NUMERO: 2260A

ANNO: 2018

A P P U N T I

STUDENTE: Sobrero Giovanni

MATERIA: Analisi Matematica II - Prof. Codegone Marco

CAPITOLO 1 — MASSIMI E MINIMI — PROCEDIMENTO (A)

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

$f(x,y) = \dots$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \dots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \dots = 0 \end{cases}$$

→ TROVO I PUNTI STAZIONARI

PER OGNI PUNTO TROVATO COSTRUISCO LA $H_f(x,y)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} \end{pmatrix}$$

CERCO GLI AUTOVALORI (CALCOLANDO IL $\det H_f = 0$) E POI VALUTO.

FUNZIONI DI TRE VARIABILI

$f(x,y,z) = \dots$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \dots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \dots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \dots = 0 \end{cases}$$

→ TROVO OGNI PUNTI STAZIONARI

PER OGNI PUNTO STAZIONARIO COSTRUISCO LA $H_f(x,y,z)$

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

CERCO GLI AUTOVALORI (CALCOLANDO IL $\det H_f = 0$) E POI VALUTO.

a) SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO POSITIVI: PUNTO DI MINIMO
b) SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NEGATIVI: PUNTO DI MASSIMO
c) SE HA AUTOVALORI SIA POSITIVI CHE NEGATIVI: PUNTO DI SELLA.

INTEGRALI [CAPITOLO 3-4]

INTEGRALI MULTIPLI
- DOPPI
- TRIPLI

CURVILINEI
- I SPECIE
- II SPECIE

SUPERFICIE

FLUSSO

CAPITOLO 3 — INTEGRALI MULTIPLI

INTEGRALI DOPPI

- $\int_\Omega F(x,y)\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ \alpha(x)\le y\le \beta(x)\}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

Ω : INSIEME Y-SEMPLICE (VERTICALMENTE CONVESSO)

- $\int_\Omega F(x,y)\,dx\,dy \qquad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ; c\le y\le d,\ \gamma(y)\le x\le \delta(y)\}$

$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$$

Ω : INSIEME X-SEMPLICE (ORIZZONTALMENTE CONVESSO)

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

COORDINATE POLARI

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$\det J_\phi(\rho,\theta) = \rho$

$\rho \geq 0, \quad 0\le\theta\le 2\pi$

COORDINATE ELLITTICHE

$x = a\rho\cos\theta$

$y = b\rho\sin\theta$

$\det J_\phi(\rho,\theta) = ab\rho$

$\rho\geq 0 \quad 0\le\theta\le 2\pi$

INTEGRALI TRIPLI

- $\int_\Omega F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D,\ \alpha(x,y)\le z\le \beta(x,y)\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D\left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy$$

INTEGRAZIONE PER FILI PARALLELI ALL'ASSE Z

- $\int_\Omega F(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \qquad \Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ; (x,y)\in \Omega_z \quad a\le z\le b\}$

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\left[\int_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right] dz$$

INTEGRAZIONE PER STRATI PARALLELI AL PIANO XY

CAMBIAMENTO DI VARIABILI

COORDINATE SFERICHE

$x = \rho\sin\theta\cos\varphi$

$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$

$z = \rho\cos\theta$

PUÒ INVERTIRSI CON UN'ALTRA A SECONDA DELLA COLATITUDINE

$\rho\geq 0 \quad 0\le\theta\le 2\pi$

$\det\phi(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2\sin\theta$

COORDINATE CILINDRICHE

$x = \rho\cos\theta$

$y = \rho\sin\theta$

$z = z$

$\rho\geq 0 \quad 0\le\theta\le 2\pi$

$\det\phi(\rho,\theta,z) = \rho$

FLUSSO DI UN CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

$F(x,y,z) = (\ , \ , \ )$ $\quad D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x,y) \dots \}$ $\Rightarrow \boxed{\int_{\partial D} F \cdot n = \int_K F(G_1(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy}$

Σ_1

1) $D \to \Sigma_1 \vee \Sigma_2 \vee \dots$

$\Sigma_1 \to K$

2) DISEGNARE K

3) $g_1(x,y) =$ POTREBBE ESSERE ANCHE $g(y,z)$ o $g(x,z)$ $\qquad g_2(x,y) = \dots$

4) $G_1(x,y) = (x, y, g_1(x,y))$ $\qquad G_2(x,y) = (x, y, g(x,y))$

5) $F(G_1(x,y)) =$ $\qquad F(G_2(x,y)) =$

6) $N_1(x,y) =$ $\qquad N_2(x,y) =$

7)

8) $\int_K F(G_1(x,y)) \cdot N_1(x,y)\, dx\, dy$ (CAMBIAMENTO DI VARIABILI) $\qquad \int_K F(G_2(x,y)) \cdot N_2(x,y)\, dx\, dy$

9) $\int_{\partial D} F \cdot n = \int_{\Sigma_1} F \cdot n + \int_{\Sigma_2} F \cdot n + \dots$

TEOREMA DI GREEN

$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \int_A \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy}$ $\quad \gamma$ È UNA PARAM DEL BORDO

$F(x,y) = (f_1, f_2)$ $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \}$

$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \dots$

$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \dots$

- SE $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \Rightarrow F$ È CONSERVATIVO: $\int_\gamma F\, dP = 0$
- SE $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) \Rightarrow F$ NON È CONSERVATIVO:

$$\int_\gamma F\, dP = \int_A \left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right] dx\, dy$$

TEOREMA DI STOKES

$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{ROT} F \cdot n = \int_K \mathrm{ROT} F(G(x,y)) \, N(x,y)\, dx\, dy}$ $\quad \gamma$ È UNA PAM. DEL BORDO DI $\Sigma \Rightarrow$ STOKES

$F(x,y,z) = (f_1, f_2, f_3)$ $\qquad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x,y) \quad \dots \}$

$x = g(y,z) \quad y = g(x,z)$

1) $\mathrm{ROT} F(x,y,z) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = i\left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) - j \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) + k \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$

SE $\mathrm{ROT} F(x,y,z) = (0,0,0) \Rightarrow F$ È CONS. $\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = 0$

SE $\mathrm{ROT} F(x,y,z) \neq (0,0,0) \Rightarrow F$ NON CONS. $\Rightarrow \int_\gamma F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{ROT} F \cdot n$

2) $g(x,y) =$

3) $G(x,y) = (x, y, g(x,y))$

4) $N(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1 \right)$

5) $\int_\gamma F \cdot dP = \int_\Sigma \mathrm{ROT} F \cdot n = \int_K \mathrm{ROT} F(G(x,y)) \cdot N(x,y)\, dx\, dy$

CAPITOLO 6 — SERIE NUMERICHE

$$\sum_{n=\dots}^{\infty}(\dots)$$

1) VERIFICARE CHE SIA A TERMINI POSITIVI (SE NON LO È METTERE UN MENO DAVANTI ALL'ARGOMENTO DELLA SOMMATORIA. NB: È SOLO INDICATIVO PER QUESTO PASSAGGIO, PER I PROSSIMI NON SE NE TERRÀ CONTO).

2) VERIFICARE CHE $\lim_{n\to\infty}$ (ARG. DELLA SOMM.) $= 0 \Rightarrow$ CONVERGE

3) RIPORTARE L'ARGOMENTO DELLA SOMMATORIA IN UNA FORMA: $\square - \triangle$ (NELLA MANIERA PIÙ SEMPLIFICATA)

4) $s_n = \sum_{k=\dots}^{n}(\dots\dots) = \sum_{k=\dots}^{n}(\square - \triangle) = \dots$

5) $s = \lim_{n\to\infty} s_n = \dots$

6) $\sum_{n=\dots}^{\infty}(\dots) = s$

A TERMINI POSITIVI $\Rightarrow$ CONV. POSIT. / DIV. POSIT.

A TERMINI NEGATIVI $\Rightarrow$ CONV. NEGAT. / DIV. NEGAT.

SERIE ARMONICA

NB!!: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$: CONVERGE SE $p>1$; DIVERGE POSITIVAMENTE SE $p \leq 1$ NB!!

$\log n \sim o(n) \sim o(n^{1/8}) \sim o(\sqrt{n})$

QUANDO ABBIAMO $\sum_{n=\dots}^{\infty}(-1)^n(b_n)$

$\lim_{n\to\infty} b_n = \square$
- SE $\square = 0 \Rightarrow$ CONVERGE
  - ASSOLUTAMENTE (SE C'È CORRISPONDENZA CON LA SERIE ARMONICA)
  - NON ASSOLUTAMENTE
- SE $\square \neq 0 \Rightarrow$ NON CONV.

NB: QUANDO CALCOLO QUESTO LIMITE USO LE REGOLE DEI LIMITI, QUINDI (NB) NON VALE PIÙ IL CRITERIO DELLA SERIE ARMONICA

SVILUPPI IN SERIE DI MCLAURIN

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$
- $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$
- $\log(1+x) \sum_{n=0}^{\infty} = \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$ $\qquad = \sin x$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

$$f(x) = \int_0^x f'(t)\,dt$$

$f(x) \to \Sigma$ SE È TROPPO COMPLESSO: 1) $f'(x) \to \Sigma$ E POI LA SI INTEGRA (CAMBIANDO X CON t) $\int_0^x \Sigma(f'(t))\,dt \to \Sigma f(x)$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 30

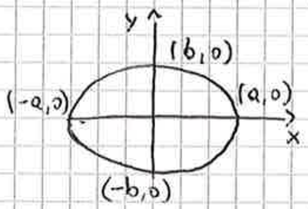
RICHIAMI DI GEOMETRIA

CIRCONFERENZA

- $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ $\quad C(\alpha;\beta)$
- $x^2+y^2+ax+by+c=0$ $\quad C\left(-\frac{a}{2};-\frac{b}{2}\right)$; $R=\sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}$

ELLISSE

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$



PIÙ PROPRIAMENTE

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \quad , C(\alpha,\beta)$$

NB: a e b IN RELAZIONE AL CENTRO DELL'ELLISSE (NON RISPETTO ALL'ORIGINE DEGLI ASSI x, y)

ANALISI II

[DAGLI "ESERCIZI"]

CAPITOLO 1

f DIFFERENZIABILE?
- SÌ $\Rightarrow$ CALCOLO DI $df(x_0) = \nabla f(x_0)$

SE $df(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ PUNTO STAZ.

MAX MIN O SELLA?

$\rightarrow$ M. HESSIANA DI f IN x_0 ...

NB: $df(x_0)(x) = \nabla f(x_0) \cdot x$

FUNZIONE DIFFERENZIABILE

SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ UN INSIEME ~~[illegible]~~ APERTO NON VUOTO, $x_0 \in \Omega$ E $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE

DICIAMO CHE f È DIFFERENZIABILE IN x_0 SE f AMMETTE TUTTE LE DERIVATE PARZIALI IN x_0 E SI HA CHE:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) + \overbrace{\nabla f(x_0)}^{\text{GRADIENTE}} \cdot (x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0}$$

CONDIZIONE NECESSARIA (PERCHÈ f SIA DIFF.)

NORMA

IN TAL CASO SI CHIAMA: DIFFERENZIALE DI f IN x_0 L'APPL. LINEARE $df(x_0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$\boxed{df(x_0)(x) = \nabla f(x_0) \cdot x}$$

SE È DIFFERENZIABILE E RISULTA CHE SE $df(x_0) = 0$ $\Big\}$ x_0 È UN PUNTO STAZIONARIO PER f $\rightarrow$ EVIDENTEMENTE CIÒ IMPLICA CHE $\nabla f(x_0) = 0$

$\hookrightarrow x_0$ PUNTO DI MAX, O MIN, O SELLA

$\Downarrow$

RICERCA DI PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO LOCALE

COSTRUISCO LA MATRICE HESSIANA DI f IN x_0:

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_m}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

CALCOLO $\det(Hf(x_0) - \lambda I) = 0$

(*)

NB!!! OVVERO SE SONO TUTTI POSITIVI E C'È ANCHE UNO ZERO $\Rightarrow x_0$ NON È DETTO CHE SIA PTO DI MINIMO (MA NON È NECESS. UN PTO DI MAX)

ESCLUDE LO ZERO!

a) SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO POSITIVI: x_0 PUNTO DI MINIMO LOCALE PER f

ESCLUDE LO ZERO!

b) SE TUTTI GLI AUTOVALORI SONO NEGATIVI: x_0 PUNTO DI MASSIMO LOCALE PER f

c) SE HA AUTOVALORI SIA POSITIVI CHE NEGATIVI: x_0 PUNTO DI SELLA PER f

IN BUONA SOSTANZA SE C'È UNO ZERO BISOGNA RICORRERE AD ALTRI METODI

RIASSUNTO CAP. 1

NB: OCCHIO AL DOMINIO!

PROCEDIMENTO (A) [$\rightarrow$ MASSIMI, MINIMI]

FUNZIONI DI DUE VARIABILI

$f(x,y) = \ldots$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \ldots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ TROVO P.TI STAZIONARI

PER OGNI PUNTO TROVATO COSTRUISCO LA $Hf(x,y)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

CERCO AUTOVALORI E POI VALUTO (*)

FUNZIONI DI TRE VARIABILI

$f(x,y,z) = \ldots$

$$\nabla f(x,y,z) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \ldots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \ldots = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \ldots = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow$ TROVO I PUNTI STAZIONARI

PER OGNI PUNTO TROVATO COSTRUISCO LA $Hf(x,y,z)$

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

CERCO AUTOVALORI (λ) E POI VALUTO (*)

3) METODO DELLE CURVE DI LIVELLO

PER OGNI $c \in \mathbb{R}$ CONSIDERIAMO L'INSIEME

$$\Omega_c = \{(x,y) \in U : f(x,y) = c\}$$

SUPPONIAMO CHE PER QUALCHE $c \in \mathbb{R}$ SI ABBIA $\Omega_c \neq \emptyset$ E CHE PER OGNI $(x,y) \in \Omega_c$ RISULTI $\nabla f(x,y) \neq 0$. IN TAL CASO L'INSIEME Ω_c È DETTA CURVA DI LIVELLO DI f RELATIVA A c.

IN QUESTA IPOTESI SI HA CHE PER OGNI $(x,y) \in \Omega_c$ IL VETTORE $\nabla f(x,y)$ È ORTOGONALE ALLA RETTA TANGENTE A Ω_c IN (x,y). POICHÉ $\nabla g(x,y)$ POICHÉ $\nabla g(x,y)$ È ORTOGONALE ALLA RETTA TANGENTE A M IN (x,y) SI HA CHE: $\nabla f(x,y) \parallel \nabla g(x,y) \iff \Omega_c$ È TANGENTE IN (x,y) A M.

QUINDI I PUNTI STAZIONARI VINCOLATI PER f SU M SONO I PUNTI (x,y) IN CUI LA CURVA DI LIVELLO Ω_c È TANGENTE A M IN (x,y). PER INDIVIDUARLI SI PUÒ PROCEDERE GRAFICAMENTE RAPPRESENTANDO M E POI LA FAMIGLIA DI CURVE DI LIVELLO Ω_c, AL VARIARE DI $c \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 1: (SUI MASSIMI E MINIMI ASSOLUTI) SUPPONIAMO CHE $\Omega = \{x \in U : g(x) \leq 0\}$ COMPATTO, NON VUOTO

a) SI CERCANO INIZIALMENTE I PUNTI DI MASSIMO E DI MINIMO LOCALE LIBERI DI f SU $\text{INT}(\Omega)$, DOVE

$$\text{INT}(\Omega) = \{x \in U : g(x) < 0\}$$

b) POI SI CERCANO I PUNTI DI MAX E MIN VINCOLATO DI f SU $\partial\Omega$, DOVE $\partial\Omega = \{x \in U : g(x) = 0\}$

SE $\partial\Omega$ È UNA VARIETÀ DI DIMENSIONI $m-1$ IN $\mathbb{R}^m$ ALLORA SI PUÒ PROCEDERE CON I METODI DESCRITTI PRECEDENTEMENTE.

OSSERVAZIONE 2: (SUI MAX E MIN LOCALI) SE $x_0 \in \partial\Omega$ È UN PUNTO DI MAX O MIN VINCOLATO PER f SU $\partial\Omega$ MA NON ASSOLUTO PER f SU Ω, ALLORA NON È DETTO CHE QUESTO PUNTO SIA DI MAX O MIN LOCALE PER f SU Ω.

PER STABILIRE SE x_0 È O NON È UN PUNTO DI ESTREMO LOCALE PER f SU Ω, SI PUÒ SEGUIRE IL SEGUENTE PROCEDIMENTO.

CONSIDERIAMO $x_0 \in \partial\Omega = \{x \in \partial\Omega = \{x \in U : g(x) = 0\}$ E SUPPONIAMO CHE f SIA DIFFERENZIABILE IN x_0 CON $\nabla f(x_0) \neq 0$ E $\nabla g(x_0) \neq 0$

SE $x_0 \in \partial\Omega$ È UN PUNTO DI MAX LOCALE PER f SU $\partial\Omega$, SI HA CHE:

i) SE $\nabla f(x_0)$ APPLICATO IN x_0 PUNTA VERSO L'ESTERNO DI Ω, ALLORA x_0 È UN PUNTO DI MAX LOCALE PER f SU Ω.

ii) SE $\nabla f(x_0)$ APPLICATO IN x_0 PUNTA VERSO L'INTERNO DI Ω, ALLORA x_0 NON È NÉ PUNTO DI MAX NÉ DI MIN LOCALE PER f SU Ω.

SE $x_0 \in \partial\Omega$ È UN PUNTO DI MIN LOCALE PER f SU $\partial\Omega$, SI HA CHE

i) SE $\nabla f(x_0)$ APPLICATO IN x_0 PUNTA VERSO L'INTERNO DI Ω, ALLORA $x_0 \to$ MIN LOCALE

ii) SE $\nabla f(x_0)$ PUNTA VERSO L'ESTERNO DI Ω, $\Rightarrow x_0$ NÉ MAX NÉ MIN LOCALE PER f SU Ω.

CAPITOLO 3

INTEGRALI DOPPI

SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

- DICIAMO CHE Ω È UN INSIEME Y-SEMPLICE (O VERTICALMENTE CONVESSO) SE È DELLA FORMA: $\boxed{\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}}$

DOVE $\alpha, \beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ SONO DUE FUNZIONI CONTINUE TALI CHE $\alpha(x) \leq \beta(x)$ PER OGNI $x \in [a,b]$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE INTEGRABILE SU Ω. ALLORA SI HA CHE:

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx}$$

- DICIAMO CHE Ω È UN INSIEME X-SEMPLICE (O ORRIZZONTALMENTE CONVESSO) SE È DELLA FORMA: $\boxed{\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}}$

DOVE $\gamma, \delta : [c,d] \to \mathbb{R}$ SONO DUE FUNZIONI CONTINUE TALI CHE $\gamma(y) \leq \delta(y)$ PER OGNI $y \in [c,d]$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ È UNA FUNZIONE INTEGRABILE SU Ω, ALLORA SI HA CHE:

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy}$$

OSSERVAZIONE:
- SIANO $\Omega \in \mathbb{R}^2$ UN RETTANGOLO CON I LATI PARALLELI AGLI ASSI x, y,
- CIOÈ Ω È DELLA FORMA $\Omega = [a,b] \times [c,d]$, E $f : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE DELLA FORMA $f(x,y) = f_1(x) f_2(y)$, CON $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ E $f_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ INTEGRABILI.

=> ALLORA SI HA CHE:

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) \left(\int_c^d f_2(y)\,dy \right)}$$

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI DOPPI

$\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTI MISURABILI, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA E LIMITATA SU Ω E $\Phi : \Omega' \to \Omega$ UNA FUNZIONE TALE CHE:

(i) Φ È BIETTIVA;

(ii) Φ È DI CLASSE C^1 CON $\det J_{\Phi}(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \Omega'$

ALLORA:

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v))\,|\det J_{\Phi}(u,v)|\,du\,dv}$$

→ ESEMPIO (CAMBIAMENTO DI COORDINATE NOTEVOLI NEL PIANO)

1) COORDINATE POLARI 2) COORDINATE ELLITTICHE

TEOREMA DEL CAMBIAMENTO DI VARIABILE NEGLI INTEGRALI TRIPLI.

SIANO $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^3$ APERTI MISURABILI, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA E LIMITATA SU Ω E $\Phi : \Omega' \to \Omega$ UNA FUNZIONE TALE CHE:

(i) Φ E' BIETTIVA

(ii) Φ E' DI CLASSE C^1 CON $\det J_\Phi(u,v,w) \neq 0 \ \forall (u,v,w) \in \Omega'$

ALLORA:

$$\boxed{\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v,w))\,|\det J_\Phi(u,v,w)|\,du\,dv\,dw}$$

1) COORDINATE POLARI O SFERICHE

SIA $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. LA FUNZIONE CHE ESPRIME LE COORDINATE POLARI (O SFERICHE) CENTRATE IN (x_0, y_0, z_0) DEI PUNTI DELLO SPAZIO, CON LA COLATITUDINE MISURATA DALL'ASSE z, E' $\Phi : [0,+\infty) \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA DA

$$\boxed{\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (x_0 + \rho \sin\theta\cos\varphi,\ y_0 + \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z_0 + \rho\cos\theta)}$$

IN PARTICOLARE SE $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ SI HA:

$$\Phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\theta)$$

IN OGNI CASO IL MODULO DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE JACOBIANA DI Φ E'

$$\boxed{|\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \rho^2 \sin\theta}$$

2) COORDINATE CILINDRICHE

SIA $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. LA FUNZIONE CHE ESPRIME LE COORDINATE CILINDRICHE CENTRATE IN (x_0, y_0, z_0), CON ASSE PARALLELO ALL'ASSE z, DEI PUNTI DELLO SPAZIO E' $\Phi : [0,+\infty) \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ DEFINITA DA:

$$\boxed{\Phi(\rho,\theta,z) = (x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\sin\theta,\ z)}$$

IN PARTICOLARE SE $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ SI HA:

$$\Phi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$$

IN OGNI CASO IL MODULO DEL DETERMINANTE DELLA MATRICE JACOBIANA DI Φ E':

$$\boxed{|\det J_\Phi(\rho,\theta,z)| = \rho}$$

INTEGRALE CURVILINEO DI II SPECIE

SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ APERTO NON VUOTO, $F: \Omega \to \mathbb{R}^m$ UN CAMPO VETTORIALE CONTINUO E $\gamma: [a,b] \to \Omega$ UNA CURVA PARAMETRICA SEMPLICE E REGOLARE.

SI CHIAMA INTEGRALE CURVILINEO DI SECONDA SPECIE DI F LUNGO γ IL NUMERO REALE

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dP = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

PRODOTTO SCALARE FRA I DUE VETTORI DI $\mathbb{R}^m$

NB: TALVOLTA E' DENOTATO CON IL SIMBOLO $\int_\gamma F \cdot dT$

SE LA CURVA PARAMETRICA E' CHIUSA, CIOE' $\gamma(a) = \gamma(b)$, ALLORA L'INTEGRALE DI LINEA DEL CAMPO VETTORIALE F LUNGO γ E' ANCHE DETTO CIRCUITAZIONE DI F LUNGO γ E VIENE TALVOLTA DENOTATO $\oint_\gamma F\, dP$

INTEGRALE DI SUPERFICIE DI UNA FUNZIONE REALE

SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$ UN APERTO CONNESSO PER ARCHI. SI CHIAMA SUPERFICIE PARAMETRICA UNA FUNZIONE CONTINUA $\sigma: A \to \mathbb{R}^3$

SI CHIAMA SOSTEGNO DI σ L'IMMAGINE DI σ. E' UNA SUPERFICIE IN $\mathbb{R}^3$

DICIAMO CHE σ E' SEMPLICE SE E' INIETTIVA

DICIAMO CHE σ E' REGOLARE SE E' DI CLASSE C^1 E SE PER OGNI $(u,v) \in A$ LA MATRICE JACOBIANA $J_\sigma(u,v)$ DI σ IN (u,v) HA RANGO MASSIMO, CIOE' 2.

SI CHIAMA CALOTTA REGOLARE LA RESTRIZIONE DI UNA SUPERFICIE SEMPLICE E REGOLARE σ A UN QUALUNQUE COMPATTO K CONTENUTO IN A, LA CUI FRONTIERA SIA IL SOSTEGNO DI UNA CURVA PARAMETRICA CHIUSA, SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI

DEFINIZIONE: SIANO $K \subseteq \mathbb{R}^2$ UN COMPATTO LA CUI FRONTIERA E' IL SOSTEGNO DI UNA CURVA PARAMETRICA CHIUSA, SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI, $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ UNA CALOTTA REGOLARE, $\Sigma = \sigma(K)$ IL SOSTEGNO DI σ E $f: \Sigma \to \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE CONTINUA.

SI CHIAMA INTEGRALE DI SUPERFICIE DI f SU σ (O SU Σ) IL NUMERO REALE:

$$\boxed{\int_\sigma f = \int_K f(\sigma(u,v)) \| N(u,v) \| \, du\, dv}$$

DOVE $N(u,v)$ E' IL VETTORE NORMALE A Σ NEL PUNTO $\sigma(u,v)$ DEFINITO DA

$$\boxed{N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)}$$

- TALVOLTA L'INTEGRALE SUPERFICIALE DI f SU σ E' DENOTATO CON UNO DEI SIMBOLI:

$$\int_\Sigma f \ ; \ \int_\sigma f\, d\sigma \ ; \ \int_\Sigma f\, d\sigma$$

TALVOLTA IL FLUSSO DEL CAMPO VETTORIALE F SU σ È DENOTATO CON:

$$\int_{\Sigma} F\cdot m \;;\; \int_{\sigma} F\cdot m\, d\sigma \;;\; \int_{\Sigma} F\cdot m\, d\sigma$$

OSSERVAZIONE: TALVOLTA SI PARLA DI FLUSSO USCENTE (O ENTRANTE) DI UN CAMPO VETTORIALE F DALLA FRONTIERA (DETTO ANCHE BORDO) DI UN INSIEME $D \subseteq \mathbb{R}^3$. IN TAL CASO SI HA CHE $\Sigma = \partial D$ E SI DEVE CONTROLLARE CHE IL VETTORE $N(u,v)$ NORMALE A Σ IN $\sigma(u,v)$ SIA USCENTE DA D (OPPURE ENTRANTE IN D). SE C'È CORRISPONDENZA, ALLORA QUELLO È IL VETTORE DA USARE NELLA FORMULA. ALTRIMENTI SI CONSIDERA IL SUO OPPOSTO.

ESSENDO σ UNA CALOTTA REGOLARE, PER CONTROLLARE SE IL VETTORE $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$ È USCENTE DA D (O ENTRANTE IN D), È SUFF. CONSIDERARE UN PUNTO (u_0,v_0) QUALSIASI INTERNO A K E VERIFICARE CHE IL VETTORE $N(u_0,v_0)$ APPLICATO IN $\sigma(u_0,v_0)$ SIA USCENTE DA D (O ENTRANTE IN D)

TEOREMA DI GREEN

DEFINIZIONE: SIA $A \subseteq \mathbb{R}^2$ UN APERTO LIMITATO NON VUOTO TALE CHE ∂A È IL SOSTEGNO DI UNA CURVA PARAMETRICA CHIUSA, SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$. DICIAMO CHE ∂A È ORIENTATO POSITIVAMENTE SE γ INDUCE SU ∂A UN VERSO DI PERCORRENZA ANTIORARIO

→ TEOREMA (GREEN): SIANO $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ APERTO NON VUOTO, $F:\Omega\to\mathbb{R}^2$ UN CAMPO VETTORIALE DI CLASSE C^1, $F=(f_1,f_2)$, $A \subseteq \Omega$ UN APERTO LIMITATO TALE CHE $\partial A \subseteq \Omega$ È IL SOSTEGNO DI UNA CURVA PARAMETRICA CHIUSA, SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI $\gamma:[a,b]\to\Omega$. SUPPONIAMO CHE ∂A SIA ORIENTATO POSITIVAMENTE. ALLORA:

$$\boxed{\oint_{\partial A} F\cdot dP = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)\right) dx\,dy}$$

TEOREMA DI STOKES

DEFINIZIONE: SIANO $K \subseteq \mathbb{R}^2$ UN COMPATTO LA CUI FRONTIERA È IL SOSTEGNO DI UNA CURVA PARAMETRICA CHIUSA, SEMPLICE E REGOLARE A TRATTI E $\sigma: K \to \mathbb{R}^3$ UNA CALOTTA REGOLARE.

SI CHIAMA BORDO DI σ, DENOTATO CON $\partial\sigma$, LA RESTRIZIONE DI σ a ∂K. DENOTATO CON $\Sigma = \sigma(K)$ IL SOSTEGNO DI σ E CON $N(u,v)$ IL VETTORE NORMALE A Σ IN $\sigma(u,v)$ DEFINITO DA: $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$

DICIAMO CHE $\partial\sigma$ È ORIENTATO POSITIVAMENTE SE LA CURVA $\sigma(\partial K)$ È PERCORSA IN SENSO ANTIORARIO RISPETTO A UN OSSERVATORE POSTO COME IL VETTORE N. IN ALTRI TERMINI, $\partial\sigma$ È ORIENTATO POSITIVAMENTE SE PERCORRENDO IDEALMENTE $\sigma(\partial K)$ APPOGGIATO ALLA FACCIA DI Σ DA CUI ESCE N, SI VEDONO I PUNTI DI Σ ALLA PROPRIA SINISTRA.

ANALISI II (2013-2014) [DAGLI APPUNTI - DISPENSA (STUD.: DI PIETRO PROF.: CONDEGONE)]

DERIVABILITÀ

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE CONTINUA:

DERIVATE PARZIALI

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \end{cases}$$

LA DERIVATA PARZIALE RAPPRESENTA LA PENDENZA DELLA SUPERFICIE LUNGO LA DIREZIONE CONSIDERATA.

GRADIENTE

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE CONTINUA:

$$\boxed{\vec{\nabla} f(x,y) = \vec{grad}(f(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

È IL VETTORE CHE HA PER COMPONENTI LE DERIVATE PARZIALI DI $f(x,y)$

REGOLA DELLA CATENA

SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA E DERIVABILE:

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = \vec{\nabla}_{(x,y)} f \cdot \vec{\gamma}'(t)}$$

NB: SE $\frac{d}{dt} f(\vec{\gamma}(t)) = 0 \Rightarrow$

- $\boxed{\vec{\nabla} f \perp \vec{\gamma}'(t)}$
- $\vec{\nabla} f \parallel \vec{m}_{(\vec{\gamma}(t))}$
- $\vec{\gamma}'(t)$ TANGENTE $\vec{\gamma}(t)$

DERIVATA DIREZIONALE

SIA $f(x,y)$ UNA FUNZIONE CONTINUA:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)}{\Delta t}}$$

LA DIREZIONE È DATA DAL VETTORE $\vec{v} = (v_1, v_2)$

NB: $f(x,y)$ SI DICE DERIVABILE SE ESISTONO LE DERIVATE PARZIALI RISPETTO A x e y

$\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \sim \exists$ PIANO TANGENTE

DIFFERENZIABILE

$f(x,y)$ SI DICE DIFFERENZIABILE IN (x_0, y_0) SE, ALL'INTERNO DEL SUO DOMINIO: ESISTE $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ TALE CHE:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \vec{\nabla} f\Big|_{(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|)$$

$$o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|) \to o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o(\|(x,y)-(x_0,y_0)\|)$$

LA DIFFERENZIABILITÀ DI f IN (x_0, y_0) EQUIVALE ALL' $\exists$ DEL PIANO TANGENTE

$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ DEFINISCE IL PIANO π Tg A f IN $P_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

POTENZIALE

SE CONSIDERO UN CAMPO VETTORIALE $\vec{g}(x,y,z) = \vec{\nabla} f(x,y,z)$

ALLORA DICO CHE: a) • $\vec{g}$ CONSERVATIVO

NB! b) • $\vec{f}$ È UN SUO (POTENZIALE)

$\begin{cases} \vec{g} \in C^1 \\ f \text{ SCALARE} \end{cases}$

CONDIZIONE NECESSARIA AFFINCHÉ UN CAMPO $\vec{g}$ VENGA DETTO

a) CONSERVATIVO È: $\boxed{\vec{ROT}(\vec{g}) = \vec{0}}$

DIVERGENZA

LA DIVERGENZA DI UN CAMPO VETTORIALE $f(\vec{x}) \in C^1$ CON $\vec{x} \in R^m$ È DATA DA:

$$DIV(\vec{f}(\vec{x})) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3} + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_m}$$

NB! IN QUANTO SI TRATTA DI UN CAMPO VETTORIALE $f(\vec{x})$

IN PARTICOLARE:

CAMPO TRIDIMENSIONALE: $\boxed{DIV\vec{f}(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}}$

CAMPO BIDIMENSIONALE: $\boxed{DIV\vec{f}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}}$

ESEMPIO:

CONSIDERIAMO IL CAMPO PIANO $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x\cos(y) \\ y\,Tg(x) \end{pmatrix}$ ALLORA:

$$\vec{ROT}(\vec{f}) = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = y\,(1 + Tg(x)^2) - (-x\sin(y))$$

$$DIV(\vec{f})\ \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \cos(y) + Tg(x)$$

CONSIDERO:

$$\boxed{DIV(\vec{ROT}(\vec{f}(x,y,z)))} = DIV\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \cancel{\frac{\partial^2 f_3}{\partial y \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 f_2}{\partial z \partial x}} + \cancel{\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 f_3}{\partial x \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial z}} = 0$$

NB!

SUPPONENDO DI CHIAMARE $\vec{g}(x,y,z) = \vec{ROT}(f)$ ALLORA UN CAMPO $\vec{g}$ UGUALE AL $\vec{ROT}(f)$ SI DICE DI TIPO ROTORE SE ESISTE UN f TALE DA VERIFICARE $ROT(f) = \vec{g}$ E f È DETTO POTENZIALE $\Rightarrow DIV(\vec{g}) = 0$

UN CAMPO CON $DIV(\vec{g}) = 0$ È DETTO: SOLENOIDALE NELL'INTERVALLO

NOTE

- $\vec{ROT}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix}$
- $\vec{ROT}(\vec{\nabla} f(x,y,z)) = 0$, $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x \\ \partial f/\partial y \\ \partial f/\partial z \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ CAMPO V. CONSERV.

  QUANDO $\vec{ROT}(\vec{g}) = 0 \Rightarrow$ CAMPO CONSERVATIVO, $\vec{g}$ CAMPO V.
- $DIV(\vec{f}(x,y)) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}$
- $DIV(\vec{ROT}(\vec{f}_{(x,y,z)})) = 0$