NUMERO: 2270A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Fenotti Luca

MATERIA: Fisica I - Esercizi + Formulario - Prof. Carbone
F. Laviano

FISICA 1

Lunedì 3/3

CINEMATICA DEL PUNTO

Parte della Meccanica che studia il movimento dei corpi senza riferimento alle cause che lo producono

Lo scopo della cinematica è quello di definire le variabili necessarie per descrivere il moto dei corpi

Corpi puntiformi (con dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui il moto avviene)

MECCANICA → CINEMATICA, DINAMICA

I corpi puntiformi si muovono di moto di traslazione, mentre corpi estesi possono compiere contemporaneamente altri tipi di moto: rotazioni e vibrazioni

La variabile di un corpo che si sta muovendo può essere la sua posizione x, in funzione del tempo

Altre variabili: accelerazione e velocità (funzioni del tempo ma anche dello spazio)

funzioni

$v[x(t)]$

$a[x(t)]$

Un punto materiale si muoverà lungo una traiettoria (traslazione). Un corpo esteso (cilindro) potrà compiere altri movimenti (rotazione intorno all'asse)

Per descrivere il moto occorre servirsi di un sistema di riferimento rispetto al quale definiamo la posizione del corpo e la variazione di posizione (spostamento).

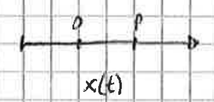
Sistema di coordinate: utilizzato per la descrizione matematica dei movimenti rispetto al sistema di riferimento.

La traiettoria è l'insieme dei punti della posizione (curva aperta)

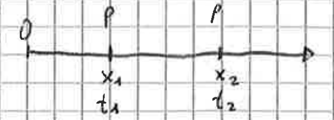
Grandezze cinematiche fondamentali: spazio (x), velocità (v), accelerazione (a), tempo (t)

Moto rettilineo: velocità media

(rapidità con cui avviene lo spostamento nell'unità di tempo)

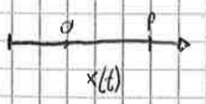


$$V_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



S.I. m/s

Velocità istantanea



Per migliorare l'approssimazione della velocità = restrizione del Δt

$\Delta t \to 0$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Rapporto incrementale calcolato in ogni istante

Spazio percorso

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_{t_0}^{t} v(t) \cdot dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

posizione iniziale del punto

$$x - x_0 = \int v(t)\, dt \longrightarrow \boxed{x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt}$$

Spazio percorso nel moto rettilineo

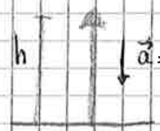
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 154

Martedì 4/3

Moto verticale di un corpo (moto unidimensionale)

Accelerazione di gravità $g = 9,8\ m/s^2$

a = costante = $-g$ (sistema di riferimento con l'asse rivolto verso l'alto)



$\vec{a} = -g$ (vettore verso il basso) $\Rightarrow$ $v(t) = v_0 + a(t_1 - t_0) = \boxed{-gt}$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt = h + \int [-gt]\,dt = \boxed{h - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{v(x) = \sqrt{2g(h-x)}} \qquad \boxed{t(x) = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}} \Rightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$ Tempo di caduta

$$\Downarrow$$

$$\boxed{V_c = \sqrt{2gh}}$$ Velocità di caduta

Con velocità iniziale V_1 (rivolta verso il basso)

$$v(t) = v_0 + a(t - t_1) \Rightarrow \boxed{v(t) = -V_1 - gt} \qquad \boxed{x(t) = h - V_1 t - \frac{1}{2} g t^2}$$

vel. caduta $\boxed{v(x) = \sqrt{V_1^2 + 2g(h-x)}}$ $\qquad \boxed{t(x) = -\frac{V_1}{g} + \sqrt{\frac{V_1^2}{g^2} + \frac{2(h-x)}{g}}}$ $\qquad T_c = -\frac{V_1}{g} + \sqrt{\frac{V_1^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$ $x=0$

$\to V_c = \sqrt{V_1^2 + 2gh}$

$x=0$

Lancio di un oggetto lungo la verticale partendo dal suolo ($h=0$)

$$v(x) = \sqrt{V_2^2 + 2g(h-x)} \qquad t(x) = \frac{V_2}{g} \pm \sqrt{\frac{V_2^2}{g^2} - \frac{2(h-x)}{g}}$$

Moto armonico semplice (moto unidimensionale)

Lungo un asse rettilineo quando la legge oraria è del tipo: $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ — ampiezza del moto; fase del moto; frequenza angolare, ha dimensione del reciproco di un tempo

Il valore $\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$ varia tra -1 e 1, quindi l'ampiezza dell'intervallo in cui si muove l'oggetto è $2A$

Se si fa trascorrere un tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ l'arg del sen vale $2\pi + \varphi$ $\qquad x(t) = A\,\mathrm{sen}\left(\cancel{\omega}\frac{2\pi}{\cancel{\omega}} + \varphi\right) = A\,\mathrm{sen}(2\pi + \varphi)$

Si chiama PERIODO DEL MOTO $T = \frac{2\pi}{\omega}$

L'inverso di T è la FREQUENZA, che indica quante oscillazioni complete al secondo compie il corpo.

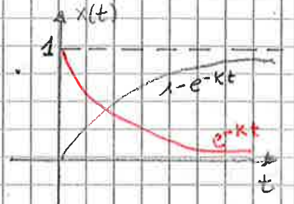
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

Posizione

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 e^{-kt} \quad \text{integro} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 e^{-kt} dt = \int_0^t v_0 e^{-kt} dt \Rightarrow \int_0^t v_0 e^{-kt} dt =$$

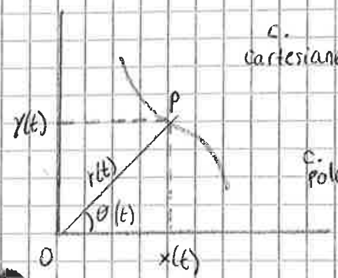
$$= -\frac{v_0}{k}\left[e^{-kt}\right]_0^t = \boxed{\frac{v_0}{k}\left(1 - e^{-kt}\right)}$$

Il punto tende asintoticamente alla posizione $\frac{v_0}{k}$. La rapidità di variazione della f_z e^{-kt} è det dal valore di k. Posto $\tau = 1/k$ la f_z si riduce a un fattore $e \simeq 2,72$



τ si chiama COSTANTE DI TEMPO. Se k è grande τ è piccola e la decrescita è rapida

MOTO NEL PIANO (traiettoria curva) direzione non più univoca

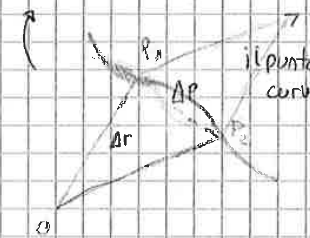


c. cartesiane $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r \operatorname{sen}\theta \end{cases}$

$r = OP = x(t)\,u_x + y(t)\,u_y$

c. polari $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \end{cases}$

$\Delta r(t) = r(t + \Delta t) - r(t)$ (spostamento del punto)



il punto P si muove sulla curva

Si tratta di una differenza $[r(t+\Delta t) - r(t)]$ e quindi si considera la diagonale minore del parallelogramma.

Si considera il vettore $r(t + \Delta t)$ con $\Delta t \to 0 \Rightarrow \Delta r$ diventa prossimo alla curva e coincide con la tangente del punto P alla traiettoria.

$$v_m = \frac{\overset{\text{vettore spostamento}}{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

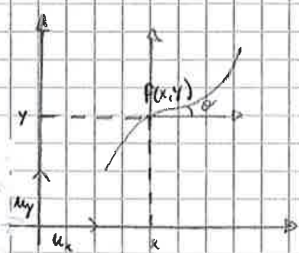
La velocità istantanea si ottiene facendo il $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}$

analogamente per l'accelerazione $a = \frac{dv}{dt}$

Moto nel piano: coordinate cartesiane

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} u_x + \frac{dy}{dt} u_y \Rightarrow v = v_x u_x + v_y u_y \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v_y}{v_x}$$



La velocità nel punto P, che si muove lungo la traiettoria, ha come componenti cartesiane le velocità v_x e v_y dei due moti rettilinei descritti dai punti proiezione di P sugli assi cartesiani.

Accelerazione

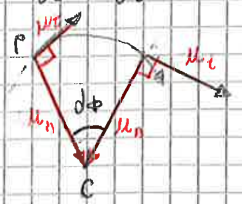
angolo

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} \qquad \frac{d(v u_t)}{dt} = \frac{dv}{dt} u_t + v \frac{du_t}{dt} = \underbrace{\frac{dv}{dt} u_t}_{} + \underbrace{v \frac{d\phi}{dt} u_n}_{}$$

u_n → versore normale, $\perp$ a u_t, diretto verso la concavità della traiettoria

// v, esprime la variazione del modulo di v

$\perp$ alla direzione



In un moto curvilineo vario entrambe le componenti sono $\neq 0$. Se il moto è uniforme allora $a_t = 0$; nel moto vario $a_n = 0$

$\begin{cases} a_T \neq 0 & \text{moto curvilineo vario} \\ a_n \neq 0 & \text{moto curvilineo} \end{cases}$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} \cdot v \rightarrow ds = R\, d\phi$$

acc. tangenziale

$$a = \frac{dv}{dt} u_t + v \frac{d\phi}{dt} u_n = \underbrace{\frac{dv}{dt} u_t}_{\text{agisce sul modulo di v}} + \underbrace{\frac{v^2}{R} u_n}_{\text{velocità costante su traiettoria curva}} = a_t + a_n$$

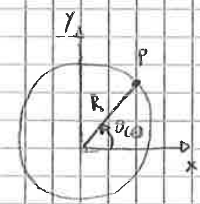
a_n → acc. normale o centripeta (acc. corrispondente alla variazione della direzione di v) Diretta sempre verso il centro della curvatura

MOTO CIRCOLARE (moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza)

$$\theta(t) = \frac{s(t)}{R} \qquad x(t) = R\cos\theta(t) \qquad y(t) = R \operatorname{sen}\theta(t)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \boxed{\frac{v}{R}}$$

(variazione dell'angolo nel tempo = velocità angolare)



La v varia continuamente in direzione, l'a centripeta è sempre $\neq 0$.

$\omega = \frac{v}{R}$ → la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza

$$a = \frac{dv}{dt} u_t + \frac{v^2}{R} u_n = R\frac{d\omega}{dt} u_t + \frac{v^2}{R} u_n = a_t + a_n$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{1}{R} \cdot \frac{ds}{dt} = \boxed{\frac{v}{R}} \rightarrow \alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

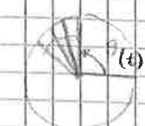
a

acc. tangenziale

Moto circolare uniforme (il punto si muove lungo una circonferenza). La v è costante in modulo e l'a tangente è nulla, per cui $a = a_n$

$$s(t) = s_0 + vt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$



$$a = \underbrace{\frac{dv}{dt} u_t}_{} + \frac{v^2}{R} u_n = \underbrace{R \cdot \frac{d\omega}{dt} u_t}_{} + \frac{v^2}{R} u_n = \underbrace{a_t}_{} + a_n$$

se v è costante questi valori sono nulli

Moto periodico con periodo $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 154

Traiettoria

$$\rightarrow \begin{cases} x(t) = V_0 \cos\theta \, t \\ y(t) = V_0 \operatorname{sen}\theta \, t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

sostituisco t nella seconda espressione

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$$

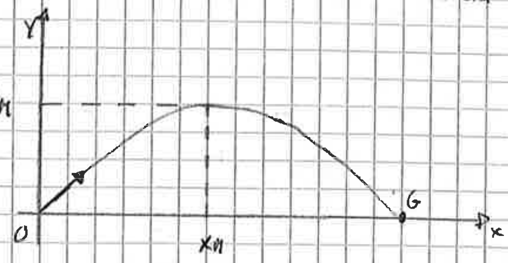
$$y(t) = V_0 \operatorname{sen}\theta \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2 = \underbrace{x \operatorname{tg}\theta - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{V_0^2 \cos^2\theta}}_{\text{TRAIETTORIA PARABOLICA}}$$

Gittata e quota max

$$y = x \operatorname{tg}\theta - \frac{g}{2 V_0^2 \cos^2\theta} x^2 \rightarrow y = 0$$

$$x_G = \frac{2 V_0^2 \cos^2\theta \operatorname{tg}\theta}{g} = \frac{2 V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g}$$

GITTATA $= 2 x_M$



$$\begin{cases} x = \frac{V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g} \\ y = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g} \end{cases}$$ QUOTA MASSIMA

$$t_G = \frac{2 x_M}{V_0 \cos\theta} = \frac{2 V_0^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{g V_0 \cos\theta} = \frac{2 V_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$$

Nella posizione G la v è la stessa in modulo che alla partenza

$$r(t) = OP = x(t) u_x + y(t) u_y + z(t) u_z$$

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} u_x + \frac{dy}{dt} u_y + \frac{dz}{dt} u_z = V_x u_x + V_y u_y + V_z u_z$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_x}{dt} u_x + \frac{dv_y}{dt} u_y + \frac{dv_z}{dt} u_z$$

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} u_x + \frac{d^2 y}{dt^2} u_y + \frac{d^2 z}{dt^2} u_z = a_x u_x + a_y u_y + a_z u_z$$

DINAMICA DEL PUNTO (cause del moto)

11/03

→ Principio d'inerzia (1ª legge di Newton)

Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in uno stato di quiete se era in quiete ($v=0$) e si muove di moto rettilineo uniforme ($v = \text{cost}$).

Un moto rettilineo uniforme corrisponde ad assenza di forze.

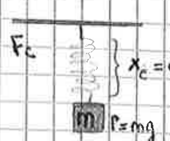
La forza è la grandezza che esprime e misura l'interazione tra sistemi fisici.

Al concetto di forza si associano le nozioni di intensità, direzione e verso.

→ si applicano due forze uguali ma di verso opposto, la risultante è uguale a 0 → $a=0$

Dinamometro = molla con particolari proprietà elastiche.

La F esercitata in presenza di un corpo materiale.



$$\frac{F}{F_c} = \frac{x}{x_c} \Rightarrow F : F_c = x : x_c$$

[Quando un corpo non è soggetto a forze non implica che il corpo sia fermo, ma che non ha acc]

Se la forza non è costante, introduciamo il valore medio.

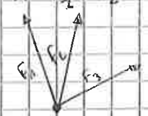
media integrale

$$\vec{F}_m = \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} F\,dt = \boxed{\frac{\Delta p}{t-t_0}}$$ stima del valore medio della F

$F=0 \rightarrow \Delta p = 0$ quindi $p = p_0$, p è costante (Principio di Conservazione della quantità di moto)

Risultante delle forze

$$\vec{R} = F_1 + F_2 \ldots + F_n = \sum_1^n F$$



$$a = \frac{R}{m} = \sum_1^n \frac{\vec{F}}{m} = \sum_1^n a$$ (a che ogni singola forza produrrebbe su quel corpo)

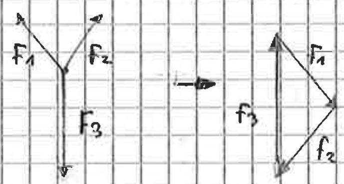
Equilibrio

Se un corpo è in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme, su di esso la F agente è nulla, ma questo vuol dire che la risultante delle forze applicate è nulla.

$$R = F_1 + F_2 + \ldots F_n = \sum_1^n F = 0$$

Se la poligonale dei vettori è chiusa le F si equilibrano

Per avere l'equilibrio deve esserci una componente con stessa direzione, ma verso opposto



Reazioni vincolari (forza) N

Se un corpo sottoposto a forza rimane in equilibrio esso deve essere soggetto a una forza con risultante nulla. $R+N=0$ EQUAZIONE VETTORIALE (La risultante di tutte le forze esterne deve essere bilanciata dalla reazione vincolare N.

Classificazione FORZE

Le forze in natura sono dovute a interazioni fondamentali di tipo:

- gravitazionale
- elettromagnetico
- forze nucleari deboli
- forze nucleari forti

Moto rettilineo uniforme $\rightarrow$ V cost $\quad a=0 \quad F=0$

Moto rett. uniformemente acc. $\rightarrow$ $V = V_0 + at \quad a = \text{cost} \quad F = m \cdot a$

Moto vario (traiettoria curva) $\rightarrow$ $V = \underbrace{V_T + V_N}_{\text{2 componenti della velocità}} \quad a = a_T + a_N \quad F = \underset{F_T}{ma_T} + \underset{F_N \text{ (forza centripeta)}}{ma_N}$

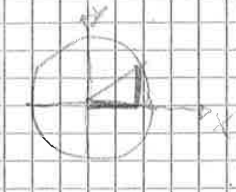
$$a = \frac{dv}{dt}u_T + \frac{v^2}{R}u_N$$ L'accelerazione è somma di due componenti

F_T = forza che viaggia tangenzialmente alla traiettoria (accelera la particella)

F_N = forza che varia la curvatura della traiettoria. Se non ci fosse F_N, avrei un moto rettilineo.

reazione vincolare (risultante) ($\vec{N}$)

$\boxed{P+R=ma}$



Se coefficiente di attrito è nullo

$$\begin{cases} N = mg\cos\theta \\ mg\,\text{sen}\,\theta = ma \end{cases} \qquad \begin{cases} mg\cos\theta - N = 0 \\ a = g\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

asse y rivolto verso il basso

→ il secondo membro è nullo perché l'accelerazione è 0.

Se è presente attrito aggiungo (nella seconda equazione)

variabili aleatorie

$$mg\,\text{sen}\,\theta - F_{ad} = ma$$

$\mu_d N$ $\quad$ $\mu_s N$ $\quad$ >0 $\quad$ $=0$

Se la F_{att} è superiore ad un certo limite non permette al corpo di muoversi su un piano inclinato

$\boxed{mg\,\text{sen}\,\theta \leq \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta}$ il corpo è fermo (condizione di equilibrio statico)

$\boxed{tg\,\theta \leq \mu_s}$ condizione richiesta per cui il corpo non scivoli

Se non siamo nelle condizioni di equilibrio statico, ci troviamo nelle condizioni di equilibrio dinamico.

$$mg\,\text{sen}\,\theta - \mu_d\, mg\cos\theta = ma$$

$$a = g(\text{sen}\,\theta - \mu_d\cos\theta)$$

Se $\mu_d = tg\,\theta \Rightarrow a = 0$

il corpo si muove → $\boxed{\begin{matrix} a>0 \\ tg\,\theta > \mu_s \end{matrix}}$

Forza elastica (molle senza massa) → non hanno una dinamica propria

I corpi in natura non sono completamente rigidi, ma presentano un certo grado di elasticità. Il caso più semplice di corpo elastico è rappresentato da una molla (elasticità lineare). La deformazione che la molla subisce avviene generalmente lungo uno degli assi.

Una molla è caratterizzata da lunghezza a riposo x_0 (quando la risultante delle forze è nulla), costante elastica K.

$\frac{N}{m}$ costante elastica

$$F = -K\Delta x = -K(x - x_0)$$

Legge di Hooke (vale solo se la deformazione Δx è relativamente piccola)

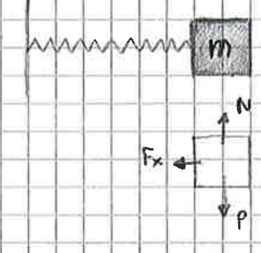
Oltre un certo valore della deformazione il materiale di cui è fatta la molla perde elasticità.

La forza ha segno negativo poiché è sempre opposta alla deformazione. Comprimendo una molla, essa tenderà a reagire con una forza opposta.

$F = -K\Delta x$

La molla tende a tornare nella condizione iniziale

La forza ha la stessa direzione della deformazione (lungo un'unica direzione)



$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \rightarrow F_K = ma \\ \sum F_y = ma_y = 0 \end{cases}$$

(non c'è spostamento lungo asse y) $N - P = 0$

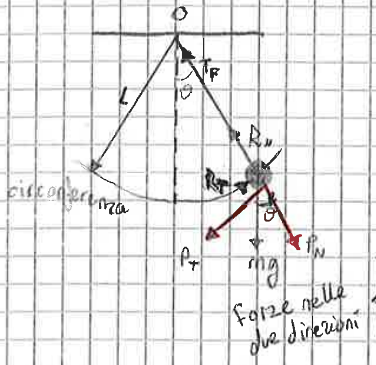
↓

$$\begin{cases} N = P \\ -K(x - x_0) = ma \end{cases} \rightarrow -Kx = m\frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \boxed{-\frac{K}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

Eq. differenziale di II ordine omogenea (coeff. cost)

Pendolo semplice (traiettoria circolare)

Costituito da un punto (puntiforme) materiale appeso tramite un filo inestensibile e di massa trascurabile. La posizione di equilibrio è quella verticale. Perturbazione esterna → il punto oscilla intorno alla posiz. di equilibrio.
Quando il punto materiale è spostato dalla posizione verticale:



$$\sum F = ma$$
$$mg + T_F = ma$$

T_F = tensione del filo (rivolta verso la direzione della fune)

Scomponendo le forze nelle direzioni normali N e tangente T, si ha:

EQUAZIONI DELLA DINAMICA

$$\begin{cases} R_T = \overbrace{-mg \operatorname{sen}\theta}^{P_T} = -ma_T \\ R_N = T_F \underbrace{-mg\cos\theta}_{P_N} = ma_N \end{cases}$$

la traiettoria è una curva quindi due componenti per l'accelerazione

(segno "meno" perchè agisce come forza di richiamo) → se allontano il pendolo dalla posizione verticale, esso tende a ritornare nella posizione iniziale

$P_N = P\cos\theta = mg\cos\theta$

$P_T = P\operatorname{sen}\theta = mg\operatorname{sen}\theta$

Il vettore accelerazione va scritto in due componenti:
- $a_T\hat{u}_T$ → tangente alla traiettoria
- $a_N\hat{u}_N$ → normale alla traiettoria

componenti normali tra di loro

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \underbrace{m\vec{a}_T\hat{u}_T}_{F_T\hat{u}_T} + \underbrace{m\vec{a}_N\hat{u}_N}_{F_N\hat{u}_N}$$

Tangenziale

forza di richiamo

$$-mg\operatorname{sen}\theta = ma_T$$

$$a_T = L\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)$$

L: raggio traiettoria; $\frac{d^2\theta}{dt^2}$: acc. angolare

L'angolo θ è funzione del tempo θ(t)

$$-mg\operatorname{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta$$

eq. differenziale non lineare

Per $\theta \to 0$ $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$

soluz. eq. diff. → $\boxed{\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)}$ → forma linearizzata

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L}$$

Normale (direzione della fune)

$$T_F - mg\cos\theta = ma_N$$

$$a_N = \frac{v^2}{L} \to (R)\ \text{raggio}$$

$$m\frac{v^2}{L} = T_F - mg\cos\theta$$

La velocità è max quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi.

Equazione oraria dello spazio percorso

$$S = L\theta = L\theta_0 \operatorname{sen}(\omega t + \varphi)$$ Lunghezza arco di circonferenza

derivata dell'angolo rispetto al t (velocità angolare)

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_0\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

pulsazione caratteristica dell'oscillatore armonico $\sqrt{\frac{g}{L}}$

$$v_T = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} = L\omega_0\theta_0\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

L costante

POTENZA (quantità dell'efficacia di una forza) istantanea

Il lavoro nell'unità di tempo. Rapidità di variazione del lavoro.

$$P = \frac{dL}{dt} = \underbrace{F}_{cost} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = F \cdot v = F_T \, v$$

Proiettare la forza nella direzione del secondo vettore.

Se F non costante

Potenza media = rapporto tra il lavoro totale e il tempo per il quale il lavoro viene svolto

$$P = \frac{L}{t}$$

Unità di misura: $\frac{Joule}{s}$ = WATT

ENERGIA CINETICA (quantità scalare) Unità di misura = JOULE

$$dL = F ds = F\, ds \cos\theta = F_T ds = m a_T \, ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = \underline{m v dv}$$

varia il modulo di v

posso scambiarli tra di loro essendo i due vettori paralleli

Consideriamo un percorso finito da A e B

$$L_{A \to B} = \int_A^B \underbrace{m}_{cost} v dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = E_{kB} - E_{kA} = \boxed{\Delta E_K = \frac{1}{2} m v^2}$$ energia cinetica

Teorema dell'energia cinetica: il lavoro L compiuto da una forza è pari alla variazione ΔE_K dell'energia cinetica della particella.

Il teorema lavoro-energia cinetica vale qualunque sia la forza che agisce sulla particella.

È possibile determinare la velocità finale di una particella conoscendo il lavoro e la velocità iniziale.

$$v_B = \sqrt{\frac{2 L_{AB}}{m} + v_A^2}$$

IL LAVORO CORRISPONDE ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA

Energia cinetica e quantità di moto

La quantità $\frac{1}{2} m v^2$ è l'energia cinetica

$$E_K = \frac{1}{2} m v^2 \qquad p = m \cdot v$$

È possibile scrivere $\boxed{E_K = \frac{p^2}{2m}} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{2 m E_K}}$

relazione tra quantità scalare

Forze conservative

Lavoro forza peso $\begin{cases} L_{A\to B} = -(mgy_B - mgy_A) \\ L_{A\to B} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p \end{cases}$ Energia potenziale della forza peso $\boxed{E_p = mgy}$

Lavoro forza elastica $\begin{cases} L_{A\to B} = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right) \\ L_{A\to B} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p \end{cases}$ Energia potenziale elastica $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$

Lavoro forza attrito $L_{A\to B} = -\mu_d N \int_A^B ds$

Nella forza peso ed elastica il lavoro dipende solo dalle coordinate delle posizioni dei punti A e B (iniziale e finale)

Nella forza d'attrito il lavoro dipende dalla traiettoria del punto materiale.

CONSERVATIVE (si conserva l'energia) Per le forze conservative il lavoro non dipende dal percorso.

$$L_{A\to B} = \int_A^B F\,ds \qquad L_{B\to A} = -\int_A^B F\,ds$$

traiettoria: curva chiusa

$$\int_A^B F\,ds - \int_A^B F\,ds = 0$$ Lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo $\oint F\,ds$

Ogni forza conservativa ha una propria energia potenziale. L'energia potenziale dipende dalla forza a cui si riferisce.

$E_p = mgz$

$E_p' = mgz' = mg(z+z_0) \rightarrow E_p' = E_p + mgz_0 = E_p + cost$

L'en. potenziale viene definita a meno di una costante.

Forze non conservative

Tutte le forze che non soddisfano tutto ciò che abbiamo visto finora sono chiamate non conservative.

Continua a valere il teorema dell'energia cinetica

$$L_{A\to B} = \int_A^B mv\,dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{kB} - E_{kA} = \Delta E_k$$

All'interno delle forze non conservative troviamo le forze di attrito.

Conservazione dell'energia meccanica

Se sono presenti solo forze conservative:

$\begin{cases} L_{A\to B} = \Delta E_k & \text{Lavoro = energia cinetica (valido sempre)} \\ L_{A\to B} = -(E_{pB} - E_{pA}) = -\Delta E_p & \text{Lavoro = - en. potenziale (solo per forze conservative)} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\boxed{\Delta E_k = -\Delta E_p}$

$E_{kA} + E_{pA} = E_{kB} + E_{pB}$ → principio di conservazione dell'en. meccanica $\boxed{E_m = E_k + E_p = cost}$

Momento della forza (grandezza vettoriale)

$\boxed{M = r \times F}$ $M = rF \operatorname{sen}\theta$ → modulo del vettore $\vec{M} \perp r \times F$ M ortogonale al piano

Se il momento è calcolato rispetto a un polo diverso O'

$$\vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{O'O} \times \vec{F}$$

Se al momento sono applicate più forze → somma dei singoli momenti applicati

$M = r \times F_1 + r \times F_2 \ldots r \times F_n$ → $M = r \times (F_1 + F_2 + \ldots F_n) = r \times R$

Teorema del momento angolare (la derivata del momento angolare è uguale alla R dei momenti applicati dalle forze esterne)

$L = r \times p = r \times mv$

r = distanza del punto P dal polo scelto come riferimento

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times m\frac{dv}{dt}$$

Se il polo O è fermo, allora $\frac{dr}{dt}$ coincide con la velocità di P

$m\frac{dv}{dt} = ma$ coincide con la forza F applicata al punto → $\frac{dL}{dt} = \underbrace{v \times mv}_{=0} + r \times F$

⇓ $v \times mv = 0$ perché i due vettori sono paralleli

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = r \times ma = r \times F = M}$$

→ La derivata del momento angolare è uguale al momento della forza se entrambi i momenti sono riferiti allo stesso polo di un sistema fisso.

→ Se la forza è nulla o forza e vettore posizione sono paralleli $\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{costante}$ (principio conservazione del momento angolare)

$dL = M dt$ $\int_{t_0}^{t} dL = \int_0^t M dt$ $L_{finale} - L_{iniziale} = \int_0^t M\, dt$ $\int_0^t M\, dt = \int_0^t (r \times F) dt$ = IMPULSO

$$r \times \int_0^t F\, dt = r \times \underbrace{J}_{\text{impulso della forza}} = \Delta L$$ → **Teorema del momento dell'impulso**

↓ se il polo è fisso non dipende dal tempo e quindi può uscire dall'integrale.

↓ La variazione di momento angolare è uguale al momento dell'impulso applicato in un punto.

Vettore accelerazione assoluta = acc che il punto P ha nel sist. di riferimento fisso (persona ferma, vede passeggero in treno)

$$\hookrightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}u_x + \frac{d^2y}{dt^2}u_y + \frac{d^2z}{dt^2}u_z$$

$$a' = \frac{d^2x}{dt^2}u'_x + \frac{d^2y}{dt^2}u'_y + \frac{d^2z}{dt^2}u'_z$$

→ acc. del punto P considerata nel sistema di riferimento mobile

$$a_{O'} = \frac{dv_{O'}}{dt} = \frac{d^2x_{O'}}{dt^2}u_x + \frac{d^2y_{O'}}{dt^2}u_y + \frac{d^2z_{O'}}{dt^2}u_z$$

acc con cui vediamo muoversi il treno

$\Downarrow$

derivata prodotto di funzioni

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv_{O'}}{dt} + \frac{dv'}{dt} + \frac{d\omega}{dt}\times r' + \omega\times\frac{dr'}{dt}}$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'}{dt}u_{x'} + \frac{dy'}{dt}u_y + \frac{dz'}{dt}u_z\right) =$$

$$= \frac{d^2x'}{dt^2}u_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2}u_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2}u_{z'} + \frac{dx'}{dt}\frac{du_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt}\cdot\frac{du_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt}\frac{du_{z'}}{dt}$$

$\Downarrow$

a sist mobile

$$\boxed{\frac{dv'}{dt} = a' + \omega\times v'} =$$

$\Downarrow$

$$\frac{du_{x'}}{dt} = \omega\times\hat{u}_{x'} \qquad \frac{du_{y'}}{dt} = \omega\times\hat{u}_{y'} \qquad \frac{du_{z'}}{dt} = \omega\times\hat{u}_{z'}$$

$$\dots + \frac{dx'}{dt}(\omega\times u_{x'}) + \frac{dy'}{dt}(\omega\times\hat{u}_{y'}) + \frac{dz'}{dt}(\omega\times\hat{u}_{z'}) \longrightarrow$$ (gli scalari possono essere portati all'interno del prodotto vettoriale)

$$\dots + \omega\times\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \omega\times\frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \omega\times\frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}$$

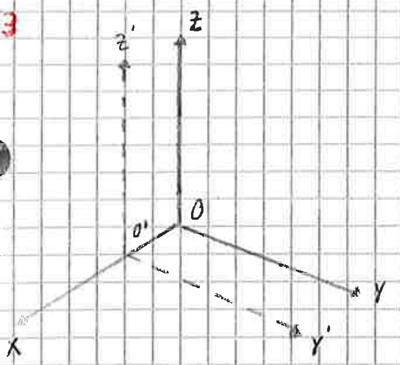
$$\dots + \omega\times\underbrace{\left[\frac{dx'}{dt}\hat{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt}\hat{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt}\hat{u}_{z'}\right]}_{dv'}$$

a' = acc del punto mobile

$$\omega\times\frac{dr'}{dt} = \omega\times v' + \omega\times(\omega\times r')$$

$$a = a' + a_{O'} + \frac{d\omega}{dt}\times r' + 2\omega\times v' + \omega\times(\omega\times r')$$

3.3



$\vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r'}$ $\rightarrow$ $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{OO'}$

$t=0$ $O=O'$

$\overline{OO'} = V_{O'} t$

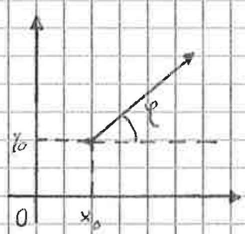
$$\begin{cases} x' = x - V_{O'} t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$\vec{v} = \vec{V}_{OO'} + \vec{v'} \Rightarrow \vec{v'} = \vec{v} - \vec{V}_{OO'}$

$$\begin{cases} V'_x = V_x - V_{O'} \\ V'_y = V_y \\ V'_z = V_z \end{cases}$$

$\vec{a} = \underbrace{\vec{a}_{OO'}}_{=0} + \vec{a'} \Rightarrow \vec{a} = \vec{a'}$ $\rightarrow$ ambedue i sistemi sono inerziali

ES



$\vec{V} = V_x \hat{u}_x + V_y \hat{u}_y$

$$O \text{ (sistema fisso)} = \begin{cases} x = x_0 + V_x t \\ y = y_0 + V_y t \\ z = 0 \end{cases}$$

$$tg\,\varphi = \frac{V_y}{V_x}$$

per traslare da un sistema all'altro

$$O' \begin{cases} x' = x - V_{O'} t = x_0 + (V_x - V_{O'}) t \\ y' = y = y_0 + V_y t \\ z' = z = 0 \end{cases}$$

$$tg\,\varphi' = \frac{V'_y}{V'_x} = \frac{V_y'}{V_x - V_{O'}}$$

ES

Moto rettilineo accelerato

$$\begin{cases} X_{O'} = V_{in} t + \frac{1}{2} a_t t^2 \\ V_{O'} = V_{in} + a_t t \end{cases}$$

$\vec{V'} = \vec{V} - \vec{V}_{O'}$

$\vec{a'} = \vec{a} - \vec{a}_{O'}$

$$\begin{cases} x' = x - (V_{in} t + \frac{1}{2} a t^2) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{x'} = V_x - \overbrace{(V_{in} + a t)}^{V_{O'}} \\ V_{y'} = V_y \\ V_{z'} = V_z \end{cases}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 27 di 154

Sistemi di punti. Forze interne ed esterne

- elettrostatica
- elettromagnetiche
- gravitazionali ... ecc.

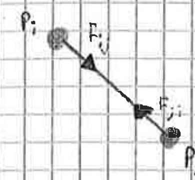
Sistemi di punti materiali

Le forze interne agiscono tra i punti del sistema (anche dette interazioni)

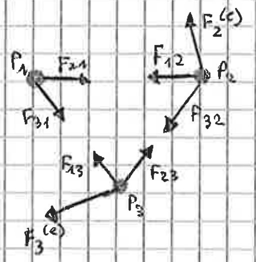
Per il principio di Azione/reazione $F_{ij} = F_{ji}$

Le forze esterne sono quelle che agiscono su punti del sistema dovute a cause esterne al sistema.

$F_i^{(e)} = F_j^{(e)}$



$F_{ij} + F_{ji} = 0$ (equilibrio)



Per ogni punto $F_i = F_i^{(e)}$

$F_i = F_i^{(e)} + F_i^{(i)}$

P_1 = non ha forze esterne e quindi il primo termine di F_i è nullo.

$$\begin{cases} P_1: & F_1 = F_{21} + F_{31} \\ P_2: & F_2 = F_2^{(e)} + F_{12} + F_{32} \\ P_3: & F_3 = F_3^{(e)} + F_{13} + F_{23} \end{cases}$$

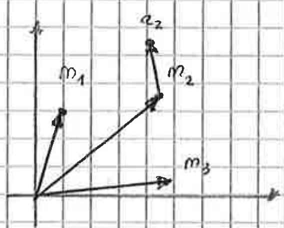
Sommando vettorialmente le forze interne $\sum_{i,j} F_{ij}^{(i)} = 0$ (essendo uguali e contrarie a coppie)

Sommando vettorialmente le forze esterne

$$\sum_{i,j} F^{(e)} = R^{(e)}$$

Grandezze caratteristiche del sistema di punti

- n punti materiali di massa m $m_1, m_2 \dots$
- posizioni $r_1, r_2 \dots$ (ciascuna massa ha una posizione)
- velocità $v_1, v_2 \dots$
- accelerazioni a_1, a_2 $\quad \vec{a}_2 = \dfrac{\vec{F}_2}{m_2}$



$p_i = m_i v_i$

$L = r \times m_i v_i$ $\qquad E_{k_i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

momento angolare della quantità di moto

Accelerazione del centro di massa

Se il sistema di riferimento è inerziale:

$m_i a_i = F_i = F_i^{(E)} + F_i^{(I)}$

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{\sum m_i a_i}{\sum m_i} = \frac{\sum F_i}{\sum m_i}$$

$$\sum F_i = \left(\sum m_i\right) a_{cm} = m a_{cm}$$

Ma le forze agenti su un singolo punto materiale sono sia interne che esterne, ossia:

$$\sum_i F_i = \underbrace{\sum_{i,j} F_{i,j}^{(i)}}_{} + \sum F^{(e)} = 0 + R^{(e)} = m a_{cm}$$

↳ somma di coppie di F che da 0 (risultante delle forze interne è nulla)

$$R^{(e)} = \left(\sum m_i\right) a_{cm} = m a_{cm}$$

Teorema del moto del centro di massa.

Il centro di massa si sposta come un punto materiale in cui è concentrata tutta la massa del sistema, su cui agisce la risultante delle forze esterne.

$$\boxed{R^{(E)}} = m a_{cm} = \frac{m\, dv_{cm}}{dt} = \frac{d(mv_{cm})}{dt} = \boxed{\frac{dP}{dt}}$$

[Il moto del cm è determinato dunque solo dalle forze esterne]

Se la risultante delle forze esterne è nulla:

$$R^{(E)} = 0 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 0 \Rightarrow \underline{P = cost}$$

$\not\Rightarrow$ che le singole quantità di moto siano nulle

Teorema del momento angolare (Richiamo)

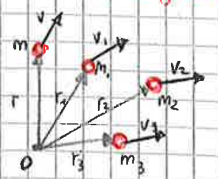
Variazione nel tempo del momento angolare

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(r \times mv) = \frac{dr}{dt} \times mv + r \times m\frac{dv}{dt} = \overbrace{v \times mv}^{\text{si annulla perché i vettori sono } \parallel} + r \times ma = r \times F = M$$

$$\frac{dL}{dt} = 0 \Rightarrow L = \text{costante}$$

Momento angolare del centro di massa

(sistemi di punti con masse costanti)



$$L_i = r_i \times m_i v_i$$

$$\sum_i r_i \times m_i v_i = \sum_i L_i = L$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\sum L_i = \frac{d}{dt}\sum_i r_i \times m_i v_i$$

$$\frac{d}{dt}\sum r_i \times m_i v_i = \sum \frac{dr_i}{dt} \times m_i v_i + \sum r_i \times m_i \frac{dv_i}{dt} =$$

$$= \underbrace{\sum_i v_i \times m_i v_i}_{=0} + \sum_i r_i \times m a_i = \sum_i r_i \times F_i =$$

$$= \sum_i r_i \times F_i^{(e)} + \underbrace{\sum_{i,j} r_i \times F_{i,j}}_{=0}$$

→ **Teorema del momento angolare**

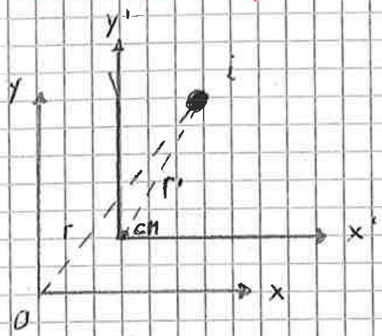
$$\frac{dL}{dt} = \sum r_i \times F_i^{(e)} = M^{(e)}$$

Momento totale delle forze esterne.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 31 di 154

1) Il moto del centro di massa è dovuto alla risultante delle forze esterne $(R^{(E)} \neq 0)$
2) Moto di spostamento dei punti intorno al centro di massa dovuto al momento delle forze esterne.

Teorema di Konig del momento angolare (I)



Momento angolare totale rispetto ad O:

$$L_O = \sum_i r_i \times m_i r_i$$

$$\begin{cases} r_i = r_{cm} + r_i' \\ v_i = v_{cm} + v_i' \end{cases}$$

$$L_O = \sum (r_{cm} + r_i') \times m_i (v_{cm} + v_i') = r_{cm} \times \sum m_i v_{cm} + r_{cm} \times \underbrace{\sum m_i v_i'}_{0} + \underbrace{\sum m_i r_i' \times v_{cm}}_{0} + \sum m_i r_i' \times v_i' =$$
$$= r_{cm} \times \sum m_i v_{cm} + \sum r_i' \times m_i v_i' = L_{CM} + L'$$

Il momento angolare assoluto L_O è uguale a un momento angolare $L_{CM} + L'$.
Il momento angolare del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come somma del momento angolare dovuto al moto del centro di massa e di quello del sistema rispetto al centro di massa.

Teorema di Konig per l'energia cinetica (II)

$$E_k = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2} m_i (v_{cm} + v_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \underbrace{\sum m_i v_i' \cdot v_{cm}}_{0} =$$

doppio prodotto

v_{cm} esce dalla sommatoria perché non dipende dal pedice i

$$= \frac{1}{2} M_{tot} v_{cm}^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

M_{tot} massa totale del sistema di punti

$$E_K = E_{CM} + E_K'$$

E_K' somma di tutte le en. cinetiche delle particelle

E_{CM} energia cinetica del centro di massa

Il teorema dell'Energia cinetica

$$dW_i = F_i dr_i = F_i^{(E)} dr_i + F_i^{(I)} dr_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

Il termine $dW_i^{(I)}$ è formato da termini del tipo:

$$F_{ij} dr_j + F_{ji} dr_i = F_{ij} (dr_j - dr_i) = F_{ij} dr_{ij}$$ che sono associati a cambiamenti delle distanze relative dei punti.

$$\Rightarrow dW_i = F_i dr_i = m_i \frac{dv_i}{dt} dr = m_i v_i dv_i$$

$$W = \sum \frac{1}{2} m_i v_{iB}^2 - \sum \frac{1}{2} m_i v_{iA}^2 = E_{KB} - E_{KA} = \Delta E_K$$

$e = 0 \quad \delta = -1$

Urto completamente anelastico (i due corpi urtano, rimangono attaccati e procedono in una certa direzione)

$$\overset{P_1}{m_1 v_1} + \overset{P_2}{m_2 v_2} = (m_1 + m_2) v' = (m_1 + m_2) v_{CM} \qquad \boxed{v' = v_{CM}}$$

L'energia cinetica, durante l'urto anelastico, non si conserva.

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{(m_1 + m_2)}$$

$$E_{k\,in} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{\text{somma } E_k \text{ dei due punti}} = \underbrace{E_k'}_{\text{dispersa durante l'urto}} + \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2$$

$$\boxed{E_{k\,fin} < E_{k\,in}}$$

$$E_{k\,fin} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k\,in}$$

($E_{k\,fin} < E_{k\,in}$ a causa della deformazione dei due corpi)

$$\Delta E_{k\,in} = \Delta E_{k\,fin} - \Delta E_{k\,in} = -E_k' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Urto elastico (l'energia si conserva) $\quad P_{in} = P_{fin} \quad E_{k\,in} = E_{k\,fin}$

$$m_1 v_{1\,in} + m_2 v_{2\,in} = m_1 v_{1\,fin} + m_2 v_{2\,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$e = 1$
$\delta = 0$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\,fin}^2$$

$$\begin{cases} v_{1\,in} = v_{1\,in}' + v_{CM} \\ v_{1\,fin} = v_{1\,fin}' + v_{CM} \end{cases} \qquad \begin{cases} v_{2\,in} = v_{2\,in}' + v_{CM} \\ v_{2\,fin} = v_{2\,fin}^2 + v_{CM} \end{cases}$$

$$P' = 0 \quad \begin{cases} m v_{1\,in}' + m_2 v_{2\,in}' = 0 \\ m v_{1\,fin}' + m_2 v_{2\,fin}' = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow \; m v_{1\,in}' = -m_2 v_{2\,in}' \\ \Rightarrow \; m v_{1\,fin}' = -m_2 v_{2\,fin}' \end{matrix}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1\,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1\,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2\,fin}^2$$

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1\,in} + m_2 v_{2\,in}}{(m_1 + m_2)}$$

2) Nell'ipotesi ulteriore che agisca la forza peso (esterna, agente sul sistema), la relazione:

$$dp = m\,dv - v^*\,dm = 0$$

si scriverebbe

$$dp = m\,dv - v^*\,dm = F\,dt = -mg\,dt$$

$$dv = v^*\frac{dm}{m} - g\,dt$$

$$\Rightarrow v(t) = v_0 + v^* \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - Kt}\right) - gt$$

Forze centrali e Campi

Si definisce forza centrale una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

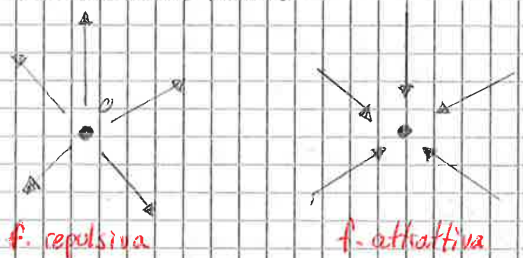
1) In qualsiasi punto la sua direzione passa sempre per un punto fisso O, detto centro della forza
2) Il modulo della forza centrale è funzione soltanto della distanza dal centro stesso.

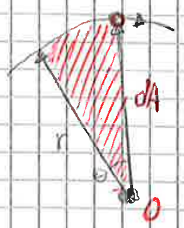
$$F = \overbrace{F(r)}^{\text{modulo}}\,\underbrace{u_r}_{\text{versore radiale}}$$

u_r versore della direzione radiale

$r = OP$

$F(r) < 0$	Forza attrattiva
$F(r) > 0$	Forza repulsiva





La forza funzione della posizione r agisce in ogni punto dello spazio e diventa una proprietà dello spazio stesso creando quello che si definisce campo di forze.

Dato che il vettore F passa sempre per il centro O, allora il momento della forza rispetto ad O è sempre nullo. Quindi:

$$M = \frac{dL}{dt} = 0 \quad \Rightarrow L \text{ costante}$$

$$L = r \times mv$$

La direzione di L è sempre $\perp$ al piano contenente r e v, allora anche questi devono rimanere sempre nello stesso piano. Pertanto il moto di P è in generale curvilineo che avviene in un piano fisso contenente r e v.

Il verso costante di L fissa il verso del moto alla traiettoria.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 37 di 154

Lavoro di una forza centrale

$$W = \int_A^B F \cdot ds = \int_A^B F(r)\, \underbrace{u_r \cdot ds}_{\text{scalare}}$$

dove $u_r \cdot ds = ds \cos\theta = dr$ ← spostamento infinitesimo

dr = variazione del modulo di r durante lo spostamento ds

$$W = \int_A^B \underbrace{F(r)}_{\text{dipende solo da r}} dr = \underbrace{f(r_B) - f(r_A)}_{\text{funzione integrale}}$$

Forze centrali ⇒ forze conservative

Qualunque forza centrale è conservativa.

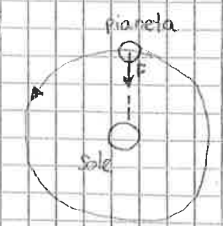
LA FORZA GRAVITAZIONALE

Le tre leggi di Keplero (enunciate in modo empirico prima di Newton):

1. I pianeti percorrono orbite ellittiche intorno al sole che occupa uno dei due fuochi dell'ellisse.
2. La velocità areale con cui il raggio vettore che unisce il sole ad un pianeta descrive l'orbita è costante. $\frac{dA}{dt}$ = costante
3. Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse. $T^2 = k r^3$ (T → periodo di rivoluzione)

Teoria di Newton

Le orbite ellittiche dei pianeti possono essere approssimate con delle circonferenze.
Considerando la relazione ottenuta per le forze centrali:



$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{COSTANTE}$$

Nel caso di traiettoria circolare il raggio è costante, quindi

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{costante}$$

Se la traiettoria è circolare, il pianeta deve essere soggetto ad una forza centripeta: (senza componente tangenziale)

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

(sostituisco il periodo T^2 della 3ª legge di K nella forza centripeta)

Inoltre tenendo conto della terza legge di Keplero $T^2 = k r^3$

↓

$$\boxed{F = \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{m}{r^2}}$$

La forza esercitata dal sole sui pianeti

La forza che si esercita tra i pianeti e il sole è direttamente prop. alla massa del pianeta e inv. alla distanza.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 39 di 154

Il segno negativo significa che l'energia potenziale è attrattiva. Per due masse molto distanti $r=\infty$ è $F=0$ $E_p=0$. È ragionevole pensare che a distanza infinita l'interazione sia nulla.

Quando le due masse si avvicinano, la forza gravitazionale compie un lavoro positivo e la massa 2 acquista velocità ed energia cinetica. Siccome la forza è conservativa, l'energia meccanica resta costante.

Esempio

Calcolare la velocità di fuga di un corpo dalla Terra. Nella condizione iniziale abbiamo un corpo di massa m sulla sup. terrestre con energia cinetica $E_{kin}=\frac{1}{2}mv^2$.

Alla fine si vuole che il corpo sia a distanza infinita e con velocità $V_0 \geq 0$.

Vale la conservazione dell'energia meccanica tot:

$$\frac{1}{2}mv^2-\gamma\frac{mm_T}{r_T^2}=\frac{1}{2}mv_0^2+\overset{E_p}{(0)}$$

$$v^2=v_0^2+2\gamma\frac{m_T}{r_T}$$

Il valore limite di v si ottiene per $V_0=0$

diversa per ogni pianeta ← $\boxed{V_F=\sqrt{2\gamma\frac{m_T}{r_T}}}$

La velocità di fuga non dipende dal corpo, ma solo dalle dimensioni della massa che stiamo misurando (Terra)

Esempio

Un satellite di massa m descrive un'orbita circolare attorno ad un pianeta di massa M; il raggio dell'orbita è r e il periodo di rivoluzione è T. ?= M, energia satellite.

Applichiamo la legge di Newton $F=ma$

$$\gamma\frac{mM}{r^2}=m\omega^2 r \qquad \omega=\frac{2\pi}{T} \qquad a_c=\frac{v^2}{R}$$

$$M=\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{r^3}{\gamma}$$

Il satellite ha un'energia meccanica tot pari alla somma di energia cinetica più energia potenziale

$$\boxed{E_m=\frac{1}{2}mv^2-\gamma\frac{mM}{r}}$$

Poichè $\gamma\frac{mM}{r^2}=m\frac{v^2}{r}$ → $\frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r}=\frac{1}{2}mv^2$

$$E_m=-\frac{1}{2}\gamma\frac{mM}{r}$$ (Energia cinetica del satellite in termini di energia potenziale)

Il valore negativo è dovuto al fatto che l'energia potenziale è maggiore (doppio) dell'energia cinetica. Questo implica che il satellite non può sfuggire all'attrazione e si dice che il sistema è legato, con energia di legame E_m.

L'oggetto in questione non ha abbastanza energia cinetica per allontanarsi dal pianeta.

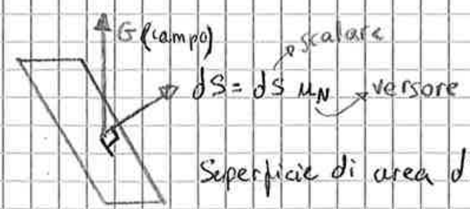
Flusso di un campo vettoriale

Flusso del campo vettoriale G attraverso una superficie orientata infinitesima.

prodotto scalare tra il versore normale alla superficie

$d\phi = G \cdot u_n ds$

Flusso infinitesimo di G



Flusso attraverso una superficie finita S:

Flusso infinitesimo $\phi_S = \int_S d\phi \equiv \int_S G \cdot dS$

Teorema di Gauss

Il flusso del campo gravitazionale attraverso una qualsiasi superficie CHIUSA è proporzionale alla somma delle masse interne alla superficie:

$$\phi_S \equiv \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{S} = 4\pi\gamma \sum_i m_i$$ sommatoria di tutte le masse contenute nella superficie chiusa

Area sferica

$$\phi_S \equiv \oint_S G \cdot dS = G(r)\, 4\pi r^2 = 4\pi\gamma m$$ (il campo è costante in ogni punto della superficie)

$$G(r) = \frac{\gamma m}{r^2} \qquad 4\pi r^2 \cdot \frac{\gamma m}{r^2} = 4\pi\gamma m$$

$d\phi = G\, u_n \cdot ds$
- >0 USCENTE dalla superficie (G e u_n concordi)
- <0 ENTRANTE (G e u_n discordi)

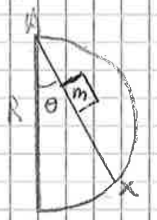
$V(B)=0 \Rightarrow E_{KB}=0$ $\quad E_{KA}=0$

$E_{PB}=\frac{1}{2}Kl_0^2$ $\quad E_{PA}=mgh$

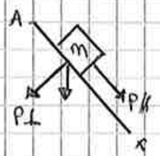
$0+mgh=0+\frac{1}{2}Kl_0^2+\mu mgd$

$$h=\frac{\frac{1}{2}Kl_0^2+\mu mgd}{mg}=0,091\ m$$

(2.25)



$V_f=0$



$P_{//}=P\cos\theta=mg\cos\theta$

$P_{\perp}=P\operatorname{sen}\theta=mg\operatorname{sen}\theta$

Accelerazione costante

$S=S_0+V_0t+\frac{1}{2}at^2$

$V=V_0+at$

$V_0=0$

$\begin{cases}S=S_0+\frac{1}{2}at^2\\ V=at\end{cases}$ $\quad \begin{cases}S-S_0=\frac{1}{2}at^2\\ V=at\end{cases}$

l_{AX} (lunghezza corda) $=\frac{1}{2}at^2 \rightarrow t=\sqrt{\frac{2l_{AX}}{a}}$

$l_{AX}=2l\cos\theta$

$$t=\sqrt{\frac{2l_{AX}}{a}}=\sqrt{\frac{2\cdot 2R\cancel{\cos\theta}}{g\cancel{\cos\theta}}}=\sqrt{\frac{4R}{g}}$$

$$\begin{cases} z = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \\ x = V_t t \\ y = 0 \end{cases}$$ (sistema di riferimento inerziale)

$$\begin{cases} V_z = V_0 - gt \\ V_x = V_t \\ V_y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_z = -g \\ a_x = 0 \\ a_y = 0 \end{cases}$$

$\overline{OO'}$ (vettore di coordinate $x_{o'}, y_{o'}, z_{o'}$) $= (V_0 t, 0, 0)$

$$\begin{cases} x' = x - x_{o'} = V_t t - V_{0'} t = (V_t - V_{0'})t \\ y' = y - y_{o'} = 0 - 0 = 0 \\ z' = z - z_{o'} = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 - 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = (V_t - V_{0'})t \\ y' = 0 \\ z' = h + V_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

TRAIETTORIA

$$\left.\begin{array}{l} t = \frac{x}{V_t} \\ z = h + \frac{V_0}{V_t} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{V_t^2} \end{array}\right\}$$ sistema di riferim. inerziale O

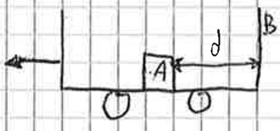
$$t = \frac{x'}{V_t - V_{0'}}$$ sistema di riferimento o'

$$V = \sqrt{V_0^2 + V_t^2} = 10\ m/s$$

$$\begin{cases} V_{x'} = V_t - V_{0'} \\ V_{y'} = 0 \\ V_{z'} = V_0 - gt \end{cases} \Rightarrow V = \sqrt{V_0^2 + (V_t - V_{0'})^2} = 6{,}7\ m/s$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 47 di 154

3.4



$m_A = 2\,kg$

$d = 1\,m$

$m_B = 8\,kg$

$\mu d = 0{,}2$

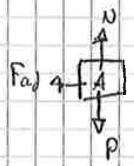
$F = 30\,N$

$V_A = 0$

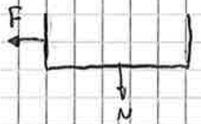
$? = a$

$N - P = 0$

$F_a = \mu N = \mu m_A g$



$m_A a_A = \mu m_A g$



$m_B a_B = F - \mu_d\, m_A g$

$$a_B = \frac{F - \mu_d\, m_A g}{m_B}$$

$x = x_0 + V_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

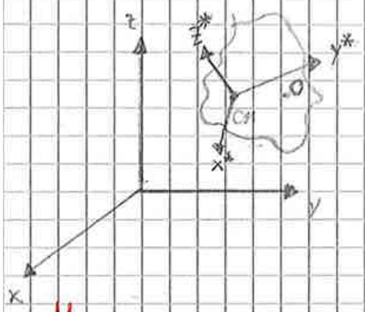
$x - x_0 = d$

$d = \frac{1}{2} a t^2$

Quanti parametri sono necessari per caratterizzare un corpo rigido?

Il numero di parametri necessari per descrivere il moto di un sistema sono detti gradi di libertà del sistema:

1) un punto materiale ha $l = 3$ gradi di libertà (il punto può spostarsi in tre dimensioni coordinate)
2) Un sistema di n punti materiali ha $l = 3n$ gradi di libertà
3) un corpo rigido ha $l = 6$ gradi di libertà (3 per individuare la posizione del centro di massa e altri 3 per individuare i coseni direttori di 3 assi di riferimento solidali al corpo rigido)



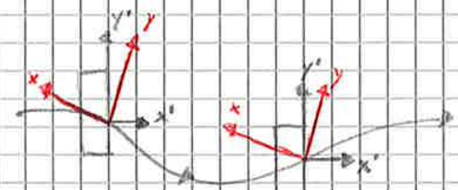
$P(x,y,z) = CM\,(3) + 3$ coseni direttori $\Rightarrow l = 6$

Moto

Traslazione (tutti i punti descrivono traiettorie eguali, percorse con la stessa v)

$R = m a_{CM}$ $\qquad P = m v_{CM}$ $\qquad v = v_{CM}$

$L = L_{CM} = r_{CM} \times m v_{CM}$



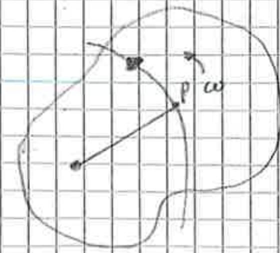
La barretta percorre una traiettoria curva, ma non ruota
→ L'angolo tra gli assi dei due sistemi non varia.

$E_K = E_{K,CM} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$

Rotazione (i punti descrivono moto circolare)

I momenti delle forze esterne causano le rotazioni intorno ad O (punto fisso o centro di massa del sistema). L'equazione alla base della dinamica delle rotazioni è:

$$M = \frac{dL}{dt}$$



tutti i punti hanno la stessa ω velocità angolare

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 154

Il centro di massa di un sistema di punti materiali è stato definito mediante la definizione:

Posizione centro di massa $r_{cm} = \frac{\sum_i m_i r_i}{\sum_i m_i}$

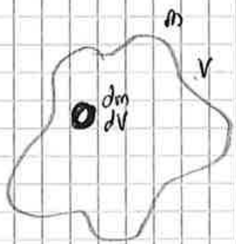
Per definire il centro di massa del corpo rigido $\Sigma \to \int$ = somma su infiniti punti

$dm = m_i$ $r_{cm} = \frac{\int r\,dm}{\int dm} = \frac{\int r\,dm}{m}$ → massa tot del sistema

$$\vec{r}_{cm} = \begin{cases} x_{cm} = \frac{\int x\,dm}{m} \\ y_{cm} = \frac{\int y\,dm}{m} \\ z_{cm} = \frac{\int z\,dm}{m} \end{cases}$$

Se definiamo la densità come rapporto di infinitesimi $\rho = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \rho\,dV$

$r_{cm} = \frac{\int r\,dm}{\int dm}$



$\rho = \frac{m}{V}$

$\rho = \frac{dm}{dV} \to dm = \rho\,dV$

$r_{cm} = \frac{\int_V r\rho\,dV}{\int_V \rho\,dV} = \frac{\int_V r\,dV}{\int_V dV} = \frac{\int_V r\,dV}{V}$ → se la densità ρ è costante, il centro di massa dipende solo dalla geometria del corpo.

ρ costante $\Rightarrow$ corpo omogeneo

Densità volumica

$\rho = \frac{dm}{dV}$ $\int dm = \int \rho\,dV$ $m = \int_V \rho\,dV$

Densità superficiale

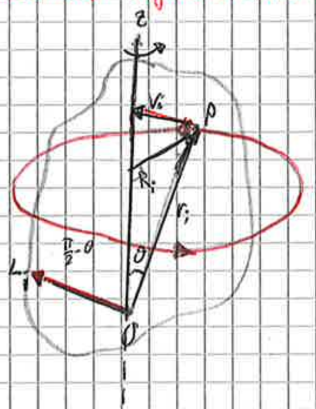
$\sigma = \frac{dm}{dS}$ $\int dm = \int \sigma\,dS$ $m = \int_S \sigma\,dS$

Densità lineare (unica estensione)

$\lambda = \frac{dm}{dl}$ $\int dm = \int \lambda\,dl$ $m = \int_l \lambda\,dl$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 53 di 154

Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso (i punti dell'asse di rotazione sono punti fissi)



$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

α // asse di rotazione

Il vettore velocità angolare ω ha direzione fissa, mentre il modulo può variare.

Ciascun punto è caratterizzato da:

$v_i = \omega R_i$

$a_{ni} = \omega^2 R_i$ → accelerazione normale (centripeta)

$a_{\tau i} = \alpha R_i$ → accelerazione tangenziale

Se ω varia $\Rightarrow$ $\alpha \neq 0$

Ciascun punto P è caratterizzato da un momento angolare

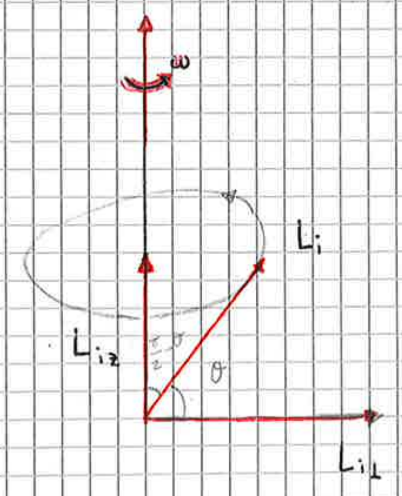
$L_i = r_i \times m v_i$

Il momento angolare L_i è perpendicolare al piano che contiene sia r_i che v_i

Il momento angolare L_i forma un angolo $\frac{\pi}{2} - \theta_i$ con l'asse z e ha modulo:

$L_i = m_i r_i v_i = m_i r_i R_i \omega$

Calcoliamo le componenti del momento angolare L_i del corpo rigido



La proiezione del momento angolare lungo l'asse z è indicato come momento angolare assiale

$L_{iz} = L_i \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = L_i \operatorname{sen}\theta = m_i r_i \operatorname{sen}\theta R_i \omega = m_i R_i^2 \omega$

La risultante del momento angolare lungo z

$L_z = \sum_i L_{iz} = \left(\sum_i m_i R_i^2\right)\omega = I_z \omega \Rightarrow I_z = \sum_i m_i R_i^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$

Momento di inerzia del corpo rigido rispetto all'asse z

L'equazione del moto di rotazione viene utilizzata per la descrizione completa della cinematica del moto

$M = I_z \alpha \qquad \alpha = \frac{M}{I_z}$

$\alpha \Rightarrow \quad \omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \alpha \, dt$

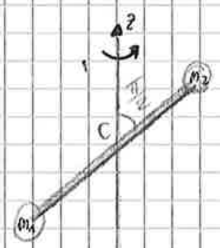
$\omega \Rightarrow \quad \theta(t) = \theta_0 + \int_0^t \omega \, dt$

Nel caso in cui $M = cost$

$\alpha = cost \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$ esce dall'integrale

$\omega(t) \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ velocità angolare

Calcolo dell'energia cinetica per la rotazione intorno ad un asse fisso (caso discreto)



Caso generale

$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

$(v = R\omega)$

$E_K = \sum_i \frac{1}{2} \underbrace{m_i R_i^2}_{} \omega^2$

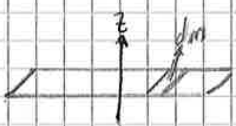
$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$

L'energia cinetica dipende dal momento di inerzia del corpo rispetto all'asse di rotazione.

Calcolo dell'energia cinetica per la rotazione intorno ad un asse fisso (caso continuo)

Corpo rigido esteso

Analisi del moto di rotazione intorno ad O di tutte le masse infinitesime



$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ [sostituisco dm a m]

$E_K = \int \frac{1}{2} dm \, v^2$

$E_K = \int \frac{1}{2} dm \, r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}$

$I_z = \int r^2 dm$

$\boxed{E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2}$

Momento di inerzia

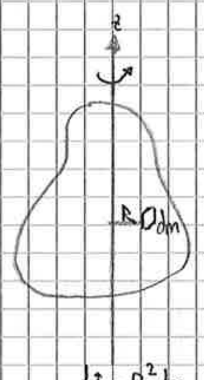
$I_z = \int r^2 dm$ corpo rigido formato da masse continue (masse infinitesime)

$I_z = \sum_i r_i^2 m_i$ corpo rigido formato da masse discrete

Il momento di inerzia è legato alla distribuzione geometrica delle masse elementari rispetto all'asse di rotazione.

Ha un ruolo fondamentale analogo a quello della massa nella legge di Newton: a parità di momento applicato un corpo assume un'accelerazione angolare maggiore o minore a seconda del valore del momento d'inerzia rispetto all'asse di rotazione.

$$M = I_z \alpha$$



$$I_z = \int R^2 dm$$

$$I = \int \rho R^2 dV \qquad R^2 = x^2 + y^2$$

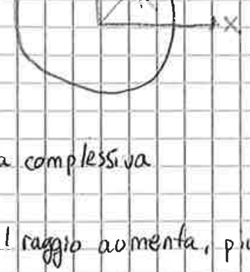
$$I_z = \int \rho (x^2 + y^2) dV$$

$$dI = R^2 dm$$

Esempio 6.6

Calcolare il momento di inerzia di un anello omogeneo di massa m e raggio R, rispetto a un asse z passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano dell'anello

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \qquad I_z = \int R^2 dm$$



$$dm = \lambda dl \Rightarrow I_z = \int \lambda R^2 dl = \lambda R^2 \int dl = \lambda R^2 \underbrace{2\pi R}_{\text{lunghezza complessiva}}$$

$$m = \int_l \lambda dl \Rightarrow m = \lambda 2\pi R$$

$$\Rightarrow I_z = mR^2$$ [Più il raggio aumenta, più l'inerzia aumenta]

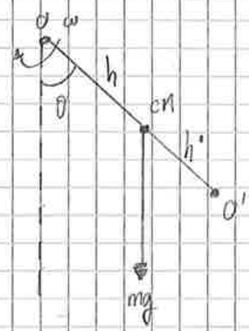
Pendolo composto (ogg che oscilla attorno ad un asse non baricentrico)

Ogni corpo rigido che possa oscillare per azione del suo peso in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale non passante per il suo centro di massa.

Il momento della forza peso è rispetto ad O

$$|M| = |\underbrace{r \times mg}_{\Sigma F}| = -mgh\,\text{sen}\theta$$ (il segno negativo implica che il momento funziona da richiamo)

si oppone all'accelerazione α



$$M = \frac{dL_z}{dt} = I_z \alpha = I_z \frac{d^2\theta}{dt^2}$$ Equazione del moto della dinamica

$$I_z \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgh\,\text{sen}\theta$$

porto al primo membro

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\,\text{sen}\theta = 0$$ Equaz. differenziale di 2° ordine non lineare

Per piccole oscillazioni (θ molto piccoli $\simeq 0$) sviluppo in serie di Taylor dell'angolo: $\text{sen}\theta = \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$$ (oscillatore armonico) $\rightarrow \text{sen}(\omega t + \phi)$

$$I_z = \underbrace{I_{CM} + mh^2}_{\text{Huygens-Steiner}}$$

massa complessiva dell' ogg per la distanza

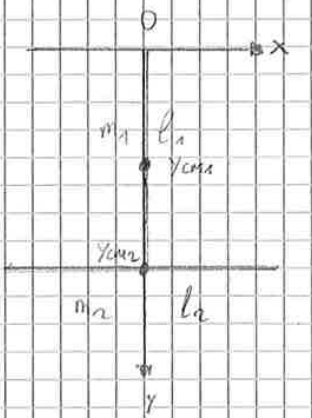
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgh}{I_z}\theta = 0$$ ha soluzione

$$\theta(t) = \theta_0\,\text{sen}(\Omega t + \phi) \qquad \Omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_z}}$$ **Pulsazione**

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$ → oggetto che ha le dimensioni di una lunghezza

$$\ell = \frac{I_z}{mh}$$ **Lunghezza ridotta del pendolo**

$$y_{CM} = \frac{\int y_{CM}\, dm}{\int dm}$$ centro di massa del corpo rigido



$$y_{CM} = \frac{\int_{asta 1} y\, dm + \int_{asta 2} y\, dm}{\int dm}$$

$$y_{CM} = y_{CM1} + y_{CM2}$$

$$m = m_1 + m_2$$

$$y_{CM} = \frac{m_1 l_1/2 + m_2 l_1}{m_1 + m_2}$$

$$I_{CM} = \int r^2\, dm = \frac{1}{12} m l^2 \qquad I_0 = I_{CM} + mh^2$$

distanza tra i due assi

$$I_{0,1} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + m_1 \left(\frac{l_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2$$ → momento di inerzia della sbarretta 1 attorno ad O

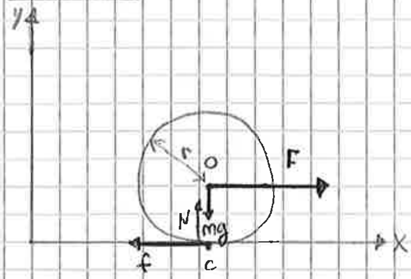
$$I_{0,2} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2$$ → momento di inerzia della sbarretta 2 attorno ad O

$$I_0 = I_{0,1} + I_{0,2}$$

$$I_0 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 + \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2 l_1^2$$ → momento d'inerzia complessivo

Rotolamento puro (1)

- Equazione della dinamica per il moto di traslazione



$$F + R + mg = ma_{CM}$$

$$\begin{cases} x: & F - f = ma_{CM} \\ y: & N - mg = 0 \end{cases}$$

- Equazione della dinamica per il moto di rotazione

$$M = I\alpha \Rightarrow M = r \times \overset{\text{forza d'attrito}}{f} = I\alpha$$

(Le forze che danno momento sono tutte quelle forze che passano per il CM)

$$fr = I\alpha \qquad \alpha = \frac{a_{CM}}{r}$$

$$\begin{cases} F - f = ma_{CM} \\ f = \frac{I}{R^2} a_{CM} \end{cases} \Rightarrow \text{sostituisco la } f \text{ nella prima}$$

$$F = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{F}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)}$$

$$f = \frac{I}{R^2} a_{CM} = \frac{I}{R^2} \frac{F}{m\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)} = \frac{F}{\left(\frac{R^2}{I} m + 1\right)}$$

il punto C deve essere fermo

Per il rotolamento puro occorre che la forza di attrito statico non superi il valore $\boxed{f \leq \mu_s mg}$

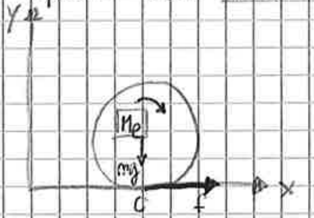
Considerazioni energetiche. Attrito volvente

Nel rotolamento puro la forza di attrito statico $f_a \leq \mu_s mg$ è applicata al punto di contatto che ha velocità nulla. Quindi poichè la velocità è nulla e costante non c'è variazione di E_k e quindi il lavoro della forza di attrito è nullo.

Si osserva che un corpo che rotola a cui non sono applicate forze esterne si ferma dopo aver percorso un certo tratto, si conclude che deve esistere un'altra forma di attrito diversa dall'attrito statico.

Rotolamento puro (2)

Equazione della dinamica per il moto di traslazione



$$R + mg = m a_{cm}$$

$$\begin{cases} f = m a_{cm} \\ N - mg = 0 \end{cases}$$

Equazione della dinamica per il moto di rotazione

$$\sum M = I\alpha \Rightarrow M_e + r \times f = I\alpha$$

forma scalare

$$M_e - fr = I\alpha = I \frac{a_{cm}}{r}$$

opposto al momento M_e

induce la rotazione α (positivo perché concorde con la rotazione)

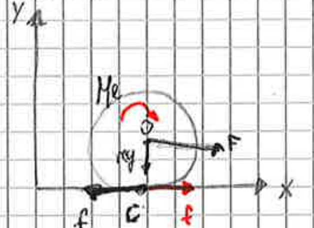
$$a_{cm} = \frac{M}{mr\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)}$$

Occorre che la forza di attrito non superi il valore:

$$\boxed{f \leq \mu_s mg} \qquad \frac{M}{r\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \leq \mu_s mg \quad \text{(attrito statico massimo)}$$

Non possiamo decidere a priori e quindi si ragiona facendo un'ipotesi sul segno di f da verificare alla fine del calcolo.

Considero f concorde con l'asse x.



$$\begin{cases} F + f = m a_{cm} \\ M - rf = \frac{I}{r} a_{cm} \end{cases}$$

$$a_{cm} = \frac{1}{m} \cdot \frac{F + \frac{M}{r}}{m\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad f = \frac{\frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2} \cdot F}{\left(1 + \frac{I}{mr^2}\right)} \qquad \frac{M}{r} - \frac{I}{mr^2} F \geq 0$$

$$M \geq \frac{IF}{mr}$$

$$\Downarrow$$

momento prevale sulla forza orizzontale $\Rightarrow f > f$

deve compiere solo una rotazione di 90° quindi $\omega_2 = 0$

$$mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I \omega_1^2 \quad \to \text{sostituisco } \omega_1 \text{ con } \quad \omega_1 = \frac{3rJ}{m\ell^2}$$

da cui ricaviamo $J = \frac{m}{r}\sqrt{\frac{g\ell^3}{3}}$

Posso ricavare la velocità del CM subito dopo l'urto

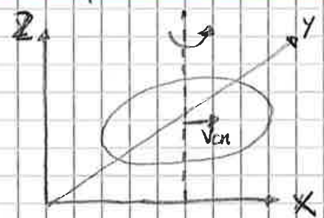
$$V_{CM} = \omega_1 \frac{\ell}{2} = \frac{3rJ}{m\ell^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{\ell}}{2} = \frac{3}{2}\frac{rJ}{m\ell}$$

A questo punto osservo che: $V_{CM} \neq \frac{J}{m}$

questo è dovuto al fatto che oltre all'impulso J esiste la reazione vincolare in O che genera un impulso in reazione a J.

$$mV_{CM,1} - mV_{CM,0} = J - J_0$$

CORPO RIGIDO LIBERO



$$\begin{cases} R = m a_{CM} \\ M = \frac{dL}{dt} \end{cases}$$

$L = I\omega$

Se $M = 0$ rispetto al CM $\Rightarrow L = cost$

La condizione $L = cost$ non implica che $\omega = cost$. Si ha $\omega = cost$ solo quando la rotazione avviene attorno ad un asse passante per il CM o // al CM.

ES 6.22

Asta lasciata libera nell'istante in cui riceve l'impulso. La reazione vincolare non interviene.

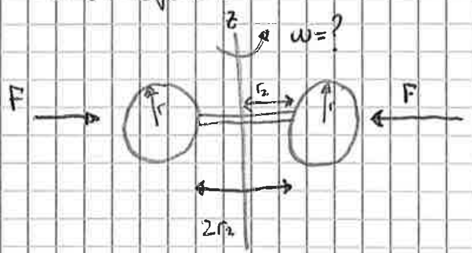
$$V_{CM,1} = \frac{J}{m}$$

$$r \times J = \Delta L = L_{fin} - L_{in}$$

$$dJ = I\omega_1 = \frac{1}{12} m\ell^2 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{12 dJ}{m\ell^2}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 154

Supponiamo di applicare due forze lungo l'asse e di modificare la distanza tra le due sferette



$L_1 = I_1 \omega_1$ $L_2 = I_2 \omega_2$

$I_1 = 2\left[\frac{2}{5} m r^2 + m(r+r_1)\right]$ $I_2 = 2\left[\frac{2}{5} m r^2 + m(r+r_2)^2\right]$

varia solo questo

$$L_1 = L_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1\omega_1}{I_2}$$

$r_1 > r_2$ $I_1 > I_2$ $\omega_2 > \omega_1$

Quanto è più grande la distanza degli oggetti dall'asse di rotazione tanto maggiore è il momento d'inerzia. Se le due sfere si avvicinano, si ottiene una velocità angolare ω maggiore. Se le due sfere si allontanano, si ottiene un rallentamento del corpo.

Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

Se l'urto è elastico si conserva anche l'energia cinetica.
Se agiscono solo forze interne e quelle esterne non sono di tipo impulsivo si conserva la quantità di moto totale.
Se esiste un vincolo questo sviluppa una forza di tipo impulsivo, durante l'urto, non si conserva la quantità di moto.
Se il momento delle forze esterne è nullo (incluse le forze vincolari) rispetto ad un polo fisso in un riferimento inerziale o rispetto al CM, il momento angolare si conserva rispetto a tale polo.
Se agiscono solo forze interne, L si conserva sempre, indipendentemente dal polo.

Il momento angolare si conserva $L_{in} = L_{fin}$

Prendendo come polo il CM:

$L_{in} = m_1 d_1 v + m_2 d_2 v$ $\qquad L_{fin} = I\omega$

$L_{in} = L_{fin} = m_1 d_1 v + m_2 d_2 v =$
$= (2 \cdot 0{,}21 + 0{,}5 \cdot 0{,}39)4 =$
$= (0{,}42 + 0{,}195)4 = \underline{2{,}46}\ Nm$

$I = I_{anello} + I_{massa\,1} + I_{massa\,2}$

$I_{anello} = m_3 R^2 + m_3 h^2 \longrightarrow m_3 R^2 =$ momento di I dell'anello se ruotasse attorno al proprio CM.

$I_{massa\,1} = m_1 d_1^2 \qquad I_{massa\,2} = m_2 d_2^2$

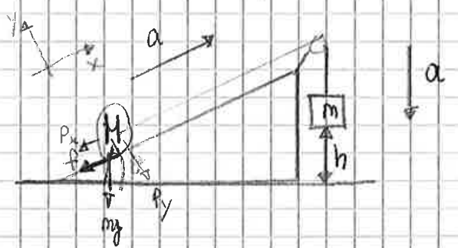
$(m_1 d_1 + m_2 d_2)v = I\omega$

$$\boxed{\omega = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2)v}{I}} = \frac{2{,}46}{(m_3 R^2 + m_3 h^2) + m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2} = \frac{2{,}46}{(0{,}225 + 0{,}02025) + 0{,}0882 + 0{,}0760S} = \frac{2{,}46}{0{,}4095} = \boxed{6\ rad/s}$$

Problema 6.21

Disco di massa $M = 8$ kg e raggio R è posto sopra una guida inclinata con $\theta = 30°$; all'asse del disco è collegato un filo che sostiene la massa m bloccata a distanza $h = 1{,}5$ m dal suolo. All'istante $t=0$ si lascia libera la massa m che inizia a scendere facendo salire contemp. il disco lungo la guida. Il moto del disco è di puro rotol.

?= acc con cui scende la massa, v con cui la massa tocca il suolo, h max raggiunta dal centro del disco rispetto alla quota



$T - Mg\,sen\theta - f = Ma \qquad\qquad mg - T = ma$

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$fR = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{I}\frac{a}{R} \rightarrow \alpha$

$\sum \vec{M} = I\vec{\alpha}$

$M_p + M_f + M_T = I\alpha \qquad M_p = M_T = 0$ perchè passano per il CM

$fR = I\alpha \rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2$

$a_{CM} = \alpha R \rightarrow \alpha = \frac{a_{CM}}{R}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 154

CAP. 8

Proprietà meccaniche dei fluidi

- A differenza dei solidi studiati finora, i fluidi non sono caratterizzati da una forma propria
- Sono caratterizzati dalla possibilità di scorrimento di elementi di fluido rispetto agli altri.
- I fluidi sono caratterizzati da un volume ben definito e da una superficie limite. Quindi possono essere considerati corpi continui e quindi si può definire una densità ρ

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

perché il fluido è deformabile

Non si può parlare di forza applicata ad un punto di un fluido. Si può parlare solo di forze applicate ad un volume di fluido o ad una superficie di fluido.

Per esempio la forza peso agisce sul volume del fluido:

$$dF = g\,dm = g\rho\,dV \qquad dm = \rho\,dV \qquad \rho = \text{densità di massa}$$

PRESSIONE

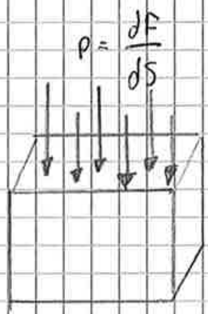
Con questo termine ci si riferisce a forze agenti sulla superficie di un fluido:

$$dF = p\,dS \qquad p = \frac{dF}{dS} \qquad p = \frac{F}{S}$$

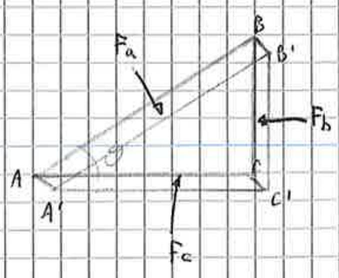
u.m. Pascal $(N/m^2) = 1$ Pa

1 bar $= 10^5$ Pa

1 atm $= 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa



La pressione in un fluido è una funzione scalare del punto in cui viene misurata e non dipende dall'orientazione della superficie (non direzionalità della pressione).



$a = AB$

$b = BC = a \operatorname{sen}\theta$

$c = CA = a\cos\theta$

$AA' = BB' = CC' = h$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 154

$dF = f_z\, dm = f_z \rho\, dV$

Per esempio nel caso in cui l'unica forza agente sul volumetto sia il peso, la relazione precedente si scriverebbe

$$dF = g\, dm = g \rho\, dV$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} \cancel{dV} + f_z \rho \cancel{dV} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho}$$ Equazione di equilibrio locale del fluido

Equilibrio nelle direzioni x, y, z

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f_x \rho \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \rho \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho$$ 3 componenti del vettore gradiente

$$\boxed{\nabla p = \text{grad}\, p = f \rho}$$

$$f = -\Delta E_p$$

Legge di STEVINO

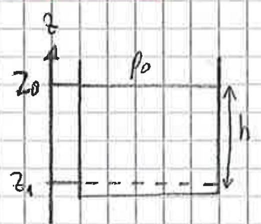
$dF = f_z\, dm = f_z \rho\, dV$

$dF = g\, dm = g \rho\, dV$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = f_z \rho$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \qquad \int_{p_1}^{p_2} dp = -\int_{z_1}^{z_2} g \rho\, dz$$

$p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)$ Variazione della pressione sotto l'azione della forza di gravità



$$p_1 = p_0 - \rho g (z_1 - z_0)$$

// In un liquido con ρ = costante la pressione cresce linearmente con la profondità.

$\rightarrow$ $p(h) = p_0 + \rho g h$

La pressione p a una profondità h è maggiore della pressione p_0 alla superficie libera di una quantità $\rho g h$

Viscosità (si esercita tra corpi all'interno di un fluido)

Ciascun elemento può scorrere su di un altro adiacente.
Vi è una forza di attrito interno che si oppone allo scorrimento.

$$dF = \eta \, dS \, \frac{dv}{dn}$$ Forza d'attrito viscoso è proporzionale alla

dS = Area di contatto

$\frac{dv}{dn}$ → variazione di velocità in direzione ortogonale a dS

η → coeff. visosità del fluido (dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura).

Fluidi ideali

Un fluido si dice ideale se non è viscoso e incomprimibile, cioè

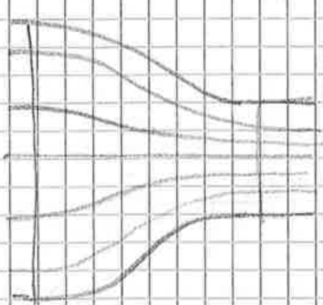
$\eta = 0$ e $\rho = cost$

Fluidi reali

Se c'è scorrimento relativo tra due elem. di fluido, lungo la superficie di contatto compare una forza di attrito interno con verso sempre contrario a quello della velocità relativa.

$$dF = \eta \, dS \, \frac{dv}{dn}$$

La viscosità dipende dal tipo di fluido e dalla temperatura. Nei liquidi η diminuisce all'aumentare della temperatura



Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata.

Descrizione Euleriana: $\rho(x,y,z)$ $v(x,y,z)$

Regime stazionario: $v(t)$ = costante

Regime non stazionario: transiente o Turbolento
variabile
→ $v(t)$ varia, ma in modo controllato

Equazione di continuità

In regime stazionario la quantità di fluido contenuta entro un volume non varia

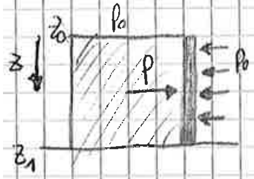
$$\boxed{\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2}$$ (derivata della massa rispetto al tempo $\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \rho S \frac{d\ell}{dt} = \rho S v$) → portata massica $\dot{m}$

La portata massica del fluido si conserva

vS = portata volumica (velocità per superficie)

Eser. Pr. 8.1

Parete larga $\ell = 5$ m e alta $h = 3$ m separa una massa d'acqua dall'ambiente. Calcolare a quale forza è sottoposta la parete.



$F_0 = p_0 S = p_0 \ell h$

p_0 aumenta man mano che scendo nel fluido (legge di Stevino)

$p = p_0 + \rho g z$ $\qquad dS = \ell dz$

$d\mathbf{F} = p(z)\,\ell\, dh \;\rightarrow\; dF = p\,\ell\, dz$

forza che agisce su una fetta

$F_1 = \int dF = \int p(z)\,\ell\, dz$

$F_1 = \int_{z_0}^{z_1} \underbrace{(p_0 + \rho g z)}_{\substack{p(z)\\ \text{Stevino}}} \ell\, dz$ $\qquad F_1 = \underbrace{p_0 \ell h}_{F_0} + \frac{\rho g h^2}{2}$ $\qquad \rightarrow F_1 = F_0 + \underbrace{\frac{\rho g h^2}{2}}_{\text{termine a destra della parete}}$

$F = \frac{\rho g h^2}{2}$

Bernoulli: in un fluido ideale in moto con regime stazionario la somma della pressione, della densità di energia cinetica (E_k per unità di volume) e della densità di energia potenziale (E_p per unità di volume) è COSTANTE lungo il condotto, ovvero lungo un qualsiasi tubo di flusso.

- Se il condotto è orizzontale, $\rho g z = cost$ quindi l'eq di B. si riduce a:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = cost$$

- La pressione e la velocità del fluido cambiano solo se cambia la sezione: dove questa è maggiore la velocità è minore e la pressione è maggiore; dove la sezione è minore accade il contrario, la velocità aumenta e la pressione diminuisce.
- Assenza di attrito $\Rightarrow$ il moto avviene senza l'azione di una forza
- Se $v = 0$ si ritrova la legge di Stevino $\rightarrow p + \rho g z = cost$

Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico.

Lo stato termodinamico di un sistema è detto di equilibrio quando le variabili che lo descrivono sono costanti nel tempo (variabili di stato).

- Eq. meccanico (eq. di forze e momenti)
- Eq. chimico (non avvengono reazioni chimiche)
- Eq. termico (la temperatura è la stessa ovunque)

Eq. di stato

In uno stato di equilibrio esiste una relazione tra le coordinate termodinamiche che si esprime sotto forma di EQUAZIONE DI STATO

Esempio: $f(p, V, T) = 0$, $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$, $T = T(p, V)$

Trasformazione termodinamica

Dati due diversi stati di equilibrio term. di un certo sistema, l'evoluzione del sistema da uno stato all'altro.

Gli stati iniziali e finali della trasformazione sono sempre stati di equilibrio.

Gli stati intermedi possono essere di equilibrio o no.

Equilibrio termico

Due sistemi A e B (ciascuno in equilibrio term.), con $T_A = T_B$ → eq. termico.

→ **Principio dell'equilibrio termico** = se un corpo A e uno B sono in equilibrio termico con un corpo C allora A e B sono in equilibrio termico tra loro.

Due sistemi con T diverse possono essere portati all'equilibrio termico mettendoli in contatto tramite una parete diatermica (permette scambio di calore)

Se si raggiunge l'equilibrio, la parete si dice DIATERMICA e si dice che i due sistemi sono in contatto termico

Se non si raggiunge l'equilibrio → parete ADIABATICA con l'ambiente circostante e quindi poichè $W = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$

si dimostra che $\boxed{Q = -W}$

Che esprime il principio di equivalenza tra calore Q e lavoro W (principio di Joule).

Q è il calore scambiato, senza lavoro esterno per far variare la temperatura di ΔT.
W è il lavoro fornito al sistema in condizioni adiabatiche per far avvenire la stessa variazione di temperatura

Primo principio della Termodinamica. Energia interna

Un sistema compie una trasformazione da uno stato iniziale a uno stato finale, scambiando sia calore che lavoro.

Se il sistema compie una trasformazione dallo stato A a B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente dipendono singolarmente ~~con l'ambiente~~ dalla particolare trasformazione subita.

Si osserva però che la quantità Q - W è la stessa qualunque sia il percorso seguito.

1° P. della termodinamica

In qualunque trasformazione, la variazione di energia interna è pari alla differenza tra il calore e il lavoro scambiati e dipende dallo stato iniziale e finale:

$$\boxed{\Delta U = Q - W}$$

La differenza Q-W deve quindi corrispondere ad una variazione di una proprietà intrinseca
Il bilancio energetico complessivo dice che la quantità di calore scambiato meno il lavoro meccanico scambiato durante la trasformazione devono essere uguali alla variazione di energia interna del sistema.

Trasformazione ciclica o chiusa

Trasformazione che riporta il sistema nello stato iniziale. => poichè l'energia interna è funzione dello stato del sistema, si ha:

$$\Delta U = 0$$

e quindi usando il primo principio $\Delta U = Q - W \implies W = Q$

L'energia interna alla fine del processo rimane invariata $U_A - U_A = 0 = \Delta U = 0$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 154

Si può anche scrivere per trasformazioni infinitesime:

$$dQ = c \cdot m\, dT \Rightarrow c = \frac{1}{m}\frac{dQ}{dT}$$

che integrata si scrive:

$$Q = \int dQ = m \int c\, dT$$

costante solo in alcuni casi

Si definisce calore specifico molare la quantità c che si ottiene:

$$dQ = nc\, dT \Rightarrow c = \frac{1}{n}\frac{dQ}{dT} \qquad Q = n\int_{T_1}^{T_2} c(T)\, dT$$

Calore latente (dipende dal tipo di materiale)

La quantità di calore necessaria per il cambiamento di stato di una massa m è proporzionale alla massa m secondo un coefficiente detto CALORE LATENTE:

$$\boxed{Q = m\lambda} \qquad u.m. = J/kg$$

Il calore latente non contribuisce al riscaldamento del corpo.

Dilatazione termica

- Lineare $\Delta L = L \alpha \Delta T$ (L: lunghezza iniziale; α: coeff.)
- Volumica $\Delta V = V \beta \Delta T$ (V: volume iniziale)

$$\boxed{\beta = 3\alpha}$$

I coefficienti α e β variano lievemente con la temperatura.

Equazione di stato del gas ideale

$p_T = p_0 \alpha T$

Moltiplicando per $V_0 = n V_m$ ai due membri si ha

$p_T V_0 = p_0 V_0 \alpha T = p_0 V_T$ → Volume della legge isobara

$p V = p_0 \underbrace{n V_m \alpha}_{R} T$

$R = 8{,}314 \ J/mol\ K$ → $pV = nRT$

Trasformazioni di un gas. Lavoro

$T_A = \dfrac{p_A V_A}{nR}$ $\qquad$ $T_B = \dfrac{p_B V_B}{nR}$

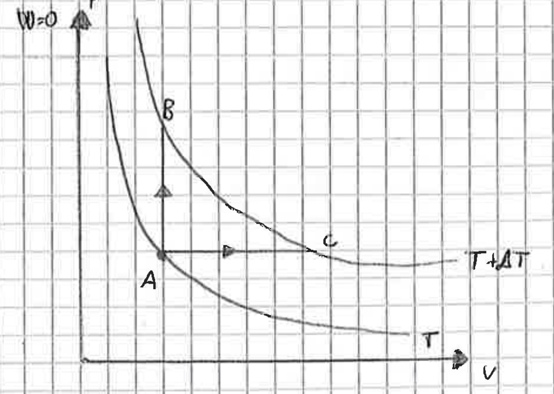
$dW = p\,dV$ → (quando un gas si espande o viene compresso c'è scambio di lavoro)

$W = \int_A^B p(V)\,dV$ $\qquad$ $W = p_{ambiente}(V_B - V_A)$

- Volume che si espande → $W > 0$ (il gas compie un lavoro sull'ambiente)
- Volume che si comprime → $W < 0$ (il gas subisce un lavoro svolto dall'ambiente)
- Trasformazione isocora → $\Delta V = 0$ → $W = 0$

Calori specifici

Supponiamo di effettuare una trasformazione fra gli stessi estremi di T prima a volume cost e poi a pressione cost.



$Q_V = n c_V \Delta T = \Delta U$

$Q_p = n c_p \Delta T = \Delta U + p\Delta V$

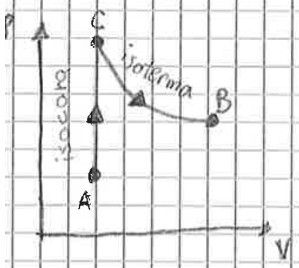
Ma la variazione di energia interna è la stessa nei due casi, per cui:

$Q_p = n c_p \Delta T = n c_V \Delta T + p \Delta V$

$Q_p > Q_V \qquad c_p > c_V$

Determinazione dell'espressione esplicita $U = U(T)$

Consideriamo due generici stati di equilibrio A e B, collegati da una trasformazione isocora da A a C e da una isoterma da C a B.



$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

Dato che per l'isoterma : $U_B = U_C$ $\quad (T_B = T_C)$

la variazione di energia interna è quella lungo la trasformazione isocora AC.

Isocora $\Delta V = 0$

Considerando la trasformazione isocora AC, W è nullo, quindi dal primo principio si ha:

$\Delta U = Q$

$\Delta U = U_B - U_A = n c_v (T_B - T_A) = n c_v \Delta T$ → per qualunque trasformazione

Per trasformazioni infinitesime $\quad dU = n c_v dT$

Da cui ricavo anche l'espressione del calore specifico in funzione dell'energia interna U:

$$c_v = \frac{1}{n} \cdot \frac{dU}{dT}$$

Primo principio della termodinamica per i gas ideali.

$dQ = dU + dW$

$dQ = n c_v dT + dW$

$$Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + W$$

Se il calore specifico è costante
↓
$$Q = n c_v (T_B - T_A)$$

Se infine la trasformazione è reversibile

$dQ = n c_v dT + p dV$

$$Q = n \int_{T_A}^{T_B} c_v dT + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

se il calore specifico è costante
↓
$$Q = n c_v (T_B - T_A) + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

Trasformazioni notevoli

Trasformazione adiabatica

$Q=0 \Rightarrow \Delta U = -L$

Trasformazione isocora

$L=0 \Rightarrow \Delta U = Q$

Tr. isoterma

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$

Trasf. isobara

$L = p\,(V_{fin} - V_{in}) \Rightarrow Q = \Delta U + L$

Tr. ciclica

$\Delta U = 0 \Rightarrow Q = L$

Trasformazione adiabatica

Se il gas è contenuto in un contenitore con pareti adiabatiche può scambiare con l'esterno solo lavoro:

$$W_{AB} = -\Delta U \quad e \quad \Delta U = nc_v\,(T_A - T_B)$$

Utilizzo l'equazione di stato per ricavare le temperature $pV = nRT$

$$W_{AB} = nc_v\,(p_A V_A - p_B V_B)\,\frac{1}{nR}$$

$$c_p - c_v = R \Rightarrow W_{AB} = \frac{c_v}{c_p - c_v}\,(p_A V_A - p_B V_B) =$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} \Rightarrow \frac{1}{1-\gamma}\,(p_B V_B - p_A V_A)$$

Poichè durante la trasformazione adiabatica il calore scambiato è nullo, sulla base del primo principio si ha:

$$dU + dW = nc_v\,dT + p\,dV = 0$$

(lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche, perchè trasformazione reversibile)

poichè $p = \frac{nRT}{V} \Rightarrow nc_v\,dT + \frac{nRT}{V}\,dV = 0$

Divido per T e sostituisco $R = c_p - c_v$

$$nc_v\,\frac{dT}{T} + \frac{n(c_p - c_v)}{V}\,dV = 0$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{(c_p - c_v)}{c_v V}\,dV = 0$$

Trasformazione isocora ($V = cost$)

Si considera il gas in un recipiente di volume V costante.
Questo implica che il lavoro è nullo $W = 0$ e quindi durante la trasformazione il gas può scambiare solo calore.

$$W_{AB} = 0$$

$$\Delta U = Q = nc_v (T_B - T_A)$$

→ Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas, pressione e temp. diminuiscono.

Dall'equazione di stato dei gas si ricava:

$$\frac{p_A}{T_A} = \frac{p_B}{T_B} \qquad \frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B} \Rightarrow \boxed{\frac{p}{T} = cost}$$

Trasformazione isobara ($p = cost$)

Si considera il gas contenuto in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante p. Sulla base dell'equazione di stato dei gas si ho:

$$\frac{V_A}{T_A} = \frac{V_B}{T_B} \qquad \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

→ Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie W; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro W.

Il gas può scambiare sia calore che lavoro.

$$Q = nc_p (T_B - T_A)$$

$$W_{AB} = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$$

$$\boxed{\frac{V}{T} = cost}$$

$$Q - W = \Delta U = nc_v (T_B - T_A)$$

Entalpia (funzione di stato) → isobara

$$\boxed{H = U + pV}$$

Proprietà dell'entalpia: H è una funzione di stato, in quanto U e pV sono funzioni di stato.
Inoltre in un gas ideale: U e pV sono funzioni solo della temperatura, quindi l'entalpia è anch'essa funzione di T

$$H = H(T)$$

Trasformazioni cicliche

$\boxed{Q = W}$

$W = W_F + W_S$ $\qquad\qquad$ $Q = Q_A + Q_C$

$W = Q \Rightarrow \underbrace{W_F + W_S}_{W\text{ scambiati}} = \underbrace{Q_A + Q_C}_{Q\text{ scambiati}}$

Rendimento di un ciclo termico

La quantità

$$\eta = \frac{W}{Q_A}$$

lavoro prodotto dal ciclo

assorbito

viene detta **rendimento** di una macchina termica.

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{W_F + W_S}{Q_A}$$

$$\eta = \frac{W_F + W_S}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

calore ceduto $\quad Q_C < 0$

$$0 \leq \eta < 1$$

Ciclo di Carnot

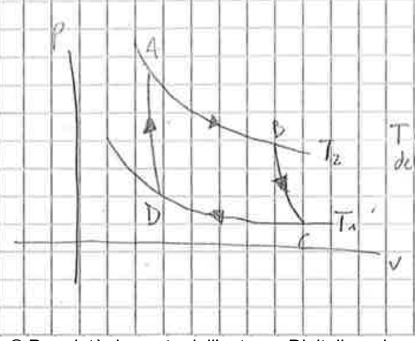
Ciclo di riferimento. Caratterizzato da 2 isoterme e 2 adiabatiche

L'unico lavoro prodotto dal ciclo di Carnot è quello adiabatico.

$$\boxed{\eta = \frac{W}{Q_{AB}}}$$

Il rendimento del ciclo di Carnot dipende solo dalle due temperature estreme.

Il rendimento del ciclo di Carnot dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore.



T più bassa del sistema

AB = il gas si espande $\to W_{AB} > 0$

BC = espansione gas $\to W_{BC} > 0$

CD = compressione $\to$ gas assorbe lavoro $\to W_{CD} < 0$

$\to$ gas cede calore all'ambiente

DA = compressione $\to$ gas cede calore e lavoro