NUMERO: 2276A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Guerci Lorenzo

MATERIA: Fisica I - Prof. Ghigo

BASI DELLA FISICA MODERNA: XVII secolo (Galileo Galilei)
È una scienza fondamentale che si basa sul metodo scientifico
METODO SCIENTIFICO: criterio di verità basato su osservazione ed esperimento.

PREMESSE DEL METODO SCIENTIFICO

PREMESSA FILOSOFICA: I fenomeni naturali si svolgono sempre con le stesse modalità quando vengono mantenute le condizioni iniziali

PREMESSA TECNICA: Si può modificare con accorgimenti tecnici opportuni la scala dei fenomeni in modo da non alterarne la legge per renderli accessibili alle misurazione (o osservazione). PREM. MATEMATICA: Una legge naturale è ritenuta vera se le conseguenze logiche ricavate da essa matematicamente si riscontrano nella realtà.
METODO GALILEIANO: OSSERVAZIONE, PROVA E RIPROVA del fenomeno nelle condizioni più semplici possibili, ESPRESSIONE NUMERICA dei PARAMETRI, FORMULAZIONE QUANTITATIVA → RICERCA DELLA LEGGE CHE REGOLA IL FENOMENO

OSSERVAZIONE: interazione tra osservatore e sistema osservato. La perturbazione introdotta dall'osservatore può essere ridotta nella fisica classica (ma non in quella quantistica)
PRINCIPIO DI INDETERM. HEISENBERG

GRANDEZZE FISICHE definibili OPERATIVAMENTE: possono essere misurate ed espresse in numeri.
CONSIDERANDO UN INSIEME DI ENTI OMOGENEI, ESSI COSTITUISCONO UN INSIEME DI GRANDEZZE FISICHE SE RISPETTANO:
1) CRITERIO DI CONFRONTO: Presi due enti A e B si è sempre in grado di dire se A>B, A<B o A=B

2) Si può definire la somma A+B (criterio di ~~somma~~ SOMMA)

3) Si può definire uno degli enti come unità di misura (CAMPIONE UNITARIO)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 198

degli errori relativi derivanti da difetti di:
- Costruzione; Taratura e/i Funzionamento dello strumento stesso.

3) PORTATA: Ampiezza massima della grandezza misurabile per mezzo dello strumento stesso.

4) PRONTEZZA: rapidità con cui lo strumento è in grado di eseguire le misure o di seguire le variazioni nel tempo della grandezza in esame.

SISTEMI DI UNITÀ DI MISURA

Le grandezze fisiche sono innumerevoli, conviene fissare delle unità di solo per alcune di esse e utilizzare le relazioni tra le varie grandezze (leggi fisiche) per definire le altre unità.
- UNITÀ DI MISURA FONDAMENTALI: SPECIE DI GRANDEZZE PER LE QUALI VENGONO FISSATE LE UNITÀ; - UNITÀ DI MISURA DERIVATE: SPECIE RICAVATE A PARTIRE DALLE FONDAMENTALI.

SISTEMA INTERNAZIONALE:

	GRANDEZZA	UNITÀ	SIMBOLO
FONDAMENTALI	LUNGHEZZA	METRO	m
	MASSA	KILOGRAMMO	kg
	INTERV. DI TEMPO	SECONDO	s
	INTENS. DI CORRENTE	AMPÈRE	A
	TEMPERATURA	KELVIN	K
	INTENSITÀ LUMINOSA	CANDELA	cd
	QUANTITÀ DI MATERIA	MOLE	mol
SUPPLEMENTARI	ANGOLO PIANO	RADIANTI	rad
	ANGOLO SOLIDO	STERADIANTE	sr

Per ogni unità di misura si realizzano dei campioni, le cui caratteristiche devono essere facilmente riproducibili in qualunque luogo e ben conservabili (PREFERIBILMENTE LEGATI A COSTANTI NATURALI).

3

ANALISI DELLE INCERTEZZE 7/03/17

LE RAGIONI DELLE INCERTEZZE SONO: LIMITI E DEFICIENZE STRUMENTALI; METODI DI MISURAZIONE ERRATI, CAUSE ACCIDENTALI.

I tipi di incertezze sperimentali si distinguono in:

LE INCERTEZZE NON SI POSSONO EVITARE TOTALMENTE, E COMUNQUE IMPORTANTE POTERLE STIMARE

INCERTEZZE DI TIPO A (errori casuali), valutabili con dati statistici. Queste incertezze sono dovute a cause di varia natura, che agiscono in modo del tutto casuale, ~~...~~

Una misura con piccoli errori casuali è detta PRECISA.

ESEMPI DI SORGENTI DI ERRORI CASUALI SONO CONDIZIONI AMBIENTALI VARIABILI, DISTURBI MECCANICI, CATTIVA STIMA NELLA LETTURA STRUMENTALE

Incertezze DI TIPO B (errori SISTEMATICI):

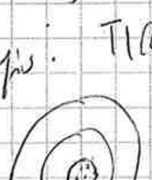
sono dovute a difetti del metodo o delle apparecchiature sperimentali utilizzate (TARATI MALE)

Una ~~piccola~~ misura con piccoli errori sistematici è detta ACCURATA.

Errori strumentali: gli strumenti possono avere una sensibilità non sufficiente ad individuare variazioni ~~...~~ nel corso di più misurazioni. Errori non sono altrettanto rilevabili.

GLI ERRORI SISTEMATICI PRODUCONO EFFETTI SEMPRE NELLO STESSO VERSO, E POSSONO ESSERE INDIVIDUATI ED ELIMINATI

Esempio: TIRO AL BERSAGLIO



ERRORI DI TIPO A ~~ELEVATI~~

ERRORI DI TIPO B ~~ELEVATI~~

ordinariamente noi non sappiamo a quale punto corrisponde il centro del bersaglio. L'errore di tipo B è quindi più subdolo.

ERRORI STRUMENTALI: LO STRUMENTO È TALMENTE POCO SENSIBILE DA NON RILEVARE LE FLUTTUAZIONI CASUALI DELLA MISURA. L'ERRORE MASSIMO È LA PIÙ PICCOLA DIVISIONE DELLA SCALA

Il procedimento di valutare la posizione tra le incisioni di una scala è detto INTERPOLAZIONE

Può essere fatta in maniera molto grossolana dividendo per 2 la differenza fra valore max e valore min che sono stati misurati.

INCERTEZZA RELATIVA

ERRORE RELATIVO = $\frac{\text{INCERTEZZA}}{\text{MIGLIORE STIMA}}$

Se lo moltiplichiamo per 100 troviamo l'errore percentuale.

[PER IL LABORATORIO DEL CORSO ERRORE < 10% <=> MISURA ACCETTABILE]

PROPAGAZIONE DELLE INCERTEZZE

La maggior parte delle grandezze fisiche non possono di solito essere misurate in una singola misura diretta

Es: $q = x + y$ → LO STESSO VALE PER LA DIFFERENZA

Immaginiamo che x e y siano state misurate con strumenti che portano ad incertezze diverse, abbiamo quindi 2 ~~incertezze~~ intervalli diversi.

Il ~~più~~ valore più probabile di q è dato dalla somma dei valori maggiormente probabili di x e y.

L'incertezza è approssimabile alla somma delle incertezze sulle misure di x e y.

Se avessimo avuto un prodotto ~~l'errore relativo~~ dovremmo sommare ~~costante~~ gli errori relativi

In realtà così facendo troviamo l'errore massimo, che può coincidere con una sovrastima. In realtà dobbiamo considerare una somma quadratica, che è VALIDA SE LE MISURE DI x e y SONO FATTE INDIPENDENTEMENTE E SE SONO GOVERNATE DA DISTRIBUZIONE NORMALE

$$\delta q \begin{cases} \approx \delta x + \ldots + \delta z + \delta u + \ldots + \delta w & \text{(limite superiore per } \delta q) \\ = \sqrt{(\delta x)^2 + \ldots + (\delta z)^2 + (\delta u)^2 + \ldots + (\delta w)^2} \end{cases}$$

(PER ERRORI INDIPENDENTI E CASUALI)

PROPAGAZIONI DELLE INCERTEZZE
ESPRESSIONI MONOMIE

È UN CASO PARTICOLARE DEL PRECEDENTE

ESPRESSIONE MONOMIA: è del tipo: $q = a x^{\alpha} w^{\beta} z^{\gamma}$, con a costante valgono le seguenti relazioni

$$\frac{\delta q}{q} = \left|\alpha \frac{\delta x}{x}\right| + \left|\beta \frac{\delta w}{w}\right| + \left|\gamma \frac{\delta z}{z}\right|$$

(limite superiore)

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\delta w}{w}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\delta z}{z}\right)^2}$$

(PER ERRORI INDIPENDENTI E CASUALI)

Può esserci un'espressione monomia dove uno dei fattori è a sua volta una funzione:

$$q = a x^{\alpha} w^{\beta} z^{\gamma} [f(t)]^{\rho}$$

CI PUÒ ESSERE, COME QUI, UNA PROPAGAZIONE NELLA PROPAGAZIONE

vale la relazione:

$$\frac{\delta q}{q} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\delta w}{w}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\delta z}{z}\right)^2 + \left(\rho \frac{\delta f(t)}{f(t)}\right)^2}$$

(PER ERRORI INDIPENDENTI E CASUALI)

MEDIA o VALORE ATTESO della variabile aleatoria X è

$$\mu = E(X) = \int x\, p(x)\, dx$$

EXPECTED

VARIANZA e DEVIAZIONE STANDARD sono definite come

$$\sigma^2 = V(X) = \int (x-\mu)^2 p(x)\, dx \qquad \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Nel caso della distribuzione normale il VALORE ATTESO CORRISPONDE al VALORE CENTRALE x_0, per cui la funzione assume il suo massimo.

Se una misura è soggetta a molte piccole sorgenti di errori casuali e trascurabili errori sistematici, allora:
i valori misurati saranno distribuiti secondo una distribuzione normale centrata nel valore vero. => μ della DISTRIB. NORM. CORRISP. AL VALORE VERO

STIMA STATISTICA: se la distribuzione è normale, è costituita dalla MEDIA ARITMETICA DELLE MISURE EFFETTUATE.

Avendo misurato n valori della grandezza x nelle stesse condizioni, la probabilità di ottenere una lettura in un intervallo dx_i attorno a x_i:

$$P[x \in (x_i \div x_i + dx_i)] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x_i-x_0)^2}{2\sigma^2}}\, dx_i$$

semplificando: $P(x_i) \propto \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x_i-x_0)^2}{2\sigma^2}}$

La probabilità di ottenere l'intero set di letture è il prodotto delle probabilità singole (eventi indipendenti).

$$P_{x_0,\sigma}(x_1, x_2, \dots, x_N) = P(x_1)P(x_2)\dots P(x_N) \propto \frac{1}{\sigma^N} e^{-\frac{\sum_i (x_i-x_0)^2}{2\sigma^2}}$$

La deviazione standard della media si può ricavare con:

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

LA DEVIAZ. STAND. S_x CARATTERIZZA L'INCERTEZZA MEDIA DELLE SINGOLE MISURE $x_1, \dots x_N$.
L'INCERTEZZA DI $\bar{x}$ È MINORE DELL'INCERTEZZA DELLE SINGOLE MISURE.

Il risultato di un esperimento si può indicare con:

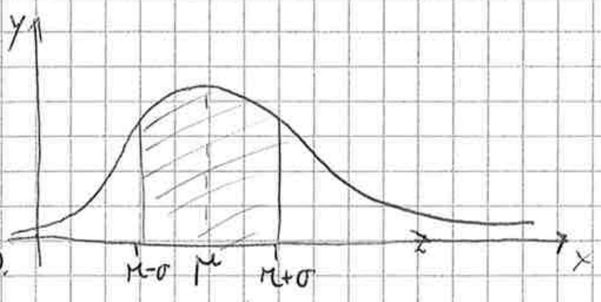
$$\boxed{x = \bar{x} \pm S_{\bar{x}}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad ; \quad S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\bar{x})^2}$$

INTERVALLI DI CONFIDENZA

K: FATTORE DI COPERTURA, PUÒ ESSERE CALCOLATO ~~A PARTIRE~~ CONOSCENDO LA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ.

$\mu \pm K\sigma$ è un INTERVALLO CHE COMPRENDE UNA SPECIFICA FRAZIONE DELLA DISTRIBUZIONE (UNA SPECIFICA PROBABILITÀ).



La probabilità che $|x-\mu| \le K\sigma$ è data da $\int_{\mu-K\sigma}^{\mu+K\sigma} p(x)\,dx$
dove $p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$ → QUESTA PROBABILITÀ È DETTA LIVELLO DI CONFIDENZA e l'INTERVALLO è detto INTERVALLO DI CONFIDENZA.

Anche i valori delle medie aritmetiche $\bar{x}$ si distribuiscono secondo una gaussiana attorno al valore vero.
Si stima che, con un livello di confidenza del 68%, il valore vero cade nell'intervallo indicato, a meno di incertezze di tipo sistematico (CON IL 68,26% di probabilità il valore medio $\bar{x}$ si discosta da QUELLO VERO PER MENO DI $\sigma_{\bar{x}}$).

METODO DEI MINIMI QUADRATI

SI MISURANO PARECCHI VALORI DI 2 DIVERSE VARIABILI FISICHE PER STUDIARNE LA RELAZIONE MATEMATICA → (IN RELAZIONE LINEARE)

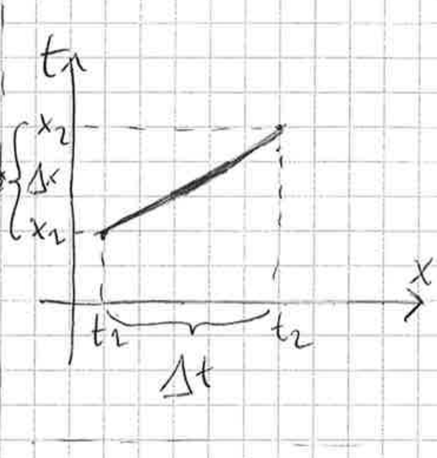
RETTA DEI MINIMI QUADRATI: minimizza i prodotti delle varianze le somme degli scarti fra i dati al quadrato. È la RETTA che INTERPOLA meglio i punti misurati (MIGLIORI STIME dei coefficienti della retta A e B)

PROCEDIMENTO: Si eseguono n misure corrispondenti alle coppie $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$, si calcolano GLI SCARTI $v_i = y_i - (A+Bx_i)$ e se ne SOMMANO I QUADRATI: $\Phi = \sum_{i=1}^{n}(y_i - A - Bx_i)^2$
SI CERCANO I VALORI DI A e B per cui Φ SIA LA MINIMA POSSIBILE

$\Delta t = t_2 - t_1$: intervallo di tempo

$v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$: VELOCITÀ MEDIA $\left(\dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}\right)$

Consiste nella segmento che unisce i due punti del grafico.



VELOCITÀ ISTANTANEA: è la velocità del punto materiale in un dato istante: $\lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt}$ $\boxed{v = \dfrac{dx}{dt}}$

Il segno della velocità ci indica il verso del moto

$$dx = v\, dt$$

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

INTEGRIAMO RISPETTO ALLO SPAZIO E AL TEMPO

$$x - x_0 = \int_{t_0}^{t} v\, dt \longrightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

$$\boxed{v_m} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} v\, dt$$

MOTO RETTILINEO UNIFORME: $v = \text{cost.}$

$$\cancel{v}\, x(t) = x_0 + v \int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0)$$

PER SEMPLICITÀ PONIAMO $t_0 = 0 \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$

$$v_m = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v\cancel{(t - t_0)}}{\cancel{t - t_0}} = v = \text{cost}$$

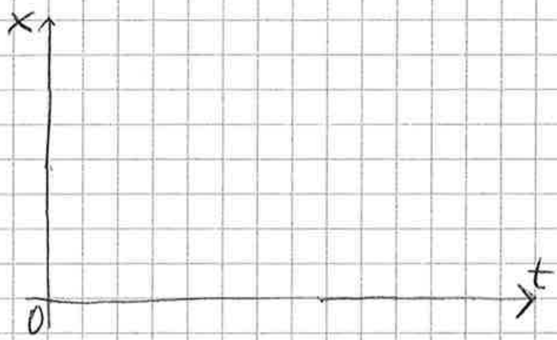
$\cancel{\Delta t = t_2 - t_1}$

Se $t_0 = 0$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

Esempio: MOTO VERTICALE



$a = \text{cost.} = -g \Rightarrow$ MOTO RETTILINEO UNIFORM. ACCELERATO

$v_0 = 0$

È il moto di un oggetto che viene lasciato cadere

$$\begin{cases} x_0 = h \\ v_0 = 0 \end{cases} \qquad t_0 = 0 \qquad v(t) = -gt$$

$$x(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v(x) = \cancel{\pm} - \sqrt{-2g(x-h)}$$

LA VELOCITÀ È NEGATIVA

TEMPO DI CADUTA: $t(x=0)$

$$t = \sqrt{2\frac{h-x}{g}}$$

$$\Downarrow$$

$$t = \sqrt{2\frac{h}{g}}$$

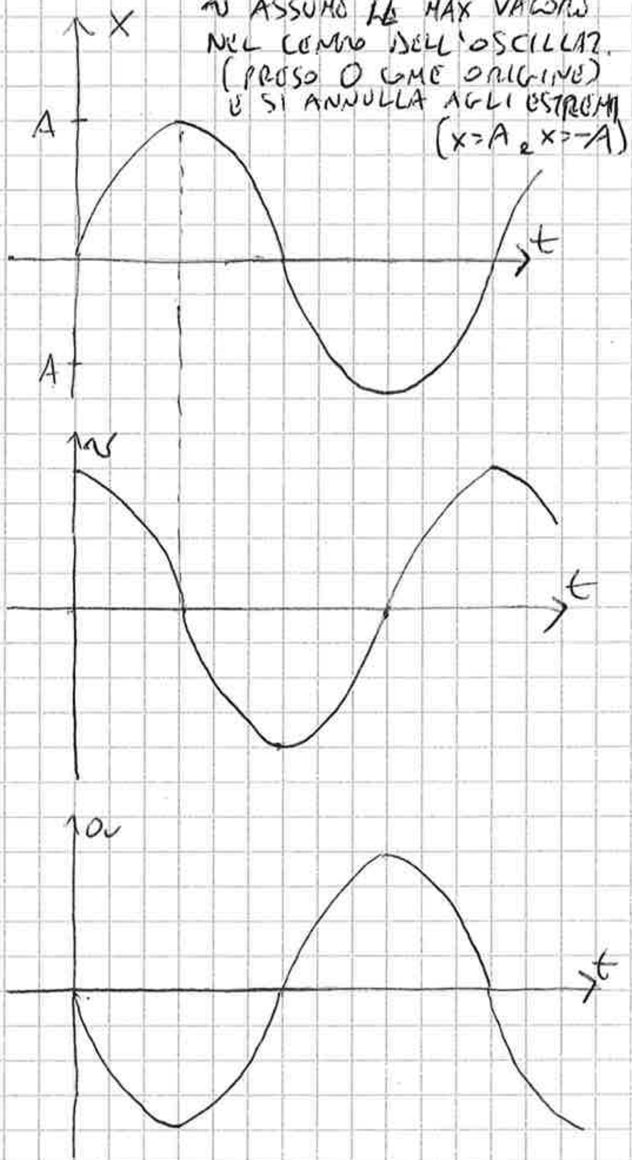
IL TEMPO DI CADUTA DIPENDE SOLO DALL'ALTEZZA INIZIALE (SECONDO LE IPOTESI INIZIALI)

VELOCITÀ CADUTA: $v(x=0) = -\sqrt{2gh}$

v ASSUME IL MAX VALORE NEL CENTRO DELL'OSCILLAZ. (PRESO O COME ORIGINE) E SI ANNULLA AGLI ESTREMI ($x=A$ e $x=-A$)

La VELOCITÀ è detta in quadratura di fase rispetto alla posizione, ed ha con essa, infatti, uno sfasamento di $\frac{\pi}{2}$.

L'ACCELERAZIONE ha uno sfasamento di π → è in OPPOSIZIONE di FASE



$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$ eq. diff. del moto armonico

$A, \phi \longleftrightarrow x_0, v_0$

$$\begin{cases} x_0 = A \sin\phi \\ v_0 = \omega A \cos\phi \end{cases} \qquad \begin{cases} \sin\phi = \dfrac{x_0}{A} \\ \cos\phi = \dfrac{v_0}{\omega A} \end{cases}$$

$$\mathrm{tg}\,\phi = \frac{x_0}{\cancel{A}} \cdot \frac{\omega \cancel{A}}{v_0} = \omega \frac{x_0}{v_0} \qquad \phi = \mathrm{arctg}\left(\omega \frac{x_0}{v_0}\right)$$

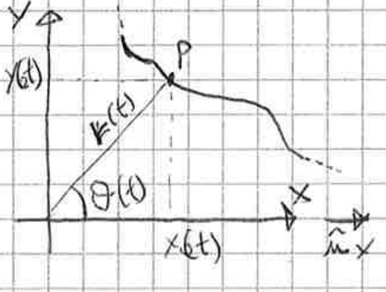
$$\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1 = \left(\frac{x_0}{A}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{\omega A}\right)^2 = \frac{1}{A^2}\left(x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}\right)$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \boxed{v^2(x) = \omega^2 (A^2 - x^2)} \qquad v^2 = v_0^2 + \omega^2 (x_0^2 - x^2)$$

CONSIDERANDO IL CENTRO ($x_0 = 0$, $v_0 = \omega A$)

NOTA IMPORTANTE: Il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice, sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

MOTO NEL PIANO



LA POSIZ. DI UN PUNTO E' DATA DALLE SUE COORDINATE CARTESIANE $\{x, y\}$; O ANCHE DALLE SUE COORDINATE POLARI $\{r, \theta\}$

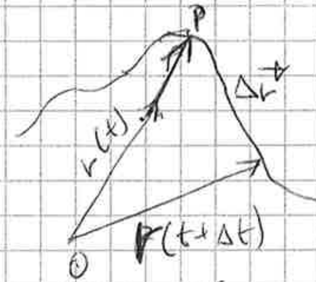
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

RAGGIO VETTORE $\vec{r}(t)$ ~~HA DIREZIO~~ $= x(t)\,\hat{u}_x + y(t)\,\hat{u}_y$

↳ VERSORE

VELOCITA' ISTANTANEA : $v = \frac{ds}{dt}$

SE CONOSCIAMO LA FUNZIONE $r(t)$, OSSIA r IN FUNZIONE DEL TEMPO, ALLORA CONOSCIAMO IL MOTO DEL PUNTO P.



$$\vec{r}(t) + \vec{r}(t+\Delta t) = r(t) + \Delta r$$

VELOCITA' VETTORIALE

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Quando $\Delta t \to 0$

LA VELOCITA' VETT. E' LA DERIVATA DEL RAGGIO VETTORE RISPETTO AL TEMPO

LA POSIZIONE DEL PUNTO LUNGO LA TRAIETTORIA PUO' ANCHE ESSERE DATA ATTRAVERSO UNA COORDINATA CURVILINEA S. IL VALORE di S ESPRIME LA ~~VARIAZIONE~~ LUNGHEZZA ~~DEL PUNTO LUNGO~~ DELLA TRAIETTORIA,

$\frac{ds}{dt}$ ESPRIME LA VARIAZIONE TEMPORALE DELLA POSIZIONE LUNGO LA TRAIETTORIA, CIOE' LA VELOCITA' ISTANTANEA DEL PUNTO.

$\hat{u}_T$ $\qquad \Delta\vec{r} = d\vec{r} \parallel \hat{u}_T$

$$\boxed{dr = ds\,\hat{u}_T}$$

AL LIMITE L'INCREMENTO dr DEL RAGGIO VETTORE, RISULTA IN DIREZIONE TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO P

$$\vec{v} = \frac{dr}{dt} = \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}\,\hat{u}_T =$$

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_T$$

$\hat{u}_T$ E' IL VERSORE TANGENTE ALLA CURVA

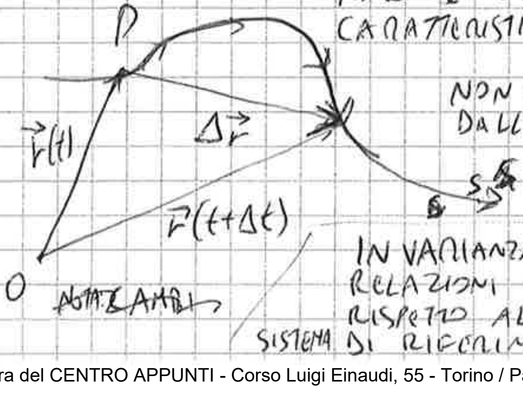
NOTA: LA TRAIETTORIA DEL MOTO e $\vec{v} = v\hat{u}_T$ SONO CARATTERISTICHE INTRINSECHE

↓

NON DIPENDONO DALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO

↓

INVARIANZA DELLE RELAZIONI VETTORIALI RISPETTO ALLA SCELTA DEL SISTEMA DI RIFERIMENTO



NOTA: L'INCREMENTO $\Delta\vec{r}$ E' DIVERSO DALLO SPAZIO EFFETTIVAMENTE PERCORSO LUNGO LA CURVA

IN UN PERCORSO CHIUSO $\to \Delta\vec{r} = 0$ MA $\Delta s \neq 0$

In generale vale la relazione: $\vec r(t) = \vec r(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec v(t)\,dt$

ACCELERAZIONE

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \qquad \vec a = \frac{d}{dt}(v\hat u_T) = \frac{dv}{dt}\hat u_T + v\frac{d\hat u_T}{dt} =$$

$$= \frac{dv}{dt}\hat u_T + v\frac{d\phi}{dt}\hat u_N$$

← VERSORE NORMALE

$\hat u_N \perp \hat u_T$

$\hat u_N$ È DIRETTO VERSO LA CONCAVITÀ DELLA TRAIETTORIA

CENTRO DI CURVATURA DELLA TRAIETTORIA IN P →

CIRCONF. OSCULATRICE

AL LIMITE PER $\Delta t \to 0$ LE RETTE NORMALI ALLA TRAIETTORIA IN DUE PUNTI MOLTO VICINI TRA LORO SI INCONTRANO NEL PUNTO P, CHE COINCIDE CON IL CENTRO DELLA CIRCONFERENZA TANGENTE ALLA TRAIETTORIA NEL PUNTO P

$$ds = R\,d\phi$$

$$\frac{ds}{R} \simeq d\phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \underbrace{\frac{d\phi}{ds}}_{1/R}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{1}{R}v$$

$$\vec a = \frac{dv}{dt}\hat u_T + v\frac{v}{R}\hat u_N = \frac{dv}{dt}\hat u_T + \frac{v^2}{R}\hat u_N$$

↑ ACCEL. TANGENZ.

↑ ACCEL. CENTRIPETA (O NORMALE) ↳ DIRETTA SEMPRE VERSO IL CENTRO DI CURVATURA

MOTO	ACCEL. TANG. a_T	ACCEL. CENTRIPETA a_N
RETT. UNIF.	$\emptyset$	$\emptyset$
RETT. VARIO	$\neq \emptyset$	$\emptyset$
CURV. UNIF.	$\emptyset$	$\neq 0$
CURV. VARIO	$\neq \emptyset$	$\neq \emptyset$

$$\vec a = \vec a_T + \vec a_N$$

IN MODULO:

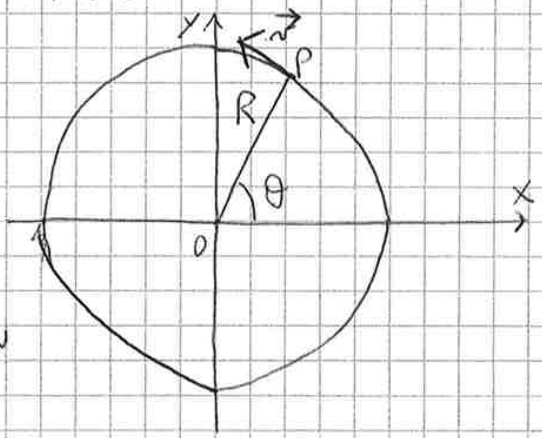
$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}}$$

$d\vec r$: incremento infinitesimo del raggio vettore

ds: spostamento infinitesimo

$\hat u_T$: versore tangente alla curva

MOTO CIRCOLARE



La traiettoria è una circonferenza.

$\vec{a}_N \neq 0 \leftrightarrow$ LA VELOCITÀ VARIA SEMPRE IN ~~DIREZIONE~~

SE IL MOTO È UNIFORME $\rightarrow \vec{a} = \underbrace{\cancel{\vec{a}_T}}_{=0} + \vec{a}_N$

$x(t) = R\cos\theta(t)$

$y(t) = R\sin\theta(t)$

$$\begin{cases} R(t) = R = \text{costante} \\ \theta(t) = \dfrac{s(t)}{R} \end{cases}$$

$\boxed{\text{velocità angolare}}$ $\quad \omega = \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R} \quad \boxed{\omega = \dfrac{v}{R}}$

Se il moto è circolare uniforme $\quad v = \text{costante (in modulo)}$

$$\Downarrow$$

$$\omega = \text{cost.} = \frac{v}{R}$$

$\omega = \dfrac{d\theta}{dt} \rightarrow \int d\theta = \int \omega\, dt$

NEL MOTO CIRCOLARE LA VELOCITÀ RADIALE È $\equiv 0$ POICHÉ $r(t) = R = \text{cost.}$, LA VELOC. TRASVERSA COINCIDE CON LA VELOCITÀ

$t_0 = 0 \rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$ $\quad$ ($x(t) = x_0 + vt$ ANALOGA LEGGE DEL MOTO RET. UNIF.)

$$\begin{cases} \theta R = s \\ \omega R = v \end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \theta(t) = \theta_0 + \omega t \\ s(t) = s_0 + vt \end{array}}$$

$a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$

$\boxed{a} = a_N = \dfrac{v^2}{R} = \boxed{R\omega^2}$

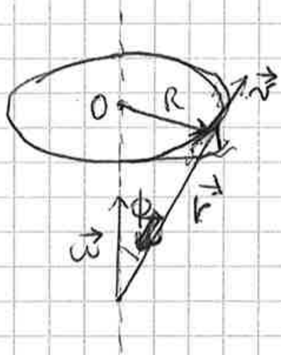
periodo: $T = \dfrac{2\pi R}{v} = \boxed{\dfrac{2\pi}{\omega}}$

L'acc. centripeta ha sempre verso in direzione del centro

$$\left.\begin{array}{l} x(t) = R\cos(\omega t + \theta_0) \\ y(t) = R\sin(\omega t + \theta_0) \end{array}\right\} \text{MOTI ARMONICI}$$

SONO I MOTI PROIETTATI SUGLI ASSI CARTESIANI
SONO FRA DI LORO SFASATI DI $\pi/2$

Il moto armonico può essere ottenuto considerando la proiezione di un punto che ha un moto circolare intorno ad una circonferenza su di un asse che passa per il diametro. IL PERIODO DI QUESTO MOTO ARMONICO COINCIDE CON QUELLO DEL MOTO CIRCOLARE UNIFORME



$$v = |\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega \underbrace{r \sin\phi}_{R} = \omega R$$

ACCEL. ANGOLARE

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

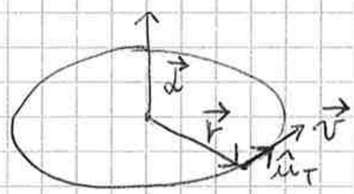
α è un vettore parallelo ad ω e ci dice come varia $|\omega|$ (IL MODULO DI ω)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \underbrace{\frac{d\omega}{dt}}_{\vec{\alpha}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}}$$

$$\vec{a} = \underbrace{\vec{\alpha} \times \vec{r}}_{\vec{a}_T} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\vec{a}_N}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{MOTO CIRCOLARE UNIF:} \\ \vec{\omega} = \text{cost} \quad \alpha = 0 \\ \vec{a} = \vec{a}_N = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{array}}$$

$\vec{\alpha} \times \vec{r}$ (α ed r SONO ORTAGONALI) ~~prod vettoriale~~ $= \alpha r$



$$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \alpha r \hat{u}_T = a_T \hat{u}_T = \vec{a}_T$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \omega v(-\hat{u}_r) = \omega v \hat{u}_N = \frac{v}{R} v \hat{u}_N = \vec{a}_N$$

$$v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y = v_0 \cos\theta\, \hat{u}_x + (v_0 \sin\theta - gt)\, \hat{u}_y$$

MOTO RETT. UNIF.

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\theta\, t \\ y(t) = v_0 \sin\theta\, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

MOTO RETT. UNIF. AC.

ELIMINANDO IL TEMPO SI RICAVA LA TRAIETTORIA: $y(x) = x \tan\theta - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2$

16\03\17

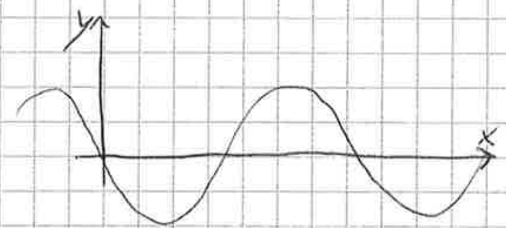
- COMPOSIZIONE DEI MOTI (su assi ortogonali)

Es.

x: uniforme
y: armonico

$$\begin{cases} x = vt \\ y = A \sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{v} \Rightarrow y = A \sin\left(\omega \frac{x}{v}\right)$$

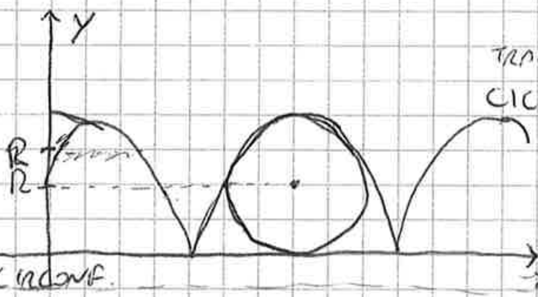
Eliminando il tempo abbiamo ricavato la traiettoria, che è una ~~sinusoid~~ SINUSOIDE



Es:

x: armonico + rett. unif. con $v = \omega R$
y: armonico centrato in $y = R$

$$\begin{cases} x = R \sin\omega t + \omega R t \\ y = R \cos\omega t + R \end{cases}$$



SI PUÒ ANCHE DIRE CHE IL MOTO RISULTANTE È LA SOMMA DI UN MOTO CIRCOLARE E UNO RETT. UN. DEL CENTRO DELLA CIRCONF.

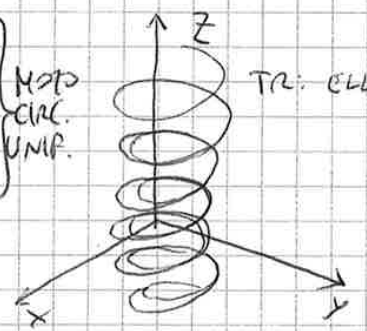
Es:

$v_x = \omega R \sin\omega t$ → MOTO ARMONICO

$v_y = \omega R \cos\omega t$ → MOTO ARM. MA SFASATO DI $\pi/2$ RISPETTO AL PREC.

MOTO CIRC. UNIF.

$v_z =$ costante → M.R.U.



$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

~~$v = vt$~~

~~$\theta = \omega t$~~ $= \sqrt{\omega^2 R^2 + v_z^2}$

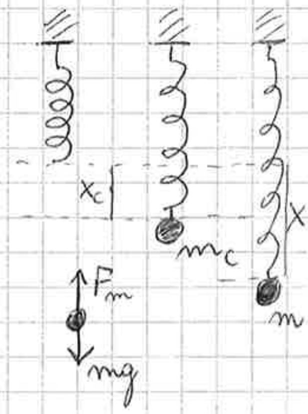
$a = \omega^2 R$

IL MOTO VA TRASLANDO ~~[illegible]~~ DI UNA COSTANTE

$\vec{F} = \frac{d\vec{v}}{dt} m = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} m$ $\qquad F(t) = \vec{r}(t)$

Limiti di validità: questa legge è valida se consideriamo un sistema di riferimento inerziale (vale il principio di inerzia) e se $v <<< c$ (v è molto inferiore alla velocità della luce).

definizione statica di forza:



$F : F_c = x : x_c$

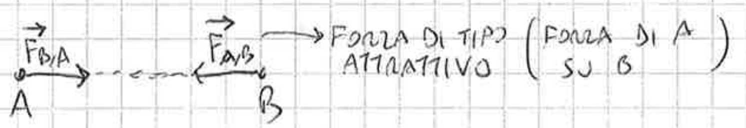
(F_c → FORZA CAMPIONE; x_c → SPOSTAM. CAMPIONE)

$F = \frac{x}{x_c} \cdot F_c$ $\qquad$ LO STRUMENTO CHE MISURA LA FORZA È IL DINAMOMETRO

III legge di NEWTON: esprime una proprietà generale delle forze se un corpo A esercita una forza su un corpo B, il corpo B reagisce con una forza sul corpo A che ha ~~pos~~ stesso modulo, stessa direzione ma verso opposto.

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

Non esistono forze isolate, ha senso parlare solo di interazione



UNITÀ DI MISURA: $\vec{J} = \int_0^t \vec{F}(t)\,dt \quad [J]=[FT]=[MLT^{-2}T]=[MLT^{-1}] \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{N \cdot s} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s = \boxed{kg \cdot \frac{m}{s}}$

$\vec{J} = \Delta \vec{p}$

$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow \boxed{kg \cdot \frac{m}{s}}$

RISULTANTE DELLE FORZE

Corrisponde alla somma vettoriale di tutte le forze a cui è sottoposto un punto materiale.

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i$$

L'effetto che si ha nel un punto ~~stesso~~ sottoposto a più forze, è lo stesso che si avrebbe se il corpo fosse sottoposto alla risultante delle forze.

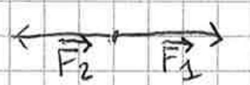
$$\boxed{\vec{R} = m\vec{a}}$$

L'ACCELERAZIONE DIPENDE DALLA RISULTANTE DELLE FORZE, NON DA FORZE PRESE SINGOLARMENTE

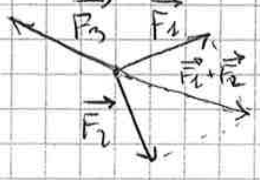
$$\vec{a} = \frac{\vec{R}}{m} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i = \sum_i \left(\frac{\vec{F}_i}{m}\right) = \sum_i \vec{a}_i$$

Da ciò deriva il fatto che studiando un moto possiamo avere solo informazioni sulla risultante di tutte le forze.

- Equilibrio statico: $\cancel{\vec{R}=0}$ $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{R} = 0$



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$



$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{R} = 0$

$\downarrow$

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

AFFINCHÉ SI ABBIA $\vec{R}=0$, SE LE FORZE AGENTI HANNO NUMERO SUPERIORE A 3, ESSE DEVONO POTER DISPORSI IN MODO DA FORMARE UNA POLIGONALE CHIUSA

Se abbiamo: $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y \neq 0 \\ R_z \neq 0 \end{cases}$ L'accelerazione è nulla solo lungo X: $a_x = 0$, mentre è $\neq 0$ ~~per~~ lungo Y e Z, che NON è una situazione di equilibrio statico.

$\vec{g} = -g\hat{u}_z$

$$\vec{N} = m\vec{a} - \vec{P}$$
$$\vec{N} = m\vec{a} - m\vec{g}$$
$$\vec{N} = m(\vec{a} - \vec{g})$$

DA $\vec{N}$ DIPENDE LA PERCEZIONE DEL PESO

NOTA: IL VERSO DELL'ACCEL. NON E' IL VERSO DEL MOTO

CASO 1: $\vec{a} = a\vec{u}_z$ $\quad \vec{N} = m[a\vec{u}_z - (-g\hat{u}_z)] = m(a+g)\hat{u}_z$

ACCEL. VERSO L'ALTO

$N > mg$

CASO 2: $\vec{a} = -a\vec{u}_z$ $\quad \vec{N} = m[-a\vec{u}_z - (-g\hat{u}_z)] = m(g-a)\hat{u}_z$

ACCEL. VERSO IL BASSO

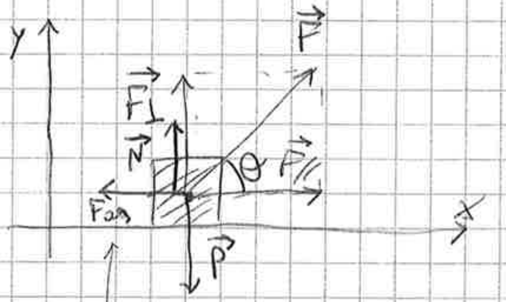
$N < mg \quad P = mg$

3) Se $a = g$ => CADUTA LIBERA

$N = 0$ e' la condizione di distacco tra oggetto e vincolo

4) a ~~$= g$~~ è concorde a g ma maggiore in modulo si ha distacco del corpo dalla piattaforma

Quindi $\vec{F} + \vec{P} + \vec{R}_V = 0$



Scomponiamo lungo le due direzioni:

$$\begin{cases} x: F_{//} + F_{as} = 0 \\ y: N + F_{\perp} - P = 0 \end{cases}$$

HA VERSO OPPOSTO A $F_{//}$

che devono essere entrambe pari a 0.

$$\begin{cases} F_{as} = -F_{//} \\ N = P - F_{\perp} \end{cases} \qquad \begin{cases} F_{as} = -F\cos\theta \\ N = P - F\sin\theta \end{cases}$$

Condizione di appoggio: $N > 0 \Rightarrow P > F\sin\theta$

Si ha quiete finché $F_{//} \le \mu_s N \iff F\cos\theta \le \mu_s(P - F\sin\theta)$

$$F\cos\theta \le \mu_s P - \mu_s F\sin\theta \iff F(\cos\theta + \mu_s \sin\theta) \le \mu_s m g$$

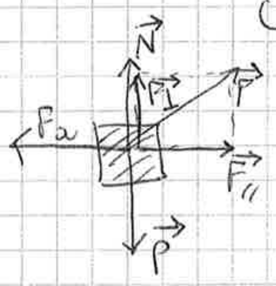
$$\boxed{F \le \frac{\mu_s m g}{\cos\theta + \mu_s \sin\theta}}$$

Se $\theta = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\theta = 1,\ \sin\theta = 0$
$\underbrace{F \le \mu_s m g}_{\text{CONDIZ. DI QUIETE PER } \theta = 0}$ (PERCHÉ IL DENOMIN. È UGUALE A 1)

ATTRITO RADENTE DINAMICO: (Per $F_{//} > \mu_s N$) superato il valore dell'attrito radente statico, il corpo si muove lungo il piano, acquista una certa velocità ma è comunque sottoposto ad una certa forza, detta forza di attrito rad. dinam.

$$\vec{F}_{ad} = -\mu_d N \hat{u}_T$$ (il verso è sempre opposto a quello della velocità)

CASO 2: TIRARE



LUNGO LA VERTICALE NON CI ASPETTIAMO UN'ACCELERAZ, QUINDI IPOTIZZIAMO:

$$a_y = 0 \iff N + F\sin\theta - P = 0$$

$$N = mg - F\sin\theta = 2.3\,N$$

$$F_{//} = F\cos\theta > \mu_s N \longrightarrow \text{MOTO}$$
(= 10N) (= 1.15N)

$$a_x: \boxed{F\cos\theta - \mu_d \cdot N = m a_x}$$

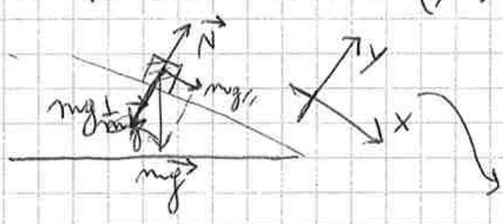
PIANO INCLINATO

Nel caso del piano inclinato il corpo è portato a scivolare lungo di esso per via della forza peso.

CASO 1: VINCOLO LISCIO ($\mu_s = 0$)

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}$$

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$



Scegliamo questo sistema di riferimento per avere $a_y = 0$

$$\begin{cases} x: & mg\sin\theta = m a_x = m a \quad (a_x = a \text{ perché } a_y = 0) \\ y: & N - mg\cos\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = g\sin\theta < g \quad (0 \leq \sin\theta < 1) \\ N = mg\cos\theta \end{cases}$$

$a = \text{cost.} \Rightarrow$ il moto accellera lungo il piano inclinato con un'accelerazione $< g$ (l'accelerazione con cui il corpo cadrebbe verticalmente)

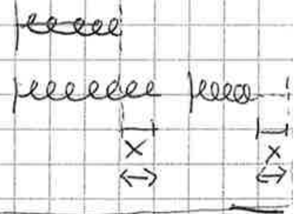
FORZA ELASTICA (unidimensionale)

La forza elastica ha direzione costante, verso sempre rivolto in O (centro della forza) e modulo proporzionale alla distanza da O.

$F_{el} = -kx\hat{u}_x$ ($k>0$ costante elastica)

Se considero un punto $x<0$, $F_{el}>0$. Viceversa, per $x>0$, $F_{el}<0$.

NEL CASO DELLA MOLLA X CORRISPONDE ALLA DEFORMAZIONE DELLA STESSA



$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{-kx\hat{u}_x}{m} = -\left(\frac{k}{m}\right)x\hat{u}_x = -\omega^2 x\hat{u}_x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

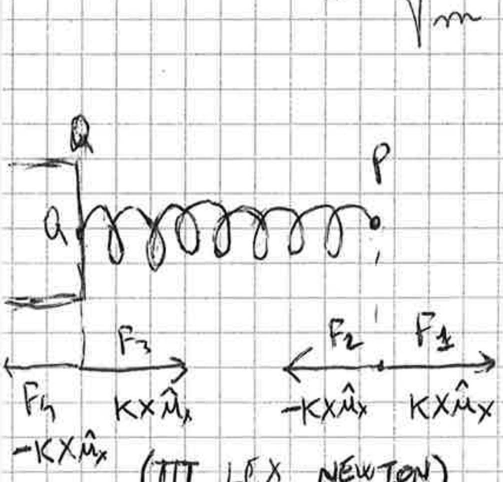
~~quindi l'accelerazione~~

quindi abbiamo un MOTO ARMONICO

$$\Downarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



(III LEX NEWTON)

$\vec{F} = -kx\hat{u}_x$ IL MODULO DELLA FORZA È PROPORZIONALE ALLA DEFORMAZIONE FINO A CHE NON SI SUPERA IL LIMITE DI ELASTICITÀ DELLA MOLLA

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$v_{lim} = \frac{g}{k} = \frac{g \cdot m}{b}$ $\qquad \vec{F}_{a,v} = -b\vec{v}$

$b = mk$

Per una sfera di raggio R $\quad b = 6\pi R\eta \quad \eta_{aria} \simeq 1.8 \cdot 10^{-5} \frac{Ns}{m^2}$

COEFF. DI VISCOSITÀ $\quad \eta_{H_2O} \simeq 10^{-3} \frac{N \cdot s}{m^2}$

Ciò è valido solo per MOTO LAMINARE

Se il moto è TURBOLENTO ~~F~~ si parla di FORZA DI RESISTENZA DEL MEZZO, che è PROPORZIONALE al quadrato della velocità.

Si può dimostrare che $v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{cS\rho}}$ $\qquad F_r = \frac{1}{2} c S \rho v^2$

TENSIONE DEI FILI

È la forza che un filo teso esercita ~~ai suoi estremi~~ sugli oggetti vincolati ai suoi estremi. Esso non esercita alcuna tensione se non è teso

FILO: È una corda con SEZIONE TRASCURABILE (LO CONSIDERIAMO UNIDIMENSIONALE)

FILO INESTENSIBILE e DI MASSA TRASCURABILE

QUIETE

Ogni punto del filo è interessato da 2 forze, che hanno stessa direzione e verso opposto, la forza è quindi trasferita da un estremo all'altro $\quad F_A = F_B = T \quad$ (QUIETE)

IL FILO ESERCITA AGLI ESTREMI LA TENSIONE T, IL CUI VALORE DIPENDE DALLE FORZE APPLICATE

UN FILO TESO IN MOVIMENTO, ESSENDO INESTENSIBILE HA LA STESSA ACCELERAZIONE IN OGNI PUNTO. PERTANTO, DUE CORPI COLLEGATI AD UN FILO TESO DEVONO AVERE LA STESSA ACCEL.

DATO CHE m_{filo} È TRASCURABILE ma RISULTA NULLA PER IL FILO IL VALORE DELLA TENSIONE DURANTE IL MOTO È LO STESSO IN OGNI PUNTO DEL FILO.

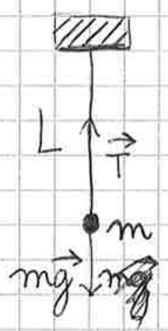
$$\begin{cases} N \sin\theta = m \dfrac{v^2}{R} \\ N\cos\theta = mg \end{cases}$$

$\div$ $\quad t_g\theta = \dfrac{v^2}{R \cdot g} \longrightarrow \boxed{v = \sqrt{t_g\theta R \cdot g}}$

$N = \dfrac{mg}{\cos\theta} \Rightarrow N > mg$

EQUILIBRIO DINAMICO: IN PRESENZA DI FORZE IL MOTO AVVIENE CON VELOCITA' COSTANTE LA RISULTANTE È NULLA. SE IL MOTO È RETTILINEO, SE IL MOTO È CURVILINEO LA VELOC. DEVE ESSERE COSTANTE IN MODULO (F_T NULLA)

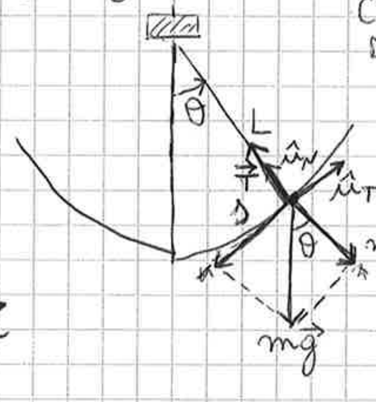
PENDOLO SEMPLICE



CASO STATICO (LA MASSA È FISSA SULLA VERTICALE) $\begin{cases} \vec{T} + m\vec{g} = 0 \\ T = mg \end{cases}$

CASO DINAMICO: $\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$

CIRCONFERENZA DI RAGGIO L



$$\begin{matrix} \hat{u}_T \\ \hat{u}_N \end{matrix} \begin{cases} -mg\sin\theta = m \cdot a_T & \leftarrow R_T \\ T - mg\cos\theta = m \cdot a_N \end{cases}$$

$\leftarrow$ FORZA DI RICHIAMO CHE TENDE A RIPORTARE IL PUNTO SULLA SUA VERTICALE, NON È DI DIREZIONE COSTANTE COME ERA PER LE FORZE ELASTICHE

$$\boxed{\begin{matrix} a_T = L\alpha & \left(\alpha = \dfrac{a_T}{L}\right) \\ a_N = \dfrac{v^2}{L} & \end{matrix}}$$

$$-mg\sin\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{L}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{L}\sin\theta \\ T = m\left[\dfrac{v^2}{L} + g\cos\theta\right] \rightarrow T \text{ è MAX IN POSIZ. VERTICALE} \end{cases}$$

IL PERIODO NON DIPENDE DALLA MASSA

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T È INDIPENDENTE DALL'AMPIEZZA

Per piccoli angoli $\sin\theta \approx \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

EQ. DEL MOTO ARMONICO con $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$

Abbiamo, quindi, OSCILLAZIONE ARMONICA DEL PENDOLO

Se agiscono più forze: $W=\int_A^B \vec F\cdot d\vec s = \int_A^B (\underbrace{\vec F_1+\vec F_2+\vec F_3+\dots+\vec F_n}_{R\text{ (RISULTANTE)}})\,d\vec s =$

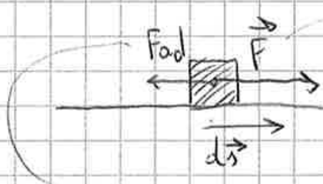
$$\int_A^B \vec F_1\, d\vec s + \int_A^B \vec F_2\, d\vec s + \dots + \int_A^B \vec F_n\, d\vec s = W_1+W_2+W_3+\dots+W_N$$

Il lavoro totale è dato dalla somma dei singoli lavori presi singolarmente.

$W=0$ se: 1 NON AGISCE ALCUNA FORZA; 2 LA RISULT. È NULLA 3 SEMPRE ORTOGONALE ALLA TRAIETTORIA

Es: Moto rett. unif. con attrito radente

IL MOTO È UNIFORME

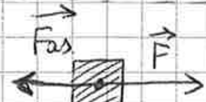


$W_F>0$, $W_{F_{ad}}<0$ $\Big\}$ $W_{TOT}=0$ $\qquad |W_F| = |W_{F_{ad}}|$

LAVORO MOTORE — LAVORO RESISTENTE

PER AVERE RISULTANTE DELLE FORZE NULLA OCCORRE FORNIRE UNA FORZA DI MODULO UGUALE E CONTRARIA ALLA FORZA D'ATTRITO

Es: ATTRITO STATICO



$W=0$

Il lavoro è nullo poiché lo spostamento è pari a 0

IL MOTO CIRCOLARE UNIF. È UN ESEMPIO DOVE LA RISULTANTE DELLE FORZE È SEMPRE ORTOGONALE ALLA TRAIETTORIA

ENERGIA CINETICA

IL LAVORO È LEGATO ALLO SPOSTAMENTO: NO SPOST. => NO LAVORO. IL VICEVERSA NON VALE: PUÒ ESSERCI SPOSTAMENTO SENZA CHE CI SIA LAVORO

$W=\int_A^B dW = \int_A^B \vec F\, d\vec s$ TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA

$$dW = \vec F\, d\vec s = F_T\, ds = m a_T\, ds = m\frac{dv}{dt}ds = m\left(\frac{dv}{ds}\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v}\right)\cancel{ds} =$$

RAPPORTO TRA LAVORO INFINITESIMO E LA VARIAZIONE INFINITESIMA DEL MODULO DI V.

$$= \boxed{mv\,dv} \Rightarrow W = \int_A^B dW = \int_A^B mv\,dv = m\int_A^B v\,dv = \cancel{m\frac{v_B^2}{2}}$$

$$= m\left(\frac{v_B^2}{2}-\frac{v_A^2}{2}\right) = \frac12 m v_B^2 - \frac12 m v_A^2 = E_{KB}-E_{KA} = \Delta E_K$$

$$E_K = \frac12 mv^2 + \cancel{cost}$$ ← CONSIDERIAMO ENERGIA CINETICA NULLA QUANDO IL CORPO È FERMO

TEOR. EN. CIN: $W=\Delta E_K$ Questo teorema è valido per ogni tipo di forza (purché m sia costante)

$p=mv \to E_K = \frac{p^2}{2m} \to p=\sqrt{2mE_K}$

FORZE COSTANTI ($\vec{F}$ = cost e diretta $\hat{u}_z$)

F COSTANTE E DIRETTA VERSO UNA DETERMINATA DIREZIONE

$$W = -\Delta E_p$$

$$E_p = Fz + \text{cost}$$

LAVORO DI UNA FORZA ELASTICA

$$\vec{F} = -kx\hat{u}_x \qquad d\vec{s} = dx\hat{u}_x + dy\hat{u}_y + dz\hat{u}_z$$

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = \int_A^B -kx\underbrace{\hat{u}_x \cdot d\vec{s}}_{dx} = -k\int_A^B x\,dx = -k\left[\frac{x_B^2}{2} - \frac{x_A^2}{2}\right] =$$

$$= -\left[\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right] = -\Delta E_p$$

NEL CASO DI ALLONTANAMENTO DAL CENTRO SI HA $W<0$, E_p AUMENTA

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 + \text{cost}}$$ EN. POTEN. ELASTICA

LAVORO DI UNA FORZA DI ATTRITO RADENTE (di tutte solitamente di ATTRITO DINAMICO)

$$W = \int_A^B \vec{F}_{a.d.}\, d\vec{s} = \int_A^B (-\mu_d N\underbrace{\hat{u}_T)\, d\vec{s}}_{} = \int_A^B -\mu_d N\, ds =$$

$$\hat{u}_T \cdot d\vec{s} = \hat{u}_T \cdot ds\,\hat{u}_T = ds$$

$$\hat{u}_T \cdot \hat{u}_T = 1$$

$$= -\mu_d N \int_A^B ds \Rightarrow W < 0$$

IL LAVORO DELLA F_{ad} E' SEMPRE NEGATIVO, SEMPRE OPPOSTO A v.
SI TRATTA, QUINDI, DI LAVORO RESISTENTE

SOMMA DI TUTTI GLI SPAZI PERCORSI, LUNGH. TRAIET. EFFETTIVA

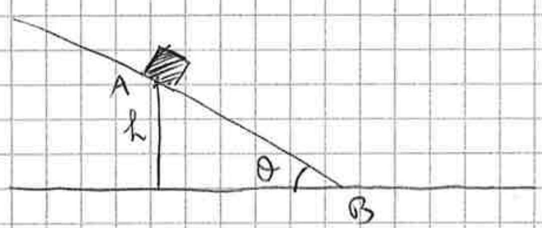
$\Rightarrow$ DIPENDE DALLA TRAIETTORIA (NON SOLO DAGLI ESTREMI)

$\Downarrow$

NEL CASO DELLA FORZA DI ATTRITO NON POSSIAMO, QUINDI, DEFINIRE L'ENERGIA POTENZIALE

Le forze, come quelle di attrito, per cui non può essere definita un'energia potenziale, sono dette FORZE NON CONSERVATIVE. Quelle per cui può essere definita sono le forze CONSERVATIVE, come quelle che abbiamo visto prima di quelle di attrito

Es. vincolo liscio



Il lavoro svolto dalla forza normale è nullo (⊥), quindi non consideriamo questa forza, e consideriamo soltanto P

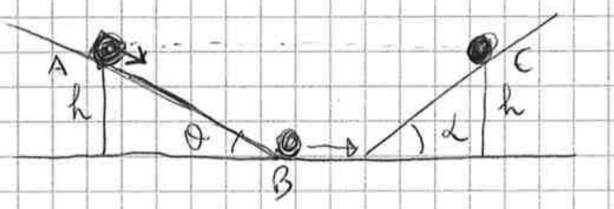
E_m = costante $\quad E_{m_A} = E_{m_B}$

$E_{m_A} = E_{K_A} + E_{P_A} = 0 + mgh$ NEL PUNTO A L'EN. CIN è 0, pari a 0 l'EN. POT. in B

$E_{m_B} = E_{K_B} + E_{P_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$

$$\cancel{m} g h = \frac{1}{2} \cancel{m} v_B^2$$

$$v_B = \sqrt{2gh}$$



Se non ci sono forze non conservative (come l'attrito), l'energia meccanica si conserva, quindi sia in A che in C, dato che lì l'energia cinetica è 0, l'energia potenziale assume lo stesso valore.
Il mazzo raggiunge quindi la stessa altezza, dato che l'en. potenziale dipende da questa (E_P non dipende dall'angolo α)

CONSIDERIAMO MEGLIO DA A a B:
LA VELOCITA' DI ARRIVO SU B è la stessa che si avrebbe per una CADUTA VERTICALE lungo AB', CAMBIA, invece, IL TEMPO IMPIEGATO

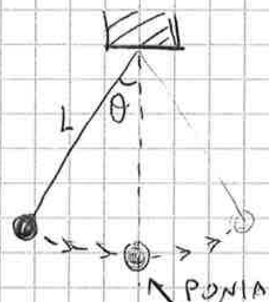
AB': $t' = \sqrt{2h/g}$

AB: $a = g\,\text{sen}\theta$; $\Delta y = h/\text{sen}\theta \Rightarrow \frac{h}{\text{sen}\theta} = \frac{1}{2} g\,\text{sen}\theta\, t^2$

$$\Rightarrow t = \sqrt{2h/g\,\text{sen}^2\theta} = t'/\text{sen}\theta > t'$$

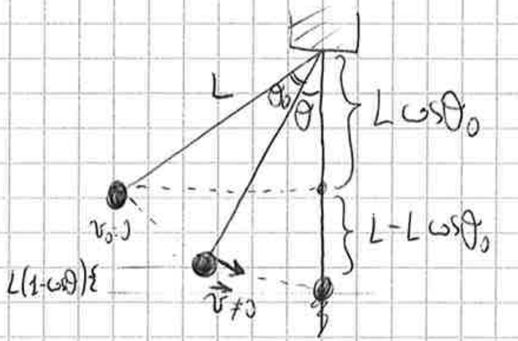
IL TEMPO IMPIEGATO LUNGO AB è QUINDI MAGGIORE DI QUELLO DI CADUTA.

Es. PENDOLO SEMPLICE



La tensione del filo è ortogonale allo spostamento, il lavoro corrispondente è quindi nullo.

Consideriamo l'ATTRITO VISCOSO DELL'ARIA pari a 0.



$$E_{m_{\theta_0}} = E_{p_{\theta_0}} + E_{k_{\theta_0}} =$$
$$= mgL(1-\cos\theta_0) + \cancel{0}$$

~~$E_{m_\theta} =$~~

$$E_{m_\theta} = mgL(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\cancel{m}gL(1-\cos\theta_0) = \cancel{m}gh(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}\cancel{m}v^2$$

$$v^2 = 2gL[\cancel{1} - \cos\theta_0 - \cancel{1} + \cos\theta]$$

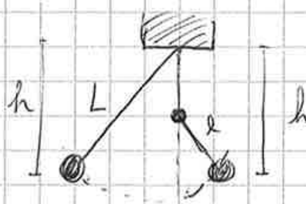
$$\boxed{v(\theta) = \sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\theta_0)}}$$

se $\theta = 0$ (NEL PUNTO PIÙ BASSO)

$$v = \sqrt{2g\underbrace{L(1-\cos\theta_0)}_{h}} = \sqrt{2gh}$$

A parità di differenza di altezza percorsa la variazione di E_K è la stessa ($v=\sqrt{2gh}$). Non importa quale sia la traiettoria, ma solo l'altezza percorsa.

Se aggiungiamo un vincolo, in modo tale che $l < L$, notiamo che il corpo raggiunge comunque la stessa altezza



$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$d\vec{r} = dx\,\hat{u}_x + dy\,\hat{u}_y + dz\,\hat{u}_z$$

$$df = \nabla f \cdot d\vec{r}$$

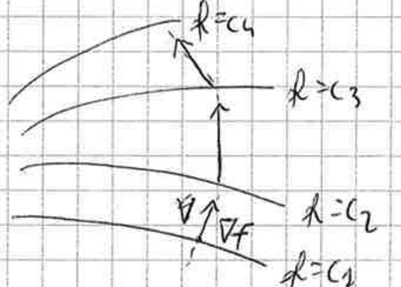
1) $d\vec{r}$ su ~~superficie f = cost~~ superficie $f = \text{cost} \Rightarrow df = 0$

$df = 0 \Rightarrow \nabla f \perp d\vec{r}$

$\Rightarrow \nabla f \perp \text{sup } f = \text{cost}$

2) $d\vec{r} \perp \text{sup. } f \quad f = \text{cost}$

$d\vec{r} \parallel \nabla f \Rightarrow df_{MAX}$



$c_4 > c_3 > c_2 > c_1$

∇f ci dà la direzione e il verso di massima variazione della funzione, ossia a parità di spostamento fatto, il verso per il quale f varia di più.

SUPERFICI EQUIPOTENZIALI: LUOGO DEI PUNTI CHE hanno la stessa en. pot. $\Rightarrow$ PER UNO SPOSTAMENTO LUNGO UNA SUPERFICIE IL LAVORO E' NULLO

$\vec{F} = -\nabla E_p$ La forza è diretta ortogonalmente alle superfici eq equipot., ed ha il verso concorde con la DIMINUZIONE più rapida dell'energia potenziale.

$E_p = mgz + \text{cost}$

$$\vec{F} = -\nabla E_p = -\frac{dE_p}{dz}\hat{u}_z = -mg\hat{u}_z = m\vec{g}$$

IN TAL CASO, LA FORZA ASSOCIATA ALL'ENERGIA POT. E' NORMALE, IN OGNI PUNTO, ALLA SUPERFICIE EQUIPOT. PA PASSANTE PER QUEL PUNTO, E INDICA, CON IL SUO VERSO, QUELLO DI DIMINUZIONE DI E_p

Dato che m e g sono delle costanti, il grafico di z e di E_p risulta analogo.

BUCA DI POTENZIALE: è una zona nella quale il punto è vincolato per un dato valore di E_{m}.

se il moto è circolare

$$\vec{L} = m r^2 \vec{\omega}$$

MOMENTO DELLA FORZA

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$ (SE SI CAMBIA POLO: $M_{O'} = M_O + O'O \times F$)

SE VENGONO APPLICATE PIU' FORZE SI HA: $M = r \times F_1 + \dots r \times F_n = r \times (F_1 + \dots + F_n) = r \times R$ ← RISULTANTE

TEOREMA DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \cancel{\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times m\vec{v}}_{\cancel{\vec{v} \times m\vec{v}} = 0} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} =$$

LA DERIVATA TEMPORALE DEL MOMENTO ANGOLARE È UGUALE AL MOMENTO DELLA FORZA SE ENTRAMBI I MOMENTI SONO RIFERITI ALLO STESSO POLO FISSO IN UN SISTEMA DI RIFERIMENTO INERZIALE

$$= \vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \qquad \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0$$

IL MOMENTO DELLA FORZA È NULLO SE $F = 0$ O SE $\vec{F} \parallel \vec{r}$

28/03/17

OSS: Se $\vec{M} = 0$ ($\vec{F} = 0 \lor \vec{r} \parallel \vec{F}$) $\Rightarrow \vec{L} = \text{cost}$. CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE

$$\vec{M}dt = d\vec{L} \qquad \int \vec{M}\,dt = \int_A^B d\vec{L} = \vec{L}_B - \vec{L}_A = \Delta\vec{L}$$

IL MOM. ANGOLARE DI UN PUNTO MATER. RIMANE COSTANTE NEL TEMPO SE IL MOM. DELLE FORZE È NULLO

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^t \vec{M}\,dt = \Delta\vec{L}}$$

se $\vec{F}$ è IMPULSIVA: $\int_0^t \vec{M}\,dt = \int_0^t \vec{r} \times \vec{F}\,dt =$

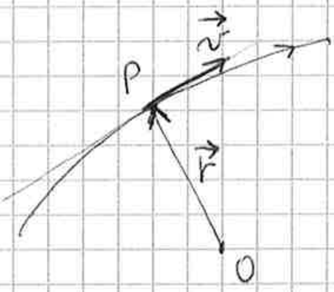
dato che r è circa una costante $= \vec{r} \times \underbrace{\int_0^t \vec{F}\,dt}_{J} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{J} = \Delta\vec{L}$

TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO

PER PRODURRE UNA VARIAZIONE FINITA DEL MOMENTO ANG. DI UN PUNTO MAT. OCCORRE L'AZIONE, PER UN CERTO Δt, DEL MOMENTO DI UNA FORZA

↑ TEOREMA DEL MOMENTO DELL'IMPULSO

ES:



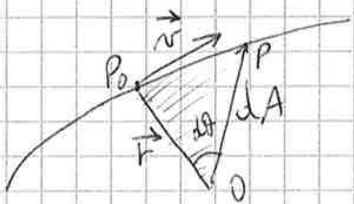
① Se $\vec{L} = cost$ (DIREZ. DI L = COST) => il moto avviene su un piano, che è ortogonale ad $\vec{L}$ (POICHÉ $\vec{L}$ È SEMPRE ⊥ al piano DI r e v)

② Dato che il verso di $\vec{L}$ è costante, è costante anche il verso del moto (la traiettoria viene percorsa sempre nello stesso verso.

③ Dato che $L = cost$ (MODULO DI L), $L = m r v_\theta = m r^2 \frac{d\theta}{dt}$

DEV'ESSERE COSTANTE

IL RAGGIO VETTORE "SPAZZA" $\frac{d\theta}{dt}$

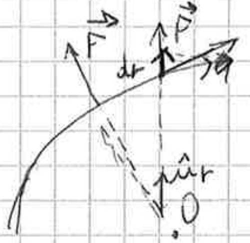


$$dA \simeq \frac{1}{2}(r\,d\theta)\,r = \frac{r^2}{2}d\theta \qquad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{2m}$$

DATO CHE IL MODULO DI L È COSTANTE, LO SARÀ ANCHE LA VELOCITÀ AREALE

QUINDI: LA TRAIETTORIA DI UN PUNTO CHE SI MUOVE IN UN CAMPO DI FORZE CENTRALI ~~GIACE~~ ~~GIACE~~ IN UN PIANO FISSO PASSANTE PER IL CENTRO ED È PERCORSA IN MODO DA AVERE VEL. AREALE COSTANTE

Tutte le FORZE CENTRALI SONO FORZE CONSERVATIVE



$$W = \int \vec{F}\,d\vec{s} = \int F(r)\,\underbrace{\hat{u}_r\,d\vec{s}} = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr =$$

È LA PROIEZIONE DI $d\vec{s}$ SULLA DIREZ. INDIVIDUATA DA $\hat{u}_r$: dr

$$\boxed{\hat{u}_r \cdot d\vec{s} = \underbrace{ds\cos\theta}_{dr}}$$

~~Quindi~~

$$= f(r_B) - f(r_A)$$

IL LAVORO È DATO DALLA VARIAZIONE DI UNA FUNZIONE DELLE COORDINATE DI A e B

CONDIZIONE PERCHÉ LA FORZA SIA CONSERVATIVA

Quindi tutte le forze centrali sono anche conservative.

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}\right) = \cancel{\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'}}$$

$$= \underbrace{\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}}_{v'} + x'\underbrace{\frac{d\hat{u}_{x'}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\hat{u}_{x'}} + y'\underbrace{\frac{d\hat{u}_{y'}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\hat{u}_{y'}} + z'\underbrace{\frac{d\hat{u}_{z'}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\hat{u}_{z'}}$$

FORMULE DI POISSON

Riassumendo: $\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \underbrace{\left[x'\hat{u}_{x'} + y'\hat{u}_{y'} + z'\hat{u}_{z'}\right]}_{r'}$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

TEOREMA DELLE VELOCITA' RELATIVE

$(d\vec{r}'/dt) = v' + \omega \times r')$

p^* : $\vec{v}' = 0$ (e' solidale al sistema di riferimento MOBILE)

$\vec{v}_t$ (VELOCITA' DI TRASCINAMENTO) $= \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

~~IL MOTO DI TRASCIN.~~

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_t$

LA VEL. DI TRAS. E' LA DIFFERENZA: ~~TRA~~ $v_T = v - v' = \vec{v}_{o'} + \vec{\omega} \cdot \vec{r}'$ NEL PUNTO P^*, INFATTI, $\vec{v}' = 0$

v_T E' PARI ALLA VELOCITA' RISPETTO AL SISTEMA FISSO DI QUEL PUNTO P^* SOLIDALE CON IL SISTEMA MOBILE

I TRE VERSORI u_x, u_y, u_z SONO RIGIDAMENTE LEGATI FRA DI LORO, LE LORO MUTUE ORIENTAZIONI NON POSSONO CAMBIARE: ALLA ROTAZIONE DI UNO CON VELOCITA' ANGOL, CORRISPONDE LA ROTAZIONE DEGLI ALTRI DUE CON ~~VELOCITA'~~ LA STESSA VELOCITA' ANGOLARE

Se P fosse fermo rispetto al sistema mobile la sua velocità calcolata rispetto al sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se P si muove rispetto al sist. MOBILE, la velocità assoluta risulta essere la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

IL MOTO DI TRASC. E' LEGATO AL MOTO DEL SISTEMA MOBILE E PUO' ESSERE CONSIDERATO COME SOMMA DI UN TERMINE TRASLATORIO CON VEL. ISTANT. $V_{o'}$ ED UN TERMINE ROTATORIO CON VELOCITA' ANGOLARE ω, VARIABILE GENERALMENTE SIA IN MODULO CHE IN DIREZIONE.

B: $\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') = \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

TORNIAMO ALL'ACCEL. ASSOLUTA

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{0'} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$\cancel{= \vec{a}' + \vec{a}_{0'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + d\vec{\omega}}$$

$$= \left[\vec{a}' + \vec{a}_{0'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' \right]$$ TEOREMA DELLE ACCEL. RELATIVE

$P^* \rightarrow \vec{a} = \vec{a}_t = \vec{a}_{0'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}'$

$\vec{v}' = 0$
$\vec{a}' = 0$
(P^* è SOLIDALE AL SISTEMA MOBILE)

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_c = 2\omega \times v'$$

$\vec{a}_t$ ACCEL DI TRASCINAM.

$\vec{a}_c$ ACCEL. COMPLEMENTARE (o di CORIOLIS) → QUEST'ULTIMO TERMINE DIPENDE DAL MOTO DI P RISPETTO AL SISTEMA MOBILE TRAMITE LA VELOCITÀ RELATIVA v'

Le accelerazioni vengono osservate in maniera molto diversa dai 2 osservatori, che studiano, quindi, 2 moti cinematicamente diversi. Ciascun osservatore individua, di conseguenza, una forza diversa come causa del moto.

SRI: Sistema di rif. inerziale: è valida la LEGGE DI INERZIA: il punto materiale non cambia il suo moto se non è sottoposto ad altre forze.

·) SR. in moto rettilineo uniforme rispetto al sistema di rif. inerziale →

$\vec{v}_{0'} = cost \Rightarrow \vec{a}_{0'} = 0 \quad \vec{\omega} = 0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$

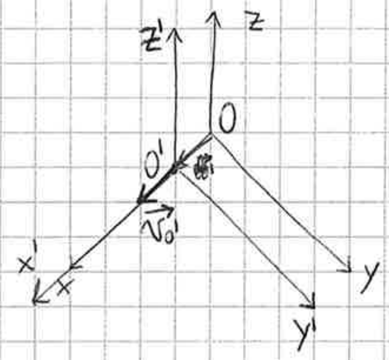
⇓

ANCHE IL SECONDO S.R. è INERZIALE

⇓

Dato un SRI, tutti quelli che si muovono di MRU rispetto ad esso sono INERZIALI

ESEMPIO: Moto di trascinamento rettilineo uniforme $\rightarrow$ $\vec{\omega} = 0$, $\vec{a}_{O'} = 0$, $\vec{v}_{O'} = \vec{v}_t = cost$



$$\vec{v}_{O'} = v_{O'} \hat{u}_x$$

ALL'ISTANTE $t=0$ LE DUE ORIGINI COINCIDONO
$\Downarrow$

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{OO'} \qquad \vec{OO'} = \vec{v}_{O'} \cdot t = v_{O'} t \cdot \hat{u}_x$$

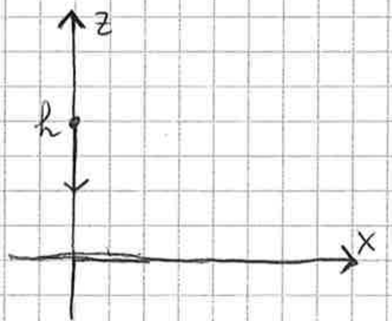
$$\begin{cases} x' = x - v_{O'} t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$v' = \vec{v} - \vec{v}_t = \vec{v} - \vec{v}_{O'} = \vec{v} - v_{O'} \cdot \hat{u}_x$$

$$\begin{cases} v_x' = v_x - v_{O'} \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$$

TRASFORMATE GALILEIANE (DA UN SRI AD UN ALTRO SRI)

$$\vec{a}' = \vec{a}$$



$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = 0 \\ v_y = 0 \\ v_z = -gt \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$$

ES: ASCENSORE

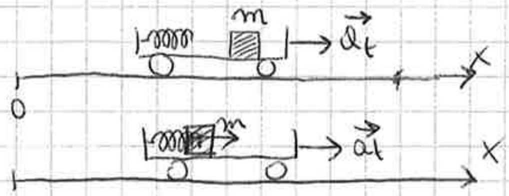
OSRI $\vec{a}=\vec{g}$ O: SRI $\vec{a}=\vec{g}$

OSRnI O': SRnI $\vec{a}'=\vec{a}-\vec{a}_t$

Se S.R. in caduta libera $\vec{a}_t=\vec{g}$

$$\vec{a}'=\vec{a}-\vec{a}_t=\vec{g}-\vec{g}=0$$

ES:

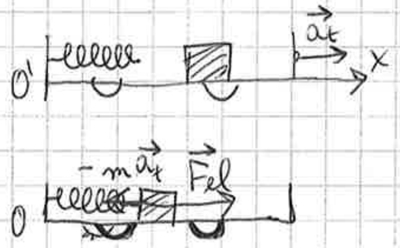


INIZIALMENTE NON CI SONO FORZE A CUI E' SOTTOPOSTA m LUNGO x. IN UN SECONDO MOMENTO m VA A COMPRIMERE LA MOLLA.

ADESSO LA MOLLA ESERCITA UNA FORZA ELASTICA SULLA MASSA

$$\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}_{el}=m\vec{a}_t$$
$$\downarrow$$
$$k\Delta l=m\vec{a}_t$$
$$\downarrow$$
$$\Delta l=\frac{m}{k}a_t$$

Consideriamo ora il punto di vista di un osservatore che sta sul treno: SRnI



L'OSSERVATORE NOTA SOLAMENTE UNA FORZA APPARENTE VERSO SX: $-m\vec{a}_t$ A CUI E' SOTTOPOSTA ~~IL CARRELLO~~ LA MASSA.

$$a'=0 \Rightarrow m a_t=k\Delta l \; ; \; \Delta l=\frac{m}{k}a_t$$

LA MOLLA COSTITUISCE IN PRATICA UN ACCELEROMETRO, CHE MISURA L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA NON INERZIALE, INFATTI DALLA MISURA DI Δl SI PUO' DEDURRE IL VALORE DI a_T

CASO 1: P in quiete rispetto a O

$\vec{v} = 0 \qquad \vec{a} = 0$

per O': $\vec{v}' = \underset{0}{\cancel{v}} - \omega \times r' \qquad \vec{a}' = \underset{0}{\cancel{a}} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' =$

$$= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2\vec{\omega} \times (-\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= -\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') =$$

$$= +\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

RIP.

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{v} =$

$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

CASO 2: P in quiete rispetto ad O'

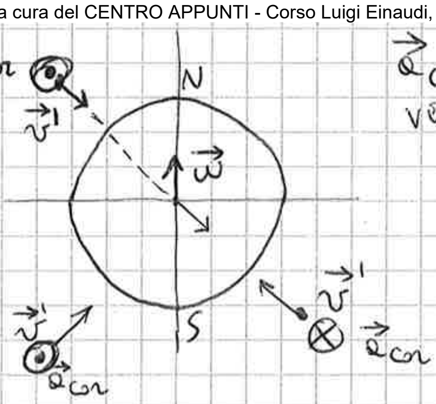
$\vec{v}' = \vec{a}' = 0$

In questo caso il punto è legato con un filo all'asse di rotazione e ha velocità ωr, in modo tale da ruotare con la stessa velocità del disco. Quindi per O il punto descrive un moto circolare uniforme sotto la azione della tensione del filo. O' vede il punto fermo ($\vec{v}' = 0 \quad \vec{a}' = 0$). Tuttavia O' osserva anche che il filo è teso, E DEVE QUINDI SUPPORRE CHE SUL punto agisca una forza diretta verso l'esterno, che chiama FORZA CENTRIFUGA, bilanciata dalla tensione del filo

Se il moto di trascinamento è rotatorio, uniforme o vario, è sempre $a_T \neq 0$, e quindi non vale mai $a = a'$.

Non esiste, quindi, l'analogo rotatorio della relatività galileiana. In un sistema rotante è quindi sempre possibile mettere in evidenza la ROTAZIONE, OSSIA ACCORGERSI DI ESSERE IN MOVIMENTO

CADUTA DEI GRAVI
verso EST



$\vec{a}_{cor}$ ACCEL. DI CORIOLI, HA VERSO USCENTE = $= -2\vec{\omega} \times \vec{v}'$

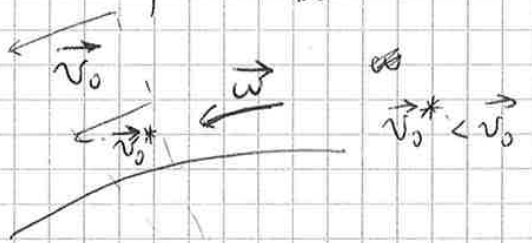
In tutti i casi l'acc. di Cor. determina una deviazione verso EST.

Un osservatore inerziale vede il punto materiale cadere con un moto determinato unicamente dall'acc. g_0.

Dobbiamo considerare che il punto materiale non è inizialm. fermo, poiché è fermo rispetto alla terra, e sta quindi ruotando con essa. Il moto avviene quindi su un piano, passante per il centro della terra, su cui giacciono i vettori $\vec{v}_0$ e $\vec{g}_0$.

Il punto cade su un punto intersezione fra questo piano e la superficie terrestre.

Questo spiega lo spostamento / deviazione verso l'equatore e verso est.

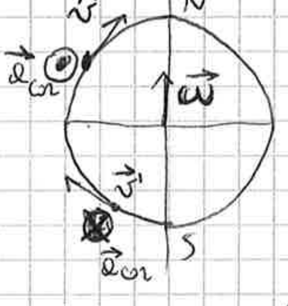


Coriolis moto orizzontale

$-2\vec{\omega} \times \vec{v}$

Nell'emisfero nord è un effetto che tende verso _

Nell'emisfero sud verso _

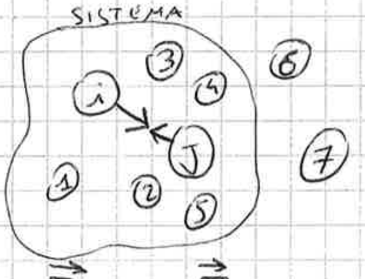


Sono effetti che dipendono dalla velocità

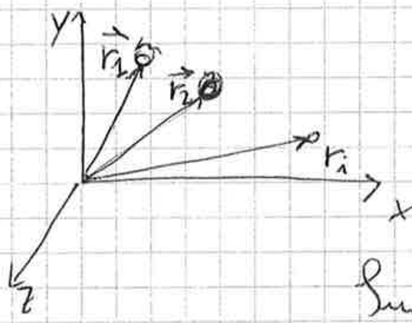
4\04\17
DAGHERO

SISTEMA: Insieme di corpi puntiformi che possono interagire fra loro (FORZE INTERNE) o anche con corpi esterni al sistema (FORZE ESTERNE).

Le distinzione tra forze INTERNE ed ESTERNE è arbitraria, dipende da come si definisce il confine del sistema



$$\vec{F}_{iJ} = -\vec{F}_{Ji}$$



$i = 1 \dots N$

$\vec{R}_i$

Sul corpo i: $\vec{R}_i = \sum_{J \neq i} \vec{F}_{Ji} + \vec{F}_i^{ext}$

NON POSSIAMO EVIDENZIARE DAL MOTO DI P_i I DUE TIPI DI FORZE, INFATTI IL MOTO DI P_i È DATO DALLA RISULTANTE R_i

R (RISULTANTE DELLE FORZE TOTALI, SU OGNI CORPO) $= \sum_i \vec{R}_i = \sum_i \left(\sum_{J \neq i} \vec{F}_{Ji} + \vec{F}_i^{ext} \right) =$

$$\boxed{= \sum_{J \neq 1} \vec{F}_{J1} + \sum_{J \neq 2} \vec{F}_{J2} + \sum_{J \neq 3} \vec{F}_{JN}} + \vec{F}_1^{ext} + \vec{F}_2^{ext} + \vec{F}_N^{ext} + \dots$$

$$\cancel{\vec{F}_{21}} + \cancel{\vec{F}_{31}} + \vec{F}_{41} + \dots$$
$$\cancel{\vec{F}_{12}} + \cancel{\vec{F}_{32}} + \vec{F}_{42} +$$
$$\cancel{\vec{F}_{13}} + \cancel{\vec{F}_{23}} + \vec{F}_{43} + \dots$$

SI ANNULLANO TUTTE $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ LA RISULTANTE DELLE FORZE ~~ESTERNE~~ SUL SISTEMA È PARI ALLA RISULT. DELLE FORZE ESTERNE

$\downarrow$

0

LA RISULTANTE DI TUTTE LE FORZE INTERNE SUL SISTEMA È NULLA (III LEGGE DI NEWTON)
(NON È DETTO CHE SIA NULLA LA RISULTANTE DELLE FORZE INTERNE AGENTI SU OGNI PUNTO)

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i^{ext}$$

LE FORZE INTERNE POSSONO ESSERE CONSERVATIVE O NON CONS

$\forall$ corpo: $\vec{r}_i$ (POSIZIONE)

CONSIDERIAMO LE GRANDEZZE

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad \vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}, \quad \vec{p}_i = m_i \vec{v}_i,$$

$$E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2, \quad \vec{L}_{O'_i} = \vec{r}'_i \wedge m_i \vec{v}_i$$

MOMENTO ANGOLARE

IL MOM. ANGOLARE VA RIFERITO AD UN POLO, CHE PUÒ ESSERE L'ORIGINE O UN QUALSIASI PUNTO DEL SRI

OSS: IL PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE SI APPLICA A QUALUNQUE INTERAZIONE E QUINDI ANCHE ALLE FORZE ESTERNE, CHE PERÒ NON FANNO PARTE DEL SISTEMA CHE INTENDIAMO STUDIARE velocità del C.M.

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{r}_{CM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}\right) = \frac{1}{\sum_i m_i}\frac{d}{dt}\left(\sum_i m_i \vec{r}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{\sum_i m_i}\cdot \sum_i m_i \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}_i}{dt}\right)}_{\vec{v}_i}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$$

PRIMO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA

$$\boxed{\sum_i m_i = M} \quad \text{MASSA TOTALE}$$

$$v_{CM} = \frac{\vec{P}}{\sum_i m_i} \longrightarrow \cancel{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}} \longrightarrow \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

P COINCIDE CON LA QUANTITA' DI MOTO DEL C.M., CONSIDERATO COME UN PUNTO MATERIALE CHE ABBIA LA POSIZIONE r_{CM}, VELOCITA' v_{CM} E MASSA PARI ALLA MASSA TOTALE DEL SISTEMA

ACCELERAZ. DEL C.M.

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d}{dt}\vec{v}_{CM} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i \underbrace{\left(\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)}_{\vec{a}_i} =$$

$$= \boxed{\frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} = \vec{a}_{CM}}$$

SECONDO TEOREMA DEL CENTRO DI MASSA { ~~TEOREMA DEL MOTO~~

$$a_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{a}_i}{\sum_i m_i} \quad \Big| \quad m_i \vec{a}_i = \vec{R}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + F_i^{ext} =$$

$$= \frac{\sum F_i^{ext}}{\sum_i m_i} \longrightarrow \boxed{\sum F^{ext} = M\vec{a}_{CM}}$$

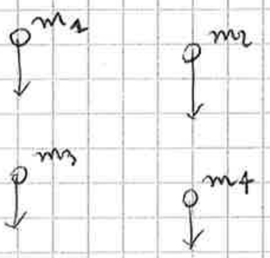
TEOREMA DEL MOTO DEL CENTRO DI MASSA

IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE COME UN PUNTO MATERIALE IN CUI SIA CONCENTRATA TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA E A CUI SIA APPLICATA LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE

RICORDA: LA RISULTANTE $R^{(I)}$ DI TUTTE LE FORZE INTERNE E' NULLA: $M a_{CM} = R^{(E)} + \underbrace{R^{(I)}}_{=0} = R^{(E)}$

$$M a_{CM} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \left(F_i^{(E)} + F_i^{(I)}\right) = R^{(E)} + R^{(I)} = R^{(E)} = M a_{CM}$$

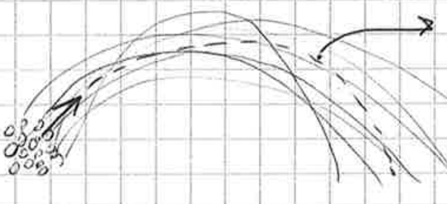
Esempio 4.4



$\vec{F}_i = m_i \vec{g}$ Trovare $\vec{a}_{CM}$

$$\sum \vec{F}^{ext} = \sum_i m_i \vec{a}_{CM}$$

$$\sum m_i \vec{g} = \left(\sum_i m_i\right) \vec{a}_{CM} \longrightarrow \vec{a}_{CM} = \vec{g}$$



CORPO DI MASSA M
$\vec{g}, \vec{v}_{CM}$

PRIMA EQUAZIONE CARDINALE

$$\sum \vec{F}^{ext} = M \vec{a}_{CM} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \qquad \vec{P} = M\vec{v}_{CM}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}^{ext} = \frac{d}{dt}\vec{P}} \text{ analoga di } \sum \vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \cancel{\frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM})}$$

IL MOTO È QUINDI DETERMINATO SOLO DALLE FORZE ESTERNE, L'AZIONE DELLE FORZE INTERNE NON PUÒ MODIFICARE LO STATO DI MOTO DEL CENTRO DI MASSA, MA MENTRE IL MOTO DI CIASCUN PUNTO DIPENDE DALLE FORZE INT ED EST AGENTI SU DI ESSO

$$= \frac{d}{dt}(M\vec{v}_{CM}) = \underbrace{\frac{dM}{dt}\vec{v}_{CM}}_{\text{se è } \phi} + M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt}$$

In generale la massa <u>non</u> può <u>cambiare</u>

CONSERV. DELLA QUANTITÀ DI MOTO

QUANDO LA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE È NULLA LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE DEL SISTEMA RIMANE COSTANTE $\rightarrow$ CM HA MRU

$$\text{Se } \sum \vec{F}^{ext} = 0 \longrightarrow \frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \underbrace{\vec{P} \text{ è costante}}_{M\vec{v}_{CM} \text{ è costante}} \Rightarrow$$

SI MUOVE CON IL CENTRO DI MASSA CHE VA A VELOCITÀ COSTANTE (SUPPONENDO m COSTANTE)

Se M è cost. $\Rightarrow \vec{v}_{CM}$ è costante

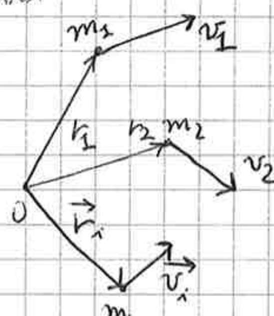
C'È EQUIVALENZA TRA CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO E PRINCIPIO DI AZIONE E REAZIONE, GENERALIZZABILE A SISTEMI PIÙ COMPLESSI

$$\text{Se } \sum \vec{F}^{ext} = 0 \; : \; a_{CM} = 0 \; , \; \underbrace{v_{CM} = \text{cost}}_{MRU} \; , \; P = \text{cost}.$$

NOTA: r_{CM}, v_{CM} e a_{CM} SONO LE MEDIE PESATE SULLE MASSE DEI RAGGI VETTORI, VELOCITÀ, ACCELERAZIONE DEI SINGOLI PUNTI E PERTANTO FORNISCONO INFORMAZIONI DI PROPRIETÀ MEDIE E NON SUL MOTO DEI SINGOLI PUNTI.

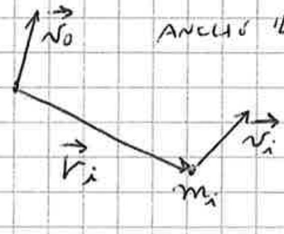
TEOREMA del MOMENTO ANGOLARE 06\04\17

(POLO MOBILE) → IL RAGGIO VETTORE PUO' AVERE ENTRAMBI GLI ESTREMI IN MOVIMENTO, CON VELOCITÀ v_i e v_0



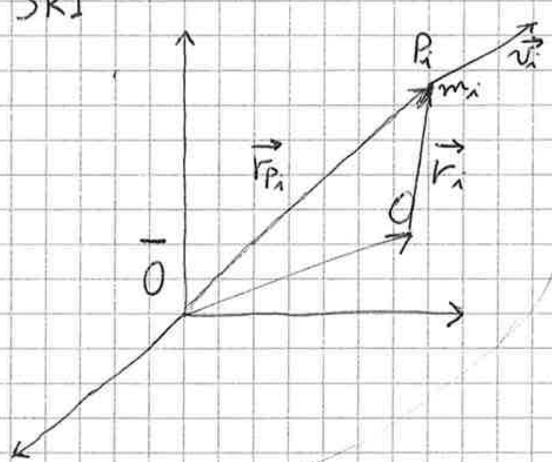
$$\vec{L} = \sum_i r_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i v_i + \sum_i \vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt}$$



ANCHE IL POLO SI PUÒ MUOVERE

SRI



$$\vec{r}_{P_i} = \vec{r}_0 + \vec{r}_i$$

$$\underbrace{\frac{d\vec{r}_{P_i}}{dt}}_{\vec{v}_i} = \underbrace{\frac{d\vec{r}_0}{dt}}_{\vec{v}_0} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_0}$$

$$\boxed{m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i = \boxed{\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_0) \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} \right) =$$

$$= \underbrace{\cancel{\sum_i \vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}}_{=0} \underbrace{- \sum_i \vec{v}_0 \times m_i \vec{v}_i}_{} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(E)}}_{} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(I)}}_{}$$

$$= - v_0 \times \sum_i m_i \vec{v}_i + \vec{M}^{(E)} + M^{(I)}$$

È NULLA POICHÈ OGNI ADDENDO È UN PRODOTTO VETTORIALE DI VETTORI PARALLELI

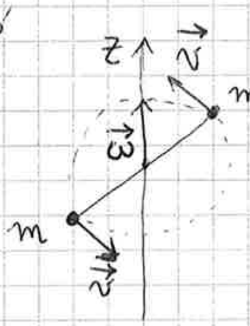
MOMENTO TOTALE DELLE FORZE ESTERNE RISPETTO AL POLO O

MOM. TOT. DELLE FORZE INTERNE RISPETTO AD O

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 83 di 198

• $\vec{M}^{(E)} = 0$ (SISTEMA NON ISOLATO) anche se $\vec{R}^{(e)} \neq 0$
(rispetto ad un certo polo) $\searrow \vec{L} = \text{cost.}$ (SI HA CONSERV. DEL MOM. ANGOLARE SOLO SE CALCOLATO RISPETTO A QUEL POLO!)

Esempio



$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 =$$

$$= 2 r m v \hat{u}_z = 2 m r^2 \omega \hat{u}_z = 2 m r^2 \vec{\omega}$$

$v = \omega r$

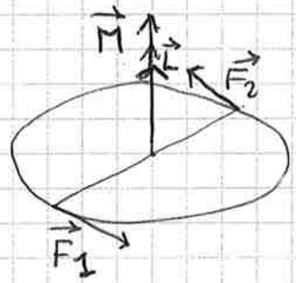
SE $\vec{M}^{(E)} = 0$ ALLORA L SI CONSERVA, QUINDI SE CAMBIA IL RAGGIO VALE LA RELAZIONE:

$\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ (L è diretto nello stesso verso di ω)

$$L_{in} = 2 m r_1^2 \omega_1 = 2 m r_2^2 \omega_2 = L_{fin}$$
$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \omega_1$$

Se $\vec{M}^{(E)} \neq 0 \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$

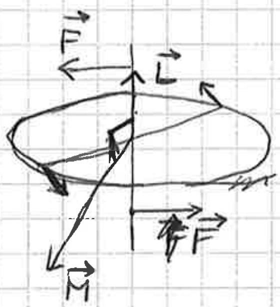
• $\vec{M}^{(E)} \parallel \vec{L}$



Se $\vec{M} \uparrow\uparrow \vec{L}$
L cresce

Se $\vec{M} \uparrow\downarrow \vec{L}$ (ANTI-PARALLELO)
L decresce

• $\vec{M}^{(E)} \perp \vec{L}$
$\Downarrow$
$\vec{L}$ CAMBIA DIREZIONE



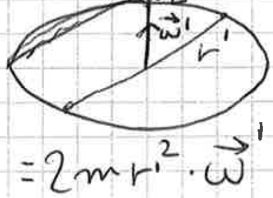
• $\vec{M}^{(E)} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cost.}$

$\vec{L} = 2 m r_1^2 \vec{\omega}$

Se $\vec{M}^{(E)} = 0$, $\vec{L}' = \vec{L}$

$2 m r'^2 \cdot \vec{\omega}' = 2 m r^2 \omega$

$$\boxed{\vec{\omega}' = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 \cdot \vec{\omega}}$$



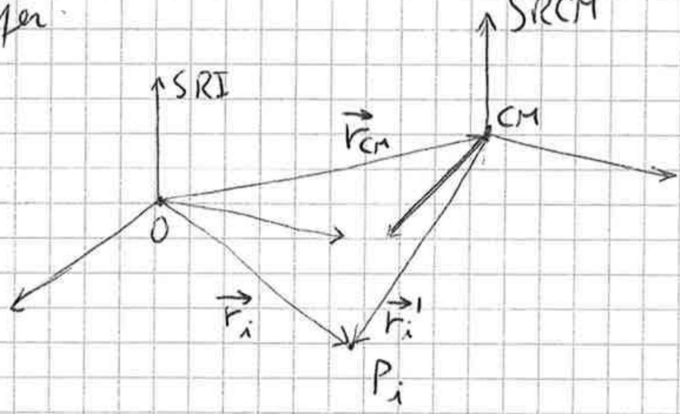
$\vec{L}' = 2 m r'^2 \cdot \vec{\omega}'$

85

SISTEMA DI RIFERIMENTO DEL CENTRO DI MASSA

Il moto del CM è rappresentativo del moto medio di un sistema.
Il SR del CM si caratterizza per:

1) Ha origine nel CM
2) Ha assi // al SRI



$\vec{r}_i = \vec{r}_{CM} + \vec{r}_i{}'$

$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i{}' \qquad (\vec{\omega} = 0)$

•) Nel SR_{CM}: $\vec{r}_{CM}{}' = 0$, $\vec{v}_{CM}{}' = 0$, $\vec{a}_{CM}{}' = 0$

→ Il CM è ovviamente in quiete, fermo

$\vec{r}_{CM}{}' = 0 \longrightarrow \vec{r}_{CM}{}' = \dfrac{\sum_i m_i \vec{r}_i{}'}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{r}_i{}' = 0}$

$\vec{v}_{CM}{}' = 0 \longrightarrow \vec{v}_{CM}{}' = \dfrac{\sum_i m_i \vec{v}_i{}'}{\sum_i m_i} = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{v}_i{}' = 0}$

LA QUANTITÀ DI MOTO RISULTA NULLA SE CALCOLATA RISPETTO AL SIST. DI RIFERIM. DEL C.M. → $\sum_i \vec{p}_i{}' = \boxed{\vec{P}' = 0}$

$\vec{a}_{CM}{}' = 0 \Rightarrow \boxed{\sum_i m_i \vec{a}_i{}' = 0}$

È INERZIALE SE $R^{(E)} = 0$ COSÌ CHE $a_{CM} = 0$

Il SR_{CM}, in generale, NON è inerziale ⇒ DOBBIAMO CONSIDERARE LE FORZE APPARENTI

⇒ Nel SR_{CM} $m_i \vec{a}_i{}' = \vec{F}_i^{(E)} + \vec{F}_i^{(I)} + \underbrace{\vec{F}_{app}}$

NON CI SONO FORZA CENTRIFUGA E DI CORIOLIS POICHÉ $\vec{\omega} = 0$
C'È, INVECE: $-m_i \vec{a}_t = -m_i \vec{a}_{CM}$

SUI SINGOLI PUNTI SEMBRA AGIRE LA FORZA DI INERZIA $-m_i a_T = -m_i a_{CM}$, IN QUANTO L'ACCELERAZIONE DI TRASCINAMENTO È PARI A QUELLA DELL'ORIGINE, CIOÈ DEL CENTRO DI MASSA.

$F_i^{(E)} + F_i^{(I)} - m_i a_{CM} = m_i a_i'$

$\boxed{R^{(E)} = m a_{CM}}$

$\xrightarrow{\text{SOMMANDO TUTTI I PUNTI}} R^{(E)} - \sum_i m_i a_{CM} = R^{(E)} - m a_{CM} = \sum_i m_i a_i' = 0 \qquad (a_{CM}' = 0)$

TEOREMI DI KÖNIG 10\04\17

STABILISCONO LE RELAZIONI TRA I MOMENTI ANGOLARI E LE ENERGIE CINETICHE DI UN SISTEMA DI PUNTI MATERIALI, VALUTATI IN UN SRI E NEL SR_{CM}

SRI: $\vec{L}$, E_k | SR_{CM}: $\vec{L}'$, E_k'

(1)

Assumiamo per semplicità che il polo coincida con l'origine del SRI

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \qquad \begin{cases} \vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{r}_{CM} \\ \vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM} \end{cases}$$

$$= \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) =$$

$$= \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{L}'} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_i'}_{\vec{r}_{CM} \times (\sum_i m_i \vec{v}_i') = 0} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_{CM}}_{(\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{v}_{CM} = 0} + \underbrace{\sum_i \vec{r}_{CM} \times m_i \vec{v}_{CM}}_{\vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM}}$$

($\vec{r}_{CM}$: NON DIPENDE DA i)

$$\vec{L} = \vec{L}' + \underbrace{\vec{r}_{CM} \times m \vec{v}_{CM}}_{\vec{L}_{CM}} \quad (= \vec{r}_{CM} \times \vec{P})$$

$\vec{L}_{CM}$ è IL MOM. ANGOLARE DEL SISTEMA nel caso in cui tutta la massa fosse CONCENTRATA NEL CENTRO DI MASSA

$$\Downarrow$$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_{CM} \quad (\text{I teo K})$$

$\vec{L}'$: MOM. ANG. DEL SISTEMA RISPETTO AL C.M.

$\vec{L}_{CM}$: MOMENTO ANGOLARE DEL CENTRO DI MASSA "MOTO MEDIO"

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM} = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}$$

RAPPRESENTA IL MOMENTO ANGOLARE RISPETTO ALL'ORIGINE DEL SISTEMA INERZIALE, DI UN PUNTO MATERIALE CHE HA UNA MASSA PARI A QUELLA TOTALE DEL SISTEMA

SE ASSUMIAMO COME POLO IL CM: $\vec{L} = \vec{L}' + \cancel{\vec{L}_{CM}}^{=0} \quad \vec{L} = \vec{L}'$

(2) Siamo sempre nel SRI $\qquad E_k = \sum_i m_i v_i^2$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}$$

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM})^2 = \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2}_{E_k'} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2}_{\frac{1}{2}(\sum_i m_i) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2} + \underbrace{\sum_i m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{CM}}_{(\sum_i m_i \vec{v}_i') \cdot \vec{v}_{CM} = 0}$$

E_k': ENERGIA CIN. CALCOLATA NEL $S.R_{CM}$

SI ANNULLA PER LE PROPRIETÀ DEL $S.R_{CM}$

$$\Downarrow$$

$$E_k = E_k' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2$$

$\frac{1}{2} m v_{CM}^2$ → Energ. CINET. DEL C.M. $E_{k,CM}$ (È L'EN. CIN. DI UN PUNTO MATERIALE CHE POSSIEDE TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA E SI MUOVE CON $v = v_{CM}$)

URTI

NOTA IMPORTANTE: ANCHE IN ASSENZA DI FORZE ESTERNE (SISTEMA ISOLATO) NON È DETTO CHE L'EN. MECCANICA SI CONSERVI: CIÒ DIPENDE DALLE CARATTERISTICHE DELLE FORZE INT. (CONSERVATIVE O NON)

Considerando 2 ~~particelle~~ PUNTI MATERIALI, avviene un URTO quando queste si avvicinano a tal punto da originare un'interazione relativamente forte in un intervallo di tempo molto piccolo e quindi trascurabile.

~~Le forze~~ L'interazione è di tipo contatto

NELL'URTO SI POSSONO SVILUPPARE FORZE MOLTO INTENSE CHE MODIFICANO LA Q. DI MOTO DI OGNI PUNTO

In assenza di forze esterne la quantità di moto totale del sistema si conserva ($\vec{P}$ = cost)

QUESTE FORZE, CHE AGISCONO PER UN TEMPO MOLTO BREVE RISPETTO AL TEMPO DI OSSERVAZIONE, SONO DETTE FORZE IMPULSIVE

$$\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} = cost$$

$$\vec{P}_{in} = m_1\vec{v}_{1_{in}} + m_2\vec{v}_{2_{fin}} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f} = \vec{P}_f$$

$$\vec{P}_{1_i} + \vec{P}_{2_i}$$

LA QUANTITÀ DI MOTO RIMANE INVARIATA NELL'URTO → IL MOTO DEL C.M. NON VIENE QUINDI ALTERATO NELL'URTO. INVECE VARIANO LE QUANTITÀ DI MOTO DEI SINGOLI PUNTI MATERIALI PER EFFETTO DELL'IMPULSO DELLA FORZA DI INTERAZIONE. LE VARIAZIONI DELLE QUANTITÀ DI MOTO SONO EGUALI ED OPPOSTE

$$\Delta\vec{p}_1 = \vec{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{2,1}\,dt$$

$$\Delta\vec{p}_2 = \vec{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{1,2}\,dt$$

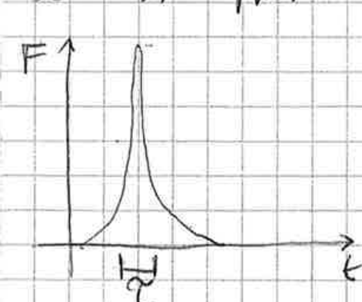
poiché $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$, allora $\vec{J}_{1,2} = -\vec{J}_{2,1}$

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2$$

) Se $F_{ext} \neq 0$ non è vero che la quantità di moto totale sia costante

Se F_{ext} NON sono impulsive $\Rightarrow \vec{P} \simeq cost$

SE LE FORZE ESTERNE NON SONO IMPULSIVE E SE τ È SUFFICIENTEMENTE PICCOLO, ALLORA SI CONSERVA LA QUANTITÀ DI MOTO TOTALE



$$\int \vec{F}\,dt = \tau \vec{F}_m \qquad \tau = t_2 - t_1$$

↳ è talmente piccolo che, in tale intervallo, le particelle non cambiano di posizione $\Rightarrow E_p = cost$. Quindi si parla di conservaz.

$$\Delta\vec{P}^{(E)} = \vec{F}_m^{(E)}\tau \simeq 0$$

F_m È IL VALORE MEDIO DELLA FORZA NELL'INTERVALLO τ

NON SEMPRE IN UN URTO C'È CONSERVAZ. di En. cinetica, ~~PARLIAMO ANCHE~~

SE E_k = cost, DATO CHE E_p = cost, ALLORA PARLIAMO ANCHE DI CONSERV. DI ENERG. MECCANICA 92

$$\Delta E_K = |-E'_K| = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v_{CM}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$ 11\04\17

CON L'URTO COMPL. AN. I CORPI SI DEFORMANO IN MODO PERMANENTE, SCOPRENDO UN LAVORO A SPESE DELL'ENERGIA CIN. INIZIALE, CHE NON VIENE POI RECUPERATO

DOPO L'URTO COMPLET. AN. NON C'È PIÙ MOTO RISPETTO AL CM.

URTO ELASTICO

$$\begin{cases} \vec{P}_i = \vec{P}_f \\ E_{K_i} = E_{K_f} \end{cases}$$

SI CONSERVA ANCHE L'EN. CINETICA DEL SISTEMA

caso unidimensionale ↔ 2 EQUAZIONI E 2 INCOGNITE

→ LE FORZE INTERNE, CHE SI MANIFESTANO DURANTE L'URTO, SONO CONSERVATIVE, I DUE CORPI SUBISCONO DELLE DEFORMAZIONI ELASTICHE

$$\begin{cases} ① \; m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ ② \; \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

dalla 2: $m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

dalla 1. $m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$

÷ m e m $\qquad v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$

nella ①: $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1(v_{2f} + v_{2i} - v_{1i}) + m_2 v_{2f}$

$$v_{2f}(m_1+m_2) = m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} - m_1 v_{2i} + m_1 v_{1i}$$

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + v_{2i}(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}}$$

SR!

$$\boxed{v_{1f} = \frac{2m_2 v_{2i} + v_{1i}(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}}$$

nel SR CM

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{CM} = \frac{2m_2 v_{2i} + v_{1i}(m_1 - m_2)}{m_1+m_2} - \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{2m_2 v_{2i} + \cancel{m_1 v_{1i}} - m_2 v_{1i} - \cancel{m_1 v_{1i}} - m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} =$$

$$= \frac{v_{2i}(2m_2 - m_2) - m_2 v_{1i}}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1+m_2}(v_{2i} - v_{1i}) =$$

$$e = -\frac{p'_{1f}}{p'_{1i}} = -\frac{v'_{1f}}{v'_{1i}} = -\frac{p'_{2f}}{p'_{2i}} = -\frac{v'_{2f}}{v'_{2i}}$$

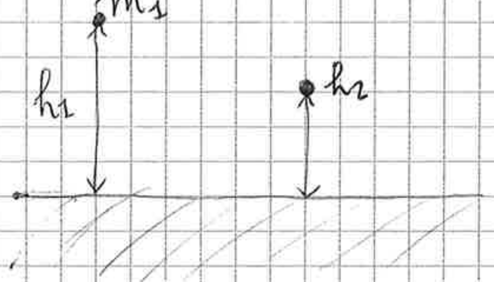
NOTA: DATO CHE $P' = 0$, SI HA IN MODULO: $p'_{1i} = p'_{2i}$ $p'_{1f} = p'_{2f}$
QUINDI IL COEFF. DI RESTITUZIONE È LO STESSO ANCHE PER LA SECONDA PARTICELLA

$$E'_{kf} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1f} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2f} = \frac{1}{2} m_1 \left(-e v'_{1i}\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(-e v'_{2i}\right)^2 =$$

$$v'_{1f} = -e v'_{1i}$$

$$= e^2 \left\{ \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1i} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2i} \right\} = e^2 E'_{ki}$$

$$\boxed{E'_{kf} = e^2 E'_{ki}}$$



$m_2 >> m_1$

$v_{2i} = 0$

$\longrightarrow SRI \simeq SR_{CM} \rightarrow$ POSSIAMO SUPPORRE CHE IL CM SIA FERMO E CHE, QUINDI, LE VELOCITÀ NEL SISTEMA DEL LABORATORIO E NEL SISTEMA DEL CENTRO DI MASSA SIANO UGUALI.

PRIMA DELL'URTO $m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$

URTO $E_{kf} = e^2 E_{ki}$

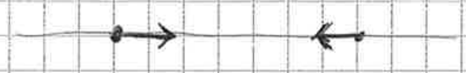
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = e^2 \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2$$

DOPO L'URTO $e^2 \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = m_1 g h_2$

$$e^2 \cancel{m_1 g} h_1 = \cancel{m_1 g} h_2 \Rightarrow h_2 = e^2 h_1 \quad e = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}$$

$$e < 1$$

URTO CENTRALE:



URTO NON CENTRALE

$b =$ PARAMETRO D'URTO

SE $b = 0$ È URTO CENTRALE

95

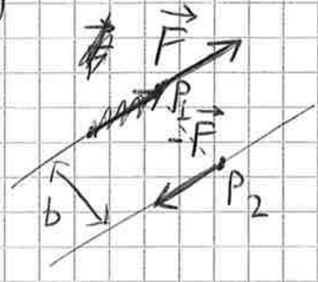
20\04\17

PROPRIETÀ dei SISTEMI di FORZE APPLICATE a SISTEMI DI PUNTI

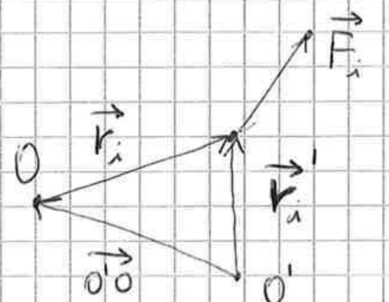
$$\begin{cases} \vec R^{(E)} = m\vec a_{CM} \\ \vec M^{(E)} = d\vec L/dt \end{cases}$$ in generale sono indipendenti

- COPPIA di FORZE $\vec R = 0$

Il momento, dato che la risultante delle forze è 0, non dipende dal polo che viene scelto.



COPPIA DI FORZE: STESSO MODULO, VERSO OPPOSTO, DIREZIONI DIVERSE
↓
LA RISULTANTE DELLE FORZE È NULLA



$$\vec M_O = \sum_i \vec r_i \times \vec F_i$$

$$\vec M_{O'} = \sum_i \vec r_i\,' \times \vec F_i = \sum_i (\vec{O'O} + \vec r_i) \times \vec F_i =$$

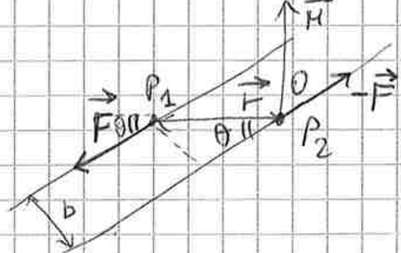
$$= \sum_i \vec{O'O} \times \vec F_i + \underbrace{\sum_i \vec r_i \times \vec F_i}_{\vec M_O} =$$

PORTIAMO O'O (PERCHÉ È UN VETTORE) FUORI DALLA SOMMATORIA

$$= \vec{O'O} \times \sum_i \vec F_i + \vec M_O = \cancel{\vec{O'O} \times \vec R} + \vec M_O = \vec M_O \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ MOMENTO DELLE FORZE INDIPENDENTE DAL POLO SCELTO

se polo $\equiv P_2$



$$|\vec M| = |\vec r \times \vec F| = rF\sin\theta = Fb$$

$$r\sin\theta = b$$

- si può dimostrare che dato un sistema di forze applicato a un sistema di punti, questo può sempre essere ricondotto a una (1) risultante $\vec R$ che passa per il polo, e ha $M = 0$, e ad una (2) coppia di forze che ha momento $\vec M$

$\vec R$

$\vec M$

$\vec M$ è ORTOGONALE AL PIANO INDIVIDUATO DALLE 2 RETTE DI AZIONE, IL VERSO SI DETERMINA CON LA REGOLA DELLA MANO DX, MODULO = bF