 LI $\Rightarrow \mathcal{L}(v_1+v_2)+\mathcal{L}(v_3,v_4)=\mathbb{R}^4$

Inoltre $\dim\mathcal{L}(v_1,v_2)=2$, $\dim\mathcal{L}(v_3,v_4)=2$

Uso Grassman:

$4=\dim(\mathcal{L}(v_1,v_2)+\mathcal{L}(v_3,v_4))=\underbrace{\dim(\mathcal{L}(v_1,v_2))}_{=2}+\underbrace{\dim(\mathcal{L}(v_3,v_4))}_{=2}+$
$-\underbrace{\dim(\mathcal{L}(v_1,v_2)\cap\mathcal{L}(v_3,v_4))}_{=0}$

$\mathcal{L}(v_1,v_2)\cap\mathcal{L}(v_3,v_4)=\{0\} \Rightarrow$ LA SOMMA $\mathcal{L}(v_1,v_2)+$
$+\mathcal{L}(v_3,v_4)$ È DIRETTA

ES.3

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, trovare una base di $S = \{ X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA \} \subseteq \mathbb{R}^2$

Sia $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \Rightarrow AX = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & y+t \\ 2x+2z & 2y+2t \end{pmatrix}$

$XA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y & x+2y \\ z+2t & z+2t \end{pmatrix}$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; \begin{array}{l} x+z = x+2y \\ y+t = x+2y \\ 2x+2z = z+2t \\ 2y+2t = z+2t \end{array} \right\}$$

Devo cercare $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ che siano soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} z - 2y = 0 \\ -x - y + t = 0 \\ 2x + z - 2t = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2y + z = 0 \Rightarrow z = 2y \\ -x - y + t = 0 \Rightarrow t = x + y \end{cases}$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; \begin{array}{l} z = 2y \\ t = x+y \end{array} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 2y & x+y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

Per trovare una base pongo $(x,y) = (1,0)$ e $(x,y) = (0,1)$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} z & -\frac{b}{a} t \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; z, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B} : \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 268

$U \cap V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z, \, y = -z\} =$

$= \{(z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$(z, -z, z) \in U \cap V$

$z(1, -1, 1)$

$B_{U \cap V} = ((1, -1, 1))$

$\dim(U \cap V) = 1$

$\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$

$\dim(U + V) = 2 + 2 - 1 = 3$

$U = \mathcal{L}((1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4))$

$V = \mathcal{L}((0, 1, 1, 1), (0, 0, 0, 1))$

$\vec{w} \in U \cap V$

$\vec{w} = a(1, 0, 1, 0) + b(1, 2, 3, 4)$ $-$

$\vec{w} = c(0, 1, 1, 1) + d(0, 0, 0, 1)$ $= 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad a, b, c, d$$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$R_4 \to R_4 - 2R_2$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - c = 0 \\ c - d = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} b = -a \\ \\ c = d \end{cases}$$

$\lambda f(x,y) = \lambda(x^2, y) = (\lambda x^2, \lambda y)$

$f(\lambda(x,y)) \neq \lambda(f(x,y)) \implies$ NON è AL

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad f(x,y) = (x-y, 1)$

$f(0,0) = (0,1)$ AL VETT. NULLO NON CORRISP. IL VETT. NULLO DELL'INSIEME DI ARRIVO

$\implies$ NON è AL

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad f(\vec{v}) = (\hat{\lambda} \cdot \vec{v}) \cdot \hat{\lambda}$

$f(\vec{0}) = (\hat{\lambda} \cdot \vec{0}) \hat{\lambda} = \vec{0}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$f(\hat{u} + \vec{v}) = (\hat{\lambda}(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \hat{\lambda}) =$

$= (\hat{\lambda}\vec{u} + \hat{\lambda}\vec{v}) \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}\vec{u})\hat{\lambda} + (\hat{\lambda}\vec{v})\hat{\lambda} = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$ 1 OK

$\lambda \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$f(\lambda\vec{v}) = (\hat{\lambda}(\lambda\vec{v}))\hat{\lambda} = \lambda(\hat{\lambda} \cdot \vec{v})\hat{\lambda} = \lambda(f\vec{v})$ 2 OK

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(1,1) = (1,2)$
$f(0,2) = (4,4)$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$ INSIEME DI PARTENZA

$(1,1) \in \mathbb{R}^2$, $(0,2) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) = a(1,1) + b(0,2)$

$(x,y) = (a, a+2b)$

$\begin{cases} x = a \\ y = a + 2b \end{cases}$ $\begin{cases} a = x \\ y = x + 2b \end{cases}$

$\begin{cases} a = x \\ b = \frac{y-x}{2} \end{cases}$

$(x,y) = x(1,1) + \frac{y-x}{2}(0,2)$

$f(x,y)$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\hat{u}, \hat{v} \in V$

$f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) =$

$f(\alpha\vec{u}) + f(\beta\vec{v})$

$= \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$

$f(x,y) = x f(1,1) + \frac{y-x}{2}(f(0,2))$

$f(x,y) = x(1,2) + \frac{y-x}{2}(4,4)$

$f(x,y) = (x + 2(y-x), 2x + 2(y-x))$

$$U = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=0,\ y-z+t=0\}$$

$$U \cap V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=0,\ y-z+t=0,\ y+z=0\}$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=z-t \\ y=-z \end{cases} \quad \begin{cases} x=0 \\ t=2z \\ y=-z \end{cases} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U \cap V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x=0,\ y=-z,\ t=2z\}$$

$$\Rightarrow U \cap V = \{(0,-z,z,2z) \mid z \in \mathbb{R}$$

$$(0,-z,z,2z) \in U \cap V$$

$$-z(0,1,-1,-2) \in U \cap V$$

$$B_{U\cap V} = ((0,1,-1,-2)) \qquad \dim(U \cap V) = 1$$

$$\dim(U+V) = \underset{2}{\dim(U)} + \dim(V) - \underset{1}{\dim(U \cap V)}$$

$$V = \{(x,y,-y,t) \mid x,y,t \in \mathbb{R}\}$$

$$(x,y,-y,t) \in V$$

$$x(1,0,0,0) + y(0,1,-1,0) + t(0,0,0,1)$$

$$\dim(U+V) = 2+3-1 = 4$$

U è contenuto in V?

QUIZ 6/06/17

Q1

Let $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$\rho(A) = 1$, $n = 3$ $\dim \operatorname{Ker} f = 2$

dove $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ t.c.

$A = M_f$ quindi $\dim V_0 = 2$

$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}\{(1,2,3)\}$ CONVIENE CALCOLARE IL PC.

$f^{-1}(1,2,3) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

IL P.C. $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 2-\lambda \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$

$(1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) - (-2\lambda) + 1(3\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - \lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda =$

$= \lambda^2(6-\lambda) = 0$ $\lambda_1 = 0$ $m_0 = 2$ $\lambda_2 = 6$ $m_1 = 1$

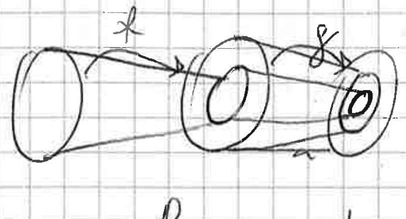
Quindi $\dim V_0 = 2 = m_0 \Rightarrow A$ è diagonalizzabile

Q2

$A, B \in \mathbb{R}^{2,2}$

A) Se $\rho(A) = \rho(B) = 2$, allora $\rho(AB) = 2$ VERO

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[B = M_f]{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow[A = M_g]{g} \mathbb{R}^2$



Si può avere immagine f, ciò si ha quando ~~Im f~~ Im f coincide con Ker g, o meglio è contenuta in Ker g, allora

$\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 268

Q6 CONSIDERA IL SOTTOSPAZIO VETT. $V \subseteq \mathbb{R}^4$: VF

$V = \mathcal{L}\{(1,0,1,0),(0,1,0,1),\underbrace{(1,2,1,2)}_{=\text{comb. lin. } \Rightarrow \text{L.D.}}\}$

$\dim(V) = 2$

Q7 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a) A è DIAGONALIZZABILE VERO
INFATTI È SIMMETRICA

NOTA: NON SI DEVE MAI RIDURRE PER VEDERE SE UNA MATRICE È DIAGONALIZZABILE

Q8 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = (1,2,3)\cdot(x,y,z)$

$M_f = (1 \ \ 2 \ \ 3)$ è LA MATRICE ASSOCIATA ALL'APPLICAZ. LINEARE

$\rho(M_f) = 1$

DA $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ NON PUÒ MAI ESSERE INIETTIVA
(SI VA DA UNO SPAZIO PIÙ GRANDE AD UNO PIÙ PICCOLO)

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = \underset{3}{n} - \rho(M_f) = 2$

DIM Ker $f = 2$ VERO

16\05\17

M

Es1 Sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ L.A.L data che

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

mediante le basi canoniche (ovvero t.c. $A = M_f$) trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ e una base di $\mathrm{Im} f$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+2z \\ 2x+y+3z \\ 3x+y+4z \end{pmatrix}$$

Per trovare una base di $\mathrm{Ker} f$ riduco A per righe e risolvo il sistema omogeneo.

Per trovare una base di $\mathrm{Im} f$ riduco A per colonne (~~NON~~ BISOGNA GUARDARE LA MATRICE DI PARTENZA, NON QUELLA GIA' RIDOTTA)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\rho(A) = 2$, $n = 3$ $\Rightarrow$ $\dim \mathrm{Ker} f = n - \rho(A) = 1$

$\dim \mathrm{Im} f = 2$

$\to$ RISOLVO IL SISTEMA LINEARE OMOGENEO

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -y - z = 0 \Rightarrow y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z = 0 \\ y = -z \end{cases} \qquad \begin{cases} \boxed{x = -z} \\ \boxed{y = -z} \end{cases}$$

$\mathrm{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z,\ y = -z\} = \{(-z,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f} = \{(-1, -1, 1)\}$

Riduco M_{f_m} per righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -m \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

$$\rho(M_{f_m}) = \begin{cases} 2 & \text{se } m \neq 0 \\ 1 & \text{se } m = 0 \end{cases}, \quad n = 3$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = \begin{cases} 2 & \text{se } m = 0 \\ 1 & \text{se } m \neq 0 \end{cases}$$

Es. 3 Data la matrice $A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ~~si consideri~~

si consideri $f_h \in End(\mathbb{R}^3)$ t.c. $M_{f_h} = A_h$. a) si trovi una base di $\operatorname{Ker} f$ e $\operatorname{Im} f_h$

b) Per quali $h \in \mathbb{R}$ $(2,2,2) \in \mathbb{R}^3$ ha ∞ controimmagini?

a) $\rho(A_h) < 3 \iff \det A_h = 0$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & h \\ 0 & h & 1 \\ h & 0 & 0 \end{vmatrix} = h \begin{vmatrix} 1 & h \\ h & 1 \end{vmatrix} = h(1 - h^2) = 0$$

$\iff h = 0 \lor h = +1 \lor h = -1$

Se $h \neq 0, 1, -1$ $\rho(A_h) = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3 \Rightarrow \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

e $\dim \operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(0,0,0)\}$

$\Rightarrow f$ è ISOMORFISMO

Studiamo A_0

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ è ridotta sia per righe che per colonne

$\mathrm{Ker} f = \{(0,-z,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_{\mathrm{Ker} f} = \{(0,-1,1)\}$

RIDUCO PER COLONNE

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}_{\mathrm{Im} f_1} = \{(0,0,1), (1,1,0)\}$

b) $(2,2,2) \in \mathbb{R}^3$ ammette ∞ controimmagini $\Longleftrightarrow A_h \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ammette infinite soluzioni ~~AMMETTE~~

Se $\rho(A_h) = 3$ $\exists!$ SOLUZIONE

Se $h = 0, 1, -1$ $\rho(A_h) = 2$ quindi posso avere ∞^1 soluzioni oppure nessuna soluzione.

Quindi se $(2,2,2) \in \mathrm{Im} f$ allora ammette ∞^1 controimmagini

$(2,2,2) \notin \mathrm{Im} f_0 = \mathcal{L}((1,0,0), (0,1,0))$

in quanto $\nexists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.c.

$(2,2,2) = a(1,0,0) + b(0,1,0)$

$(2,2,2) \notin \mathrm{Im} f_{-1} = \mathcal{L}((1,-1,0), (0,0,-1))$

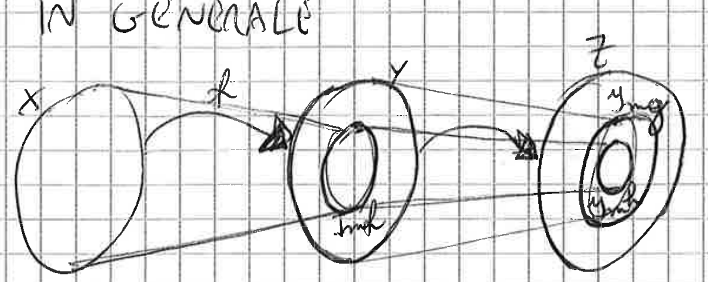
in quanto $\nexists\, a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $(2,2,2) = a(1,-1,0) + b(0,0,-1)$

$$\begin{cases} a = 2 \\ -a = 2 \\ -b = 2 \end{cases} \quad \#$$

$(2,2,2) \in \mathrm{Im} f_1 = \mathcal{L}((0,0,1), (1,1,0))$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 89 di 268

3) IN GENERALE



Si ha $\mathrm{Im}\,h \subseteq \mathrm{Im}\,g$

h suriettiva $\Rightarrow$ g suriettiva

Nel nostro caso $X \simeq \mathbb{R}^3$ $Y \simeq \mathbb{R}^2$ $Z = \mathbb{R}^2$

$\dim \mathrm{Im}\,g = \rho(M_g) \leq 2 \Rightarrow g$ non è suriettiva $\Rightarrow$

$\Rightarrow h$ non è suriettiva $\Rightarrow \rho(\underset{3\times 3}{M_h}) \leq 2 \Leftrightarrow \det(M_h) = 0$

Vado a vedere se $v = (2,1,0) \in \mathrm{Im}\,g$

$f^{-1}(2,1,0) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid g(s,t) = (2,1,0)\}$

$= \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid M_g \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

$(A|B) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \rho(A) = 2 \neq 3 = \rho(A|B) \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{-1}(2,1,0) = \emptyset \quad v = (2,1,0) \notin \mathrm{Im}\,\cancel{g}\,h$

$$A = M_f^{\mathcal{E}\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{f(x,y,z,t)} \quad f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Riduciamo A per righe

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \rho(A) = 2 \\ (n = 4) \end{matrix} \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} f = n - \rho(A) = 2$$

$$\begin{cases} 3x - z - 3t = 0 \Rightarrow z = 3x - 3t \\ 2x + y - 2t = 0 \Rightarrow y = -2x + 2t \end{cases}$$

$$\operatorname{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; \begin{matrix} z = 3x - 3t \\ y = -2x + 2t \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x & -2x+2t \\ 3x-3t & t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2} \;\middle|\; x, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathcal{B}_{\operatorname{Ker} f} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

2) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ se $\exists x, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -2x+2t \\ 3x-3t & t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x = 1 \\ -2x + 2t = 1 \Rightarrow 0 = 1 \quad \# \\ 3x - 3t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 268

Sia $E = \{(3,1,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$

$$M_f^{EC} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(3,1,0) & f(0,0,1) & f(0,1,0) \end{array} \end{array}$$

ES 1

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ 24/05/17

$f(x,y,z) = (x+y, x+z, y-z, y-z)$

$\mathcal{C} = ((1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

$\mathcal{C} = ((1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)) = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$

$f(\vec{e}_1) = f(1,0,0) = (1,1,0,0)$

$f(\vec{e}_2) = f(0,1,0) = (1,0,1,1)$

$f(\vec{e}_3) = f(0,0,1) = (0,1,-1,-1)$

$$M_f^{CC} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \end{array}$$

$f : V \to W$

$\dim(V) = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$

$\dim \operatorname{Im} f = \rho(M_f)$

$f : \mathbb{R}^n \to W$

$n = \dim \operatorname{Ker} f + \rho(M_f)$ $\dim \operatorname{Ker} f = n - \rho(M_f)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 95 di 268

$= \{(-y, y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$\mathcal{B}_{\ker f} = ((-1, 1, 1))$

RIEPILOGO

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

LO SPAZIO DI ARRIVO DA' IL NUM. DELLE RIGHE
QUELLO DI PARTENZA DA' IL NUM. DI COLONNE

$M_f^{GC} \in \mathbb{R}^{4,3}$

$f: V \to W$

$\mathcal{B}_V \quad \mathcal{B}_W$

SI POSSONO SCAMBIARE O MENO

$M_f^{\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V}$

ES 2

$f: \mathbb{R}^{2,2} \to \mathbb{R}_2[x]$

$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a - d) + (b - c)x + (a + b + c + d)x^2$

$\mathcal{B}\ \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

BASE CANONICA DELLO SPAZIO DI PARTENZA

$\mathcal{C} = (1, x, x^2)$

ARRIVO

$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 1 + 0x + 1x^2$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 + 1x + 1x^2$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 - 1x + 1x^2$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = -1 + 0x + 1x^2$

$$M^{GE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

det di questa SOTTOMATRICE = 3, POICHÉ IL DETERM. È $\neq 0$

$\Rightarrow \rho(M_f) = 3$