



**Appunti universitari**  
**Tesi di laurea**  
**Cartoleria e cancelleria**  
**Stampa file e fotocopie**  
**Print on demand**  
**Rilegature**

**NUMERO: 2271A**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Cammarata Maicol**

**MATERIA: Applicazioni Avanzate di Fisica Tecnica - Prof. Asinari**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# NOTAZIONE TENSORIALE - NOTAZIONE DI EINSTEIN

Le grandezze significative risultano:

- uno scalare  $a \in \mathbb{R}$  non ha gradi di libertà
- un vettore  $\underline{a} \in \mathbb{R}^D$  possiede un grado di libertà
- un tensore  $\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$  possiede due gradi di libertà

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_D \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D \times D}$$

Per queste operazioni possiamo definire varie operazioni:

- **PRODOTTO INTERNO** riduce la dimensione dell'oggetto. Il significato fisico è una proiezione. Indica la presenza di una sommatoria

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^D$       $\underline{a} \cdot \underline{b} = \sum_{i=1}^D a_i b_i \in \mathbb{R} = a_i b_i$  → con Einstein

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \underline{b} \in \mathbb{R}^D$       $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{b} = \sum_{j=1}^D A_{ij} b_j \in \mathbb{R}^D = A_{ij} b_j$  il presente di più indici vedo e considero nella sommatoria l'ultimo.

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}, \underline{\underline{B}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$       $\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i=1}^D \sum_{j=1}^D A_{ij} B_{ij} \in \mathbb{R} = A_{ij} b_{ij}$  i due punti indicano doppio prodotto interno.

- **PRODOTTO DIADICO** aumenta la dimensione dell'oggetto. Combina due vettori per ottenere un tensore.

$\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^D$       $\underline{a} \otimes \underline{b} = a_i b_j \in \mathbb{R}^{D \times D}$

- **GRADIENTE** aumenta il numero di dimensioni. Indica la funzione massima

$a \in \mathbb{R}$       $\nabla a = \frac{\partial a}{\partial x_i} \in \mathbb{R}^D$  il GRADIENTE di uno scalare mi indica come esso cambia lungo ogni direzione. (ESEMPIO: GRADIENTE DELLA TEMPERATURA)

$\underline{a} \in \mathbb{R}^D$       $\nabla \underline{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \in \mathbb{R}^{D \times D}$  il gradiente di un vettore mi indica come ogni componente del vettore cambia lungo ogni direzione. (GRADIENTE delle velocità)

- **DIVERGENZA** riduce il numero delle dimensioni. Indica la presenza di due sommatorie. Significato fisico: mi dice se c'è una sorgente (div > 0) o pozzo (div < 0). In caso di sorgente i vettori del campo puntano verso l'esterno. In caso di pozzo i vettori del campo puntano verso l'interno.

$\underline{a} \in \mathbb{R}^D$       $\nabla \cdot \underline{a} = \sum_{i=1}^D \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \in \mathbb{R} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i}$

$\underline{\underline{A}} \in \mathbb{R}^{D \times D}$       $\nabla \cdot \underline{\underline{A}} = \sum_{j=1}^D \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j} \in \mathbb{R}^D = \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$

- **LAPLACIANO** non aumenta e non riduce il numero di dimensioni. Preserva la dimensione della quantità a cui è applicato.  $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$  il gradiente aumenta e la divergenza diminuisce

$a \in \mathbb{R}$       $\nabla^2 a = \sum_{i=1}^D \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i} \in \mathbb{R} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \partial x_i}$

$\underline{a} \in \mathbb{R}^D$       $\nabla^2 \underline{a} = \sum_{j=1}^D \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \in \mathbb{R}^D = \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j}$

# TERMOMECCANICA DEI CONTINUI

Considera i corpi come continui: IPOTESI DEL CONTINUO. In realtà però i corpi non sono continui perché sono presenti al loro interno delle zone subatomiche prive di masse. Se vale l'ipotesi del continuo allora tutte le grandezze d'interesse possono essere definite in un punto all'interno del volume di controllo. Queste grandezze possono essere espresse come le limite di  $\Delta V \rightarrow 0$ . Ad esempio:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m_{\Omega}}{\Delta V_{\Omega}}$$

L'ipotesi del continuo, in pratica, mi permette di affermare che qualsiasi volume infinitesimo, che prenda all'interno di un volume di controllo  $\Omega$ , avrà sempre una certa massa. Il volume di controllo  $\Omega$  può essere scelto arbitrariamente perché esso risulta essere fisso nel tempo, nel senso che se per un'analisi scelgo un certo volume di controllo, quest'ultimo non può essere cambiato durante l'analisi ma possiamo cambiarlo dopo aver terminato l'analisi.

## CONSERVAZIONE DELLA MASSA



- $\underline{u} \cdot \underline{n} > 0$  FLUSSO POSITIVO la massa esce dal volume  $\Omega$
- $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$  FLUSSO NULLO  $\rightarrow$  il flusso scorre lungo il bordo
- $\underline{u} \cdot \underline{n} < 0$  FLUSSO NEGATIVO la massa entra nel volume  $\Omega$

$$\frac{dm_{\Omega}}{dt} = - \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS$$

$\downarrow$   
del flusso

il meno è dovuto al fatto che se vi è un flusso positivo e quindi la massa esce dal volume allora la massa all'interno del volume diminuirà.

$$m_{\Omega} = \int_{\Omega} \rho dV \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \underline{u} \cdot \underline{n} dS \quad (1)$$

otteniamo un integrale superficiale che si riferisce al punto sull'bordo, ed un integrale di volume che si riferisce ai punti all'interno del volume

Si utilizza il TEOREMA DI GAUSS per passare da un integrale di superficie ad un integrale di volume. Esso afferma che il flusso di una certa grandezza  $f$  su una superficie è uguale alla divergenza della grandezza considerata sul volume:

$$\oint_{\partial\Omega} f \cdot \underline{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot f dV$$

Applicandolo all'equazione (1) otteniamo:  $\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) dV$

considerando che il volume di controllo è fisso nel tempo:

$$\int_{\Omega} \frac{d\rho}{dt} dV = - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u}) dV \quad \Rightarrow \quad \int_{\Omega} \left[ \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

In genere se l'integrale è nullo non significa che l'integrando deve essere zero! Però se consideriamo che abbiamo infiniti volumi  $\Omega$  che possiedono un punto in comune allora l'integrale è nullo se è nullo anche l'integrando. Dunque:

$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$

EQUAZIONE DI CONTINUITA'      EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

La massa si conserva poiché il termine a secondo membro (che se è diverso da zero indica un pozzo o una sorgente) è nullo.

In genere:  $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) + \nabla \cdot f = S \rightarrow$   $S > 0$  SORGENTE;  $S < 0$  POZZO;  $S = 0 \Rightarrow$  si conserva

$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \rightarrow$  grandezza di intensità       $\nabla \cdot f \rightarrow$  flusso

## CONSERVAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

Supponiamo di prendere un volume di controllo  $\Omega$  e il suo contorno  $\partial\Omega$  possiamo definire la velocità complessiva dell'intero volume di controllo  $u_\Omega$ :

$$u_\Omega = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \rho u \, dV$$

ogni punto del volume di controllo dunque possiede un valore di densità e di velocità.

Possiamo definire la velocità complessiva come la media volumetrica dei singoli vettori del flusso di massa:

$$\text{MEDIA: } u_\Omega = \frac{\int_\Omega u \, dm}{\int_\Omega dm}$$

$$dm = \rho \, dV$$

$$m_\Omega = \int_\Omega dm$$

Possiamo osservare come evolve nel tempo la quantità di moto:

$$(1) \frac{d m_\Omega u_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \int_\Omega \rho u \, dV = \oint_{\partial\Omega} \underline{F}(\rho u) \cdot \hat{n} \, dS + \int_\Omega s(\rho u) \, dV$$

$\hat{n}$  è uscente e io voglio valutare i flussi entranti

$\rightarrow$  sorgente o pozzo dovuto alla presenza di un campo gravitazionale

$$\underline{F}(\rho u) = \underline{F}_{AVV} + \underline{F}_{STAT} + \underline{F}_{DIN}$$

dove:  $\underline{F}_{STAT} + \underline{F}_{DIN} = \underline{\Pi}$  tensori degli sforzi

### Flusso convettivo $\underline{F}_{AVV}$ (inertiale)

Esso rappresenta il flusso della quantità di moto dovuto al suo moto stesso. Il flusso di un vettore è un tensore.

$$\underline{F}_{AVV} = \oint_\Omega \rho u (u \cdot \hat{n}) \, dS \quad \text{considerando le componenti: } \int \rho u_i (u_j \hat{n}_j) = \rho u_i (u_j m_j)$$

poiché il prodotto scalare  $(u \cdot \hat{n})$  rappresenta un tensore.

$$\int \rho u_i (u_j m_j) = \int \rho u_i \cdot u_j m_j = \int \underline{u} \otimes \underline{u} \quad \text{NON LINEARE} \quad \Rightarrow \underline{F}_{AVV} = \int \underline{u} \otimes \underline{u}$$

Si osserva come il trasporto di  $u$  avviene mediante  $u$ . Abbiamo un flusso di un flusso. C'è cioè un presenza di una grandezza che amplifica se stessa e questo genera turbolenze e instabilità!

### Flusso statico $\underline{F}_{STAT}$

Esso rappresenta il flusso della quantità di moto in assenza di moto ( $u=0$ ). Si parla infatti di tensore idrostatico. Questa grandezza dunque dipende in qualche modo dalla pressione  $p$ . La pressione è invariante e come tutti gli sforzi idrostatici è isotropa. La pressione dipende solo dalla profondità. Consideriamo che  $\hat{m}$  è la normale alla superficie si ha che:

$$\underline{F}_{STAT} \cdot \hat{m} \parallel \hat{m} \quad \text{il prodotto scalare tra } \underline{F}_{STAT} \text{ e la normale dà un vettore che è parallelo alla normale}$$

Il parallelismo tra essi ha ~~una~~ sì e no c'è una certa proporzionalità. Questo costante di proporzionalità è la pressione:

$$\underline{F}_{STAT} \cdot \hat{m} = p \hat{m}$$

Si come non ha molto senso utilizzare un tensore perché abbiamo solo un'incognita che è la profondità quindi scriviamo:  $\underline{F}_{STAT} = p \cdot \underline{I}$  con  $\underline{I}$  = matrice identità.

Inoltre vale che:  $p = \frac{\text{tr}(\underline{F}_{STAT})}{3}$  dove la traccia è la somma dei componenti in diagonale del tensore e vale  $3p$ .



## CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE

L'energia totale è una grandezza conservata infatti quella che entra nel volume di controllo è uguale a quella che esce. L'energia totale può essere definita come la somma dell'energia interna e dell'energia meccanica. Da un punto di vista microscopico l'energia interna può essere definita come la media dell'energia meccanica relativa. Se infatti prendo un sistema di particelle, ad esse posso associare un'energia meccanica al baricentro ed un'energia meccanica relativa a quel baricentro. All'aumentare della temperatura aumenta l'agitazione molecolare e dunque l'energia interna. Una parte di energia meccanica ordinata rispetto al baricentro si perde in agitazione molecolare ovvero in energia interna che è associata ai moti relativi rispetto al baricentro.

Considerando un volume di controllo  $\Omega$  l'energia totale è definita come la somma di tutte le energie interne e meccaniche del sistema.

$$e_t = \frac{E_t}{m\Omega} = \frac{1}{m\Omega} \int_{\Omega} \rho e_t dV$$

Il flusso di energia totale è un vettore  $\underline{E}(\rho e_t)$ .

$$\frac{d}{dt} m\Omega e_t = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e_t dV = - \oint_{\partial\Omega} \underline{E}(\rho e_t) \cdot \underline{n} dS \quad (1)$$

$$\underline{E}(\rho e_t) = \underline{E}_{ADV} + \underline{E}_{TERM} + \underline{E}_{MECC}$$

### • FLUSSO ANNETTIVO $\underline{E}_{ADV}(\rho e_t)$

$$\underline{E}_{ADV}(\rho e_t) = \int_{\partial\Omega} \rho e_t \cdot \underline{u} \cdot \underline{n} dS \Rightarrow \underline{E}_{ADV} = \rho e_t \cdot \underline{u} \quad \left[ \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{J}{kg} \cdot \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

### • FLUSSO TERMICO $\underline{E}_{TERM}$

Si basa sul modello di Fourier:  $\underline{E}_{TERM} = \underline{q} = -\lambda \nabla T = -\alpha \rho c_p \nabla T$

Il segno "-" è dovuto alla stabilità del sistema. Il gradiente mi fornisce il picco, con il - ci allontaniamo dal picco cioè dalle deformazioni.

$$\lambda = \frac{W}{mK} \text{ CONDUZIONE TERMICA}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \text{ DIFFUSIVITÀ TERMICA}$$

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \left[ \frac{m^2}{s} \right] \text{ VISCOSITÀ CINEMATICA}$$

se  $Pr > 1$  prevale il trasporto della quantità di moto  
se  $Pr < 1$  prevale il trasporto di calore

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda} = \frac{\nu \rho c_p}{\mu} = \frac{\mu c_p}{\lambda}$$

### • FLUSSO MECCANICO

$$\underline{E}_{MECC} = \underline{\pi} \cdot \underline{u} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \cdot \frac{m}{s} \right] = \left[ \frac{W}{m^2} \right]$$

Sostituendo nella (1):  $\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho e_t \cdot \underline{u} + \underline{q} + \underline{\pi} \cdot \underline{u}) = -\nabla \cdot (\rho e_t \cdot \underline{u} + \underline{q} + \underline{\pi} \cdot \underline{u})$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \cdot \underline{u} + \underline{q} + \underline{\pi} \cdot \underline{u}) = \nabla \cdot (\underline{q} + \underline{\pi} \cdot \underline{u}) \quad \text{con } \underline{\pi} = p \underline{I} - \underline{\tau} \cdot \underline{v}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \cdot \underline{u} + \underline{q} + \underline{\pi} \cdot \underline{u}) = 0 \quad \text{CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE}$$





## Considerazioni energia meccanica, interna ed entalpia.

Osservando la (d) si osserva che è una grandezza non conservata infatti al secondo membro non abbiamo la divergenza di un flusso infatti l'energia meccanica non è lobbiamo di tenuta attraverso un bilancio di un sistema di controllo in cui si ottiene un flusso delle grandezze corrispondenti al bordo del volume di controllo. Questo termine presente al secondo membro non essendo un flusso, agisce internamente al volume di controllo ed è legato alla viscosità da ogni possibile punto ovunque la velocità non sia nulla; è un termine di perdita di energia meccanica o di attrito interno alla massa del fluido ed è legato all'entità degli sforzi (è più grande dove si hanno gli sforzi e le deformazioni più grandi).

L'energia meccanica non è una forma di energia <sup>CONSERVATA</sup> ~~perduta~~.

Anche l'energia interna non è una grandezza conservata. Presente un flusso convettivo e un flusso termico. Al secondo membro presente un termine uguale ed opposto a quello dell'energia meccanica. Infatti energia interna ed energia meccanica hanno proprietà completamente opposte, tanto è vero che se una scende l'altra deve salire essendo la loro somma conservata (la loro somma è l'energia totale). Il termine al secondo membro è pozzo per l'energia meccanica perché porta ad una perdita di energia meccanica per attrito, ma è sorgente per l'energia interna. Cioè questa perdita di energia meccanica si traduce in un aumento di energia interna per auto riscaldamento.

Nell'equazione dell'entalpia è presente un termine dovuto al flusso termico, un termine dovuto alla viscosità e un termine reversibile dovuto alla molecola fluida. Quest'ultimo termine rappresenta la derivata della pressione ma è una derivata invariante, quindi ottengo lo stesso valore indipendentemente dal sistema di riferimento. Non è un flusso ma è un termine di sorgente o pozzo infatti può essere sia positivo che negativo. Posso avere dei deflussi che logoramicamente si espandono abbassando la ~~pressione~~, oppure posso avere dei deflussi che avviano le particelle aumentando la pressione. L'entalpia è un termine che ha un comportamento strano perché in più non ha proprio una direzione preferita. Se pensiamo al caso di espansione la pressione diminuisce e il valore è negativo e il termine diventa pozzo (pozzo quindi nella fase di efflusso). Al contrario per il termine di sorgente. La pressione in realtà è un contributo idrostatico, non è legato a dissipazioni e quindi in teoria reversibile. Quello che comprimiamo posso nuovamente espanderlo. Mentre tutto ciò che viene perso in attrito è perso definitivamente.

Quindi perdite di energia meccanica possono generare produzione di energia interna. Classico esempio: l'attrito. Perdo energia meccanica ma genero calore quindi energia interna.



## NUMERO DI MACH

In realtà esistono due tipi di sistemi di equazioni di NSF: sistema di equazioni complete e sistema di equazioni semplificate. Per capire quale usare dobbiamo calcolare il NUMERO DI MACH:

$$Ma = \frac{u}{c_s} \rightarrow \text{velocità caratteristica} \\ \rightarrow \text{velocità del suono}$$

$$Ma \begin{cases} \ll 1 (\leq 0,2) \rightarrow \text{LIMITE INCOMPRESSIBILE} \\ \gg 1 (\geq 0,2) \rightarrow \text{CASO COMPRESSIBILE} \end{cases}$$

• CASO in cui  $Ma \ll 1$  (CASO INCOMPRESSIBILE)

Questo è il caso in cui la velocità del fluido che stiamo considerando è molto più piccola della velocità del suono del fluido considerato. In questo caso il fluido si comporta come se fosse incompressibile. A livello ingegneristico  $Ma \ll 0,2$  cioè la velocità del fluido deve essere  $1/5$  di quella del suono. In questo caso essendo il deflusso molto basso rispetto alla velocità del suono non si avrà accumulo, cioè tutta la portata che entra è uguale a quella che esce. In questi casi possiamo usare delle equazioni di NSF semplificate.

• CASO in cui  $Ma \gg 1$  (CASO COMPRESSIBILE)

In questo caso la velocità del fluido è molto veloce rispetto alla velocità del suono e si genera accumulo di massa. In questo caso si utilizzano le equazioni di NSF complete senza semplificazioni.

Esempio: immaginiamo che delle persone entrano in fila in una stanza. Se le persone di dopo entrano con velocità maggiore allora vanno ad impattare con quelle di prima e queste con quelle di prima ancora. Si crea, dunque, un'onda di pressione che si propaga con la velocità del suono. Più spingo all'ingresso, più spingo all'uscita.

Nel caso di limite incompressibile l'equazione di continuità diventa:

$$\rho \approx \rho_0 \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = \rho \nabla \cdot \underline{u} + \underbrace{\underline{u} \cdot \nabla \rho}_{=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\rho \nabla \cdot \underline{u} = 0}$$

# FUNZIONI DISSIPATIVE

$$T \rho \frac{Ds}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{q}_\alpha + \underline{\Pi}_v : \underline{\nabla} u \quad \text{equazione dell'entropia}$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q}_\alpha + \frac{1}{T} \underline{\Pi}_v : \underline{\nabla} u$$

①                      ②

SI  
 IMPORTANTE perché il calcolo di ①  
 è fatto in modo più semplice e veloce!!

$$\textcircled{1} \quad -\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q}_\alpha = \nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right) - \underline{q}_\alpha \nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \right)$$

sapendo che  $\underline{q}_\alpha = -\lambda \nabla T$

$$-\underline{q}_\alpha \nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \right) = \lambda \nabla T \nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \right) = \lambda \nabla T \left( +\frac{1}{T^2} \nabla T \right) = \frac{\lambda}{T^2} \nabla T \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{T^2} \nabla T^2 \geq 0$$

in definitiva la (1) diventa:  $-\frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q}_\alpha = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right) + \frac{\lambda}{T^2} \nabla T^2$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\Pi}_v = \mu \left[ (\underline{\nabla} u + \underline{\nabla} u^T) - \frac{2}{3} (\underline{\nabla} u) \underline{\underline{I}} \right]$$

poiché supponiamo il LIMITE INCOMPRESSIBILE  
 ovvero  $Ma \ll 0,2$

$$\underline{\nabla} u + \underline{\nabla} u^T = 2 \underline{\nabla} u^{(S)} \quad \text{quindi } \underline{\Pi}_v = 2\mu \underline{\nabla} u^{(S)}$$

$$\underline{\nabla} u = \left( \frac{\underline{\nabla} u + \underline{\nabla} u^T}{2} \right) + \left( \frac{\underline{\nabla} u - \underline{\nabla} u^T}{2} \right) = \underline{\nabla} u^{(S)} + \underline{\nabla} u^{(A)}$$

$$\frac{1}{T} \underline{\Pi}_v : \underline{\nabla} u = \frac{2}{T} \mu \underline{\nabla} u^{(S)} : \underline{\nabla} u^{(S)} + \underline{\nabla} u^{(A)}$$

Per le proprietà delle matrici:   
 $\underline{A} = \underline{A}^T$  matrice simmetrica ;  $\underline{B} = -\underline{B}^T$  matrice antisimmetrica  
 Doppio prodotto scalare tra un tensore simmetrico e un tensore antisimmetrico è nullo:

$$\underline{A} : \underline{B} = 0 \quad \text{infatti } A_{ij} B_{ij} = A_{ji} (-B_{ji}) = -A_{ji} B_{ji}$$

$$\text{quindi: } \frac{1}{T} \underline{\Pi}_v : \underline{\nabla} u = \frac{2}{T} \mu \underline{\nabla} u^{(S)} : \underline{\nabla} u^{(S)} = \frac{2}{T} \mu (\underline{\nabla} u^{(S)})^2 \geq 0$$

Sostituendo ① e ② all'equazione di partenza otteniamo:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{-\nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right)}_{\text{FLESSO ENTROPICO}} + \underbrace{\frac{\lambda}{T^2} \nabla T^2}_{\text{IRR. TERMO}} + \underbrace{\frac{2}{T} \mu (\underline{\nabla} u^{(S)})^2}_{\text{IRR. FLUIDODINAMICA } \sigma_v \geq 0}$$

considerando che:  $\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{d\rho s}{dt} + \nabla \cdot (\rho s \underline{u})$

$$\Rightarrow \frac{d\rho s}{dt} + \nabla \cdot \left( \rho s \underline{u} + \frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right) = \sigma_\alpha + \sigma_v = \sum \sigma_m \geq 0$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = - \underbrace{\nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \mathbf{q}_\alpha \right)}_{\substack{\nabla \cdot \text{ FLUSSO} \\ \text{ENTROPICO}}} + \underbrace{\frac{1}{T^2} \nabla T^2}_{\substack{\sigma_\alpha \geq 0 \\ \text{IRREVERSIBILITA'} \\ \text{TERMICA}}} + \underbrace{\frac{2\mu}{T} (\nabla u^{(s)})^2}_{\substack{\sigma_v \geq 0 \\ \text{IRREVERSIBILITA'} \\ \text{FLUIDODINAMICA}}}$$

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{ds}{dt} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u})$$

in definitiva avremo che:  $\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{q}_\alpha) = \sigma_d + \sigma_v \geq 0$

II PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Possiamo generalizzare il secondo membro:  $\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{q}_\alpha) = \sum \sigma_m \geq 0$   
TUTTI I FENOMENI IRREVERSIBILI(m)

IL VANTAGGIO è che le  $\sigma_m$  sono SEMPRE SCALARI!

$$[\sigma] = \left[ \nabla \cdot \left( \frac{1}{T} \mathbf{q}_\alpha \right) \right] = \left[ \frac{1}{m} \right] \cdot \left[ \frac{W}{m^2} \right] \left[ \frac{1}{K} \right] = \left[ \frac{W/K}{m^3} \right] \rightarrow \text{POTENZA ENTROPICA}$$

$\frac{\partial \rho s}{\partial t}$  rappresenta il termine accumulato ;  $\nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) =$  rappresenta il flusso convettivo

$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \mathbf{q}_\alpha \right) =$  rappresenta il flusso entropico entrante (tanto più la temperatura è vicina allo zero tanto questa quantità è importante e quindi il flusso entropico è maggiore del flusso termico: riuscire a far avvenire uno scambio termico a bassa temperatura comporta un grande flusso entropico, ovvero grande dissipazione di energia)

$\sigma_\alpha + \sigma_v =$  rappresentano le irreversibilità rispettivamente termica e fluidodinamica.  
Rappresentano i termini di produzione di entropia (equivalente a distruzione di energia).  
È in genere un termine non nullo per tutti i sistemi e i componenti e di conseguenza è una grandezza non conservata, infatti è un termine di sorgente: ogni sistema e componente produce ulteriore entropia processando i fluidi che lo attraversano.  
 $\sigma_d$  è legato alla produzione di entropia per trasferimento di calore (gradiente di temperatura)  
 $\sigma_v$  è legato al trasporto della quantità di moto (gradiente di velocità).



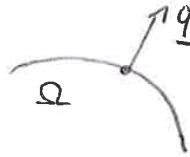
## CONDIZIONI AL BORDO:

Per quanto riguarda le condizioni al contorno, si possono adottare tre modelli matematici:

### • Condizioni al bordo di Dirichlet

Esse specificano i valori che la soluzione deve assumere su una parte del bordo del volume  $\Omega$ . Con queste condizioni ad esempio si immagina di conoscere la temperatura sul bordo  $\partial\Omega$ .

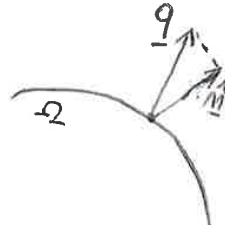
$$p \in \partial\Omega_D \quad T = T_D$$



### • Condizioni al bordo di Neumann

Esse specificano i valori che la derivata della soluzione assume su una parte del bordo del volume  $\partial\Omega$ . In questo si impone di conoscere il flusso termico sul bordo.

$$p \in \partial\Omega_N \quad \underline{q} = \underline{q}_m$$



Sappiamo che il flusso termico è un vettore. Normale alla superficie è  $\hat{n}$ . Dobbiamo proiettare il flusso termico sulla normale  $\hat{n}$ . Quindi faccio un prodotto scalare:  $\underline{q} \cdot \hat{n} = q_m$

Si ricorda che il prodotto scalare tra i due vettori è uno scalare.

Sappiamo che il flusso  $\underline{q}$  è espresso dal modello di Fourier:  $\underline{q} = -\lambda \nabla T$

$$\Rightarrow -\lambda \nabla T \cdot \hat{n} = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial x_1} \hat{n}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2} \hat{n}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3} \hat{n}_3 \right) = -\lambda \frac{dT}{dm} \quad \text{DERIVATA DIREZIONALE}$$

Il prodotto  $\nabla T \cdot \hat{n}$  rappresenta quella che in analisi II viene chiamata derivazione a catena. Cioè la temperatura  $T$  deve derivare sulla normale  $\hat{n}$  ma so anche che  $T$  dipende da  $x_1, x_2, x_3$ .

$\frac{dT}{dm}$  significa valutare la temperatura lungo  $\hat{n}$ . A noi interessa valutare la  $T$  sul bordo  $\partial\Omega$  quindi valuto il  $\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta m}$  siccome in questo modo mi evito di più al bordo.

$$\lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{T(\Delta m) - T(0)}{\Delta m}$$

la derivata direzionale può essere approssimata dal rapporto incrementale all'indietro. ??

# PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Passiamo da un'analisi puntuale ad un'analisi integrale.

Per ricavare l'espressione del PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA si parte dall'espressione della conservazione dell'energia totale che è un'espressione puntuale che vale per ogni punto interno al volume di controllo. Adesso bisogna estenderlo sull'intero volume di controllo applicando un integrale su una porzione estesa.

EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA TOTALE

$$\frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + p \underline{u} \underline{\underline{I}}) = \nabla \cdot (-\underline{q} + \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u})$$

→ termine di spostamento

dove  $p \underline{u} \underline{\underline{I}} = p \underline{u} = \rho p \frac{1}{\rho} \underline{u} = \rho p \underline{v} \underline{u}$  e riordinandola:

$$\nabla \cdot (-\underline{q} + \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u}) = \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + \rho(p \underline{v}) \underline{u})$$

$$\sum_{j=0}^M \Phi_j - W_t^* = \frac{\partial}{\partial t} (U + E_k + E_p)_{CV} + \sum_{i=0}^M G_i (h + r_k + r_p)_i$$

FLUSSI TERMICI
POTENZA MECCANICA
ACCUMULO
FLUSSI AL BORDO

PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

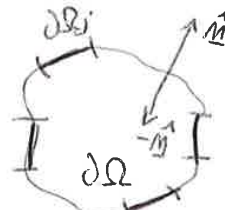
Ricaviamo uno ad uno i seguenti termini:

①  $\nabla \cdot (-\underline{q})$

applico Gauss

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (-\underline{q}) dV = \int_{\partial \Omega} (-\underline{q}) \cdot \underline{\hat{n}} dS = \int_{\partial \Omega} \underline{q} \cdot (-\underline{\hat{n}}) dS$$

-q sta ad indicare che la normale è uscente



ovviamente però sappiamo che l'intero bordo  $\partial \Omega$  non si comporta tutto allo stesso modo (per esempio una parte del bordo è isolata, oppure è delimitato da un fluido) e quindi bisogna suddividere il bordo  $\partial \Omega$  in tante parti  $\partial \Omega_j$  in modo tale che:

$$\partial \Omega = \bigcup_{j=0}^M \partial \Omega_j$$

$$\Rightarrow \int_{\partial \Omega} \underline{q} \cdot (-\underline{\hat{n}}) dS = \sum_{j=0}^M \int_{\partial \Omega_j} \underline{q} \cdot (-\underline{\hat{n}}) dS = \sum_{j=0}^M \Phi_j$$

IL FLUSSO È POSITIVO SE È ENTRANTE

②  $\nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u})$

Gauss

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u}) dV = \int_{\partial \Omega} \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u} \cdot \underline{\hat{n}} dS = -W_t^*$$

LA POTENZA MECCANICA È POSITIVA SE USCENTE

\* INCLUDE LA POTENZA MECCANICA FATTA SULL'AMBIENTE (T, P)

③  $\frac{\partial \rho e_t}{\partial t}$

→ considerando che  $\Omega$  è fisso nel tempo

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \rho e_t}{\partial t} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho e_t dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho (e_i + e_w) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \rho (e_i + r_k + r_p) dV = \frac{\partial}{\partial t} (U + E_k + E_p)_{CV}$$

④  $\nabla \cdot (\rho e_t \underline{u} + \rho(p \underline{v}) \underline{u})$

Si considera che:  $e_t + p \underline{v} = e_i + e_w + p \underline{v} = e_i + r_k + r_p + p \underline{v} = h + r_k + r_p$

## SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

Per ricavare l'espressione del secondo principio si parte dall'equazione dell'entropia. Anche in questo caso si parte dunque da un'equazione che vale per ogni punto all'interno del volume di controllo che va estesa tramite un integrale.

equazione dell'entropia: 
$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u} + \frac{1}{T} \mathbf{q}) = \dot{G}_a + \dot{G}_v \geq 0 \quad p \in \Omega$$

che possiamo riscrivere come:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \mathbf{q} \right) + \dot{G}_a + \dot{G}_v = \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u})$$

$$\sum_{j=0}^M \frac{\dot{Q}_j}{T_j} + \sum_{i=1}^N \dot{I}_{RR} = \left( \frac{\partial S}{\partial t} \right)_{CV} + \sum_{i=0}^N \dot{G}_i S_i$$

SECONDO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA

①  $\nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \mathbf{q} \right)$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left( -\frac{1}{T} \mathbf{q} \right) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial \Omega} -\frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_{\partial \Omega} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS = \sum_{j=0}^M \int_{\partial \Omega_j} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS$$

Considero tanti bordi  $\partial \Omega_j$  poiché non tutte le parti del bordo sono uguali:  $\partial \Omega = \bigcup_{j=0}^M \partial \Omega_j$

possiamo definire una temperatura media rispetto al flusso termico:

$$\frac{1}{T_j} = \frac{\int_{\partial \Omega_j} \frac{1}{T} \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS}{\int_{\partial \Omega_j} \mathbf{q} \cdot (-\hat{\mathbf{n}}) dS}$$

Temperatura dell'esima porzione è la media pesata sul flusso termico. Il suo reciproco è uguale al rapporto tra flusso entropico e termico.

②  $\dot{G}_a + \dot{G}_v \quad \int_{\Omega} (\dot{G}_a + \dot{G}_v) dV = \sum_{i=1}^N \dot{I}_{RR}$

③  $\frac{\partial \rho s}{\partial t} \quad \int_{\Omega} \frac{\partial \rho s}{\partial t} dV \stackrel{\text{considero } \Omega \text{ fisso nel tempo}}{=} \frac{\partial S}{\partial t} \Big|_{\Omega} \quad \left[ \frac{W}{K} \right]$

④  $\nabla \cdot (\rho s \mathbf{u})$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}) dV \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial \Omega} \rho s \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

dividendo i bordi in tanti bordi  $\partial \Omega_i$  in cui la velocità non è nulla  $\partial \Omega = \bigcup_{i=0}^N \partial \Omega_i$

$$\sum_{i=0}^N \int_{\partial \Omega_i} \rho s \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \sum_{i=0}^N \int_{\partial \Omega_i} s_i dG = \sum_{i=0}^N s_i G_i$$

dove  $dG = \rho \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$ ,  $G_i = \int_{\partial \Omega_i} dG$  portata riferita alle porzioni i-esime

si definisce un valor medio dell'entropia per la porzione i-esima in portata come media pesata del valore esatto sulla portata complessiva:

$$s_i = \frac{\int_{\partial \Omega_i} s dG}{\int_{\partial \Omega_i} dG}$$



$$I P \quad \sum_{j=0}^M \Phi_j - W_t = \frac{d}{dt} (U + E_k + E_p + p_0 V) + \sum_{i=0}^N G_i (h_i + q_k + l_p)_i$$

$$II P \quad \sum_{j=0}^M \frac{\Phi_j}{T_j} + \sum_{i=1}^N IRR = \left( \frac{dS}{dt} \right)_{cv} + \sum_{i=0}^N G_i s_i$$

$$I P - T_0 II P \quad \sum_{j=0}^M \Phi_j - \Phi_j \frac{T_0}{T_j} - W_t - T_0 \sum_{i=1}^N IRR = \frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S)_{cv} + \sum_{i=0}^N G_i (h_i + q_m - T_0 s_i)$$

$$\Rightarrow W_t = \sum_{j=0}^M \Phi_j \left( 1 - \frac{T_0}{T_j} \right) - \frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S)_{cv} - \sum_{i=0}^N G_i (h_i + q_m - T_0 s_i) - T_0 \sum_{i=1}^N IRR$$

- ① FLUSSI TERMICI DI ENERGIA
② ACCUMULO O ENERGIA IMMAGAZZATA
③ RILASCIO O ENERGIA IN FLUSSO
④ ENERGIA DISTRIBUITA

$$① \quad \sum_{j=0}^M \Phi_j \left( 1 - \frac{T_0}{T_j} \right) = \sum_{j=0}^M \Phi_j \psi_j = \Psi_j \quad \psi_j = \left( 1 - \frac{T_0}{T_j} \right) \text{ FATTORE DI CARNOT}$$

$$② \quad \frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S) = \frac{d}{dt} (A + E_m + C_0) = \frac{d}{dt} (A + E_m) + \frac{d}{dt} C_0 \stackrel{\text{poiché } C_0 \text{ è costante}}{=} \frac{d}{dt} A^t \quad A^t = A + E_m$$

$C = U + p_0 V - T_0 S$  quota utilizzabile di energia interna nelle cond. ambiente  $C_0 = 0$

$$A = C - C_0 \text{ in modo tale che nelle cond. amb. } A_0 = C_0 - C_0 = 0$$

$$③ \quad \sum_{i=0}^N G_i (h_i + q_m - T_0 s_i) = \sum_{i=0}^N G_i (b_i + q_m + \xi_0) = \sum_{i=0}^N G_i (b_i + q_m) + \xi_0 \sum_{i=0}^N G_i \stackrel{\text{costante}}{=} \xi_0 \sum_{i=0}^N G_i \stackrel{\text{se } M_0 < 0, 2}{=} \frac{dp}{dt} + V \cdot \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad V \cdot \frac{d\rho}{dt} = 0$$

$\xi = h - T_0 s$  quota utilizzabile di entalpia nelle cond. ambiente  $\xi_0 \neq 0$

$\Rightarrow \int_{deli} G_i \xi_i dG = \int_{deli} p_{deli} \cdot \xi_i dS = 0$

Si definisce una portata  $b = \xi - \xi_0$  da nelle cond. amb.  $b_0 = \xi_0 - \xi_0 = 0$

$$④ \quad T_0 \sum_{i=1}^N IRR = \Psi_{IRR} \geq 0 \quad T_0 \sum_{i=1}^N IRR = T_0 \int_{\Omega} (\sigma_u + \sigma_v) dV$$

$$W_t = \sum_{j=0}^M \Psi_j - \frac{d}{dt} A^t - \sum_{i=0}^N G_i b_i^t - \Psi_{IRR}$$

Scritta in questo modo si vede come la potenza meccanica dipende da:  $\sum_{j=0}^M \Psi_j$  dalla sommatoria dei flussi termici convertiti in flussi energetici, dall'accumulo (si nota che se l'accumulo si riduce nel tempo la derivata sarà positiva e quindi contribuirà ad incrementare la produzione di energia, da cui teniamo legato al trasporto (se globalmente queste termine è positivo allora incrementa energia; invariabilità che riduce energia).

$$W_t = W_t^{max} - W_{lost}$$

Sappiamo che:  $\eta_c = 1 - \frac{T_0}{T_1} = \frac{W_t^{max}}{\Phi_1} = 1 - \frac{\Phi_0}{\Phi_1}$

$\Rightarrow W_t^{max} = \Phi_1 \left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right) = \Phi_1 - T_0 \left(\frac{\Phi_1}{T_1}\right) = IP - T_0 \cdot \Pi P$

$\downarrow$  FLUSSO TERMICO       $\downarrow$  AMBIENTE       $\downarrow$  FLUSSO ENTROPICO

PRIMO PRINCIPIO IP  $\sum_{j=0}^M \Phi_j - W_t = \frac{d}{dt} (U + E_k + E_p + p_0 V)_{CV} + \sum_{i=0}^N G_i (h + e_k + e_p)_i$

SECONDO PRINCIPIO IP  $\sum_{j=0}^M \frac{\Phi_j}{T_j} + \sum_{IRR} = \left(\frac{dS}{dt}\right)_{CV} + \sum_{i=0}^N G_i s_i$

IP - T<sub>0</sub> · IP  $\sum_{j=0}^M \Phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right) - W_t - T_0 \sum_{IRR} = \frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S)_{CV} + \sum_{i=0}^N G_i (h + e_m - T_0 s)_i$

che riscriviamo come:  $W_t = \sum_{j=0}^M \Phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right) - \frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S)_{CV} - \sum_{i=0}^N G_i (h + e_m - T_0 s)_i - T_0 \sum_{IRR}$

① FLUSSO TERMICO DI ENERGIA      ② ACCUMULO O ENERGIA IMMAGAZZINATA (RILASCIO DI ENERGIA)      ③ ENERGIA IN FLUSSO      ④ ENERGIA DISTRUTTA

①  $\sum_{j=0}^M \Phi_j \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right) = \sum_{j=0}^M \Phi_j \vartheta_j = \Psi$ , con  $\vartheta_j = \left(1 - \frac{T_0}{T_j}\right)$  FATTORE DI CARNOT che può anche essere negativo se  $T_0 > T_j$  (MACCH. FRIGORIFERE)   
 ↳ converte il flusso termico in flusso esotermico

④  $T_0 \sum_{IRR} = \Psi_{IRR} \geq 0$  L'ENERGIA SI DISTRUGGE, NON SI CREA!!!   
 ⇒ ENERGIA INTERNA = 0 poiché C<sub>0</sub> è costante con A<sup>t</sup> = A + E<sub>m</sub>

②  $\frac{d}{dt} (U + E_m + p_0 V - T_0 S)_{CV} = \frac{d}{dt} (A + E_m + C_0) = \frac{d}{dt} (A + E_m) + \frac{dC_0}{dt}$    
 ⇒ questa utilizzabile di energia interna   
 C = U + p<sub>0</sub>V - T<sub>0</sub>S che mette condizioni ambiente ⇒ C<sub>0</sub> ≠ 0

Si definisce un'altra grandezza per fare sì che nelle condizioni ambiente la quantità di energia immagazzinata fosse nulla:  $A = C - C_0$  che nelle condizioni ambiente ⇒ A = C<sub>0</sub> - C<sub>0</sub> = 0

③  $\sum_{i=0}^N G_i (h + e_m - T_0 s)_i = \sum_{i=0}^N G_i (b + e_m + \xi_0) = \sum_{i=0}^N G_i (b + e_m) + \sum_{i=0}^N G_i \xi_0 = \sum_{i=0}^N G_i (b + e_m) + \xi_0 \sum_{i=0}^N G_i = 0$  \*   
 ⇒ questa utilizzabile di energia   
 costante

Si definisce  $\xi = h - T_0 s$  che nelle cond. ambiente ⇒ ξ<sub>0</sub> ≠ 0   
 Anche in questo caso si definisce una grandezza tale per cui nelle condizioni ambiente la quantità di energia in flusso fosse nulla:  $b = \xi - \xi_0$  che nelle cond. ambiente ⇒ b = ξ<sub>0</sub> - ξ<sub>0</sub> = 0

\*  $\sum_{i=0}^N G_i = 0$  nel caso in cui consideriamo il caso di limite incompressibile ( $Ma = \frac{u}{c_s} \ll 1$ )   
 ⇒ p<sub>0</sub> · ∇u = 0 cioè ∇ · (p<sub>0</sub> · u) = 0

$\int_{\Omega} \nabla \cdot (p u) dv \stackrel{eq}{=} \int_{\partial \Omega} p u \cdot \hat{n} ds = \sum_{i=0}^N \int_{\partial \Omega_i} p u \cdot \hat{n} ds = \sum_{i=0}^N G_i = 0$        $G_i = \int_{\partial \Omega_i} p u \cdot \hat{n} ds = 0$

In definitiva l'equazione dell'ENERGIA diventa:

$\sum_{j=0}^M \Psi_j - W_t = \frac{d}{dt} A^t + \sum_{i=0}^N G_i b^t + \Psi_{IRR}$    
 EQUAZIONE DELL'ENERGIA   
 FLUSSO DI ENERGIA TERMICA      Potenza meccanica      energia interna      potenza meccanica

con A<sup>t</sup> = A + E<sub>m</sub>      ENERGIA INTERNA TOTALE   
 b<sup>t</sup> = b + e<sub>m</sub>      ENERGIA TOTALE

Nelle condizioni ambiente (T<sub>0</sub>, p<sub>0</sub>) i due termini di energia accumulata A ed energia trasportata b vanno a zero, perdendo capacità di produrre ulteriore potenza meccanica

## APPLICAZIONE DELL'EQUAZIONE DELL'EXERGIA IN UN GENERICO SISTEMA. COMMENTARE IL CASO DI MACCHINE MOTRICI E DI MACCHINE OPERATRICI.

L'analisi exergetica è molto importante nella caratterizzazione dei sistemi. In particolare viene utilizzata per l'ottimizzazione dei sistemi. Può essere utilizzata per valutare la qualità dei componenti presenti all'interno dei sistemi. Si potrebbe utilizzare per fare quest'analisi anche l'entropia anche se è poco intuitiva perché l'entropia cui informa sulla irreversibilità dei componenti, ovvero sulla loro capacità di produrre entropia e quindi irreversibilità. Quindi non risulta un buon metodo per ottimizzare un sistema perché ci informa su uno spreco di risorse, ovvero sulla capacità dei singoli componenti di ridurre l'effetto utile. Si preferisce utilizzare l'analisi exergetica poiché ci si concentra sull'effetto utile che è rappresentato dall'energia meccanica. L'exergia è infatti definibile come la quantità di energia meccanica effettivamente o virtualmente presente in un certo flusso proveniente da una macchina ideale. Quindi una consente di ricondurre qualsiasi flusso di energia in energia meccanica.

$$W_t = \sum_{j=0}^M \Psi_j - \frac{J}{\partial t} A^t - \sum_{i=0}^N G_i b^t - \Psi_{IRR}$$

$\sum_{j=0}^M \Psi_j$  rappresenta la somma dei flussi termici exergetici, ovvero i flussi termici che sono stati convertiti in energia ~~dal~~ fatto di Carnot. È una quantità positiva se entrante nel sistema. Se il suo valore è positivo contribuisce a produrre potenze meccanica.

$\frac{J}{\partial t} A^t$  rappresenta l'accumulo o il rilascio di exergia. Se l'accumulo si riduce nel tempo il termine totale sarà positivo e quindi contribuirà alla produzione di exergia.

$\sum_{i=0}^N G_i b^t$  rappresenta un termine di trasporto che possiamo chiamare exergia in flusso. Rappresenta l'interazione con i componenti adiacenti, ovvero l'exergie ~~ricevuta~~ o ceduta ai componenti adiacenti. È positivo se uscente dal sistema.

$\Psi_{IRR}$  è un termine sempre positivo. Potrebbe essere nullo in caso di sistema reversibile (ideale). Rappresenta la distruzione di exergia, ovvero la perdita di ~~potenze~~ potenze meccanica. È dovuta alle irreversibilità sia termiche che fluidodinamiche.

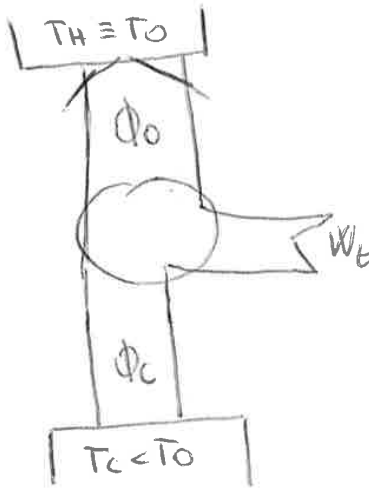
$$W_t = W_t^{max} - W_{lost}$$

$$W_t^{max} = \sum_{j=0}^M \Psi_j - \frac{J}{\partial t} A^t - \sum_{i=0}^N G_i b^t ; W_{lost} = \Psi_{IRR} = T_0 \sum_{IRR} = T_0 \int_{\Omega} (G_u + G_v) dV \geq 0$$

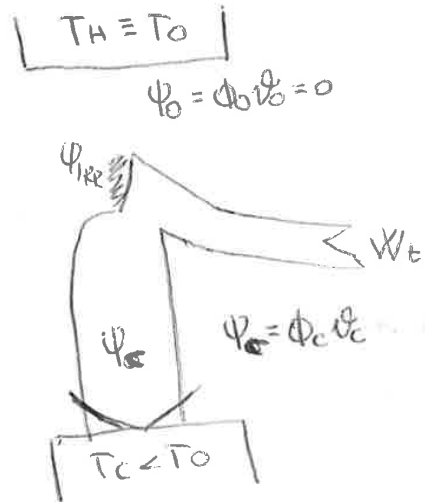


# MACCHINE FRIGORIFERE

## ANALISI ENERGETICA



## ANALISI EXERGETICA



### ANALISI ENERGETICA:

Da un punto di vista energetico la macchina frigorifera preleva un flusso termico  $\Phi_c$  da un ambiente a temperatura più fredda dell'ambiente  $T_c < T_0$  e cede ~~un~~ <sup>un</sup> flusso termico  $\Phi_0$  al termostato e temp ambiente  $T_0$ , utilizzando una potenza meccanica  $W_t$  dall'esterno. Lo scopo delle macchine frigorifere è quello di mantenere al di sotto di una certa temperatura, il comparto refrigerato prelevandogli calore. Nel caso delle macchine frigorifere possiamo definire il coefficiente di prestazioni:

$$COP_{FRIGO} = \frac{\text{effetto utile}}{\text{spesa}} = \frac{\Phi_c}{W_t}$$

### ANALISI EXERGETICA:

Da un punto di vista exergetico le macchine frigorifere richiedono un investimento di energia. Si osserva che il fattore di Carnot risulta negativo e questo vuol dire che il flusso exergetico si discorde al flusso termico. Dunque avremo un flusso exergetico che viene fornito al comparto refrigerato.

$$\eta_c = 1 - \frac{T_0}{T_c} < 0$$

La macchina frigorifera utilizza la potenza meccanica ~~prelevata~~ <sup>fornita</sup> dall'esterno per cedere una parte al comparto refrigerato e l'altra invece viene persa a causa delle irreversibilità. In pratica una macchina frigorifera investe parte di energia per refrigerare l'ambiente  $T_c$  ovvero per ~~mantenerlo~~ <sup>mantenerlo</sup> dall'equilibrio termico. Si parla di trasformazioni di allontanamento delle condizioni di equilibrio. Per fare ciò dobbiamo investire ~~una certa~~ <sup>una certa</sup> energia, perché dobbiamo creare appositamente un disequilibrio termico per mantenere il comparto refrigerato al di sotto di una certa temperatura. Di fatto dobbiamo spendere una risorsa meccanica per costringere uno stato termodinamico ed allontanarsi dalle condizioni naturali e spontanee dell'ambiente.

Si osserva che nelle condizioni ambiente l'exergia è nulla, ovvero quando  $x=1$ . Spostandoci verso  $x>1$  o verso  $x<1$  invece l'exergia, aumenta ed è la del fatto che il corpo è freddo o caldo. Questo significa che l'exergia non dipende dal fatto che un corpo è caldo o freddo ma invece l'exergia dipende dal fatto che ci allontaniamo dalle condizioni ambiente. Ogni qualvolta abbiamo un disequilibrio caldo o freddo allora avremo un recupero di exergia o un investimento di exergia.

Si osserva, dal grafico, come infatti nei punti A si ha la stessa quantità di exergia.

Il motore termico è quel dispositivo che partendo da un disequilibrio caldo recupera exergia per riportarci alle condizioni di equilibrio termico.

Al contrario il frigorifero è quel dispositivo che parte da uno stato di equilibrio e deve investire exergia per produrre un disequilibrio freddo. Questo perché il frigo deve "costringere" il comparto refrigerato a trovarsi al di sotto di una certa temperatura inferiore rispetto alla temperatura ambiente.

La pompa di calore è una macchina operatrice che ha lo scopo di cedere il più possibile calore ad un ambiente più caldo per mantenerlo caldo. Questo dispositivo investe exergia per creare un certo disequilibrio caldo.

Il motore a ghiaccio è un dispositivo molto particolare che però recupera exergia partendo da disequilibrio freddo per avvicinarsi alle condizioni di equilibrio.

Questo motore preleva calore da un ~~termostato~~ a temp. ambiente e cede calore ad un termostato a temperatura più fredda dell'ambiente, tutto questo producendo energia meccanica. Ovviamente il corpo a temperatura più fredda ricevendo calore si riscalderà fino a raggiungere equilibrio con l'ambiente. Questo sottolinea il fatto che, da un punto di vista exergetico, il motore non ha necessariamente bisogno di una sorgente più calda cioè in disequilibrio caldo ma può anche funzionare con una sorgente più fredda. L'importante è che esista un disequilibrio con l'ambiente perché in realtà il motore è alimentato dal disequilibrio.

In particolare si nota dal grafico come le macchine motrici e i cicli diretti tendono a recuperare exergia avvicinandoci all'equilibrio termico; al contrario le macchine operatrici e i cicli inversi investono exergia per allontanarci dalle condizioni di equilibrio.

# ACUSTICA APPLICATA

## TEORIA DEL SUONO - EQUAZIONE DI PROPAGAZIONE DELLE ONDE

Considereremo una teoria semplificata del suono, ovvero dove sono rispettate le seguenti ipotesi:

- LINEARITA' → trascureremo i fenomeni non lineari in modo da poter applicare la sovrapposizione degli effetti.
- NON DISSIPAZIONI → trascureremo le irreversibilità poiché considereremo distanze di una 10 di metri.
- FLUIDI A BASSE DENSITA' → trascureremo gli effetti del campo gravitazionale.

Consideriamo il sistema di NSF e in particolare l'equazione della continuità e delle quantità di moto:

EQUAZ. DI CONTINUITA':  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$

EQUAZ. DELLA QUANT. DI MOTO:  $\frac{\partial (\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \underline{u} + \underline{p} \underline{I} - \underline{\tau}) = \rho \underline{g}$

*in linearizza*      *ipotesi sulle non dissipazioni*      *trascuriamo gli effetti del campo gravitazionale*

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\underline{p} \underline{I}) = 0$$

$$\nabla \cdot (\underline{p} \underline{I}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho \delta_{ij}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} p = 0 \Rightarrow \nabla p$$

di conseguenza l'equaz. delle quantità di moto diventa:  $\frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} + \nabla p = 0$

Inoltre si considera anche l'equazione dell'entropia che risulta costante per l'ipotesi di non dissipazioni. ( $\frac{D S}{D t} = 0$ )

Si deriva l'equaz. di continuità:

$$\frac{\partial \rho^2}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \rho \underline{u}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla \cdot (-\nabla p) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \nabla^2 p \quad (1)$$

Questa equazione presenta due incognite  $\rho$  e  $p$ , dunque si cerca di scrivere l'equazione riferendola ad un'unica incognita.

$p = f(T, \rho) = p(S, \rho)$  ⇒ la pressione può essere espressa in funzione dell'entropia e della densità

*poiché entropia costante per ipotesi*

$$\nabla p = \frac{\partial}{\partial x_i} p(S, \rho) = \frac{D p}{D S} \bigg|_{\rho} \frac{\partial S}{\partial x_i} + \frac{D p}{D \rho} \bigg|_S \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{D p}{D \rho} \bigg|_S \nabla \rho \quad (2) \quad \text{derivata direzionale}$$

$$\frac{D p}{D \rho} \bigg|_S = \frac{N/m^2}{kg/m^3} = \frac{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}{kg \cdot m^{-3}} = \frac{m^2}{s^2} = \left( \frac{m}{s} \right)^2$$

Si osserva che ha lo stesso unità di misura di una velocità al quadrato che rappresenta proprio la velocità del suono  $c_s^2$ .



## RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DI PROPAGAZIONE DELLE ONDE

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \nabla^2 p \Rightarrow \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c_s^2 \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

la densità  $p$  dipende sia dallo spazio che dal tempo:  $p(x, t)$

CASO MONODIMENSIONALE  
la densità dipende solo dalla  
coordinata  $x$

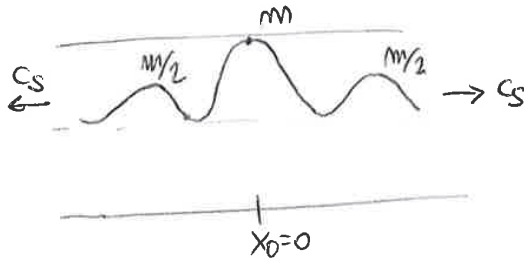
Per casi monodimensionali è possibile ottenere una soluzione analitica delle equazioni di propagazione delle onde ricorrendo per sostituzione delle condizioni iniziali:  $t=0 \Rightarrow p(0, x) = f_0(x)$

$$p(t, x) = f_0(x \pm c_s t) \quad t = \pm \frac{1}{c_s} (x - x_0) \quad \text{RETTA CARATTERISTICA}$$

Per  $t=0$  abbiamo un picco di densità in  $x_0$ , cioè c'è un eccesso di massa nelle condizioni iniziali.  
Per  $t>0$  la massa si propaga. Essa può propagarsi a destra o a sinistra. Questo dipende dalla derivata nel tempo delle condizioni iniziali.

La massa quindi può propagarsi secondo una certa direzione, ovvero secondo la retta caratteristica destra o secondo la <sup>retta</sup> caratteristica sinistra. Questa predizione è decisa dalla derivata delle condizioni iniziali. Se essa è diversa da zero la massa si propogherà di più verso una certa direzione rispetto all'altra. Se, al contrario, la derivata è nulla significa che non c'è una particolare predizione e la massa si ripartirà equamente tra le due caratteristiche.

Si osserva come l'equazione di propagazione delle onde non smorza le perturbazioni ma le propaga. Proprio per questo motivo è un fenomeno instabile.



In realtà quando non siamo nel caso monodimensionale le onde possono propagarsi in tutte le direzioni sferiche, cioè attraverso ONDE SFERICHE. Ovviamente più grande è la sfera più il picco sarà piccolo. In fatti il picco diminuisce al crescere delle dimensioni della sfera.

## RELEVANTI QUANTITÀ PER I SUONI PURI

	SPAZIO	TEMPO
lunghezza d'onda	$L = \frac{c_s}{f}$	frequenza $f = \frac{c_s}{L}$
NUMERO D'ONDA	$k = \frac{2\pi}{L} = \frac{\omega}{c_s}$	frequenza angolare $\omega = 2\pi f = c_s k$

Lo scopo dell'ACUSTICA APPLICATA è quello di andare a capire quali sono i rumori o i possibili rischi per un utente che è <sup>esposto</sup> sottoposto continuamente ad segnali acustici. Quindi nasce l'esigenza di correlare le grandezze fisiche con la sensazione dell'uomo, con l'orecchio umano, ovvero la sua parte fisiologica.

Proprio per capire la risposta in termini di sensazione per l'orecchio venne introdotta la cosiddetta **LEGGE DI WEBER-FECHNER**. Essa è una legge sperimentale ricavata statisticamente, ovvero sottoponendo un certo numero di utenti a segnali acustici per capire quale fosse la loro sensazione al segnale acustico. Si definisce la **SENSAZIONE ACUSTICA** come la sensazione che un utente dà rispetto ad un segnale acustico. Questa legge mette a confronto una grandezza meccanica come la pressione con la sensazione acustica e si vede che quest'ultima è proporzionale all'incremento relativo di pressione.

$$dS \propto \frac{d(\Delta p_{eff})}{\Delta p_{eff}} \Rightarrow dS = K_1 \cdot \frac{d(\Delta p_{eff})}{\Delta p_{eff}} \quad (1)$$

Per ottenere lo stesso incremento di sensazione è necessario aumentare l'incremento o l'aumentare del segnale. Se, al contrario, mantengo lo stesso incremento o l'aumentare del segnale la sensazione diminuisce.

Integrando la (1) ottengo:  $S - S_0 = K_1 \cdot \ln\left(\frac{\Delta p_{eff}}{\Delta p_0}\right) = K_2 \cdot \lg\left(\frac{\Delta p_{eff}}{\Delta p_0}\right)$

Si osserva come la sensazione è legata alla variazione di pressione attraverso il logaritmo. Dunque per valori bassi di  $\Delta p$  ovvero valori elevati di sensazione, per valori elevati di pressione ovvero valori bassi di sensazione.

Siccome le grandezze acustiche hanno la proprietà di variare tanti ordini di grandezza è necessario fare riferimento al concetto di LIVELLO:

$$L_Y = 10 \lg_{10}\left(\frac{Y}{Y_0}\right) \quad [dB] \rightarrow \text{livello di una grandezza generica } Y.$$

$\rightarrow$  conversione per passare da  $\ln$  ad  $\lg_{10}$ .

$$S - S_0 = K_1 \cdot \ln\left(\frac{\Delta p_{eff}}{\Delta p_0}\right) = K_1 \cdot 2,3 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}}{\Delta p_0}\right) = \frac{K_1 \cdot 2,3}{20} \cdot 20 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}}{\Delta p_0}\right) = K_2 \cdot 10 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}^2}{\Delta p_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{S - S_0 = K_2 \cdot L_p} \quad \begin{matrix} L_p = \text{livello} \\ \text{di pressione} \end{matrix} \Rightarrow \text{RELAZIONE che lega la sensazione con il livello di pressione.}$$

Sfruttando la relazione dell'intensità acustica  $I = \frac{\Delta p_{eff}^2}{\rho \cdot c_s}$  e il suo valore di riferimento  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  si può ricavare il livello di intensità:

$$L_I = 10 \lg_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right) = 10 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}^2}{\rho \cdot c_s \cdot I_0}\right) = 10 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}^2 \cdot \Delta p_0^2}{\rho \cdot c_s \cdot I_0 \cdot \Delta p_0^2}\right) = \underbrace{10 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_{eff}^2}{\Delta p_0^2}\right)}_{L_p} + \underbrace{10 \lg_{10}\left(\frac{\Delta p_0^2}{\rho \cdot c_s \cdot I_0}\right)}_{-0,2 \text{ dB}}$$

$$\Rightarrow L_I = L_p - 0,2 \text{ dB} \quad \text{trascurabile} \Rightarrow \boxed{L_I \approx L_p} \Rightarrow \text{il livello di pressione può essere utilizzato per quantificare il LIVELLO DI INTENSITA' } L_I.$$

$\Delta p_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ N/m}^2$

OSSERVAZIONI:

se  $L_I = 0 \Rightarrow I = I_0$

se  $L_I = -10 \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{10^{-13}}{10^{-12}}$

Dallo **AUDIOGRAMMA NORMALE** è possibile osservare che a basse frequenze (inferiori a 1000 Hz) le curve iso-phom tendono a compattarsi verso alti valori di livello di pressione. In particolare la soglia del dolore tende a restare piatta, mentre tende ad alzarsi la soglia di udibilità più si sposta verso basse frequenze. Per provocare la stessa sensazione sonora è quindi necessario un livello sonoro maggiore. Ragionando invece a parità di livello di pressione, diminuisce la sensazione sonora provocata da un suono al diminuire della sua frequenza. L'orechio umano è più sensibile tra 3000 e 4000 Hz dove le curve iso-phom presentano un minimo.

Si noti ancora come la curva rappresentativa della soglia del dolore e quelle rappresentative di valori elevati di sensazione sonora siano più piatte rispetto alle altre curve iso-phom associate a valori inferiori di sensazione sonora. Questo significa che l'orechio umano è in grado di sentire le pressioni più elevate più o meno tutte le frequenze nel campo dell'udibile.

[da 0 a 120dB → 12 ordini di grandezza; da 20 a 20kHz → 3 ordini di grandezza]  
L'AUDIOGRAMMA NORMALE CI AIUTA AD IDENTIFICARE E CARATTERIZZARE LE SORGENTI SONORE PER QUANTO RIGUARDA I SUONI PURI.

### SUBDIVISIONE IN BANDE & FILTRO A

Però nella realtà abbiamo a che fare con **SUONI COMPLESSI**, quindi nello stesso tempo più frequenze. Abbiamo visto che il suono complesso può essere visto, mediante la trasformata di Fourier, come **una somma di infinite armoniche elementari**. Il fonometro mi misura le Lp per ogni armonica (che non sono infinite ma sono tante) e poi fa una discretizzazione nel campo delle frequenze. Risulta necessario dunque suddividere il campo delle frequenze in **intervalli**. Posso suddividere il campo delle frequenze in 8 intervalli ottenendo la suddivisione in **BANDE DI OTTAVA**, oppure in 24 intervalli ottenendo **BANDE DI TERZI DI OTTAVA**.

Freq. MIN	Frequenza centrale	Freq. MAX
$62,5/\sqrt{2}$	62,5	$62,5\sqrt{2}$
$125/\sqrt{2}$	125	$125\sqrt{2}$
	250	
	500	
	1000	
	2000	
	4000	
	8000	

la suddivisione degli intervalli è continua:  $125/\sqrt{2} = 62,5\sqrt{2}$

Nelle applicazioni industriali si usa un fonometro e costruisco un istogramma in funzione delle bande di ottava. Per ogni banda di ottava ho una misura. Più poi devo andare a costruirmi le misure dentro ogni banda di ottava. Quindi per ogni misura devo entrare nell'audiogramma normale nelle ascisse e trovare e convertire il Lp in un phom. Questo risulta scomodo. Allora si suddivide l'audiogramma normale in bande di ottava ed in ogni banda d'ottava vedo e prendo l'iso-phom medio. Poi per ogni banda d'ottava passa dal livello di pressione alla sensazione applicando una **correzione di banda**.

**FILTRO A!**  $L_p^{(1)} \bullet \text{FILTRO A} = [dBA] \approx \text{approssimazione della sensazione acustica}$

Questo è solo un modo industriale di trasformare una misura fisica di Lp ottenuto con il fonometro in una indicazione veloce di sensazione da' in realtà quel tipo di phom sono.

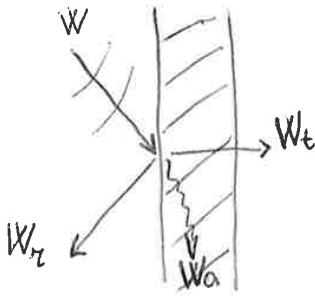


Nel caso di campo riverberato l'intensità acustica dovrà tenere conto anche del contributo dovuto alla riverberazione:

$$I = \underbrace{\frac{WQ}{4\pi r^2}}_{\text{dovuto alle onde dirette}} + I_{\text{RIVERBERAZIONE}}$$

Ovviamente la riverberazione non dipenderà molto dalla sorgente perché essa è dovuta alle onde riflesse, quindi tenendo conto della stanza e quindi della superficie interna delle pareti e del fatto che la stanza è costituita da materiali eterogenei.

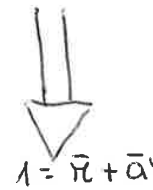
La potenza sonora emessa  $W$  quando interagisce con le pareti avrà una quota che riflette, una quota che viene assorbita e un'ultima quota che verrà trasmessa:



$$W = W_r + W_t + W_a$$

$$1 = \frac{W_r}{W} + \frac{W_t}{W} + \frac{W_a}{W} \Rightarrow 1 = r + t + a = r + a'$$

$r$  = indice di riflessione,  
 $t$  = indice di trasmissione  
 $a$  = indice di assorbimento  
 $a'$  = indice di assorbimento apparente



però siccome la stanza è realizzata di materiali eterogenei con ognuno un suo  $a'$  ed  $x$  allora si considerano dei valori medi

$$1 = \bar{r} + \bar{a}'$$

$$\Rightarrow \bar{r} = 1 - \bar{a}'$$

In questo modo avremo:

$$I = \frac{WQ}{4\pi r^2} + \frac{4(1-\bar{a}')W}{\bar{a}'S}$$

dove  $S$  rappresenta la superficie interna della stanza

dividendo per  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2 = \frac{W_0}{S_0}$  con  $W_0 = 10^{-12} W$ ,  $S_0 = 1 \text{ m}^2$ :

$$\frac{I}{I_0} = \frac{WQ}{4\pi r^2 I_0} + \frac{4(1-\bar{a}')W}{\bar{a}'S I_0} \Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{W S_0 Q}{4\pi r^2 W_0} + \frac{4(1-\bar{a}')W \cdot S_0}{\bar{a}'S W_0}$$

$$\Rightarrow \frac{I}{I_0} = \frac{W}{W_0} \left( \frac{Q \cdot S_0}{4\pi r^2} + \frac{4(1-\bar{a}')S_0}{\bar{a}'S} \right)$$

Passando alla definizione di livello:

$$10 \lg_{10} \left( \frac{I}{I_0} \right) = L_I = L_p = 10 \lg_{10} \left( \frac{W}{W_0} \right) + 10 \lg_{10} \left( \frac{Q \cdot S_0}{4\pi r^2} + \frac{4(1-\bar{a}')S_0}{\bar{a}'S} \right)$$

$$\Rightarrow L_I = L_p = L_w + K(r, S, \bar{a}') \rightarrow \text{fattore correttivo che dipende dalla distanza } r \text{ a cui è stata effettuata la misura; dalla superficie } S \text{ interna della stanza; dal coeff. di assorbimento medio apparente } \bar{a}'.$$

Questa relazione è quella che viene utilizzata dal produttore per ricavare le caratteristiche di frequenza della macchina, ovvero la potenza sonora emessa dalla sorgente:

$$L_w^{(K)} = L_p^{(K)} - K^{(K)}(r, S, \bar{a}') \rightarrow \text{si riferiscono però alla camera di test in cui viene effettuata la misura, che non è quella dove la macchina verrà installata.}$$

Ma anche la relazione che viene utilizzata dall'utente per valutare ciò che sente mentre lavora.

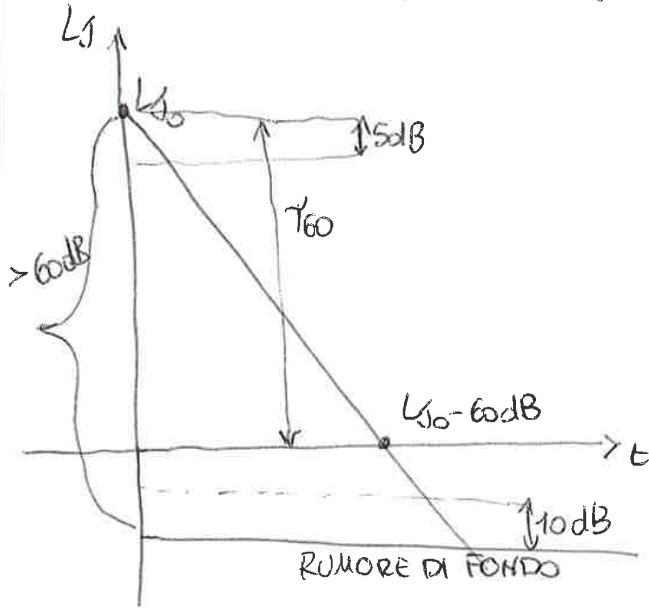
$$L_p^{(K)} = L_w^{(K)} + K^{(K)}(r, S, \bar{a}') \rightarrow \text{scelta riferita all'utente, cioè a dove ha effettuato la misura per ricavare } L_p.$$

$$L_p^{(K)} + \text{FILTRO A} \approx S^{(K)} [\text{dB(A)}] \leq S_{\text{norm}}^{(K)} \rightarrow \text{Successivamente, dopo aver ricavato } L_p, \text{ applica la correzione del filtro per vedere se rientra nella norma.}$$



La norma ci dice di prendere in considerazione il  $T_{60}$  **TEMPO CONVENZIONALE DI RIVERBERAZIONE**, ovvero il tempo necessario a ridurre il segnale di 60 dB o equivalentemente il tempo necessario per ridurre l'intensità iniziale di un milionesimo ( $10^{-6}$ ). A volte però non è possibile calcolare direttamente il  $T_{60}$  e allora in questi casi si preferisce riferirsi a  $T_{30}$  o  $T_{20}$  moltiplicandoli rispettivamente per 2 e per 3. Però consideriamo che utilizzando il  $T_{30}$  e il  $T_{20}$  l'errore che commettiamo cresce.

Possiamo costruire un diagramma analogo al precedente ma considerando le grandezze di invece.



Nel caso di grandezze fisiche il decadimento avviene in andamento esponenziale:  $J = J_0 \cdot e^{-t/\tau}$

Nel caso di grandezze di livello  $L_s$  si ha un andamento lineare, cioè una retta:

$$L_s = 10 \log_{10} \left( \frac{J}{J_0} \right) = -t/\tau$$

Considerando che avremo sempre un RUMORE DI FONDO ecciteremo la stanza in modo tale da ottenere un picco che sia  $> 60$  dB rispetto al rumore di fondo. Ricordiamo che al di sotto del rumore di fondo non è possibile fare misure.

In questo modo avremo il picco  $L_{s0}$ .

A questo punto considerando il picco e lo spegnimento della sorgente considero una riduzione di 60 dB. L'intensità della retta

rappresenta il punto:  $L_{s0} - 60$  dB. Allora l'intervallo di tempo percorso tra lo spegnimento della sorgente e il punto:  $L_{s0} - 60$  dB è proprio il tempo  $T_{60}$ .

In realtà ho anche altri limiti imposti dalla NORMATIVA che mi impone di scartare i primi 5 dB e di fermarmi 10 dB prima di raggiungere il livello di fondo.

$$J = J_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

sapendo che  $J(T_{60}) = J_0 \cdot 10^{-6}$  perché il  $T_{60}$  mi permette di ridurre di un milionesimo ( $10^{-6}$ ) il valore di picco  $J_0$ .

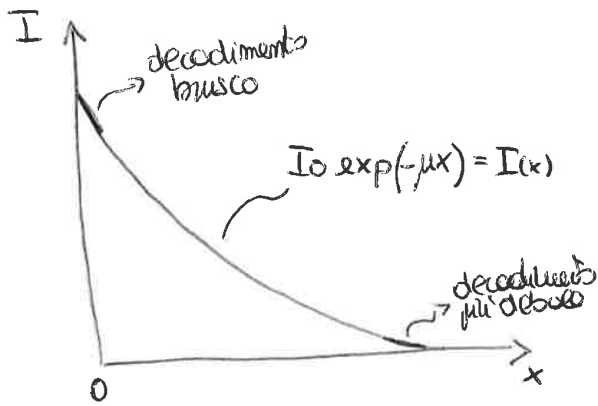
$$J(T_{60}) = J_0 \cdot e^{-\frac{T_{60}}{\tau}} = J_0 \cdot 10^{-6} \Rightarrow \ln e^{-\frac{T_{60}}{\tau}} = \ln 10^{-6} \Rightarrow -\frac{T_{60}}{\tau} = \ln 10^{-6} \Rightarrow T_{60} = \tau \ln 10^6$$

$$\Rightarrow T_{60} = \frac{4V}{a'cS} \ln 10^6 = \frac{24 \ln 10^6}{cS} \cdot \frac{V}{a'S} = \boxed{0,16 \frac{V}{a'S} = T_{60}} \quad \text{FORMULA DI SABINE}$$

Questa relazione mi permette di calcolare, avendo il  $T_{60}$ , il coeff.  $a'$  che è quello che ci serviva per calcolare il fattore correttivo in modo da tenere l'effetto della stanza e di riuscire quindi la potenza sonora emessa dalla sorgente:

$$L_p^{(k)} = L_w^{(k)} + K_f(r, S, a'(k))$$

Possiamo diagrammare l'intensità ottica in funzione della coordinata  $x$ :



L'andamento è quello di un decadimento esponenziale che risulta essere più brusco all'inizio e invece è più debole alla fine.

Questo si può capire più facilmente considerando l'esempio di nebbia. Inizialmente l'intensità è elevata dunque ho più fotoni che vanno ad impattare con le molecole d'acqua presenti nella nebbia e dunque c'è più probabilità che avvenga l'urto e che questi fotoni vengano costretti a cambiare direzione. (BRUSCO DECADIMENTO)

Al contrario verso la fine avremo un decadimento più debole poiché l'intensità è diminuita dunque ho meno fotoni e quindi meno probabilità che vengano ad impattare con le molecole d'acqua ma possiamo dire che passano nel mezzo tra le molecole d'acqua.

Ovviamente oltre una certa distanza diretta **SPESORE OTTICO** non riusciamo più a vedere poiché le molecole d'acqua riflettono i fotoni e quindi meno luce riesce a passare.

$$\frac{dI}{dx} = I_0(-\mu) \exp(-\mu x) = -\mu I$$

$$\Rightarrow \boxed{dI = -\mu I dx} \quad \text{LEGGE DI BEER}$$

Si osserva come l'intensità ottica dipenda non solo dalla distanza  $x$  ma anche dalla stessa intensità.

$\mu$  = coefficiente di estinzione [ $m^{-1}$ ]

In campo applicativo però si preferisce usare lo spessore ottico  $L$  piuttosto che  $\mu$ .

$$I(L) = I_0 \exp(-\mu L)$$

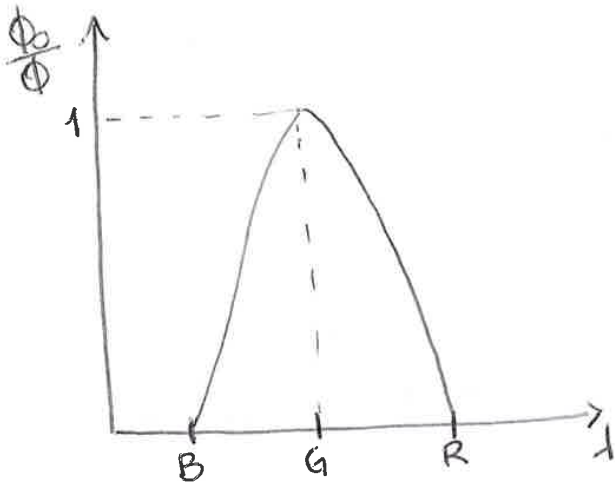
$$I_0 = \text{segnale iniziale} \rightarrow I(L) = \text{segnale finale}$$

Si definisce anche un coefficiente adimensionale chiamato coefficiente di **ASSORBIMENTO**  $\omega$ :

$$\omega = \frac{I_0 - I_L}{I_0} = \frac{I_0 - I_0 \exp(-\mu L)}{I_0} = 1 - \exp(-\mu L)$$

Esso dipende sia dalla natura del materiale  $\mu$  ma anche dalla geometria del mezzo  $L$ .

Ci possiamo riferire ad un diagramma simile in cui si vede come varia il rapporto tra la potenza di riferimento  $\Phi_0$  e la potenza considerata  $\Phi$  al variare della  $\lambda$ . Questo diagramma, prende il nome di **CURVA DI PONDERAZIONE  $V(\lambda)$** .



Si ottiene una curva a campana. In corrispondenza del verde (G) si avrà un  $\Phi_0/\Phi = 1$ . Per tutte le altre lunghezze d'onda avremo  $\Phi_0/\Phi < 1$ .

Questa curva ci dice come varia la sensazione al variare di  $\lambda$  (visibilità colore).

Bisogna, però, trovare una scala di **SENSAZIONE LUMINOSA** in cui mettiamo in relazione la grandezza fisica ~~con~~ con la sensazione. L'unità di misura della sensazione luminosa è il **LUMEN** la cui definizione è la seguente:

1 Watt di luce monocromatica a 550 nm (verde) corrisponde a  $683 \text{ [LM]}^{\rightarrow}$  LUMEN

Quindi a 555 nm il fattore scala tra la potenza (grand. oggettiva) e la sensazione luminosa (grand. soggettiva) è  $683 \frac{\text{LM}}{\text{W}}$ .

Il lumen: serve per misurare la sensazione luminosa, e per convenzione è stato fissata questa quantità. Ma questa quantità si riferisce solo al colore verde cioè a 555 nm. Per le altre lunghezze d'onda  $\lambda \neq 555 \text{ nm}$  per trovare la sensazione luminosa basta moltiplicare  $683 \text{ LM/W}$  che è chiamata  **$K_{\text{max}}$  in condizioni di visione** per la curva di ponderazione:

$$\text{per } \lambda \neq 555 \text{ nm} \rightarrow \underbrace{683}_{K_{\text{max}}} \cdot V(\lambda)$$

Diunque avendo una certa potenza luminosa per ottenere della sensazione luminosa devo prima scorporare questo flusso nello spettro luminoso:

$$\Phi = \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} \Phi_{\lambda} d\lambda \quad \text{con} \quad \Phi_{\lambda} = \frac{d\Phi}{d\lambda}$$

Per trovare la sensazione basta moltiplicare la scomposizione spettrale  $\Phi_{\lambda}$  per  $K_{\text{max}}$  e per  $V(\lambda)$  e integrare per tutte le lunghezze d'onda:

$$\Phi_{\text{LUMEN}} = \int_{\lambda_{\text{min}}}^{\lambda_{\text{max}}} K_{\text{max}} \cdot V(\lambda) \cdot \Phi_{\lambda} d\lambda$$

Essa è una rappresentazione grafica di come varia l'intensità luminosa in funzione di  $\beta$ .

$$I(\beta) = I_0 \cdot f(\beta)$$

$\underbrace{\quad}_{\text{TAGLIA}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{FORMA}}$

$I_0$  è l'intensità massima  
 $0 \leq f(\beta) \leq 1$

La curva è una sorta di memoria di come si fatta meccanicamente la sorgente, le taglie dipendono dalla intensità che vogliamo raggiungere.

Sapendo che:  $I = \frac{d\Phi_{lum}}{d\omega} \Rightarrow \Phi_{lum} = \int_0^{4\pi} I d\omega$

Si può definire l'**INTENSITÀ MEDIA** come:

$$I_{MEDIA} = \frac{\Phi_{lum}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} I(\beta) d\omega = \frac{I_0}{4\pi} \int_0^{4\pi} f(\beta) d\omega$$

legata alla forma, cioè dalla tipologia di lampada

### LEGGI DI LAMBERT - CALCOLO L'ILLUMINAMENTO DOVUTO AD UNA SORGENTE DI PUNTI

Dobbiamo adesso caratterizzare il ricevitore, ovvero capire l'illuminamento che arriva su una superficie. Per fare questo dobbiamo trovare una relazione che lega la sorgente con il ricevitore.

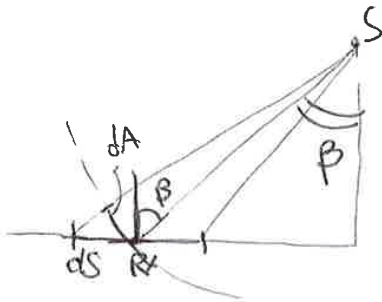
Questo legame è dato dalla **legge di Lambert** che rappresenta una proiezione geometrica:

Data una certa sorgente  $S$  puntiforme e un piano ricevente  $dS$ , si osserva che c'è una certa dipendenza dall'illuminamento dai raggi luminosi.

L'illuminamento può essere espresso come:

$$E = \frac{d\Phi_{lum}}{dS} \text{ [Lux]}$$

Il Lux ci quantifica la sensazione legata al piano ricevente.



Dobbiamo trovare un modo per seguire la sorgente al ricevitore quindi moltiplichiamo per  $d\omega$  e dividiamo per  $d\omega$ :

$$E = \frac{d\Phi_{lum}}{dS} = \frac{d\Phi_{lum}}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dS}$$

$$d\omega = \frac{dA}{r^2} \text{ per definizione di angolo solido}$$

$$\Rightarrow E = \left( \frac{d\Phi_{lum}}{d\omega} \right) \cdot \frac{d\omega}{dS} = I \cdot \frac{dA}{r^2} \cdot \frac{1}{dS}$$

fattore geometrico che dipende dalla distanza al quadrato tra la sorgente e il ricevitore; dalla superficie ricevente  $dS$  e dalla superficie della sfera  $dA$ .

ma si osserva che:

se  $\beta = 0^\circ \Rightarrow dS = dA$

se  $\beta = 90^\circ \Rightarrow dS \gg dA$

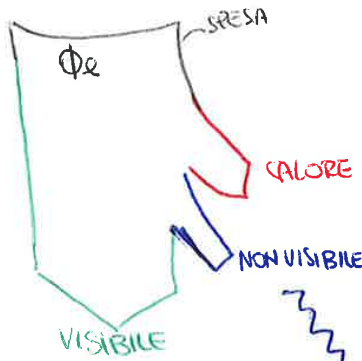
$$\Rightarrow \frac{dA}{dS} = \cos\beta$$

Sostituendo trovo:

$$E = I \cdot \frac{\cos\beta}{r^2}$$

1° LEGGE DI LAMBERT  
 nell'ottica





in questo caso si parla di efficienza e non di efficacia perché le due grandezze non hanno la stessa unità di misura.

EFFICACIA LUMINOSA:

$$\epsilon = \frac{\Phi_{lum}}{W_{el}} \quad \left[ \frac{lm}{W} \right] \rightarrow \text{effetto utile}$$

→ watt elettrici di consumo (spesa)

$$|W_{el}| = |\Phi| + |\Phi_{diss,m,v}| + |\Phi_{diss,m,v}|$$

$$\epsilon = \frac{\Phi_{lum}}{\Phi_{diss,m,v} + \Phi_{diss,m,v} + W_{el}} < 1$$

Si parte da un flusso elettrico che si scompone in: una parte persa per calore, una parte non visibile e una parte legata al visibile.

Tipicamente nei cataloghi per la scelta delle lampade ci sono dei dati precisi legati alla ripartizione dei flussi.

In questo caso si definisce un'efficienza di lampada  $\epsilon$ .

Mantenendo fisso l'effetto utile  $\Phi_{lum}$  e  $W_{el}$  possiamo introdurre due grandezze significative: possiamo moltiplicare e dividere per il flusso elettromagnetico; moltiplichiamo e dividiamo per il flusso elettromagnetico visibile in modo tale da non modificare l'efficienza delle lampade.

$\frac{\Phi_{diss,m}}{W_{el}} \rightarrow$  potenza che va in onde elettromagnetiche  $< 1$  } effetto dovuto alle perdite di calore e cause delle dissipazioni termiche  
 $\rightarrow$  potenza elettrica di consumo

$\frac{\Phi_{diss,m,v}}{\Phi_{lum}} \rightarrow$  potenza delle onde elettromagnetiche inutili  $< 1$  } le nostre lampade, sfortunatamente emettono anche fuori del visibile  
 $\rightarrow$  potenza versata dalle onde elettromagnetiche in generale

$\frac{\Phi_{lum}}{\Phi_{diss,m,v}}$  legata allo spettro visibile e all'occhio sensorio visiva

La soglia di cui 683 LM/W nel caso in cui lo spettro del visibile fosse tutto verde (a 555 nm) nella realtà vediamo altri colori e quindi dobbiamo moltiplicare per  $K_{max} \cdot \phi(\lambda)$  per passare ai lumens.

$$\frac{\Phi_{lum}}{\Phi_{diss,m,v}} \leq 683 \text{ LM/W}$$

Quindi la MIGLIORE EFFICACIA DI LAMPADA possibile ed immaginabile deve essere termodinamicamente perfetta (cioè non deve produrre calore), dovrebbe emettere solo nel visibile e dovrebbe essere solo monocromaticamente verde. In questo caso:

$$\epsilon = 683 \cdot 1 \cdot 1$$

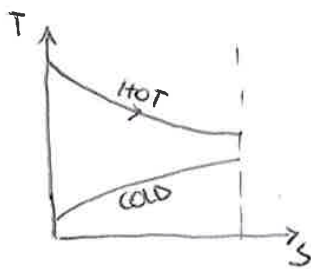
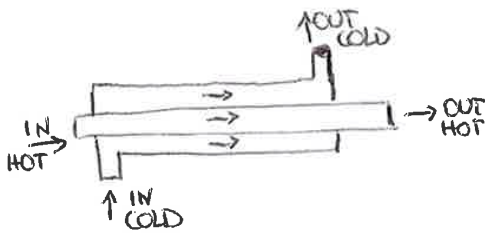
Nella realtà nessuna lampada ha queste caratteristiche ed non è 683 di  $\epsilon$ .

## GLI SCAMBIATORI DI CALORE

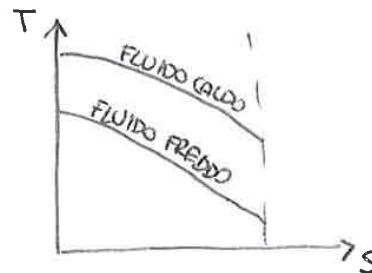
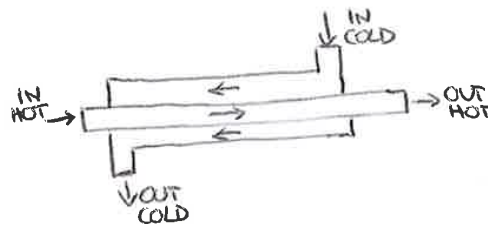
Gli scambiatori di calore sono apparecchiature che facilitano lo scambio di calore tra due fluidi a temperature differenti. Negli scambiatori di calore i due fluidi non possono miscelarsi tra di loro. Il calore viene scambiato per convezione in entrambi i fluidi e per conduzione attraverso il mezzo di separazione tra di essi.

### I diversi tipi di scambiatori di calore

- SCAMBIATORE A DOPPIO TUBO è il più semplice e presenta due tubi concentrici di diametri differenti. Un fluido scorre nel tubo di diametro inferiore e l'altro nel condotto anulare tra le due tubazioni. Sono possibili due differenti tipi di flusso: **EQUICORRENTE** quando i fluidi percorrono lo scambiatore nello stesso verso entrando dallo stesso lato; **CONTROCORRENTE** quando i fluidi percorrono lo scambiatore in direzioni opposte entrando da lati opposti.



EQUICORRENTE

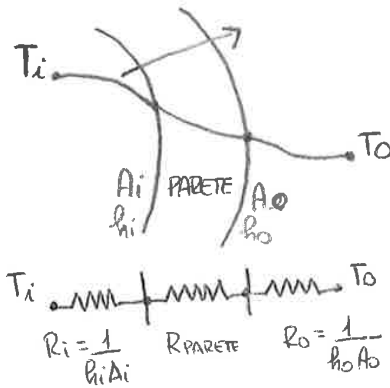
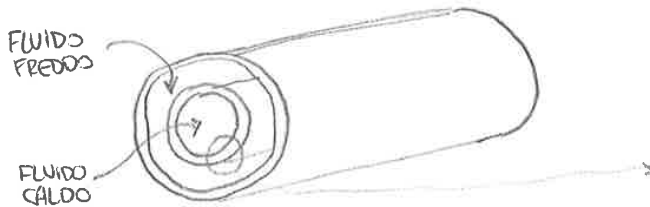


CONTROCORRENTE

- SCAMBIATORE COMPATTO è uno scambiatore a superficie progettato per consentire lo scambio termico attraverso una grande superficie per unità di volume. Es: RADIATORE DELLE AUTOMOBILI. Poiché gli scambiatori di calore compatti permettono di scambiare potenze termiche notevoli tra due fluidi in volume ridotti, vengono utilizzati in applicazioni caratterizzate da stretti vincoli di peso e volume. Negli scambiatori compatti i due fluidi generalmente fluiscono in direzioni mutuamente perpendicolari => si parla di **FLUSSI INCROCIATI**.

- SCAMBIATORE A TUBI E MANTELLO è il più diffuso nelle applicazioni industriali. È composto da un gran numero di tubi e da un mantello cilindrico che li contiene. Il tubo e il mantello hanno gli assi paralleli gli uni all'altro. Lo scambio termico avviene tra i due fluidi che scorrono l'uno all'interno dei tubi e l'altro all'esterno dei tubi ma all'interno del mantello. Sono degli scambiatori che occupano molto spazio e sono molto pesanti. Questi scambiatori sono normalmente dotati di diaframmi perpendicolari all'asse del mantello, posti al suo interno, per migliorare lo scambio termico e consentire il mantenimento della distanza originaria tra i tubi. Gli scambiatori a tubi e mantello si classificano ulteriormente in base al numero di passaggi del fluido nel mantello e nei tubi.

# SCAMBIATORE A DOPPIO TUBO



In uno scambiatore di calore la potenza termica scambiata tra i due fluidi è:

$$\Phi = \frac{\Delta T}{R_{TOT}} = UA \Delta T = U_i A_i \Delta T = U_e A_e \Delta T \quad [W]$$

$$U = \frac{1}{R_{TOT} \cdot A} \quad \left[ \frac{W}{m^2 \cdot K} \right]$$

TRASMITTANZA TERMICA o COEFF. DI SCAMBIO TERMICO GLOBALE ed è uguale all'inverso della resistenza totale per unità di area

In generale uno scambiatore di calore realizza la trasmissione di una quantità di calore tra due fluidi separati da una parete. Il calore viene trasferito prima dal fluido caldo alla parete per convezione, poi attraverso la parete per conduzione e infine dalla parete al fluido freddo nuovamente per convezione. Dell'arricchimento di solito si tiene conto nella valutazione dei coefficienti di scambio termico convettivo.

Dunque la resistenza termica totale comprende due resistenze di convezione e una di conduzione.

$$R_{TOT} = R_i + R_{PARETE} + R_e = \frac{1}{h_i A_i} + \frac{\ln\left(\frac{d_e - d_i}{2\pi L \cdot \lambda}\right)}{1} + \frac{1}{h_e A_e}$$

$$UA = \frac{1}{R_{TOT}} \Rightarrow R_{TOT} = \frac{1}{UA} = \frac{1}{U_i A_i} = \frac{1}{U_e A_e} = \frac{1}{h_i A_i} + R_{PARETE} + \frac{1}{h_e A_e}$$

Nel caso di tubi di piccolo spessore e realizzati con materiali aventi conducibilità termica elevata, poiché la resistenza termica della parete è trascurabile  $R_{PARETE} \approx 0$  e le aree sono all'incirca uguali:  $A_i = A = A_e$  :

$$\frac{1}{U} \approx \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_e} \quad \text{dove } U_i = U_e = U$$

Il valore del coeff. U dipende in particolare dal coeff. convettivo h da ho il valore più piccolo.

Se per esempio  $h_i \ll h_e$  allora  $\frac{1}{h_i} \gg \frac{1}{h_e} \Rightarrow U \approx h_i$

$h_i$  piccolo significa U piccolo e siccome  $\Phi = UA \Delta T$  allora  $\Phi$  piccolo, ovvero il coeff. di scambio termico convettivo con valore minore limita lo scambio termico.



## DIMENSIONAMENTO DEGLI SCAMBIATORI DI CALORE

### IPOTESI:

- **CONDIZIONI STAZIONARIE** poiché gli scambiatori di calore rimangono in funzione per lunghi periodi di tempo senza varicare le loro condizioni di funzionamento
- **VARIAZIONI DI ENERGIA (CINETICA & POTENZIALE) TRASCORABILI** ⇒ le portate dei fluidi sono costanti, così come costanti rimangono le velocità e la temperatura all'ingresso o all'uscita. Inoltre le correnti fluide non subiscono variazioni apprezzabili nella loro velocità medie o nella loro quota.
- **CALORE SPECIFICI COSTANTI** In realtà i calori specifici dei fluidi variano con la temperatura, però negli scambiatori di calore possono essere considerati costanti con una piccola perdita di precisione e pari ad un valore medio calcolato alla temperatura media dei due fluidi.
- **CONDUZIONE ASSIALE TRASCORABILE**
- **SUPERFICIE ESTERNA ISOLATA** da un punto di vista tecnico in maniera che non si debbano considerare le perdite di calore verso l'ambiente esterno e che lo scambio termico avvenga esclusivamente tra i due fluidi che attraversano lo scambiatore di calore.

Si possono usare due METODI per dimensionare gli scambiatori di calore:

### • METODO DELLA DIFFERENZA MEDIA LOGARITMICA DI TEMPERATURA (LMTD)

Poiché la potenza termica scambiata tra i due fluidi in un punto all'interno di uno scambiatore di calore dipende dalla differenza di temperatura locale, variabile all'interno dello scambiatore stesso, è utile fare riferimento alla differenza media logaritmica di temperatura LMTD, che è equivalente alla differenza di temperatura media tra i due fluidi lungo l'intero scambiatore di calore.

In altre parole la differenza di temperatura tra i fluidi caldo e freddo varia lungo lo scambiatore di calore allora si considera la differenza media logaritmica di temperatura.

Questo metodo serve per calcolare la superficie di scambio termico  $A$  conoscendo la temp. di ingresso e di uscita del fluido caldo e freddo.

In questo modo possiamo calcolare  $\Delta T_{me}$ :

$$\Delta T_{me} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln(\Delta T_1 / \Delta T_2)}$$

DIFFERENZA MEDIA LOGARITMICA DI TEMPERATURA

Poi posso calcolare  $\Phi$  come:  $\Phi = G c_p \Delta T$   $G = \text{portata [kg/s]}$

poi posso calcolare  $U$  ed infine calcolare  $A$  da:

$$\Phi = UA \Delta T_{me}$$

La differenza media logaritmica di temperatura  $\Delta T_{me}$  è valida solo per SCAMBIATORI A DOPPIO TUBO.

Però si possono ricavare relazioni simili anche per altri tipi di scambiatori (a tubo e mantello) o a flussi incrociati)

ma si deve usare un **FATTORE DI CORREZIONE F**:  $\Delta T_{me} = F \cdot \Delta T_{me,cc} \rightarrow$  in contrazione

Il fattore di correzione  $F$  dipende dalla geometria dello scambiatore di calore e dalle temperature di ingresso e uscita dei due fluidi caldo e freddo.

$$P = \frac{t_2 - t_1}{T_1 - t_1} \quad ; \quad R = \frac{T_1 - T_2}{t_2 - t_1} \quad \begin{array}{l} T = \text{temp. fredda} \\ t = \text{temp. calda} \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 = \text{ingresso} \\ 2 = \text{uscita} \end{array}$$



**METODO E-NTU**

Questo metodo viene applicato quando bisogna determinare la potenza termica scambiata e le temperature di uscita dei fluidi dei quali sono note le portate e la temperatura di ingresso, quando siano definite la tipologia e le dimensioni dello scambiatore.

Questo metodo si basa su un parametro adimensionale chiamato **EFFICACIA dello scambiatore di calore E** definito dalla relazione:

$$E = \frac{\Phi}{\Phi_{max}} \rightarrow \text{POTENZA TERMICA REALMENTE SCAMBIATA}$$

$\Phi_{max} \rightarrow$  MASSIMA POTENZA TERMICA SCAMBIABILE

$\rightarrow$  portata in massa  $\dot{m}$

$$\Phi_{max} = C_{min} (T_{H,i} - T_{C,i}) \quad \text{con } C_{min} = G \cdot c_p \text{ che è la più piccola tra quella calda e fredda}$$

$$\Rightarrow \Phi = E \Phi_{max} \quad (1)$$

Per calcolare la potenza termica effettiva dobbiamo conoscere l'efficacia E. Ogni scambiatore ha un suo valore di efficacia E poiché questa dipende dalla geometria e della tipologia dello scambiatore stesso.

Le relazioni che permettono di calcolare E dipendono dal **NUMERO DI UNITA' DI SCAMBIO TERMICO**

**NTU:**

$$NTU = \frac{UA}{C_{min}}$$

fissati i valori di U ed  $C_{min}$  il valore di NTU è una MISURA DELLA SUPERFICIE DI SCAMBIO TERMICO A, vale a dire che più grande è NTU più grande è lo scambiatore.

ma dipende anche dal **rapporto di capacità c:**

$$c = \frac{C_{min}}{C_{max}}$$

Dunque:  $E = f(NTU, c)$  ed  $0 \leq E \leq 1$

$$0 \leq c \leq 1 \quad \begin{cases} c = 0 \Rightarrow E_{max} & \text{(ovvero quando } c = \frac{C_{min}}{C_{max}} \text{ cioè } (C_{max} \rightarrow \infty)) \\ c = 1 \Rightarrow E_{min} & \text{(ovvero quando } c = \frac{C_{min}}{C_{max}} = 1 \Rightarrow C_{min} = C_{max}) \end{cases}$$

$E = E_{max} = 1 - e^{-NTU}$   
 $\uparrow$   
 si verifica in presenza di coibentamento di fase  
 $\rightarrow$  Capacità termiche dei due fluidi sono identiche

Per:  
 $NTU > 3$  non è giustificato l'uso di scambiatori di calore poiché ad un aumento delle dimensioni dello scambiatore corrisponde un piccolo aumento di E e quindi da un punto di vista economico la soluzione non è eccelsiva.

$NTU < 3$  l'efficacia E è indipendente da c.

Una volta noto E è possibile calcolare  $\Phi$  dalla (1) e le temperature di uscita dei fluidi dalla seguente relazione:

$$\Phi = C_c (T_{c,out} - T_{c,in}) = C_H (T_{H,out} - T_{H,in})$$

SUPERFICIE ALIATA

vedere libro di FISICA TECNICA

e di velocità si sviluppano simultaneamente. In particolare, lo strato limite di velocità, che ha una forte influenza sul profilo di temperatura, si riproduce in modo notevole sullo scambio termico per convezione.

### NUMERO DI PRANDTL

È legato alle proprietà del fluido. Mette in relazione lo spessore dello strato limite di velocità con lo spessore dello strato limite termico.

se  $Pr \gg 1$   $\delta_v > \delta_t$  prevale lo strato limite meccanico

se  $Pr \ll 1$   $\delta_v < \delta_t$  prevale lo strato limite termico

Prandtl confronta le proprietà meccaniche e termiche del moto. Ci dà una misura del rapporto tra il trasporto molecolare per diffusione della quantità di moto e il trasporto diffusivo di calore.

$$Pr = \frac{V}{\alpha} \rightarrow \begin{matrix} \text{diffusività molecolare della quantità di moto} \\ \text{diffusività molecolare del calore} \end{matrix} \Rightarrow Pr = \frac{\mu c_p}{k}$$

$$V = \frac{\mu}{\rho} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad \text{VISCOSITÀ CINEMATICA}$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho c_p} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right] \quad \text{DIFFUSIVITÀ TERMICA}$$

$$\mu \rightarrow \text{viscosità dinamica} \quad \left[ \frac{kg}{m \cdot s} \right]$$

$$\rho \rightarrow \text{densità} \quad \left[ \frac{kg}{m^3} \right]$$

$$k \rightarrow \text{conduttività termica} \quad \left[ \frac{W}{m \cdot K} \right]$$

$$c_p \rightarrow \text{calore specifico a pressione costante} \quad \left[ \frac{J}{kg \cdot K} \right]$$

se  $Pr \ll 1$   $\Rightarrow$  il calore si diffonde molto più velocemente della quantità di moto. (metalli liquidi)

se  $Pr \gg 1$   $\Rightarrow$  il calore si diffonde molto lentamente rispetto alla quantità di moto. (oli)

se  $Pr = 1$   $\Rightarrow$  significa che la quantità di moto e il calore si dissipano quasi con la stessa entità. (nei gas)

La conduttività termica  $k$  è una misura della capacità di un materiale di condurre calore. Un valore elevato di una conduttività termica indica che il materiale è un buon conduttore di calore, mentre un basso valore indica che il materiale è un cattivo conduttore di calore, ovvero un isolante.

La diffusività termica  $\alpha$  può essere vista come il rapporto del calore trasmesso per conduzione rispetto al calore accumulato per unità di volume.

$$\alpha = \frac{\text{calore trasmesso per conduzione}}{\text{calore accumulato}} = \frac{k}{\rho c_p} \quad \left[ \frac{m^2}{s} \right]$$

$\rho c_p \rightarrow$  capacità termica del materiale

Un materiale con una elevata conduttività termica oppure con una bassa capacità termica naturalmente avrà una grande diffusività termica. Un alto valore di diffusività termica indica una veloce propagazione del calore, mentre un basso valore di diffusività termica indica che il calore è prevalentemente accumulato nel materiale.

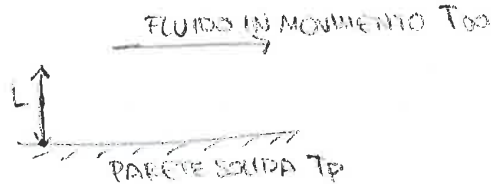
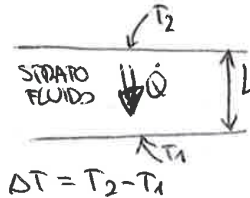
## NUMERO DI NUSSLETT

Il numero di Nusselt esprime il rapporto tra il flusso di scambio termico convettivo e quello per conduzione nel fluido:

$$Nu = \frac{h \cdot L_c}{\lambda}$$

$h$  = coefficiente di convezione  $W/m^2 \cdot K$   
 $\lambda$  = conduttività termica del fluido  $[W/m^2 \cdot K]$   
 $L_c$  = lunghezza caratteristica

Un'interpretazione fisica del numero di Nusselt si può avere considerando uno strato di fluido di spessore  $L$  sottoposto a differenza di temperatura  $\Delta T = T_2 - T_1$ .



La trasmissione di calore attraverso lo strato di fluido avverrà per convezione quando il fluido è in movimento e per conduzione se lo strato di fluido è in quiete.\*

Il flusso termico (potenza termica trasmessa per unità di superficie) nei due casi risulterà:

$$\dot{Q}_{CONV} = h \Delta T = h (T_p - T_{00})$$

$$\dot{Q}_{COND} = \lambda \frac{\Delta T}{L} = \lambda \frac{(T_p - T_{00})}{L}$$

Dal rapporto fra le precedenti relazioni si ottiene il numero di Nusselt:

$$\frac{\dot{Q}_{CONV}}{\dot{Q}_{COND}} = \frac{h \Delta T}{\lambda \frac{\Delta T}{L}} = \frac{h L}{\lambda} = Nu$$

$\left\{ \begin{array}{l} Nu > 1 \text{ CONVEZIONE PREVALE SU CONDUZIONE} \\ Nu = 1 \text{ CONDUZIONE PURA} \\ Nu \gg 1 \text{ CONVEZIONE} \end{array} \right.$

\* È molto difficile far stare fermo il fluido all'interno di una differenza di temperatura, ma se fosse fermo il calore si scambierebbe per conduzione.

Il numero di Nusselt rappresenta dunque l'incremento della potenza termica trasmessa per convezione attraverso uno strato di fluido rispetto a quella trasmessa per conduzione attraverso lo stesso strato. Il valore unitario del numero di Nusselt ( $Nu = 1$ ) è caratteristico della trasmissione del calore per conduzione pura attraverso lo strato di fluido. All'aumentare, invece, del valore del numero di Nusselt, risulta sempre più sviluppato il fenomeno della convezione.

## NUMERO DI GRASHOF

Descrive gli effetti della convezione naturale. Rappresenta il rapporto tra la spinta di galleggiamento e la forza viscosa agenti sul fluido.

$$Gr = \frac{g \beta L_c^3 (T_s - T_{00})}{\nu^2}$$

$\beta$  = coefficiente di dilatazione cubica  $[1/K]$



Gioca nella convezione naturale lo stesso ruolo che il numero di Reynolds ha nella convezione forzata e fornisce quindi il criterio principale per distinguere tra flusso laminare e turbolento in caso di convezione naturale.

$Gr$  piccolo  $\rightarrow$  MOTO LAMINARE perché forze di galleg  $>$  forze viscosse  
 $Gr$  grande  $\rightarrow$  MOTO TURBOLENTO perché forze viscosse  $>$  forze galleggiamento



**EQUAZIONE DELL'EXERGIA in caso di Miscela**

$$\sum_{j=0}^M \Phi_j - W_t = \frac{d}{dt} (A^{tt}) + \sum_{i=0}^N N_i \bar{b}_i^{tt} + \Psi_{IRR}$$

$$N_i = \frac{mol}{s} \quad \bar{b}_i = \frac{J}{mol}$$

dove:

$$A^{tt} = \underbrace{U - U^* + p_0(V - V^*) - T_0(S - S^*) + E_{em}}_{\text{ASSENZA DI FLUSSO DI EXERGIA TERMO-MECCANICA}} + \underbrace{\sum_{k=0}^K (\mu_k^* - \mu_k^0) m_k}_{\text{ASSENZA DI FLUSSO DI EXERGIA CHIMICA}} \Rightarrow A^{tt} = A^t + \sum_{k=0}^K \Delta \mu \cdot m_k \quad \downarrow \text{CONCENTRAZIONE MOLARE}$$

$$b^{tt} = \underbrace{\bar{h} - \bar{h}^* - T_0(\bar{s} - \bar{s}^*) + \bar{e}_{em}}_{\text{FLUSSO DI EXERGIA TERMO-MECCANICA}} + \underbrace{\sum_{k=0}^K (\mu_k^* - \mu_k^0) x_k}_{\text{FLUSSO DI EXERGIA CHIMICA}} \Rightarrow b^{tt} = b^t + \sum_{k=0}^K \Delta \mu \cdot x_k \quad \downarrow \text{FRAZIONE MOLARE}$$

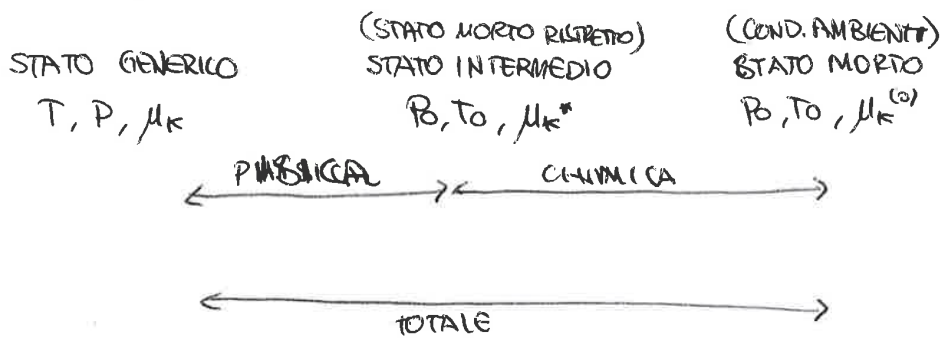
↓  
VARIAZIONE DI POTENZIALE CHIMICO DALLO STATO INTERMEDIO A QUELLO AMBIENTE

Im caso di sistemi MULTI-COMPONENTI diventa importante anche la composizione molare. Nel caso delle miscele come ad avere un disequilibrio termo-meccanico possiamo avere anche un disequilibrio chimico dovuto al fatto che si possono avere diverse concentrazioni molari (o pressioni parziali) rispetto alle condizioni ambiente. In questo caso, cioè quando abbiamo un disequilibrio chimico si parla di **EXERGIA CHIMICA**.

Per esempio tutte le volte in cui dobbiamo a che con reazioni chimiche si viene a creare un disequilibrio chimico. Ad esempio nelle caso di reazioni di combustione si parla di **EXERGIA CHIMICA** dei combustibili posta pari alla media dei poteri calorifici superiori ed inferiore.

Se non vi sono delle reazioni chimiche si può trascurare la differenza di concentrazione molare che si viene a creare e quindi non si considera l'entropia chimica.

Si identifica dunque un nuovo STATO MORTO.



Quando consideriamo soltanto un disequilibrio termico e meccanico ci riferiamo allo stato morto ristretto.

Quando vi è anche un disequilibrio chimico dobbiamo riferirci allo STATO MORTO totale.

## DIAGRAMMA PSICOMETRICO

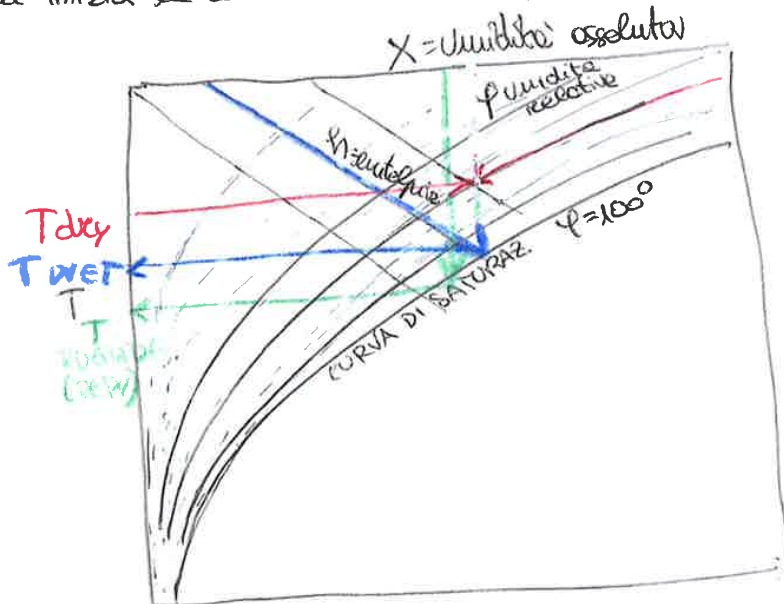
È una rappresentazione grafica della relazione tra la temperatura dell'aria e l'entalpia. Sono identificate anche delle curve iso-umidità relativa  $\phi$

(asse verticale)

Da un punto di vista pratico, conoscendo l'aria, ~~deve~~ temperatura (aria secca) e l'umidità relativa possiamo andare a identificare un punto del diagramma.

Muovendoci ~~verso~~ la curva di saturazione ( $\phi=100\%$ ) l'intersezione con una linea iso-entropica mi dà la WET TEMPERATURE (temperatura di umidità, che è la temperatura di saturazione adiabatica).

Muovendoci verso la curva di saturazione lungo l'intersezione con una linea di umidità assoluta trovo il PUNTO DI RUGIADA. La temperatura di rugiada che è il punto in cui inizia la condensazione del vapore d'acqua (temperatura di complete saturazione).



Considerando il caso ideale e dunque trascurando la irreversibilità:  $\psi_{irr} = 0$

$$\Rightarrow W_t^{(10)} = T_0 m_i (\bar{S}_{out} - \bar{S}_{in}) \Rightarrow \boxed{\bar{e}_{MIX}^{(10)} = \frac{W_t^{(10)}}{m_i} = T_0 (\bar{S}_{out} - \bar{S}_{in})} \quad (1)$$

$W_t^{(10)} > 0$  quando passo da concentrazioni maggiori  
(ESPANSIONE ADIABATICA)

EQUAZ. DELL'ENERGIA CHIMICA DI MISCELAMENTO

$$W_t^{(10)} < 0$$

Per calcolare l'entropia molare considero la miscela come GAS IDEALI.

$$\int \delta q - \delta l_i = d e_i$$

in cond. reversibili:  $\begin{cases} \delta q = T d s \\ \delta l_i = p d v \end{cases} \Rightarrow T d s - p d v = d e_i$  1° RELAZIONE DI GIBBS

Sapendo che:  $h = e_i + p v \Rightarrow d h = d e_i + p d v + v d p \Rightarrow d e_i = d h - p d v - v d p$

$$\Rightarrow T d s - p d v = d h - p d v - v d p \Rightarrow T d s = d h - v d p$$
 2° RELAZIONE DI GIBBS

applicando l'equazione di stato dei GAS IDEALI:  $p v = R T \Rightarrow v = \frac{R T}{p}$

e sapendo che:  $d h = c_p d T$  ottergo:

$$T d s = c_p d T - \frac{R T}{p} d p \Rightarrow d s = c_p \frac{d T}{T} - \frac{R}{p} \frac{d p}{p}$$

integrando:  $S_{out} - S_{in} = \int_{IN}^{OUT} c_p \frac{d T}{T} - \int_{IN}^{ON} \frac{R}{p} d p = c_p \ln\left(\frac{T_{out}}{T_{in}}\right) - R \ln\left(\frac{p_{out}}{p_{in}}\right)$

sapendo che:  $\begin{cases} c_p - c_v = R \\ \frac{c_p}{c_v} = \gamma \end{cases} \Rightarrow c_p = R \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right)$

sostituendo:  $S_{out} - S_{in} = R \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln\left(\frac{T_{out}}{T_{in}}\right) - R \ln\left(\frac{p_{out}}{p_{in}}\right) = R \left[ \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln\left(\frac{T_{out}}{T_{in}}\right) - \ln\left(\frac{p_{out}}{p_{in}}\right) \right]$

passando alle grandezze molari:  $\bar{S}_{out} - \bar{S}_{in} = \bar{R} \left[ \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln\left(\frac{T_{out}}{T_{in}}\right) - \ln\left(\frac{p_{out}}{p_{in}}\right) \right]$

Consideriamo la legge di Dalton:  $y_i = \frac{p_i}{p} \Rightarrow p_i = y_i p$

STATO MORTO CHIMICO:  $(T_0, p_0, y_i p_0) \rightarrow (T_0, p_0, y_i^{(0)} p_0)$

$$\Rightarrow \bar{S}_{out} - \bar{S}_{in} = \bar{R} \left[ \left( \frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \ln\left(\frac{T_{out}}{T_{in}}\right) - \ln\left(\frac{p_{out}}{p_{in}}\right) \right] = -\bar{R} \ln \frac{y_i^{(0)} p_0}{y_i p_0} = \bar{R} \ln \left( \frac{y_i}{y_i^{(0)}} \right)$$

poiché  $T_{out} = T_{in}$