



**Appunti universitari**  
**Tesi di laurea**  
**Cartoleria e cancelleria**  
**Stampa file e fotocopie**  
**Print on demand**  
**Rilegature**

**NUMERO: 2267A**

**ANNO: 2018**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Velardi Marco**

**MATERIA: Topografia - Prof. Bellone**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# TOPOGRAFIA

7-3-17

La topografia dipende dal sistema di riferimento che si utilizza, è una scienza prettamente relativa e non assoluta.

I topografi italiani lavorano con misure con metodi numerici e statistici.

Le misure devono avere delle caratteristiche:

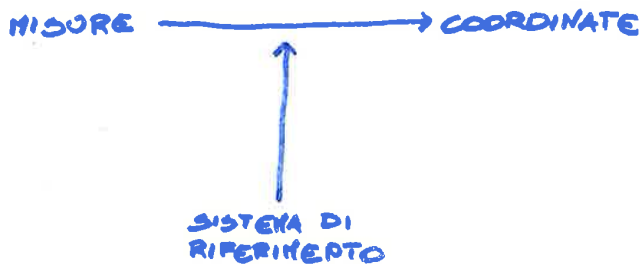
- . affidabilità
- . accuratezza
- . precisione

Queste coordinate possono essere riferite ad una superficie di riferimento simile alla Terra (geoide, sferoide, ellissoide).

Vi sono metodi per passare da superficie di riferimento, al piano della carta. Ci sono sempre delle deformazioni nella carta. I tipi seguono so:

- . Geodesia
- . Cartografia
- . Strumenti di misura e tecniche di rilievo
- . Trattamento delle osservazioni

Sistema di riferimento o datum → esiste una serie di regole ed ipotesi che governano il mio sistema. All'interno del sistema di riferimento bisogna scegliere il tipo di coordinate. Le relazioni fra misure da un sistema di coordinate ad un altro sono regole matematiche, invece da un s.r. ad un altro, addio un sistema relativo.



Si parla di datum sia rilevamento classico e geodetico.

Sostituisce in da:  
 - rilevamento planimetrico  
 - rilevamento altimetrico

→ ricerca di x, y nel piano, ottenuta da misure di angoli e distanze tra punti, ottenute da stazione totale  
 ↳ uso del teorema di triangolazione od onde

Conferme non vuole dire che sia equidistribuita, perché le osservazioni sono ottenute. Consta equidistribuita invece montare la rete, in campo è quella di Arno Peters. Di non sono anche carte tecniche

↓  
 Are difformi a seconda della grandezza considerata. Sono volti da ONU, UNESCO

LIDAR → è in linea retta, per anni sia dove ci fossero.  
 Oltre GPS sia GNSS, GLONASS, GALILEO, BEIDOU.

↓  
 punto è risultato  
 è

## Trattamento delle osservazioni

### CASO E PROBABILITÀ

Probabilità è una parte in matematica. Laplace dice

Von Mises

L'idea dell'idea della frequentista data dalla legge dei grandi numeri, per cui una cosa accade. E se l'evento ha frequenza si avvicina a probabilità.

↓  
 rapporto tra numero di casi favorabili e numero di casi possibili.  
 Con i casi decano come per equidistribuiti (no è così).

Definire:

↳ oggettivistica. Questo è solo d'opinione o accettazione.

Kolmogorov → assiomatica, sono regole matematiche di calcolo. Probabilità è un valore che va da 0 ad 1. Probabilità di averla in un caso A o B di un caso è la somma delle probabilità.

Ripetendo lo stesso esperimento nelle stesse condizioni, non può mai lo stesso risultato.

9-3-17

## Teoremi della probabilità

### Probabilità totale

che avviene in un caso A o B.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Se voglio numero più piccole → 18/37  
 " " " < 20 → 20/37 →  $\frac{18}{37} + \frac{20}{37} = \frac{38}{37} = 1,027$  (ma non può > 1)

Esercizio slide

→ di taxi sia della Blue  
 $P(B) = 0.15$  in assoluto

→ probabilità che se taxi è Blue, veramente sia della Blue da testimonianza  
 $P(A|B) = 0.8$

$$P(B|A) = \frac{0.80 \cdot 0.15}{0.80 \cdot 0.15 + 0.20 \cdot 0.85} \approx 0.41$$

→ cioè non sia blue, ma green

$$P(B^c) = 0.85$$

$$P(A|B^c) = 0.2$$

→ taxi green se testimone ci prende

probabilità di testimoniare che è della Blue, o effettivamente è della Blue.

Statistica

a) Variabile casuale

Riguarda la probabilità e situazioni reali. È un modello matematico.

b) Variabile statistica

Riguarda un campione, ~~probabilità~~ frequenze. Riguarda dati raccolti.

↓  
 relative e  
 assolute

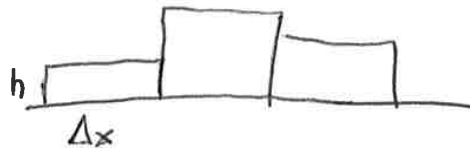
b) → è una tabella in cui ho valori organizzati in una riga e nella riga accanto le frequenze.

↓  
 Anche se  
 un numero o  
 relativo o frazione  
 o percentuale.

↓  
 Dati della popolazione  
 da cui si è discusso.

→ Tabella con valori organizzati e ricorda ogni frequenza

Spesso al posto di un valore, c'è un intervallo di valori, viene usato graficamente col valore tramite un istogramma.



$$A_i = h_i \cdot \Delta x_i = N_i \text{ o } \frac{N_i}{N_T}$$

} Frequenza

a) Esplicita mediante funzioni di distribuzione di probabilità

Probabilità di estendere a una <sup>o</sup> individuata altra <sup>o</sup> combinazione di sito dividendo < ad un valore.

Media nella variabile casuale

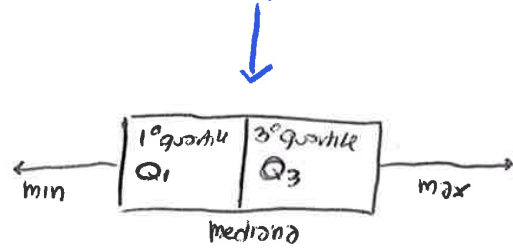
$\mu = \int x f(x) dx$  continua

$\mu = \sum x_i p_i$   
 ↓  
 valore  
 argomentale  
 → probabilità  
 discreta

Media per variabile statistica

$m = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{\sum x_i \cdot N_i}{N}$   
 Pi  $\Rightarrow$  coincide con il caso sopra.

Rappresentazione visuale statistica come istogramma e boxplot.



$IQR = Q3 - Q1$   
 ↓  
 intervallo range

IQR (caso sopra):  $14,9 - 14,4 = 0,5$

errori  $\rightarrow$  numeri da  $\pm$  scostano tipo da blocco maggiore

$\begin{cases} Q1 - 1.5 \cdot IQR \\ Q3 + 1.5 \cdot IQR \end{cases}$  } Coli fuori: sollecito con condiz. errori (outliers)

In caso sopra 3 punti Q1, Q2, e mediana sono soluti.

Media pesata

Es. Ho città e voglio elencare città.

	x	y
10	20	40
20	30	60
30	34	52
10	40	40
...	44	42
...	48	62
...	50	10
...	60	90
...	90	90

$X_m = \frac{\sum x_i}{9} = 46.22$

$Y_m = \frac{\sum y_i}{9} = 49.565$

$X_w = \frac{\sum x_i w_i}{\sum w_i}$

$Y_w = \frac{\sum y_i w_i}{\sum w_i}$

w  $\rightarrow$  il pop. ou popolazione

Media pesata spaziale.

$$F(3) = 0.10 + 0.35 + 0.30 = 0.75$$

$$F(11) = 1$$

Mediana quando la serie percentuale è un solo numero, fino a quel per il quale funzione cumulativa sia  $\geq 0.5$ .

Mediana

$$\rightarrow \mu_0 = 3$$

Ho 3 indici di sinistra e il resto

Es. variabile statistica

$\rightarrow$  come procedimento quello della casuale discreta, sono calcolata con frequenze relative.

	37	44	51	58
N	3	1	4	2

$$\bar{x} = 37 \cdot 0.3 + 44 \cdot 0.1 + 51 \cdot 0.4 + 58 \cdot 0.2 = 47.5 = \sum x_i \frac{N_i}{N} = \sum x_i \cdot \text{freq. relativa}$$

Indice di dispersione intorno al centro

Valori oscillano intorno ad un certo. Per esempio  $3[\text{km}] \pm 5[\text{km}]$ , indice piccolo, se piccolo indice di dispersione m'è a quanto valore sono raggruppati intorno alla media. Se per valore max e min non è sufficiente.

Lo scarto o residuo  $\rightarrow V_i = x_i - m$  (valore argomentale - modo di distribuzione)  
 $V_i = x_i - \mu$

Esiste anche modo rispetto mediana.

Per ciò come indice  $\sum \frac{V_i^2}{n}$  la media degli scarti, perché solo così! Allora però in altro modo  $\rightarrow$  media dei quadrati degli scarti.

↓  
 varianza

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n} = \frac{\sum V_i^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2 \frac{N_i}{N}}{n}$$

se la variabile casuale discreta

↓  
 $\sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i$

se la variabile casuale continua

↓  
 $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 p(x) dx$

La  $\sqrt{\quad}$  della varianza è lo scarto quadratico medio (il  $\pm$  nelle norme).



$$\sigma_{xy} = \sum (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y) p_{ij}$$

$p_{ij}$  → probabilità congiunta/congiunta

↳  $p(A \cap B)$

Es.

		1	2	3	
		← valori argomentati			
X	1	0.25	0.25	0	
	2	0	0.25	0.25	
		0.25	0.50	0.25	1

sono le probabilità congiunte.

Le probabilità riga per riga o

colonne sono delle marginali

$$\sigma_x^2 = \sum (x_i - \mu_x)^2 p_i = (\frac{3}{2} - 1)^2 \cdot 0.50 + (\frac{3}{2} - 2)^2 \cdot 0.50$$

$$\sigma_y^2 = \sum (y_i - \mu_y)^2 p_i = (2 - 1)^2 \cdot 0.25 + (2 - 2)^2 \cdot 0.50 + (2 - 3)^2 \cdot 0.25$$

↳ sempre con somma

$$\sigma_{xy} = \sum_{ij} x_i y_j \cdot p_{ij} - \mu_x \cdot \mu_y = 1 \cdot 1 \cdot 0.25 + 1 \cdot 2 \cdot 0.25 + 1 \cdot 3 \cdot 0 +$$

$$\mu_x = 0.50 \cdot 1 + 0.50 \cdot 2 = \frac{3}{2}$$

$$\mu_y = 0.25 \cdot 1 + 0.50 \cdot 2 + 0.25 \cdot 3 = 2$$

$$2 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0.25 + 2 \cdot 3 \cdot 0.25 = \frac{3}{2} \cdot 2 = 0.25$$

Statistica non si deve sentire alla pancia. Correlazione non deve far pensare a causa-effetto.

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \text{ indice di Bravais o Pearson}$$

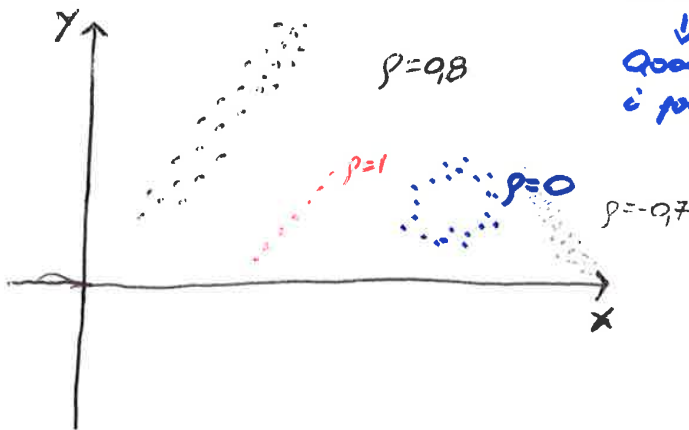
↳ è un indice di correlazione lineare, varia tra -1,1 periodo per il

↓  
Quanto si allontanano lungo una retta i punti di distribuzione.

Valori negativi →  $\uparrow x \downarrow y$

$\rho = 0$  → no correlazione lineare

Valori positivi →  $\uparrow x \uparrow y$



Legame → come si comportano le due grandezze.

Trasformazioni di variabili casuali

Possiamo avere teoremi:

Es.

$$X = \begin{cases} -2 & -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \mu_x = -\frac{1}{6} \\ \sigma^2 = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$Y = 1 - X^2 \quad Y = g(X)$$

X è una var. casuale con probabilità

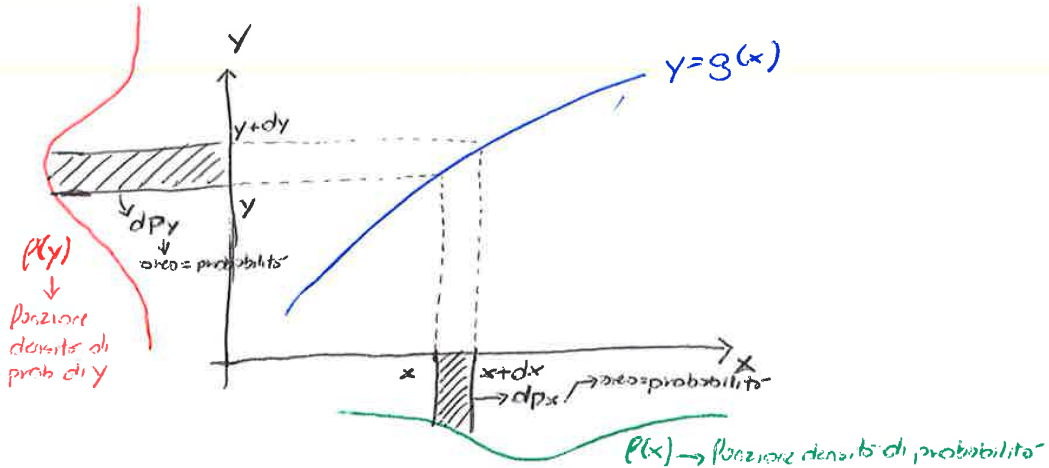


Se per un dato valore osservato meno di un'altra, rispetto alla stessa media, vedo che le due medie di  $Y$  si avvicinano (vedi slide).

quindi  $\mu_Y \approx g(\bar{x})$

media di  $x$  deve rimanere la stessa perché la varianza è piccola

dimostrazione:



Dal grafico si ha che:

$$P(x \in dx) = P(y \in dy) \rightarrow \text{prob. tot. di } x \text{ è uguale a prob. di } y$$

$$P_x(x) dx = P_y(y) dy$$

$$\downarrow$$

$$P(y) = P(x) \frac{dx}{dy}$$

$$\text{ma poiché } y = g(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g'(x) \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{g'(x)}$$

$$\text{sostituendo: } P(y) = \frac{P(x)}{g'(x)} \rightarrow \text{funzione densità di probabilità di } y.$$

### TEOREMA DELLA MEDIA

$$E[Y] = \int y \cdot P(y) dy$$

$$E[Y] = \int g(x) \cdot \frac{P(x)}{g'(x)} \cdot g'(x) dx$$

$$E[Y] = \int g(x) P(x) dx$$

definizione

sostituisco tutto

→ trasformo la  $y$  e moltiplico per prob. della  $x$ .

La matrice si può scrivere:

$$C_{xx} = E[(x - \mu_x)(x - \mu_x)^T] \rightarrow |x - \mu_x| = \begin{vmatrix} x_1 - \mu_{x1} \\ x_2 - \mu_{x2} \end{vmatrix}$$

$|x - \mu_x|^T = \begin{vmatrix} x_1 - \mu_{x1} & x_2 - \mu_{x2} \end{vmatrix}$   
 o spazio di prodotto e si viene matrice 2x2

$$\begin{vmatrix} (x_1 - \mu_{x1})(x_1 - \mu_{x1}) & (x_1 - \mu_{x1})(x_2 - \mu_{x2}) \\ (x_2 - \mu_{x2})(x_1 - \mu_{x1}) & (x_2 - \mu_{x2})(x_2 - \mu_{x2}) \end{vmatrix}$$

Se passo la media di quella matrice ottengo la matrice di covarianza - covarianza

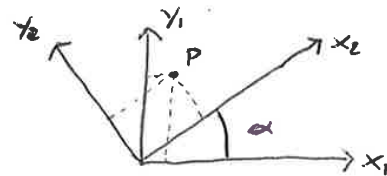
$$E(x_1 - \mu_{x1})^2 = \sigma_{x1}^2 \quad E(x_2 - \mu_{x2})^2 = \sigma_{x2}^2$$

$$E(x_1 - \mu_{x1})(x_2 - \mu_{x2}) = \sigma_{x1x2}$$

Esempio

In una matrice  $R_0$  matrice di rotazione

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}$$



Se le due variabili  $x_1, y_1$  hanno indice di Bravais = 0, la loro covarianza non è 0

↓  
 se sono insensibili non vanno insieme quindi  $\sigma_{x1y1} = 0$

↓  
 cioè sono indipendenti/accumulati

quindi la  $C_{xx} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$

Se conosco l'angolo di rotazione posso quindi calcolare  $x_2, y_2$  (se conosco lo applico il teorema della media  $\bar{x}_1$  e  $\bar{y}_1$  posso trovare  $\bar{x}_2$  e  $\bar{y}_2$  purché si conosca)

$\hookrightarrow y = Ax \rightarrow$  sistema lineare

Ajuto gli stati quadratici medi, anche le misure misurate li devono avere ed in particolare:  $C_{yy} = AC_{xx} \cdot A^T \rightarrow$  legge di propagazione

↓  
 della covarianza della rotazione

Legge propagazione varianza

Varianza è la media dei quadrati degli scarti dalla media.

Nel caso lineare

$$\sigma_y^2 = \int (y - \bar{y})^2 p(y) dy$$

$$y = ax + b$$

$$\bar{y} = a\bar{x} + b$$

è lineare, applico  
teorema I

→ media dei quadrati degli scarti

$$y - \bar{y} = ax + b - a\bar{x} - b$$

$$\sigma_y^2 = \int a^2 (x - \bar{x})^2 p(x) dx = a^2 \int (x - \bar{x})^2 p(x) dx$$

Al posto  $p(y)$  ho già sostituito  
e anche per  $dy$

$$y = g(x)$$

$$\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$$

o anche  $y = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots$

$$\sigma_y^2 = a_1^2 \sigma_{x_1}^2 + a_2^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots$$

in teoria sono come  
conio anche delle  
covarianze

$$a_1 a_2 \sigma_{12} + a_1 a_3 \sigma_{13} + \dots$$

Nel caso lineare, varianza di trasformazione.

se invece sono  $y = x_1 - x_2$

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$$

Caso non lineare

Una formulazione non lineare per la varianza della media.

$$y = g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots \text{ (Term. trascurabili)}$$

approssimazione (potenziale per linearizzazione)

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= \int (y - \bar{y})^2 p(x) dx = \int [g(\bar{x}) + g'(\bar{x})(x - \bar{x}) - g(\bar{x})]^2 p(x) dx = \\ &= \int g'(\bar{x})^2 (x - \mu(x))^2 p(x) dx = g'(\bar{x})^2 \sigma_x^2 \end{aligned}$$

prima derivata  
il termine noto

$$\sigma_y^2 = g'(\bar{x})^2 \sigma_x^2$$

Non prendo il coeff.  $g'$   
la derivata della funzione,  
calcolata nel valore medio.

Da come sempre per previsioni di nuove indovinate.

Legge propagazione covarianza

Caso lineare

$y = ax$   $\bar{y} = a\bar{x}$  per la stessa media

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad Y = AX$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{sono moltiplicate in una linea.}$$

4

$\bar{A} = \bar{a} \cdot \bar{b} = 50 \text{ [cm}^2\text{]}$  *per immaginare la convenienza*

$$\sigma_A^2 = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 = b^2 \sigma_a^2 + a^2 \sigma_b^2 =$$

$$= 25 \cdot 10^{-4} \text{ [cm}^2\text{]} + 100 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ [cm}^2\text{]} = 25 \cdot 25 \cdot 10^{-4} \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$\sigma_A = \sqrt{25 \cdot 25 \cdot 10^{-4}} = \pm 50 \cdot 25 \cdot 10^{-2} \text{ [cm]}$$

$\bar{d} \approx \sqrt{2^2 + 5^2} = 11.18 \text{ [cm]}$  II° condizione

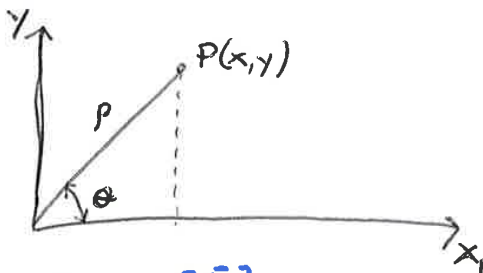
$$\sigma_d^2 = \left(\frac{1 \cdot \bar{a}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\bar{b}}{\sqrt{\bar{a}^2 + \bar{b}^2}}\right)^2 \sigma_b^2 =$$

$$\stackrel{\left(\frac{\partial d}{\partial a}\right)^2}{=} \frac{\bar{a}^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \sigma_a^2 + \frac{\bar{b}^2}{\bar{a}^2 + \bar{b}^2} \sigma_b^2 = 5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}$$

$\sigma_d = \sqrt{5 \cdot 20} = 10^{-2}$

Ho applicato la regola di propagazione delle variazioni ad un caso di non linearità.

Esempio (prop. covarianza non lineare)



Oggetto  $x, y$  non normali.

$E[P] = \bar{p} = \mu_p = 1 \text{ [km]} \pm 1 \text{ [mm]}$   
 $E[\theta] = \frac{\pi}{3} \text{ [rad]} \pm 2 \cdot 10^{-6} \text{ [rad]}$

$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}, C_{yy} = ?$

$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Y = G(x) = G \begin{bmatrix} r \\ \theta \end{bmatrix}$   
 perche' non lineare

$\bar{x} \approx \bar{r} \cos \bar{\theta}$  th. med. II° condizione  
 $\bar{y} \approx \bar{r} \sin \bar{\theta}$

$\begin{cases} \bar{x} \approx 1 \text{ km} \cdot 0.500 \\ \bar{y} \approx 1 \text{ km} \cdot 0.866 \end{cases}$

Ora applico covarianza, dato avere  $C_{\theta}$ .

$C_{xx} = \begin{bmatrix} 1 \text{ mm}^2 & 0 \\ 0 & 4 \cdot 10^{-12} \text{ rad}^2 \end{bmatrix}$

quello iniziale  $\rightarrow$  non c'è nulla cov.  $\rightarrow$  non sono indipendenti  
 diag. principale  $\rightarrow$  le due varianze  
 // secondario  $\rightarrow$  covarianza

Se ne fanno le varianze  $\rightarrow \sigma_m^2$  e  $m = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = \frac{x_1}{n} + \frac{x_2}{n} + \dots + \frac{x_n}{n}$

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{n^2} \sigma_{x_1}^2 + \frac{1}{n^2} \sigma_{x_2}^2 + \dots + \frac{1}{n^2} \sigma_{x_n}^2 = \frac{n \sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$  Varianza della media è la varianza di una popolazione diviso  $n$ , ovvero è la varianza della media.

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n} \quad E[s^2] = \sigma^2 \text{ no corretto!}$$

$$s^2_{\text{corretto}} = \frac{\sum (x_i - m)^2}{n-1} \quad E[s^2_{\text{corr}}] = \sigma^2$$

in angli  $\rightarrow m \pm \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2}{n(n-1)}}$   $\rightarrow$  sqm della media

23-3-17

Continuazione della misura della...

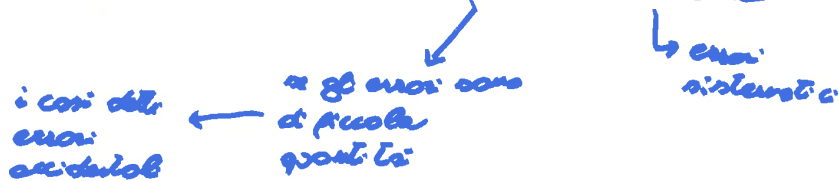
$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \rightarrow s_m^2 = \frac{s_x^2}{n}$$

$\downarrow$  varianza della media                       $\downarrow$  varianza della media

Si come  $s_x^2 = \frac{\sum v_i^2}{(n-1)}$   $\rightarrow$   $s_m^2 = \frac{\sum v_i^2}{(n-1) \cdot n}$  varianza corretta della media

Lo scarto quadratico medio della media è pari  $s = \sqrt{s_m^2}$

$\rightarrow$  mi dice quanto la misura sia precisa ed accurata



Esempio

- $\alpha = 35,6542$
- $35,6539$
- $35,6547$
- $35,6548$

$\rightarrow$  prima di fare i calcoli devo leggere attentamente (letto scritto)

$\rightarrow$  se non completamente sicuro e con grande errore allora è un errore.

$$\bar{\alpha} = 35,6544$$

$$\sigma_{\alpha}^2 = \frac{\sum v_i^2}{(n-1)n} = \frac{(42-44)^2 + (39-44)^2 + (47-44)^2 + (48-44)^2}{12} = 4,5 \cdot 10^{-8}$$

$\rightarrow$  varianza corretta della media

La binomiale o binomiale è:  $P = \binom{n}{i} p^i \cdot q^{n-i}$

composto n volte:  $p = \text{binomial}(i, n, p)$

Esempio

8 domande ciascuna con 4 scelte (1 giusta)

Per rispondere devo fare 5 corrette. Se trovo la corrette probabilità ho?

$x \left\{ \begin{array}{l} \text{corrette} \\ \text{non corrette} \end{array} \right. \quad n=8$   
 $\left. \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{corrette} = 5 \\ \text{non corrette} \end{array}$

sufficienza  $\rightarrow P = \binom{8}{5} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{8!}{5!3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.0231$

6 domande corrette  $\rightarrow P = \binom{8}{6} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$

$P = \binom{8}{7} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^7 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$

$P = \binom{8}{8} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8$

Normale (o Gaussiana)

Rappresentazione grafica della curva di densità

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

curva a campana in cui il valore centrale è contemporaneamente moda, media, mediana e a  $-\sigma$  e  $+\sigma$  si hanno due punti di flesso. Va da  $-\infty$  a  $+\infty$  e la sua area misura 1.

Densità della binomiale che è una curva discontinua

$Z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow$  valore standardizzato o normalizzato

$x = N(\mu, \sigma^2) \rightarrow z = N(0, 1)$

$E[z] = \frac{E[x] - [\mu]}{\sigma} = 0$

$\sigma_z^2 = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2 = 1$



Se ho  $x = \mu - \sigma$

$$\hookrightarrow z = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = \frac{-\sigma}{\sigma} = -1$$

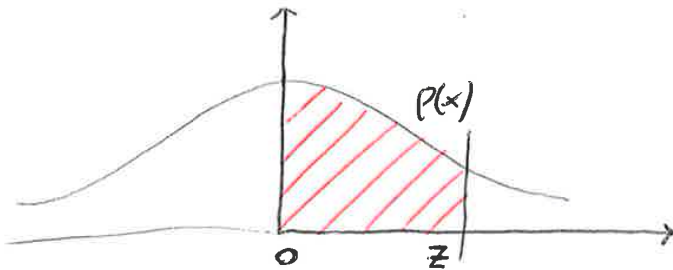
$x = \mu + \sigma$

$$\hookrightarrow z = \frac{\mu + \sigma - \mu}{\sigma} = +1$$

l'angolo prob.  $\mu - \sigma \leq x \leq \mu + \sigma$  è uguale a prob.

↓  
 $-1 \leq z \leq +1$

In tabella ho in 1<sup>a</sup> colonna valore  $z$  e poi prob.  
 $\hookrightarrow$  ti dà integrali tra 0 e  $z$



colonna rovesciata è prob. tra 0 e  $z$  e tra  $z$  e  $z$ ,  
 le altre colonne invece se lo  $z$  è la grande che  
 in più. Sono colonne che aggiungono due modi.

angolo  $p(-1 \leq z \leq 1)$

$\hookrightarrow$  quando  $p$  da tra 0 e 1, poi curva è  
 simmetrica e quindi area uguale. Raddoppio  
 il valore.

Tra  $z=0, z=1 \rightarrow A = 0.3413 \rightarrow$  poi coi tra  $-1, 1$

↓  
 $0.3413 \cdot 2 = 68.3\%$

Probabilità di cadere in un'intervallo  
 tra  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$ .  
 Più non può comportarsi con  
 Cauchy.

Facciamo ora  $z = \frac{\mu - 2\sigma - \mu}{\sigma} = -2 \rightarrow -2 \leq z \leq 2$

$$z = \frac{\mu + 2\sigma - \mu}{\sigma} = +2$$

angolo  $p(\mu - 2\sigma \leq x \leq \mu + 2\sigma) \rightarrow p(-2 \leq z \leq 2)$  quindi area.

$$\int_{-2}^{+2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{z^2}{2} dz$$

$\hookrightarrow$  variabile standardizzata

quindi  $A_0^2 = 0.4772$

$\hookrightarrow p = A_{-2}^2 = 95.4\%$

1/3



matrice  $A =$  matrice di righe

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 5 \\ 5x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 + x_2 = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix} \rightarrow x_1 \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{vmatrix} + x_2 \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{vmatrix}$$

matrice diagonale  
 $A * X = b$   
 vettore incognite  
 modo per righe per vedere sistema lineare  
 il sistema è lineare

modo per colonne di vedere sistema lineare

Qui  $x_1, x_2$  sono due più da dare a matrice  $A$  per ottenere il loro valore.

Sistema è risolvibile se  $x_1, x_2$  siano da combinazione lineare dei vettori colonna, per ottenere il vettore  $b$ . Se  $b$  è combinazione lineare, dare  $x_1, x_2$  sono i coeff. della combinazione lineare.

I vetti.  $a_1$  e  $a_2$  generano un piano, cioè piano lo chiamo spazio vettoriale  $\rightarrow$  loro spello come vetti. e multi. di vetti. in uno spazio.  $a_1, a_2$  generano un piano dello stesso vettoriale, generato da vetti. colonna di matrice  $A$ .  $b$  anche così d'u. che grazie in tale piano, così grazie in sottospazio vettoriale di vetti. colonne di  $A$ .

$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x-y\|^2 \rightarrow$  piano da qui per vedere se vetti. sono ortogonali in sottospazio.

$$\rightarrow (x_1^2 + \dots + x_n^2) + (y_1^2 + \dots + y_n^2) - 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)$$

Osservo

$$\rightarrow x^T y = y^T x = 0 = \begin{vmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{vmatrix}$$

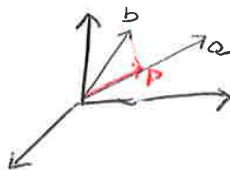
Ricordo a che se sistema ha soluzione, se  $b$  non è in tale spazio il sistema si dice incompatibile. Sistema lo risolvo con una d'una.

Ho vetti.  $a, b$  e voglio  $x$

↓  
 Sto col problema: quando sistema no risolvibile, mi si trova un vettore.

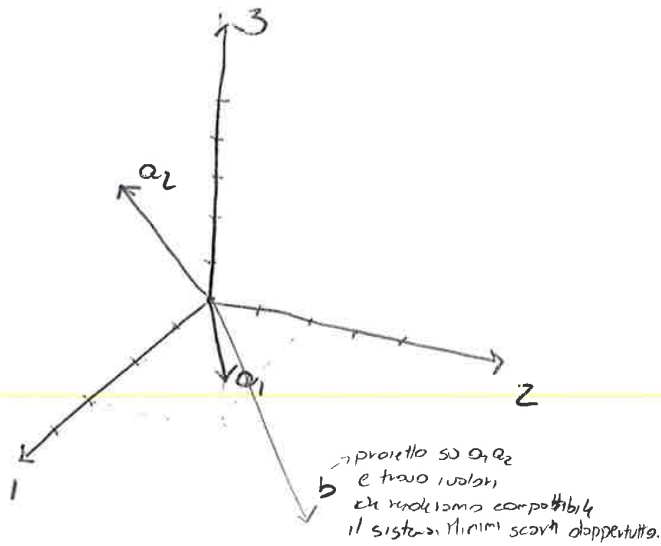
↳ Tale da lungo vettore  $p$  compatibile con  $a$  (che in altro diverso di  $a$ ) è cioè il più vicino possibile a  $b$ .

$P$  deve stare su  $a$  e possibilmente di  $b$  su  $a$ , così è il più vicino.



$P \rightarrow$  misura di metà secondo i minimi quadrati

Ora uno la costruzione:



- $A_0$        $b$
- $A^T$       equazioni
- $(A^T \cdot A)$       normale
- $(A^T \cdot A)^{-1}$       inversa della normale
- $A^T \cdot b$       vettore dei termini noti normalizzati

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} \cdot A^T b$$

Applicazioni → \* stima di parametri di modelli  
Errori                      \* compensazione rete di livellamento

\*  $\begin{matrix} t_1 & T_1 \\ t_2 & T_2 \\ \vdots & \vdots \\ t_m & T_m \end{matrix}$        $T = \hat{a} + b \cdot t$   
 $T_1 = \hat{a} + b \cdot t_1$   
 $\vdots$   
 $T_m = \hat{a} + b \cdot t_m$

$m$  eq. in 2 incognite      → perché qd1 o sempre 1 i coll.

$b = y = \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_m \end{vmatrix}$        $A = \begin{vmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{vmatrix}$   
valori delle osservazioni

$\hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{a} \\ b \end{vmatrix}$

30-3-17

Esercizi sui minimi quadrati Lineari

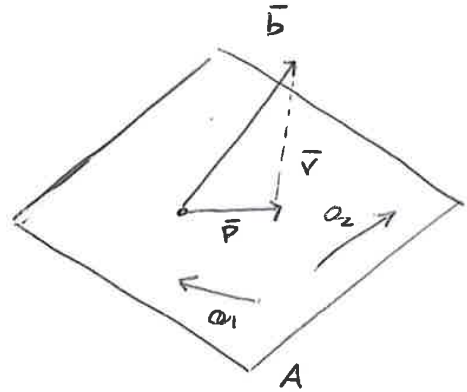
- Stima parametri incogniti di un modello ①
- Compensazione di una rete ottica ②

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 4.2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4.6 \\ \hline & & & & 5.6 \\ & & & & 5.8 \end{array} \right| = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{c} 20.20 \\ 33.20 \end{array} \right| = T_n \\ (2 \times 4) \quad (4 \times 1) \quad (2 \times 1) \end{array}$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = N^{-1} \cdot T_n = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 20.20 \\ 33.20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.18 \\ 0.58 \end{bmatrix}$$

$\hat{v} = y_0 - \hat{y}$ ; vettore degli scarti.  
Una volta ottenuto  $\hat{x}$ , lo richiamo nel sistema e calcolo  $\hat{y}$ :  $\hat{y} = A\hat{x}$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4.18 \\ 0.58 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.18 \\ 4.76 \\ 5.34 \\ 5.92 \end{bmatrix}$$



$$\hat{v} = \begin{bmatrix} 4.2 - 4.18 \\ 4.6 - 4.76 \\ 5.6 - 5.34 \\ 5.8 - 5.92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ -0.16 \\ 0.26 \\ -0.12 \end{bmatrix}$$

Tutti questi vettori non sono rappresentabili perché sono in  $\mathbb{R}^4$ .

$\hat{\sigma}_0^2$ ; fattore di proporzionalità: varianza stimata dell'intero procedimento

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum v_i^2}{m-n} = \frac{V^T \cdot V}{r}$$

(m-n); ridondanza

$$\hat{\sigma}_0^2 = 0.034, n=2$$

Matrice di varianza-covarianza

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot N^{-1} \rightarrow \text{La dm. con legge di prop. varianza}$$

$$C_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_a^2 & \hat{\sigma}_{ab} \\ \hat{\sigma}_{ba} & \hat{\sigma}_b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0398 & -0.0162 \\ -0.0162 & 0.0108 \end{bmatrix}$$

Matrice invertibile e simmetrica

↓  
è uguale alla sua trasposta

$$\begin{aligned} \rightarrow a_0 &= \hat{a} \pm \hat{\sigma}_a \\ b_0 &= \hat{b} \pm \hat{\sigma}_b \end{aligned}$$

$$N^{-1} = \frac{1}{4-1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.6667 & 0.3332 \\ 0.3332 & 0.6667 \end{vmatrix}$$

$$T_n = A^T T = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1.5734 \\ -0.4205 \\ -1.1526 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.9939 \\ 0.7321 \end{vmatrix}$$

(2x3)                      (3x1)

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} \hat{Q}_2 \\ \hat{Q}_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1.5733 \\ 1.1527 \end{vmatrix} = N^{-1} \cdot T_n$$

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum v_i^2}{m-n} = \frac{v^T \cdot v}{r} = 3 \cdot 10^{-8}$$

In questo caso devo introdurre una matrice di pesi se le lunghezze delle linee diellazione sono diverse, se le di. diellazione non omogenee. Poi devo normalizzare la rete → > errori propagati

> peso o. linea diellazione più corta.

Il peso è inversamente proporzionale alla varianza e direttamente proporzionale alla precisione →  $P_L = \frac{K}{\sigma^2}$

Nell'esercizio ① non ho introdotto questa matrice perché ogni osservazione è fatta dallo stesso osservatore in laboratorio.

$P_L = \frac{K}{L}$     L; lunghezza linea diellazione

$\Delta_{AB} = l_A - l_B$     Catena diellazione,  $AB_{max} = 100$  [m].

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = \sigma_B^2 = \sigma_{l_A}^2 + \sigma_{l_B}^2 = 2\sigma^2 \quad \begin{matrix} \text{La precisione della catena} \\ = 2(\text{precisione delle catene}) \end{matrix}$$

↓  
(-1)<sup>2</sup>

$$L = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$\sigma_L^2 = \sigma_{b_1}^2 + \sigma_{b_2}^2 + \dots + \sigma_{b_n}^2 = n\sigma_b^2 = \frac{L}{100} 2\sigma^2$$

$$\sigma_L^2 = KL$$

↓  
È costante nell'intervallo di unaellazione

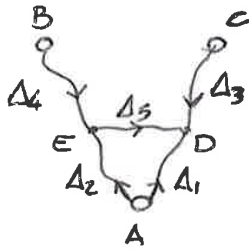
La precisione di una catena è data da:  
• rapporto livello - stadia

↓  
sistema di compensazione

↳ tipo e grado di controllo

$$P_L = \frac{K}{\sigma_L^2} = \frac{K}{L}$$

Esercizio



o; quote note  
; quote incognite

5 linee di collegamento, 2 nodi incogniti  
m=5  
n=2

Q<sub>A</sub> = 10.021 [m]  
Q<sub>B</sub> = 10.321 [m]  
Q<sub>C</sub> = 11.002 [m] } quote note

$\Delta_1 = 1.978 [m]$      $e_1 = 1.02 [km]$

$\Delta_2 = 0.732 [m]$      $e_2 = 0.97 [km]$

$\Delta_3 = 0.988 [m]$      $e_3 = 1.11 [km]$

$\Delta_4 = 0.420 [m]$      $e_4 = 1.07 [km]$

$\Delta_5 = 1.258 [m]$      $e_5 = 0.89 [km]$

Ora imposto problema. In funzione di  $e_i$ , mi sono inventate potenze alle sezioni o linee di collegamento.

$P_i = \frac{K}{\sigma_i^2} = \frac{k_i}{L} \rightarrow$  fattore di proporzionalità  $\sigma_i^2 \geq 1$

$P = \frac{1}{e_1} \sqrt{\frac{L}{k_1}}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{e_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{e_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{e_5} \end{bmatrix}$$

Ogni eq. avrà suo valore a seconda di  $e_i$ .

Matrice diagonale

Faccio:

. A

. A<sup>T</sup>

.  $N = A^T \cdot P \cdot A$  la normale contiene anche il peso

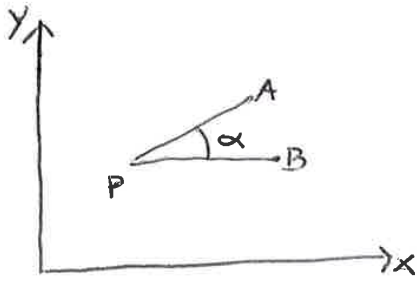
. N<sup>-1</sup>

.  $T_n = A^T \cdot P \cdot T$  i cui nodi normalizzati anche gli i pesi.

$\hat{x} = N^{-1} \cdot T_n$  come sempre, come le relazioni. Po pesi solo se linee di collegamento uguali.

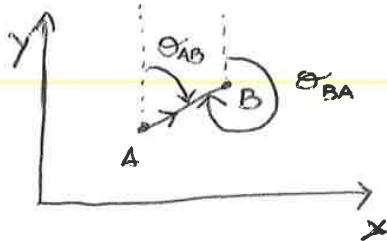
$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{1.02} & & & & \\ & \frac{1}{0.97} & & & \\ & & \frac{1}{1.11} & & \\ & & & \frac{1}{1.07} & \\ & & & & \frac{1}{0.89} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.980 & & & & \\ & 1.031 & & & \\ & & 0.901 & & \\ & & & 0.935 & \\ & & & & 1.124 \end{vmatrix}$$

18



Angolo in topografia  $\rightarrow$  differenza tra due angoli di direzione  $\alpha$ .

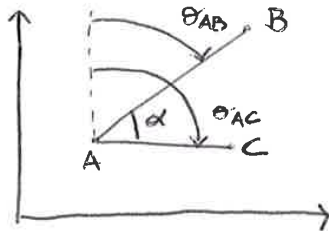
Espressi in gon, ma conti devono essere i rad.



$\theta_{AB} \neq \theta_{BA}$

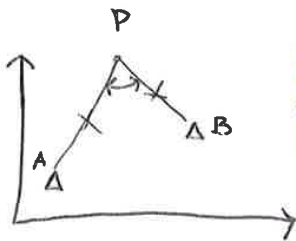
Angolo di direzione  $\rightarrow$  angolo misurato nel piano quando il as y in punto iniziale A di direzione di segmento AB.

$$\theta = \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \quad \text{Angolo di direzione}$$



$$\alpha = \theta_{AC} - \theta_{AB}$$

$$\alpha = \arctg \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} - \arctg \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



$\left\{ \begin{array}{l} dAP \\ dPB \\ \alpha \end{array} \right.$  incognite sono le coordinate da dove a  $x_P, y_P$  ottimizzi

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = p_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 = p_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = p_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right.$$

Non sono funzioni lineari, e dove l'ottimizzazione partendo da quei limiti.

$$y_1 = p_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \delta \tilde{x}_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_2} \delta \tilde{x}_2 + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \delta \tilde{x}_n$$

costante a seconda prima

$$y_m = p_m(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n) + \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \delta \tilde{x}_1 + \frac{\partial p_m}{\partial x_2} \delta \tilde{x}_2 + \dots + \frac{\partial p_m}{\partial x_n} \delta \tilde{x}_n$$

In termini notevoli:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \tilde{y}_1 + \frac{\partial p_1}{\partial x_1} \delta \tilde{x}_1 + \dots + \frac{\partial p_1}{\partial x_n} \delta \tilde{x}_n \\ y_2 = \tilde{y}_2 + \frac{\partial p_2}{\partial x_1} \delta \tilde{x}_1 + \dots + \frac{\partial p_2}{\partial x_n} \delta \tilde{x}_n \\ \vdots \\ y_m = \tilde{y}_m + \frac{\partial p_m}{\partial x_1} \delta \tilde{x}_1 + \dots + \frac{\partial p_m}{\partial x_n} \delta \tilde{x}_n \end{array} \right.$$



$$T = |y_0 - \tilde{y}_0|$$

$$T = \begin{cases} 14.142 - 10\sqrt{2} \\ 22.361 - 10\sqrt{5} \\ 10.002 - 10 \end{cases} = \begin{vmatrix} -1.3562 \\ 3.2023 \\ 20.0000 \end{vmatrix} \cdot 10^{-4}$$

$$\hat{x} = \hat{\xi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_p}{\partial y_p} \end{vmatrix}$$

Faccio da  $j$  (equivalente nome di lungo, owa no. e di coefficienti della incognita).

$$A = j = \begin{pmatrix} \frac{\partial d_1}{\partial x_p} & \dots & \dots \\ \frac{\partial d_2}{\partial x_p} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial x_p} = \frac{2(\tilde{x}_p - x_A)}{2\sqrt{(\tilde{x}_p - x_A)^2 + (\tilde{y}_p - y_A)^2}} = \frac{\tilde{x}_p - x_A}{\tilde{d}_{AP}} \rightarrow \text{scelle la derivata di } d_1$$

$$\frac{\partial d_2}{\partial y_p} = \frac{2(\tilde{y}_p - y_A)}{2\sqrt{(\tilde{x}_p - x_A)^2 + (\tilde{y}_p - y_A)^2}} = \frac{\tilde{y}_p - y_A}{\tilde{d}_{AP}}$$

Faccio con  $\mu$   $d_{AP}$  e  $d_{BP}$

$$A = j = \begin{vmatrix} \frac{\tilde{x}_p - x_A}{\tilde{d}_{AP}} & \frac{\tilde{y}_p - y_A}{\tilde{d}_{AP}} \\ \frac{\tilde{x}_p - x_B}{\tilde{d}_{BP}} & \frac{\tilde{y}_p - y_B}{\tilde{d}_{BP}} \\ \frac{\tilde{x}_p - x_C}{\tilde{d}_{CP}} & \frac{\tilde{y}_p - y_C}{\tilde{d}_{CP}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{10}{10\sqrt{2}} & \frac{10}{10\sqrt{2}} \\ \frac{-20}{10\sqrt{3}} & \frac{10}{10\sqrt{3}} \\ \frac{10}{10} & \frac{0}{10} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Da ora è come sempre.

$$A^T = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$N = A^T \cdot A = \begin{vmatrix} 2.3 & 1 \\ 0.1 & 0.7 \end{vmatrix} \quad \det = 1.6$$

$$N^{-1} = \begin{vmatrix} 0.7 & -0.1 \\ -0.1 & 2.3 \end{vmatrix} = \frac{1}{1.6} = \begin{vmatrix} 0.4375 & -0.0625 \\ -0.0625 & 1.4375 \end{vmatrix}$$



# GEODESIA

11-6-17

$R_T \approx 6400 \text{ [km]}$

Escentricità  $\approx 0.8 \text{ [km]}$

Horizon  $\approx 11 \text{ [km]}$   $\rightarrow$  Po grand' miltaria: spazio vago terrestre.



Punto approssimazione sup. terrestre, due linee conto della gravità. La fine che c'è in mente è il geode

$\rightarrow$  app. equidistante del corpo della gravitazione.

Geodesia si occupa di ricerca app. di riferimento Punto fisico app. terrestre e solo mat. Due forze predominanti sono:

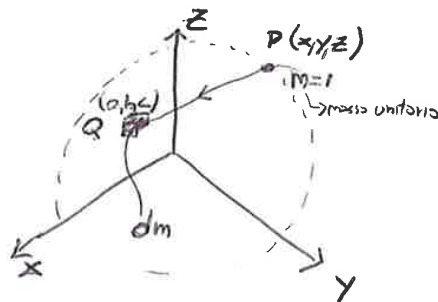
- . forza attrazione newtoniana
- . forza centrifuga

$\downarrow$   
In prima approssimazione al punto P di sup. terrestre.

$$F = G \frac{m m'}{r^2}$$



Prendo una infinitesima dm e punto P con una di terra M, punto origine geocentrico



$$dF = G \frac{dm \cdot 1}{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

$$f = m \cdot a = r \cdot \omega^2 r$$

$\rightarrow$  centrifuga       $\downarrow$  distanza tra P ed asse terrestre

Per cui la forza di attrazione gravitazionale è come da due contributi  $\rightarrow \vec{g} = \vec{F} + \vec{f}$

Gravità nell'intero corpo di forze conservative, linee di forza dove  $\vec{g}$  rappresenta direzione del corpo. Se conservativo

$$\vec{g}(x, y, z)$$

conservativo

$$W(x, y, z)$$

potenziale

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = g_y$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g_z$$

$$\vec{g} \times d\vec{r} = dW$$

$$\vec{g} = \text{grad} W$$

Azior  $W = \underbrace{V' + v'}_U + T$

per cui  $\rightarrow W = U + T$

"U" potenziale normale

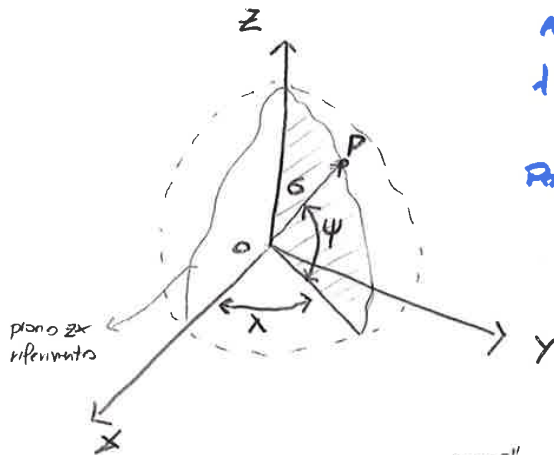
U da rotazione in due angoli e grado 2 in  $r$  (potenziale per una curvatura)

Deriva dal fatto di superficie e di rotazione.

U corrisponde ad equazione sferoide Lamé,  $\forall$  grado

Sviluppato in due angoli poli (depressione = 0, sfere) parte superficie e di rotazione  $\rightarrow$  da coordinate cartesiane generali a poli generali

$(x, y, z) \rightarrow (\sigma, \psi, \lambda)$



Azior xy  $\rightarrow$  equatore

$\lambda \rightarrow$  angolo in piano rispetto ad un altro

Forma di U:

$$\begin{cases} x = \sigma \cos \psi \cos \lambda \\ y = \sigma \cos \psi \sin \lambda \\ z = \sigma \sin \psi \end{cases}$$

Devo generalizzare equazione azior:

$$U = \frac{GM}{\sigma} \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{C-A}{M} (1 - 3 \sin^2 \psi) \right] + \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{cost.}$$

$\begin{matrix} I_z & I_x = I_y \\ \uparrow & \uparrow \\ C-A & \end{matrix}$

equazione dello sferoide (termini meccanici + geometrici)

momenti di inerzia e massa Terra

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

$\rightarrow$  in coordinate polari

eq. sferoide (solo termini geometrici, infatti)

trasmissione equatoriale

o bene per ellissoide e sferoide

$\alpha =$  schiacciamento:  $\frac{a-c}{a} \rightarrow$  polare

Si vuole arrivare ad ellissoide rotazione per ploidia e vedere che a mano di una costante sferoide  $\approx$  ellissoide.

Eq. ellissoide rotazione

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

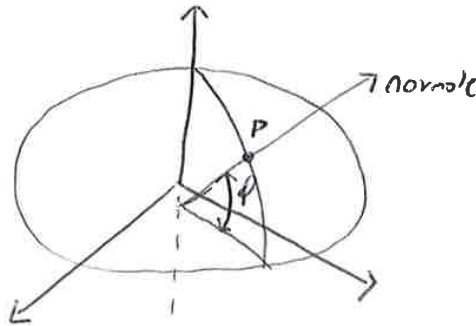
$\begin{matrix} \rightarrow \text{equatore} & \rightarrow \text{polare} \end{matrix}$

e voglio dimensioni di grado a

$$\sigma = a(1 - \alpha \sin^2 \psi)$$

molteplice per  $a^2 \rightarrow x^2 + y^2 + \frac{a^2}{c^2} z^2 = a^2$

introduco  $\alpha = \frac{a-c}{a} = 1 - \frac{c}{a} \rightarrow \frac{c}{a} = 1 - \alpha$



φ angolo tra normale a P e piano equatoriale.  
 ↳ su ellissoide  
 P, λ → coordinate geografiche ellissoidiche

Φ, λ → coordinate geografiche geodetiche  
 ↳ latitudine e longitudine su geode

Approssimazione tra geoida e ellissoide e ellipsoide  
 $\alpha \frac{1}{g^2} \rightarrow 6 \cdot 10^{-28}$  aumento da ellissoide

20-6-17

Pomaggio da geoida a ellissoide, errore di  $\frac{1}{g^2} \rightarrow 6 \cdot 10^{-28}$ . Campo gravitazionale ha rotazione pari a zero. Ellissoide di rotazione simile ellissoide.  
 Da ellissoide ad ellipsoide errore di  $\alpha^2$ , con  $\alpha$ ; adiacenza Geoida lo stesso per l'ellipsoide, nome del geoida è lo verticale. Ellipsoide usato per la planimetria.

sviluppato poi con geode ell. nel piano della carta.

Differenze tra ellissoide e geoida

Si ha costo di  $\frac{W}{g} \sqrt{1+v} = \underbrace{V'}_{\text{potenziale normale (su ellissoide)}} + \underbrace{v+T}_{\text{potenziale normale (anomalo)}}$

I modelli del geoida servono di riferimento o definire differenze tra geoida e ellipsoide.

Si costruisce l'ellipsoide. Insieme funzioni in forma implicita e eq. di rotazione:  $F(x, y, z) = 0, z = p(x, y), p(z) = x^2 + y^2$

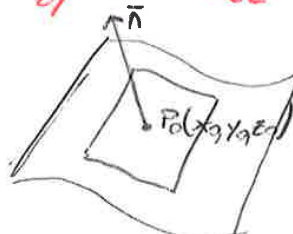
Per cui eq. ellipsoide  $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$

↳ perché ellissoide è sup. di rotazione gli un sezione meridiana

eq. piano tg superficie → piano da quella punto 3D  $ax+by+cz-d=0$  in P<sub>0</sub>

↳  $(x-x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z-z_0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$  in un generico punto questa

I coeff. del piano sono le derivate parziali.



Ricordo di cos prop. a derivate funzioni in zone d'angolo, r, e qoi.

$$\cos \varphi = k \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = k \frac{\partial F}{\partial z}$$

↘ sin φ

per cui  $\cos \varphi = k \frac{\partial r}{\partial z}$

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi = k \frac{\partial z}{\partial r}$$

Anno di  $\tan \varphi = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial r}} = \frac{e^2}{r} = \frac{r}{c^2} \frac{e^2}{r} \rightarrow z = r \frac{e^2}{c^2} \tan \varphi$

$$\frac{a^2 - c^2}{e^2} = \frac{e^2}{c^2} = \text{eccentricità} \quad 1 - \frac{c^2}{a^2} = e^2 \rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 1 - e^2$$

$z = r(1 - e^2) \tan \varphi$  il valore di z legato al punto in eq. ell. in meridiana

$$\frac{r^2}{e^2} + \frac{r^2(1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi}{c^2} = 1$$

↓ moltiplico tutto per  $a^2$

$$r^2 + r^2 \frac{e^2}{c^2} (1 - e^2)^2 \tan^2 \varphi = a^2$$

$$r^2 + r^2 \frac{1}{(1 - e^2)} (1 - e^2)^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} = a^2 \rightarrow r^2 \left[ 1 + (1 - e^2) \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right] = a^2$$

$$\rightarrow r^2 \left[ \frac{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right] = a^2 \rightarrow r^2 \left[ \frac{1 - e^2 \sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right] = a^2$$

$$\rightarrow r^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \rightarrow r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

Nota bene anche r oltre z.

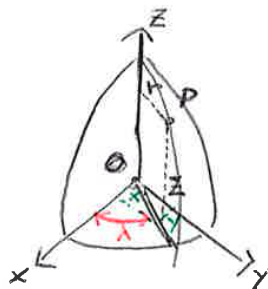
$$r = \frac{a \cos \varphi}{w}$$

raggio sezione meridiana

→ semiasse maggiore ellissoide

$$z = r(1 - e^2) \tan \varphi = \frac{a \cos \varphi}{w} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} (1 - e^2)$$

Caso omnia x, y.



$$\left\{ \begin{aligned} z &= \frac{a \sin \varphi (1 - e^2)}{w} \\ x &= r \cos \varphi = \frac{a \cos \varphi \cos \varphi}{w} \\ y &= r \sin \varphi = \frac{a \cos \varphi \sin \varphi}{w} \end{aligned} \right.$$

φ, λ → coord. ellinoidale geografiche.

x, y, z → coord. " geocentriche cartesiane.

infente ad O (baricentro terrestre)

All'occorrenza!

Quanto grande punto è o il superficie.

24

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} \rightarrow \lambda = \arctg \frac{y}{x}$$

$\frac{a}{W} = \frac{RN}{W}$   
 ↳ raggio di curvatura di una sezione sull'ellissoide

poi: raggio  $r \rightarrow r = \sqrt{(x^2+y^2)} = \sqrt{(N+h)^2 \cos^2 \varphi \cos^2 \lambda + (N+h)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda} =$   
 $= \sqrt{(N+h)^2 \cos^2 \varphi} \quad r = (N+h) \cos \varphi$

$$\frac{z}{r} = \frac{[N(1-e^2)+h] \sin \varphi}{(N+h) \cos \varphi} = \frac{2NR(1-e^2) \sin \varphi}{(N+h) \cos \varphi} \left(1 - \frac{e^2 N}{(N+h)}\right) \operatorname{tg} \varphi$$

in una approssimazione  $\varphi \approx \arctg \frac{z}{r}$

trovando  $\varphi$ , calcolando il raggio  $N$  e la quota  $h$ .

$N = \frac{a}{W}$   
 $\hookrightarrow \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$

$h = x \cos \varphi \cos \lambda - N$

trovando  $\lambda$ , poi da  $x, y, r$ ,  
 equivo  $\frac{z}{r} \rightarrow$  ho  $\varphi$  e  $\lambda$  e  $r$

con  $N$  e  $h$ . Dato  $z$  e  $r$ .  
 a quando i risultati convergono.

27-6-17

Sferoide e dimostrazioni

Punto su punto  $P$  sulla superficie e presa una norma  $a$ , quello canonico.

$e^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' \cos \theta$   
 ↳ raggio vettore di  $P$       ↳ raggio tra i due raggi vettori  
 ↳ distanza tra i due punti      ↳ raggio vettore di  $a$

metto in evidenza  $\sigma^2$ :

$$e^2 = \sigma^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) \cos \theta\right)$$

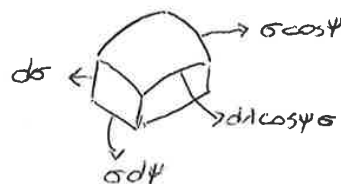
o esprimo  $x, y, z$  in coord. polari e cartesiane

$$e^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = \sigma^2 + \sigma'^2 - 2\sigma\sigma' (\sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda - \lambda'))$$

confrontando le due espressioni di  $e^2$  trovo il valore di  $\cos \theta$  da sostituire nell'espressione del potenziale gravitazionale

$$V(P) = \frac{G}{\sigma} \iiint \frac{\rho \sigma'^2 \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' d\sigma'}{\left[1 + \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right)^2 - 2 \left(\frac{\sigma'}{\sigma}\right) \cos \theta\right]^{3/2}}$$

ho espresso  $dV$  come  
 $dV = \sigma'^2 \cos \varphi' d\varphi' d\lambda' d\sigma'$





Il datum della geodesia classica è l'ellipsoide orientato localmente. Si è usato quello di Hayford per molto. Oriziale significa rendere tangente al geode in una certa località (con una rototraslazione). Così facendo diminuisce la deviazione della verticale (però la verticale coincide e l'ordinato del geode di conseguenza). Orientare e eliminare deviazione della verticale.

Si è fatto con fine al GPS (GPS usa invece ellipsoide geocentrico). L'orientazione la si fa in osservazioni astronomiche: però si vanno a definire con osservazioni astronomiche la  $\varphi$  e  $\lambda$  del geode e la si fanno coincidere con  $\varphi, \lambda$  dell'ellipsoide.

Per azimut si intende l'angolo tra meridiano in un punto e curva che passa in quel punto (geodetica)

↳ come in ogni punto la  $\perp$  alla curva è anche  $\perp$  alla superficie ed è il percorso più breve.

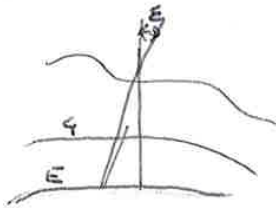
Nella geodesia attuale si è una terra geocentrica solidale alla Terra da quale è mosso l'ellipsoide geocentrico.

2-5-17

$$h = H + N$$

$N$ ; <sup>per una lunghezza</sup> *ondulazione del geode*

In tempo la deviazione della verticale doveva essere piccola. Con GNSS non era importante. È sempre in angolo, di pochi ".



$$\begin{cases} \xi = \varphi - \varphi' & \text{meridiano} \\ \eta = (\lambda - \lambda') \cos \varphi & \text{parallelo} \end{cases}$$

$\downarrow$  *geode*                       $\downarrow$  *ellissoide*

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \varphi}$$

$$\eta = -\frac{1}{R \sin \varphi} \frac{\partial N}{\partial \lambda}$$

ma  $\xi, \eta$  e lo sfericismo del geode una modo gravimetrico.

$R, R_N$  sono raggi di curvatura di centri normali dell'ellipsoide.  
 $R$ ; raggio curvatura meridiano

$R_N$ ; <sup>o trasversale</sup> *normale*, raggio di sezione  $\perp$  al meridiano (non parallelo!)

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad \text{Borns}$$

Trasf. tra sistemi riferimenti, un modo più vasto è rotolarla con un fattore di scala → 7 parametri. Di nome usato sistema di Helmer

$$X_2 = T_0 + \lambda R X_1$$

↳ matrice di rotazione  
 ↳ fattore di scala

Fattore di scala può variare nel tempo da un'epoca ad un'altra. Non ha due sistemi globali: ETRF 99, ETRF 2000. Più complesso se lo fanno in un altro mt. → il piano non aveva h, piano ellittico in planimetrica, ma ellittico altimetrico analitico del geoid.

### Ellissoide

Si parl. di sezioni normali alla superficie. Ogni piano taglia ellissoide secondo una linea curva detta sezione normale. Ogni sezione normale è individuata da un azimut.

↳ Angolo tra meridiano e sezione normale.

Hb due sezioni normali principali: con arco raggio curvatura minimo e massima. Sezioni con  $R_N$  è sezione ⊥ al vettore, che ha  $\rho$ .

Tutte le sezioni da non sono normali dove delle oblique → perpend. a.

sezione normale principale con raggio curvatura minimo  $\rho$ .

La tg in P al parallelo è orientata nel piano della sezione normale.

Sezione meridiana:  $\rho = \frac{a(1-e^2)}{w^3}$

Curvatura normale:  $R_N = \frac{r}{\cos \varphi} = \frac{a}{w}$

Sezione normale di Azimut  $\alpha$  (Euler):  $\frac{1}{R_\alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\rho} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_N}$

↳ angolo  $\alpha$  tra P. e sezione di sezione normale di azimut

Da eq. param. di ellissoide

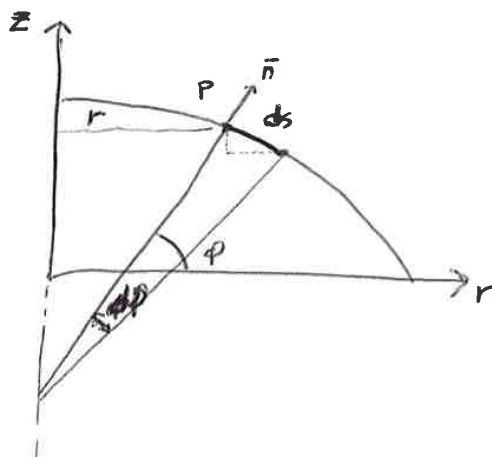
$$\begin{cases} r = \frac{a \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \end{cases} w$$

$ds = \rho d\varphi$

↳ raggio del meridiano

$ds^2 = dz^2 + dr^2$  io lo usò r e z

sto calcolando raggio di curvatura  $\rho$ , del meridiano.



22



## Geodetica

Spino è il percorso più breve sulla superficie. Come in cui la normale alla superficie è normale alla curva stessa.

Le nostre osservazioni in campo vengono fatte con strumenti "alti", cioè paralleli alla normale al geoide in quel punto. → L'angolo o la misura osservata normale al geoide, ma poi deve riferire a geodetica dell'ellipsoide, perché è unica.

**Teorema di Clairaut**  $r \sin \alpha = \text{cost.}$  (lungo una geodetica)

Effettuando un percorso lungo la geodetica il prodotto  $r \sin \alpha$  rimane costante in ogni punto.

Coseni direttori normali all'ellissoide:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial z}$$

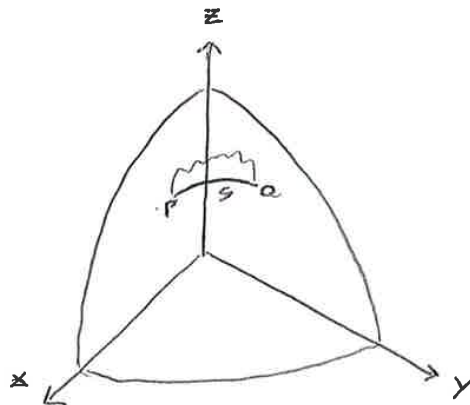
$$s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^2}; \text{ lunghezza dell'arco di geodetica}$$

dim:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \frac{a^2}{c^2} - a^2 = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 2y$$



$$s \begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases}$$

$$R \alpha = \frac{dx}{ds}$$

$$R \alpha = \frac{dy}{ds}$$

$$R \alpha = \frac{dz}{ds}$$

; coseni direttori della normale alla geodetica

**Equazione della geodetica**

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial y}}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\frac{\partial p}{\partial z}}{\frac{dz}{ds}}$$

Per semplicità considero solo i termini x, y. Sarà fatto analogo anche per z.

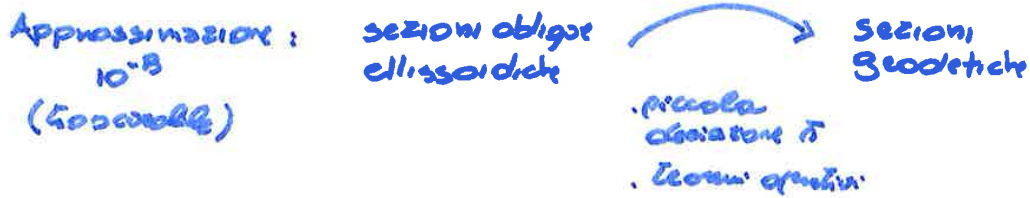
## Teoremi della geodesia operativa

Corso geodetico / topografico

Teorema di Legendre

Si lavorano sul geode e poi lo si spiana con l'ellipsoide.  
 La deviazione della normale è piccola al ordine di grandezza degli errori di una in stazione → ipotesi di lavoro su sezioni normali all'ipotesi ellissoidica, ma in realtà lavorano in sezioni oblique.

Vogliamo lavorare in sezioni geodetiche facendo approssimazioni con i termini quadratici, se otteniamo la precisione da molti termini non si occorre di grandi approssimazioni.



"glide"  
 con l'apice "i"; lavora nelle sezioni normali.

Senza l'apice; lavora in sezioni geodetiche

Sviluppi in serie di potenze del teorema di Front, orientati.

9-5-17

Conoscenza spaziale delle superfici; quindi curvatura, iperbolica e curva ellittica.



La curva è quella di Riemann. Il piano  $\perp$  a una curva in un punto è il piano perpendicolare alla tangente in quel punto. Tra tutte le rette  $\perp$  a quella  $\gamma$  nel punto, vi è una sola in direzione di piano normale e quello osculatore, è detta normale principale.

Geodetica è curva su surf. dove normale principale e normale alla surf. coincidono. I curv. direttori della normale principale:

$$\frac{x-x_0}{ds^2}, \quad \frac{y-y_0}{ds^2}, \quad \frac{z-z_0}{ds^2}$$

I curv. direttori sono proporzionali a derivati secondi di espressione parametrica della curva.

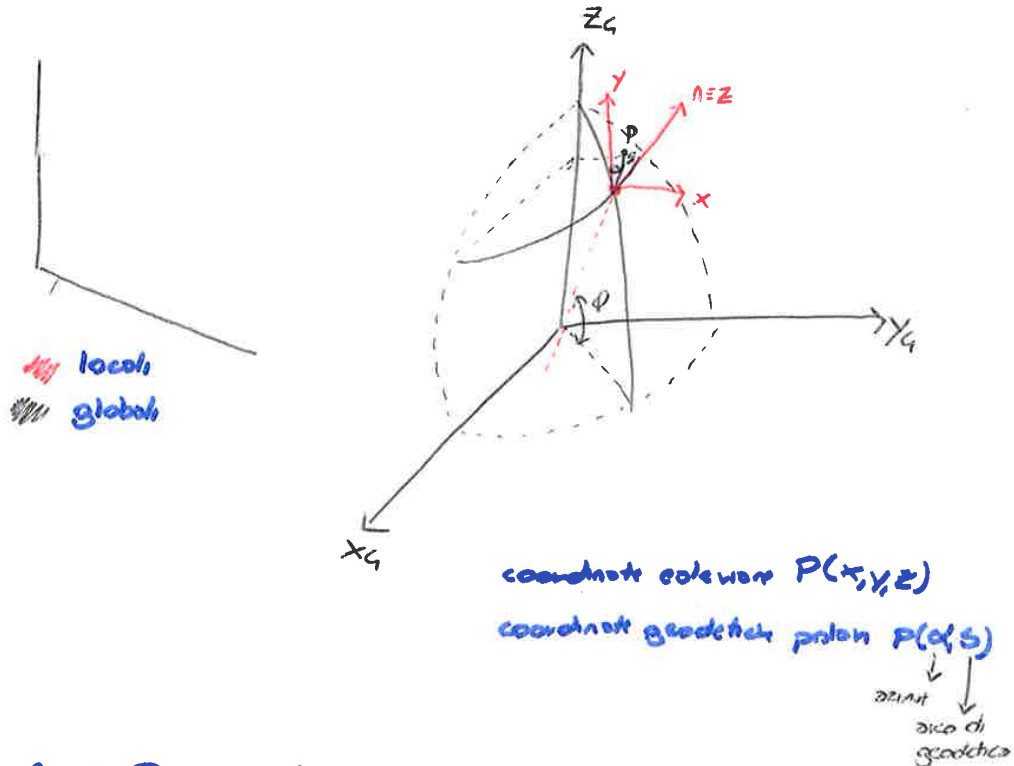
Le curve principali sono:

- . piano; - normale
- oblique
- . gobbe; non contenute in un unico piano

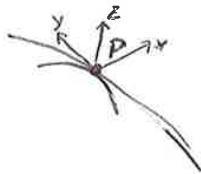
24

In campo topografico sono ammissivi ad ellenoide di sfera  $T_3$ , qui sarà 15-20 [km].

Legando due di un campo geodetico: li angoli e sono calcolati come in geometria piana.



Con formule di Poisson-Weingarten le coordinate cartesiane di P in funzione delle coordinate geodetiche punto. So che locale pseudo in piano



con origini e assi normali, poi in pseudo in altro, con sistemi coordinate normali del quadrato, in uno di e' lo si trova e l'altro sulle ellenoide. So che locale e punto di riferimento sono rappresentati. Qui no coordinate, ma le altre la costante meglio.

$$\begin{cases}
 x_s = s \sin \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{6RN} \right\} \\
 y_s = s \cos \alpha \left\{ 1 - \frac{s^2}{6RN} \right\} \rightarrow \text{so che locale} \\
 z_s = -\frac{s^2}{2\sqrt{RN}}
 \end{cases}$$

Faccio poi differenza tra  $x, y, z$  su sfera ed ellenoide.

Faccio i calcoli: vedo che differenza di 27 [mm] su 100 [km] e poi con altri gradi. Per uno di secondi, accumuliamo le differenze. Quindi l'errore relativo sarà  $\frac{27}{100 \cdot 100} = 2.7 \cdot 10^{-6}$  e ci sta, perché in stazionamento la precisione è di  $10^{-6}$  circa.

Fin due differenze < errori strumentali  $\rightarrow$  sostituisce piano locale  $R \cdot \sqrt{RN}$  ad ellenoide. Questo punto è il campo geodetico con le calcoli si risolvono.

$$\left(\frac{e}{R}\right)^4 \approx 10^{-6}$$

$$e^4 = (6378)^4 \cdot 10^{-6}$$

$$e = \sqrt[4]{\dots} \approx 200 \text{ [mm]}$$

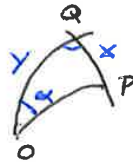
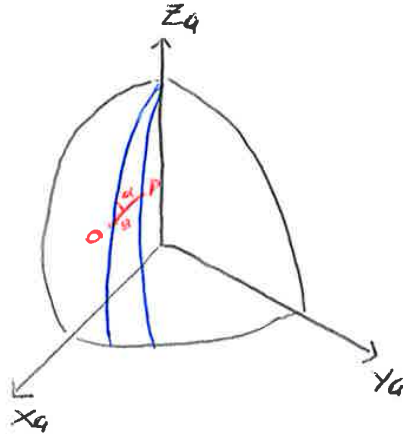
esso il caso del punto  
 infinitesimo in un ret. locale  
 con termini geometria piana.

11-5-17

Coordinate geodetiche polari rettangolari

$$(\alpha, s) \rightarrow (x, y)$$

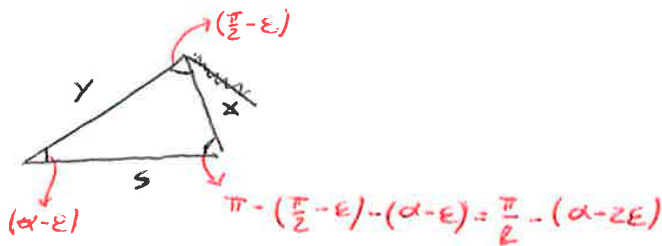
coordinate locali si è pu pensare la  
 due parti nella sp. terrestre.



A sua volta viene montato +  
 ed indicato per il punto O e  
 inteso come in Q

$(x, y) \rightarrow$  coordinate geodetiche  
 rettangolari

$(\alpha, s) \rightarrow (x, y)$  Applico il teorema di Legendre: angolo sferico  $\rightarrow$  angolo piano



Applico teorema di seni:

ma, punto applico  
 la trigonometria  
 piana.

$$\frac{x}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha - 2\epsilon)\right)} = \frac{s \sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \epsilon\right)}$$

$$\frac{x}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{s}{\cos \epsilon}$$

$\frac{e}{R}$ ; quantità piccola di 1° ordine

Il teorema di Legendre si applica per errori di  $\left(\frac{e}{R}\right)^4$

$3\epsilon = \frac{s}{R^2}$  è di secondo ordine  $\Rightarrow \epsilon^2$  è un errore di quarto ordine  $\rightarrow$  trascurabile\*

$$\cos \epsilon \approx 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + \dots \Rightarrow \cos \epsilon \approx 1$$

$$\sin 2\epsilon \approx 2\epsilon$$

$$\sin \epsilon \approx \epsilon$$

$$\frac{x}{\sin(\alpha - \epsilon)} = \frac{y}{\cos(\alpha - 2\epsilon)} = \frac{s}{\cos \epsilon}$$

## CARTOGRAFIA

Non sono sviluppi superficie ellittoidi su piano, a causa del raggio di curvatura  $c = \frac{1}{R_n}$ ,  $R_n = \int_0^{2\pi} R_p(N) d\alpha$

Formule di Eulero:  $\frac{1}{R(\alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}$

per ellittoidi  $R_n = \frac{1}{2\pi} \int \frac{1}{\frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}} = \sqrt{R_1 R_2} \rightarrow R_n = \sqrt{R_1 R_2}$

Possiamo sviluppare solo con deformazioni (angolari; lineari ed angoli) a meno di fattori di scala.

$m_e = \frac{ds_c}{ds_c}$  Rapporto di deformazione lineare

Se  $m_e = 1 \rightarrow$  carta equidistante (ma una carta non può mai essere totalmente equidistante perché se lo fosse potrebbe svilupparsi. Esistono però linee di equidistanza)  
 elemento dell'ellissoide

$m_g = \frac{d\delta_e}{d\delta_e}$  Rapporto di deformazione angolare

Se  $m_g = 1 \rightarrow$  carta equiangolare (minimo errore con  $m_e = 1$  in ogni punto)

$\delta = \alpha - \alpha'$

Se  $\delta = 0 \rightarrow$  carta conforme o isogona (Mercatore, Diandrea)

Carta afilattica: lo  $\omega$  e  $\omega'$  i moduli di deformazione, ma sono molto piccoli.

Carta catopola: carta equidistante

16-5-17

Carta grafica legata a cartografia. Tolomo è obliqua conforme, le gr. meridiane parallele. Cartografia romana è di Ptolemaio  $\rightarrow$  carta non in scala con proiezioni e stadi.

Carte medievali sono simboliche  $\rightarrow$  TO sorgono dalle. Per rappresentazione con realistici. Erano delle mappe mundi. Alle mappe sono le zone, qui in parte c'è il nord, quello orientale in alto che è est. Poi si sono le carte Tolomaidhe. Anzi per la carta di Mercatore, questa carta è conforme, cioè mantiene gli angoli. Da molto bene per la navigazione.

32

$\begin{cases} x = x(\phi, \lambda) \\ y = y(\phi, \lambda) \end{cases}$  Derivano da proiezioni geometriche.

Quando  $\rightarrow x^2 + y^2 = [2R + z(\frac{R}{a} - \frac{R}{b})]^2$   $\rightarrow$   $\phi$  cost.  $\rightarrow$   $\lambda$  variabile e costante, sono su un parallelo d'arco  $\rightarrow x^2 + y^2 = R^2$ . I paralleli sono ortogonali!  
 Sono i meridiani  $\rightarrow \frac{x}{y} = \tan \lambda$   $\lambda$  cost. sono su meridiani

e quindi  $x=y$  cost. I meridiani sono delle rette! Similgrafici su geoido dato fissa. Polari, solo per colate polari: la loro lat.  $80-90^\circ$  e vicinanza. Infatti: Meridiano e Geoido seguono fino a  $80^\circ$  circa polari. L'angolo grande: i modelli di deformazione. Questa è una carta a proiezione conforme e isogonica. Una geodetica qui è rappresentata da una retta. Da quindi loro per la navigazione. In Mercatore invece l'ortodromia non è una retta, ma una curva elittica. In Mercatore è l'ortodromia la retta, qui arci e costanti.

Con le proiezioni di equatore hanno il detto le equazioni o determinano.

cilindrica diretta

cilindrica trasversa

Meridiano di equatore è detto meridiano centrale.

Le carte analitiche non da proiezioni geometriche.

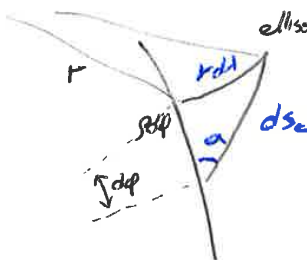
C'è carta ora delle analitiche  $\rightarrow$  deve essere modello def. lineare, anche ad angolo.

Arco carta di Gauss e Mercatore.

simile a cilindrica Gaussiana.

$\rightarrow$  Cilindrica diretta modificata. Ora di merito proiezione analitica.

Scegliamo i modelli di deformazione per le carte costanti.  
Dimostrazione modelli deformazione



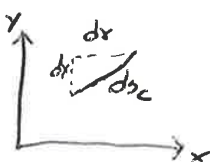
$$dm = p d\phi$$

$$dp = r d\lambda$$

$$ds_{con}^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds_e^2 = p^2 d\phi^2 + r^2 d\lambda^2$$

**LINEARE**



$$\begin{cases} x = x(\phi, \lambda) \\ y = y(\phi, \lambda) \end{cases}$$

Da ellittica a carta





$$m_e = \sqrt{\frac{e \cos^2 \alpha + 2p \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{pr} + 3 \frac{\sin^2 \alpha}{r^2}}{p^2}}$$

Se dato un 2° problema:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \sin \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$m_e = \sqrt{\frac{3}{r^2}} = \frac{\sqrt{3}}{r} \quad \text{Modulo generico di deformazione linear 2° problema!}$$

Se misurato:

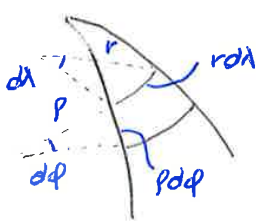
$$\alpha = 0 \quad \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha = 1$$

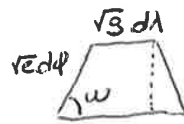
$$m_e = \sqrt{\frac{e}{s^2}} = \frac{\sqrt{e}}{s} \quad \text{Modulo deformazione linear generico di misurato.}$$

18-5-17

Sull'ellissoide  $\longrightarrow$  sulla carta

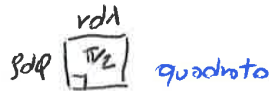


$$d\sigma_e = p dp r dl$$



$$w \neq \frac{\pi}{2}$$

trapezio



quadrato

$$d\sigma_c = (r dl) m_{epar} =$$

$$= r dl \frac{\sqrt{3}}{r} = \sqrt{3} dl$$

$$d\sigma_c = (p dp) m_{mer} = p dp \frac{\sqrt{e}}{r} = \sqrt{e} dp$$

$$m_A = \frac{d\sigma_c}{d\sigma_e} = \frac{\sqrt{3} dl \sqrt{e} dp \sin w}{r dl p dp} = \frac{\sqrt{3} \sqrt{e} \sin w}{rp} \rightarrow \text{calcolo il } \sin w$$

$\sin w$ ; in topografia l'angolo  $w$  è la differenza tra 2 angoli di direzione



$$w = \theta_p - \theta_n$$

$$\sin w = \frac{\operatorname{tg} w}{(1 + \operatorname{tg}^2 w)^{1/2}}$$

$$\operatorname{tg} w = \operatorname{tg}(\theta_p - \theta_n) = \frac{\operatorname{tg} \theta_p - \operatorname{tg} \theta_n}{1 + \operatorname{tg} \theta_p \operatorname{tg} \theta_n}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dx}{dy} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi}{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi}$$

Siamo in misurato  $\rightarrow$   $\lambda = \text{cost.}$

24



Potenziale  $\delta=0 \rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{1. condizione} \\ \text{2. condizione} \end{array} \right.$

(condizioni per ottenere lo stato conforme)

$g = \frac{v^2}{r^2} e$

intersezioni uniche e parallele sulla carta a  $\frac{\pi}{2}$

$p=0$

dimostrazione

memoria

$$\frac{\sqrt{e}}{r} = \frac{\sqrt{g}}{r} \rightarrow \frac{e}{r^2} = \frac{g}{r^2}$$

$\rightarrow$  disegno una condizione!

$$\text{da cui } m_e = \sqrt{\frac{e \cos^2 \alpha}{r^2} + \frac{2 p \cos \alpha \sin \alpha}{r^2} + \frac{g \sin^2 \alpha}{r^2}}$$

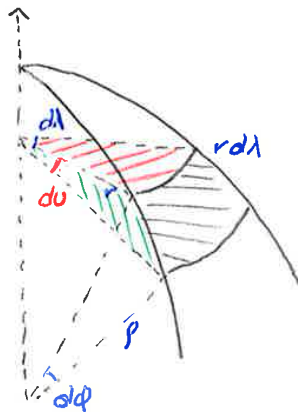
Per soddisfare le 1<sup>a</sup> condizione con  $m_e = m_p$  il denominatore deve essere zero  $\rightarrow$  2<sup>a</sup> condizione

1<sup>a</sup> cond

$$g = \frac{v^2}{r^2} e \rightarrow \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \lambda} \right)^2 \right]}_g = \frac{v^2}{r^2} \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 \right]}_e$$

2<sup>a</sup> cond

$$p=0 \rightarrow \left( r \frac{\partial x}{\partial \lambda} \frac{\partial x}{\partial \phi} + r \frac{\partial y}{\partial \lambda} \frac{\partial y}{\partial \phi} \right) = 0$$



I geodesi vogliono rimanere con stesso raggio di curvatura!  $\rightarrow r$

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{r}{r} \rightarrow p d\phi = r du \text{ o; latitudine ridotta}$$

$$ds^2 = p^2 d\phi^2 + r^2 dl^2 = r^2 du^2 + r^2 dl^2 = r^2 (du^2 + dl^2)$$

23-5-17

Si era arrivati alle equazioni delle carte conformi:

le condizioni di omogeneità di Cauchy, cioè condizioni per cui funzioni complesse sia funzione di  $z$  o altra complessa. Quindi si sono conosciute le eq. carte conformi, le due parti:

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

e Cauchy  $y+ix = p(z+it) =$

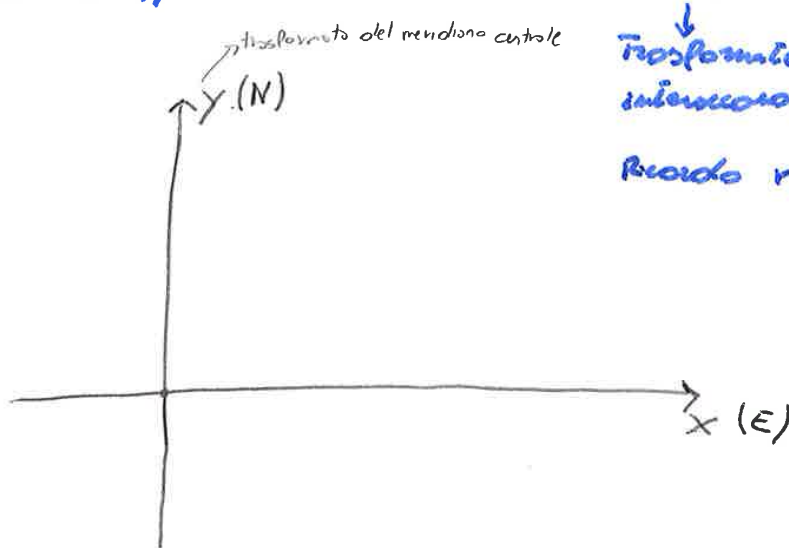
$$= p(u) + p'(u) \cdot i + \frac{p''(u)}{2!} i^2 + \frac{p'''(u)}{3!} i^3 + \frac{p^{(4)}(u)}{4!} i^4 + \dots$$

si sa anche che  $i^2 = -1$   $i^3 = -i$   $i^4 = 1$   $i^5 = i$ , si sono attribuiti nella espressione. Adatto i termini con immaginario "i" e senza immaginario.

Quindi in  $\begin{cases} y = p(u) - \frac{p''(u)}{2!} + \frac{p^{(4)}(u)}{4!} + \dots \\ x = p'(u) - \frac{p'''(u)}{3!} - \frac{p^{(5)}(u)}{5!} + \dots \end{cases}$  → Trasformo  $f(z)$  ed è in  $x, y$  o carta.

raccolto componenti non immaginarie  
componenti immaginarie  $i$

Ho due equazioni e sono proprio quelle delle carte conformi. Quelle che aveva prima non facevo volare fuori da esse le condizioni di omogeneità di Cauchy.  $x, y$  cioè  $E, N$ , parti delle carte conformi.



Se  $l=0$  allora  $x=0$ , ed  $y=p(u)$ .  $l=0 \rightarrow$  meridiano centrale. Li voglio la informazione come mezzo centrale sul piano della carta.

$\begin{cases} x=0 \\ y=p(u) \end{cases}$  Categorie degli  $p(u)$ , così come si sviluppano in funzione il meridiano centrale.

Si vuole vedere come modello del. Come grande distanza in la carta di Gauss.  $\rightarrow$  longitudine rispetto meridiano centrale del fuso in questione ( $m_c$ )

$$m_e = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi \quad \text{in Gauss}$$

Dati solo con: fuso  $\lambda$  e meridiani punti carta  $\varphi$  conforme. Quindi dati per un punto. Così in seguito a sulla carta dove da  $\lambda$  si ottiene per  $m_e$ , così:  $\lambda \cdot m_e \rightarrow a$

$$d_c = m_e \cdot d_e$$

Prando da fine di  $x = \lambda N \cos \varphi + \dots$

$$\lambda = \frac{x}{N \cos \varphi}$$

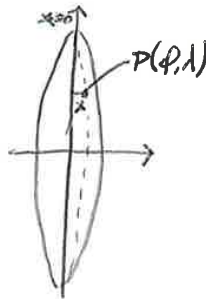
Potremmo avere  $m_e$  in solo in funzione ( $\varphi, \lambda \rightarrow$  coord. geografiche), in cui  $x, y \rightarrow$  cartografiche.

$$m_e = 1 + \frac{x^2}{2N^2 \cos^2 \varphi} \cos^2 \varphi = 1 + \frac{x^2}{2N^2} + \dots$$

Logaritmicamente

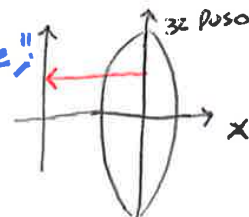
Per eliminare  $m_e$  di equi, dato di elemento a primo termine lo sviluppo espone  $N_c R_N = p$

$$\begin{cases} m_e = 1 + \frac{x^2}{2pN} \\ m_e = 1 + \frac{\lambda^2 N \cos^2 \varphi}{2} \end{cases}$$



I cartografi hanno usato la "polso origine";

Per fuso I, II in Gauss-Boraga s'avevano due polsi diversi, in cartografia ICBTone.



$x =$  polso origine (non 0 quindi)

Gauss-Boraga  $\rightarrow$  Ora non si usano più

$\rightarrow$  Ellissoide Hayford orientato a Roma (Monte Mario)

Polo I Polo II  
1500 2520  
[km] [km]

carta Gauss internazionalizzata  
European datum  
 $\rightarrow$  degli anni '50

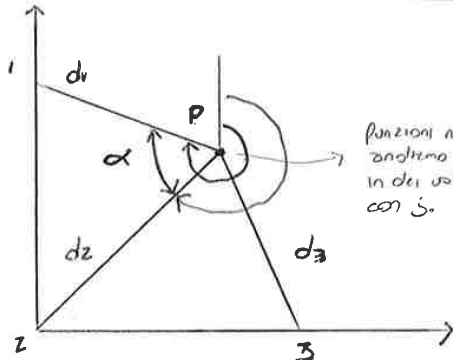
Fino a poco fa una UTM ED-50  $\rightarrow$  sempre carta di Gauss, ma polso origine a 300 [km], ellissoide Hayford, orientato a Genova del'50.  $\rightarrow$  per tutti i fusi  
UTM da nuovo polo e polso. Ogni fuso  $\varphi$  strico in fuso. 20 fusi di  $8^\circ$  partendo da  $+80$  e  $-80$  (pol).

3x

La lobodromia (curva con centri costanti), nella carta diventa una retta.  
 Resta un po' più lunga, in da non cambiare.

25-5-17

Compensazione di una rete (con 2 distanze ed 1 angolo).



$$\left. \begin{aligned} d_2 &= 100 [m] \\ d_3 &= 100 [m] \\ \alpha &= 125^\circ \end{aligned} \right\} \text{ misure}$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &(0; 113.4) \\ 2 &(0; 0) \\ 3 &(143.5; 0) \end{aligned} \right\} \text{ note}$$

La precisione di angoli e distanze è ottima. Siatore in P e misure distanze  $d_2, d_3$ .

$$\tilde{P}(70.5; 70.5) \rightarrow \text{approssimate}$$

$S_\alpha$  (precisione dell'angolo (normale)) =  $0.01$  (da  $1000'$  in rad)

$S_d$  (precisione delle distanze) =  $10 \text{ mm} + 2 \frac{\text{mm}}{\text{km}} \cdot \text{km} = 10 + 2 = 12 \text{ [mm]}$

↓  
 dal distanziometro  
 sul onde

dipende dallo  
 strumento

dipende dal  
 percorso fatto

Avrei quindi 3 equazioni alle misure. Avrei un modello  $y = C + Ax$ .

$\tilde{y}$  → vettore osservazioni approssimate (misurando i valori rete e approssimati).

$\tilde{y}$  → matrice delle derivate

$$\tilde{y} \rightarrow \begin{cases} d_{P2} = \sqrt{(x_2 - \tilde{x}_P)^2 + (y_2 - \tilde{y}_P)^2} \\ d_{P3} = \sqrt{(x_3 - \tilde{x}_P)^2 + (y_3 - \tilde{y}_P)^2} \\ \alpha = \arctg\left(\frac{x_1 - \tilde{x}_P}{y_1 - \tilde{y}_P}\right) - \arctg\left(\frac{x_2 - \tilde{x}_P}{y_2 - \tilde{y}_P}\right) \end{cases}$$

$\alpha = \theta_{P1} - \theta_{P2}$  differenza d'angolo di 2 catenoidi

altro e matrici:  $y = \begin{vmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \alpha \end{vmatrix}$

↑ jacobiano  
 ↑ approssimazioni  
 $y = \tilde{y} + J \delta x$

modello  
 minimi quad.  
 non lineare

$$y - \tilde{y} = T = J \delta x$$

33

$\rightarrow N = A^T \cdot P \cdot A \quad T = Y - \tilde{Y} \quad T_n = A^T \cdot P \cdot T \quad I = N^{-1}$

$\hookrightarrow$  soluzione:  $\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{x}_p}{\partial \hat{y}_p} \\ \frac{\partial \hat{y}_p}{\partial \hat{x}_p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.240 \\ 0.169 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \hat{x}_p = \tilde{x}_p + \delta \hat{x}_p = 70.5 + 0.240 = 70.740 \\ \hat{y}_p = \tilde{y}_p + \delta \hat{y}_p = 70.5 + 0.169 = 70.669 \end{cases}$

(Ifi: nessuno da più per la 2<sup>a</sup> iterazione)

Valori stimati del periodo che diventano i valori approssimati del 2<sup>o</sup>.

Oss:  $V = \hat{Y} - Y = A\hat{x} + \hat{y} - Y$

$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{V^T \cdot P \cdot V}{r} \rightarrow C\hat{x} = \hat{\sigma}_0^2 \cdot I \cdot \frac{\hat{\sigma}_0^2}{N}$   
 $= 0.000084 \cdot 0.0024$

N.B. ||

2<sup>a</sup> iterazione

$\hat{d}_1 = \sqrt{(x_1 - x_{p1})^2 + (y_1 - y_{p1})^2} = 91.698$

$\hat{d}_2 = \dots = 99.992$

$\hat{d}_3 = \dots = 100.005$

$\hat{\alpha} = 2 \cdot \text{ctg} \frac{x_1 - x_{p1}}{y_1 - y_{p1}} - 2 \cdot \text{ctg} \frac{x_2 - x_{p2}}{y_2 - y_{p2}} = 1.308798 \text{ rad} \rightarrow 74.9886^\circ$

$A_{II} = \begin{vmatrix} 0.707463 & 0.706750 \\ -0.707598 & 0.706658 \\ -0.013191 & 0.003523 \end{vmatrix}$

Poi i calcoli sono come prima.

Stima di minimi quadrati di modelli non lineari

$y = k e^{-bt}$  modello con parametri  $k, b$

t	y
2	2.0120
4	1.3460
6	0.9006
8	0.6077
10	0.4070
12	0.2682

lineare  $\downarrow$   
non lineare  $\downarrow$

$\hat{k} = 2.39690$   
 $\hat{b} = 0.08752$

Ricavati da due valori  $y_i$  a caso dall'elenco

Dobbano avere  $k, b$  approssimati  $\rightarrow$  possono ottenerli prendendo 2 equazioni e ottendo 2 approssimazioni.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \rightarrow N^2 \cos^2 \varphi f_1 + \dots$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \rightarrow \lambda^2 N^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} \text{con } a_0 \quad m_e^2 &= \frac{1}{r^2} \left[ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{N^2 \cos^2 \varphi} N^2 \cos^2 \varphi (1 + \lambda^2 \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}) \end{aligned}$$

$$m_e = (1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi$$

$\lambda_{mc} \quad \lambda = \frac{x}{N \cos \varphi}$  ↳ eq. carta Gauss

$$m_e = 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2 \cos^2 \varphi}{\lambda^2 \cos^2 \varphi} = 1 + \frac{x^2}{2N^2} \rightarrow m_e = 1 + \frac{x^2}{2pN}$$

$x = E$  - falsa origine



-500  
↓  
in UTM

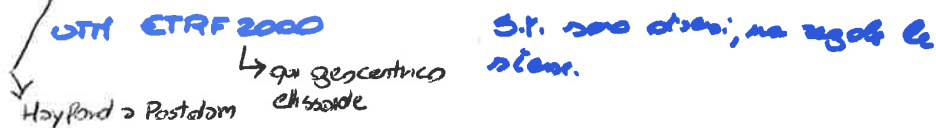
nuovo 1500 per Gauss-Boaga

UTM → carta di Gauss. Globo in 60 parti 6° e più  
20 parti da 0° e ricalcolate coordinate in tale  
sistema. Diverse della Gauss-Boaga.

Dopo la W.W.II. sempre almeno di Heyford, ma non  
più a Roma, ma Potsdam. Pura di Roma (Marie Thérèse),  
Bessel a Gauss.

Invece ETRF2000, ricalcolo di punti, è la cartografia  
UTM, ma geocentrico europeo. I punti sono sempre gli stessi, ma  
hanno coordinate diverse in diversi S.R. Sistema cartografico è  
la carta e la rete (non i punti).

Esempio UTM ED50 (datum europeo degli '50, con carta Gauss)



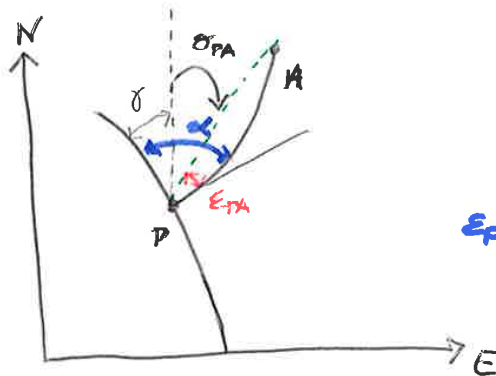
Pura Gauss-Boaga Romano, pura ancora Bessel-Genova e no cartografia  
(Heyford)  
di Gauss.

$$m_e = 0.9996 \left(1 + \frac{x^2}{2pN}\right) \text{ con } \lambda \text{ mappa deformazioni a bordo.}$$



### Riduzione della corda

Sono in P.C. e la deformata che misurano, fanno l'ipotesi geodetica.  
Regola del seno per fare geodetica.



corda  
riduzione alla corda

$$E_{PA} \times E_{AP}$$

$$E_{PA} = \frac{(Y_P - Y_A)(Z_{XP} + X_A)}{6 P_C N_C}$$

$$E_{AP} = \frac{(Y_A - Y_P)(Z_{XA} + X_P)}{6 P_C N_C}$$

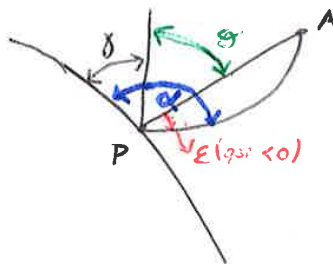
Devo sapere che sono osservati.

$\sigma_{PA}$ ; angolo di direzione  $\rightarrow E_{PA} = \text{arctg} \frac{X_A - X_P}{Y_A - Y_P}$

$\alpha$ ; azimuth  $\rightarrow$  due v'ime uguali, per la carta è conforme.

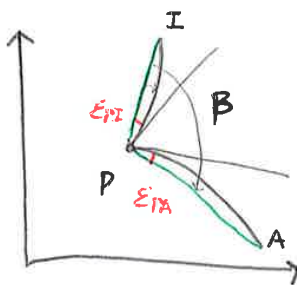
$$\alpha = \theta + \gamma - E$$

È  $< 0$  se quando sono vicino lo A' me' e poi geodetica. Quindi lo so con la regola del seno.



Quello rapporto tra E e C in quel che riguarda gli angoli.

Ora vedo



Il  $\beta$  in carta è uguale a quello in terreno. Ed è la deformata geodetica.

$$\beta = \alpha_{PA} - \alpha_{PI}$$

$$\beta = \underbrace{\gamma + \sigma_{PA} - E_{PA}}_{\alpha_{PA}} - \underbrace{(\gamma + \sigma_{PI} - E_{PI})}_{\alpha_{PI}}$$

$$\beta = (\sigma_{PA} - \sigma_{PI}) + E_{PI} - E_{PA}$$

Se si è in un campo topografico (circa 15 Km), posso trattare le corde come se fanno geodetiche, ovvero non fanno riduzione alle corde. Se sono in quello geodetica, la conversione invece deve farla. Differenza di deformata geodetica e carta è  $10^{-8}$ , me' stimati  $10^{-6}$ , quindi anche qui come in topografico. Devo essere conto di r'ecompensare.

uh

$$\bullet \theta_{APNS} = \arctg \frac{\tilde{x}_p - x_A}{\tilde{y}_p - y_A} - \tilde{C}_A + \frac{\partial \theta}{\partial x_p} \delta \tilde{x}_p + \frac{\partial \theta}{\partial y_p} \delta \tilde{y}_p + \frac{\partial \theta}{\partial C_A} \delta \tilde{C}_A$$

$\theta_{ADNS} \dots$

esempio

$$\theta_{AP} = 10^{\text{gon}}$$

$$\theta_{AB} = 80^{\text{gon}} \rightarrow \tilde{C}_A = 20^{\text{gon}}$$

$$\begin{cases} m=5 \\ n=3 \end{cases}$$

$$I = \begin{array}{ccc} \frac{\partial f}{\partial x_p} & \frac{\partial f}{\partial y_p} & \frac{\partial f}{\partial C_A} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left| \begin{array}{ccc} \frac{x_p - x_A}{\tilde{d}_1} & \frac{y_p - y_A}{\tilde{d}_1} & 0 \\ \frac{x_p - x_B}{\tilde{d}_2} & \frac{y_p - y_B}{\tilde{d}_2} & 0 \\ \frac{y_p - y_A}{\tilde{d}_1^2} & -\frac{x_p - x_A}{\tilde{d}_1^2} & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| \end{array}$$

→ Conto la matrice d'ordine della jacobiana

Dato un'angolo di direzione:

$$\bullet \theta_{APNS} = \arctg \frac{\tilde{x}_p - x_A}{\tilde{y}_p - y_A} - \tilde{C}_A$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_p} = \frac{1}{1 + \frac{(x_p - x_A)^2}{(y_p - y_A)^2}} \cdot \frac{1}{y_p - y_A} = \frac{1}{\frac{(y_p - y_A)^2 + (x_p - x_A)^2}{(y_p - y_A)^2}} \cdot \frac{1}{y_p - y_A}$$

$$= \frac{y_p - y_A}{d_{AP}^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_p} = -\frac{x_p - x_A}{\tilde{d}_1^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial C_A} = -1$$

$$\bullet \theta_{ADNS}: \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y_p} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial C_A} = -1$$

42

→ dato st. non:  $\hat{T}_x, \hat{T}_y, \hat{a}, \hat{b}$

$$a = 1000\alpha \rightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = \arctan \frac{b}{a} \end{cases}$$

L'ho fatto per non Errore!

Termini noti:

$$Y = \begin{pmatrix} 31027.19 \\ 82711.37 \\ 27042.11 \\ 79099.48 \\ 31334.34 \\ 85059.45 \end{pmatrix} \begin{matrix} E \\ N \\ E \\ N \\ E \\ N \end{matrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{T}_x \\ \hat{T}_y \\ \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10000 & 10000 \\ 0 & 1 & 6116.67 & 6282.07 \\ 1 & 0 & 6282.07 & -6116.67 \\ 1 & 0 & 10249.99 & 12356.44 \\ 0 & 1 & 12356.44 & -10249.99 \end{pmatrix}$$

→ Ricerca ai minimi quadrati. Error.

$$\begin{cases} \hat{T}_x = 20764.35 \\ \hat{T}_y = 72392.30 \\ \hat{a} = 0.9993380 \\ \hat{b} = 0.0264478 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 0.99369 \\ \alpha = 0.0265 [rad] \end{cases}$$

Ora posso trasformare punti della rete locale in punti della OTM, st. bizzoso questi punti, in questo modo:

$$\begin{cases} E = \hat{T}_x + \hat{a}x + \hat{b}y \\ N = \hat{T}_y + \hat{a}y - \hat{b}x \end{cases} \quad (x, y) \text{ coord. rete locale}$$

6-6-17

In alcuni casi, l'incertezza è data da valori sconosciuti. La nostra di variabile casuale è descritta da un'ellisse ellittica. Le variabili sono  $x, y$ . La distribuzione di variabili è normale. Si tratta quindi di una normale a due dimensioni  $\rightarrow$  normale bivariata.

Immagino che le coordinate  $x, y$  siano incollate ed indipendenti, cioè  $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = 0$ . Allora prob. congiunta è il prodotto delle due probabilità. Ricordo che distribuzione è normale

$$P(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]}$$

$\downarrow$   
prodotto di due distribuzioni normali indipendenti ed incorrelate

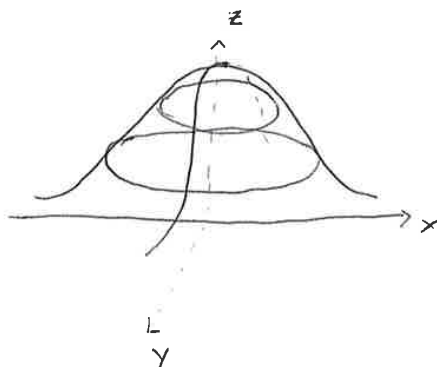
Se invece c'è correlazione tra le due variabili  $x, y$  cioè:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} [ \cdot ]}$$

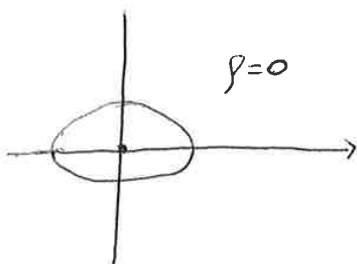
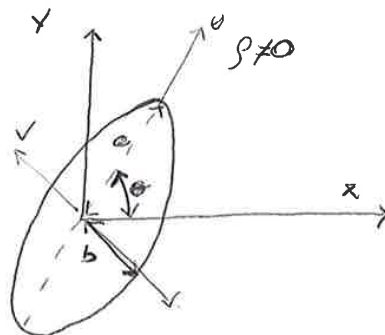
$\rho \rightarrow$  covarianza e sgm

$$[ \cdot ] = \left[ \frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} - 2\rho \frac{x-\mu_x}{\sigma_x} \cdot \frac{y-\mu_y}{\sigma_y} \right]$$

È quindi una campana di Gauss in tre dimensioni. Se taglio fuori con  $Z = k$  (probabilità) ho degli ellissi, lungo  $x, y$  ho gaussiane normali.



Se  $k=1$  ellisse standard, con semiasse:



Sono in corso Error  $y = Ax$   $C_{yy} = A C_{xx} A^T$  legge cov. lineare

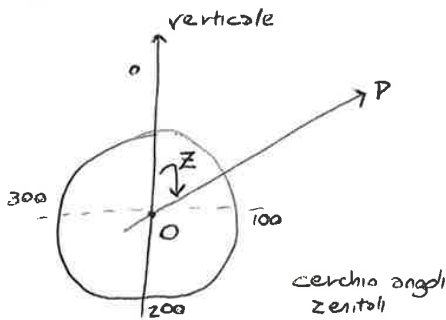
$$Cov = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} (\sigma_x^2 - \sigma_y^2) \sin 2\theta + \sigma_{xy} \cos 2\theta$$

↳ per incollazione

$$\tan 2\theta = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_y^2 - \sigma_x^2} \text{ dimenziato!}$$

### Angoli zenitali



Angolo zenitale  $Z$  definito dal centro dello strumento. È la differenza in due letture.

$$Z_p = \ell_p - \ell_0 \quad \text{diff. di letture}$$

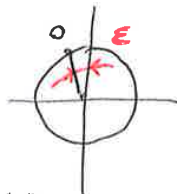
↳ intendo lo zenit

↳ lettura su punto in oggetto

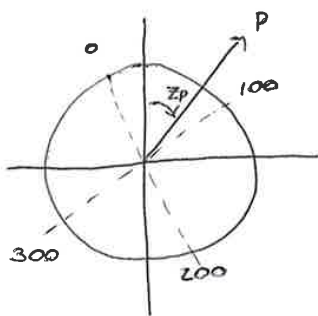
$$\ell_0 = 0 \rightarrow Z_p = \ell_p$$

↳ angolo zenitale

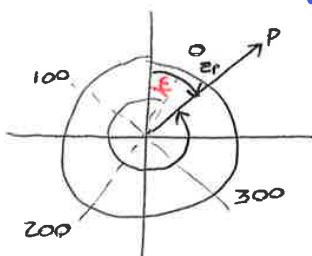
Leggo un valore pari a 0 quando punto in O. Azzerò un errore  $\ell_0$ ; errore zenit strumentale o errore di indice.



$$\ell_s = Z_p + E$$



Qui: miso anche a destra



$$\ell_0 = 400 - (Z_p - \ell) = 400 - Z_p + E$$

↳ lettura cerchio a destra

$$\frac{R+Q_B}{\sin(\pi-Z_A)} = \frac{R+Q_A}{\sin(\pi-Z_B)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{R+Q_B}{\sin Z_A} = \frac{R+Q_A}{\sin Z_B}$$

$$\Delta_{AB} = Q_B - Q_A = d_i \left(1 + \frac{Q_m}{R}\right) \operatorname{tg} \frac{Z_B - Z_A}{2} + h_A - h_B$$

$\uparrow$  quota media  
 $\uparrow$  angoli zenitali in A, B  
 $\rightarrow$  distanza tra punti

Trigonometria piana su una linea visiva di 1 km. A grandi distanze si usano  $Z_A', Z_B'$ .  
 Se simultanea  $E_A = E_B$  o no simultanea deve tener conto rifrazione.

$$\sigma_{\Delta}^2 = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial d_i}\right)^2 \sigma_{d_i}^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial Z}\right)^2 \sigma_Z^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial h}\right)^2 \sigma_h^2$$

Per distanze di 500 [m]  $\div$  1 [km] può essere usata angolo zenitale rifrazione atmosferica.  
 La precisione è data da un errore in km.

$$\sigma_{\Delta} = C \cdot d$$

$\leftarrow$  precisione livell. trigonometrica per alcuni km.  
 $C = 1 \div 2$  cm/km simultanea  
 $C = 2 \div 5$  cm/km da un colosso

Per 115 stazioni  $\sigma_{\Delta} = K D^2$ , precisione più buona.

Se collazione geometrica, 1 [km], battute da 100 [m]  $\rightarrow$  10 battute

$$\sigma_{\Delta_{AB}}^2 = 2 \sigma_{\ell}^2 \quad \text{per una battuta}$$

Per tutte le battute

$$\sigma_{\ell} = 0.2 \text{ [mm]}$$

$\rightarrow$  di lettura

$$\Delta_{AB} = \ell_A - \ell_B$$

$$\sigma_{\ell_A}^2 + \sigma_{\ell_B}^2 = 2 \sigma_{\ell}^2$$

$$\sigma_{\Delta}^2 = n \sigma_{\Delta_{AB}}^2 = n 2 \sigma_{\ell}^2$$

$$\sigma_{\Delta_T} = \sqrt{2n} \sigma_{\ell} = 0.2 \cdot \sqrt{20} =$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \sqrt{20} = 8.9 \cdot 10^{-4} \text{ [m]}$$

$$= 0.89 \text{ [mm]} \approx 1 \text{ [mm]}$$

per 1 [km]

In trigonometria sia 1 [cm] per 1 [km].

$$\Delta = \frac{\Delta' + \Delta''}{2} \quad \text{se ometta e raddo, così due volte la misura}$$

$$\sigma^2 \Delta = \frac{1}{4} \sigma_{\Delta'}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{\Delta''}^2 = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta'}^2$$

$$\sigma_{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{\Delta'} = \frac{1}{\sqrt{2}} 0.89 \approx 0.6 \text{ [mm]} \text{ in } 1 \text{ [km]}$$

Le  $\sigma$  in ometta e raddo  $\rightarrow$  errore chilometrico medio. Dipende da strumento.

$$\sigma_{\Delta} = 0.6 \sqrt{L} \rightarrow \text{lunghezza}$$

$\rightarrow$  precisione



Convergenza del metodo (no formula)

Trasformata della geodetica, regola del seno

$$\alpha = \delta + \delta - \epsilon$$

Componente via geodetica

DOMANDE: (20 min)

- geodetica
- cartografia o stamati.
- statistica (domande o esercizi e dim.)

• Widi/Romano:

Storia cartografia italiana

Ellinoide Heyford '40

Dopo WWII Heyford a'airain evolutive

GPS

Condizionati odiana

Statistica:

Esami: (rola di probabilità di Bay (Teo Bayes))

Media

sqm sulle diste

stima condita

prop. condiziona/condiziona

Minim: quadrati

Teo media, prop. condiziona - covarianza (dim)

Minim quadrati (dim (risult))

68% in  $n-\sigma$  e  $n+\sigma$  95-100% Gaussiana

Po formule gaussiane

Teo distrib

Stamati:

Conc. enunciat ad teodolite (cond. util. pica, cond. operative, enunc. instrumet, eccat. c'it; auti, ...)

Angoli unitol, stamati: enunc. stamati (enunc. stamati stm)

Livelli (com'e pello, cond. util. pica, coll. geomatica da auto, precision, br. t. geomatica in generale)

Distribuzione ad auto

GPS

$\{ dg = wR, \text{ per } w \text{ piccolo rispetto } R \rightarrow (\sin w \approx w) \text{ \{1^a approssimazione\}}$   
 $\{ \text{considero } \triangle OBC: \sin w = \frac{d_0}{R+Q_B} \rightarrow dg = R \frac{d_0}{R+Q_B} = \frac{d_0}{1 + \frac{Q_B}{R}}$   
 $= d_0 \left( 1 + \frac{Q_B}{R} \right)^{-1}$

sviluppo in due termini al 1° ordine \{2a approssimazione\}

$dg = d_0 \left( 1 - \frac{Q_B}{R} \right) = d_0 - d_0 \frac{Q_B}{R} \quad \left( \frac{Q_B}{R}, \text{ fattore di diminuzione} \right)$

$\text{Intorno } \frac{Q_B}{R} = \frac{6000 \text{ m}}{6000 \text{ km}} = 10^{-3}$

→ Per scoti cartografici, non per il caso di dettaglio o per progetti locali.

$\frac{Q_B}{R} = \frac{600 \text{ m}}{6000 \text{ km}} = 10^{-4}$

$\frac{Q_B}{R} = \frac{60}{6000} = 10^{-5}$

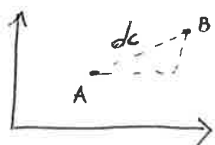
$\frac{Q_B}{R} = \frac{6}{6000} = 10^{-6} \rightarrow \text{Solo qui primo non fare la conversione della distanza}$

Ottiene  $dg$ , deve moltiplicarla sulla carta:

$d_c = dg \cdot m_e$   
 ↳ specifico della carta

Ellissoide  
 ↓  
 Carta

Se invece ho  $d_c$ :



Poi  
 $\begin{pmatrix} E_A, N_A \\ E_B, N_B \end{pmatrix} \rightarrow dg = \frac{d_c}{m_e}$

13-6-17

Distanziometro ad onde

Misura fine distanziamento era complessa, spaziava lunghezza cartone lungo distanza incognita. Reti erano quindi di triangolazione, si misuravano solo angoli con teodolite. Ora anche reti di triangolazione. Invenzione distanziometro in anni 30 in USA, anni 40 distanziometro commerciale in Svezia. Anni 70 dei e primi distanziometri commerciali. Ora sono ad internet allora totale → teodolite + distanziometro (EDM).