NUMERO: 2230A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Bongiorni Lorenzo

MATERIA: Applicazioni Avanzate di Fisica Tecnica - Prof. Asinari

AAFT

1. TERMOMECCANICA DEI CORPI CONTINUI (NSF + GRANDEZZE NON CONSERV.)
2. TERMODINAMICA DEI SISTEMI / ANALISI DI SISTEMA (EXERGIA)
3. ACUSTICA e ILLUMINOTECNICA

- OPERATORI MATEMATICI e NOTAZ. DI EINSTEIN

1

NSF
- MASSA (CON DERIVATA EULERIANA/LAGRANGIANA)
- QDM (3 TIPI DI FLUSSO + MODELLO DI NAVIER)
- Et (3 TIPI DI FLUSSO e Pr)

GRANDEZZE NON CONSERV
- Em, Ei
- h
- s

- EQUAZ. CONDUZIONE
- 3 CONDIZ. AL BORDO

2

- EQUAZ. EXERGIA
- APPLICAZ. CON MACCHINE MOTRICI / OPERATRICI
- EXERGIA CON LE MISCELE

3

ACUSTICA
- TEORIA LINEARE DEL SUONO
- EQUAZ. ONDE
- INCISO SUI 3 MODI
- ARMONICA ELEM.
- PASSAGGIO ALL' ELETTROTECNICA
- ACUSTICA APPLICATA (VEDERE ANCHE RELAZ.)

ILLUMINOTECNICA
- ONDE ELETTROMAGNETICHE
- FISIOLOGIA UMANA
- LEGAME INTENSITA'/SUPERFICIE (I, E)
- COME FARE UN PROGETTO

SCALARE $\Rightarrow$ NON HA UN INDICE LIBERO $\Rightarrow$ NESSUN GDL

VETTORE $\Rightarrow$ HA 1 INDICE LIBERO $\Rightarrow$ 1 GDL

TENSORE $\Rightarrow$ HA 2 INDICI LIBERI $\Rightarrow$ 2 GDL

IL COLORE BLU VERRÀ USATO PER INDICARE UN INDICE LIBERO.

- OPERAZIONI PRINCIPALI

$$\boxed{a \cdot b \doteq \sum_{j=1}^{D} a_j b_j}$$ PRODOTTO INTERNO (CON $a, b \in \mathbb{R}^D$)

IL PRODOTTO INTERNO È ASSOCIATO ALLA PROIEZIONE DI UN VETTORE IN UNA DIREZIONE.

$A \in \mathbb{R}^{D\times D}$, $b \in \mathbb{R}^D$

$$\boxed{A \cdot b = b \cdot A \doteq \sum_{j=1}^{D} A_{ij} \cdot b_j \in \mathbb{R}^D}$$

PER GENERALIZZARE IL CONCETTO DI PRODOTTO INTERNO, INOLTRE, VADO A CONSIDERARE NELLA SOMMATORIA SEMPRE L'ULTIMO INDICE IN PRESENZA DI PIÙ INDICI.

(NEL PRECEDENTE CASO TRA i e j SCELGO j!)

$A, B \in \mathbb{R}^{D\times D}$

$$\boxed{A : B \doteq \sum_{i=1}^{D} \sum_{j=1}^{D} A_{ij} B_{ij} \in \mathbb{R}}$$

AD OGNI "PUNTINO" CORRISPONDE UNA SOMMATORIA.

RICAPITOLANDO:

LA DIREZ. DEL VETTORE GRADIENTE É TALE PERCUI SI INDIVIDUA LA ZONA A MASSIMA CRESCITA DELLA GRANDEZZA SCALARE.

$a \in \mathbb{R}^D$

$$\boxed{\nabla a \doteq \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_D} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial a_D}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial a_D}{\partial x_D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{D \times D}}$$

GRADIENTE DI UN VETTORE

IL GRADIENTE NELLE COMPONENTI:

$a \in \mathbb{R}$

$$\nabla a \doteq \frac{\partial a}{\partial x_j} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial a}{\partial x_D} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

LIBERO

$a \in \mathbb{R}^D$

$$\nabla a \doteq \frac{\partial a_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_1}{\partial x_D} \\ & \dots & & \\ \frac{\partial a_D}{\partial x_1} & \frac{\partial a_D}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial a_D}{\partial x_D} \end{bmatrix}$$

ANCHE QUI GENERALIZZANDO:

SE UN OPERATORE VUOLE AGGIUNGERE DEI GDL (INDICI LIBERI) LO FA DOPO L'ULTIMO INDICE TRA QUELLI PRESENTI NELL'ARGOMENTO.

GENERALIZZANDO IL COMPORTAM. DI UN GRADIENTE:

$$\boxed{\text{SE } x \in \mathbb{R}^{nD} \Rightarrow \nabla x \in \mathbb{R}^{(n+1)D}}$$

GENERALIZZANDO IL COMPORTAM. DELLA DIVERGENZA:

$$\boxed{\text{SE } x \in \mathbb{R}^{nD} \Rightarrow \nabla \cdot x \in \mathbb{R}^{(n-1)D}}$$

NATURALMENTE NON ESISTE LA DIVERGENZA PER UNO SCALARE.

LA DIVERGENZA "CONSUMA" UN INDICE!

$a \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\nabla^2 a = \nabla \cdot \nabla a = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_D^2} \in \mathbb{R}}$$

LAPLACIANO DI UNO SCALARE

$a \in \mathbb{R}^D$

$$\boxed{\nabla^2 a = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_D^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_D^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^D}$$

LAPLACIANO DI UN VETTORE

IN COMPONENTI:

$a \in \mathbb{R}$

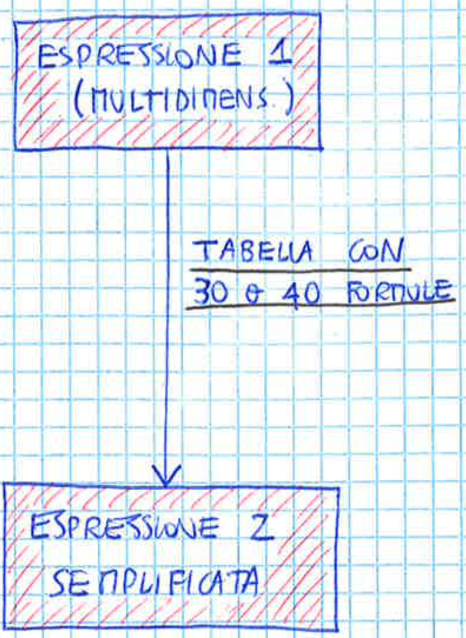
$$\nabla^2 a \doteq \sum_{i=1}^{D} \frac{\partial^2 a}{\partial x_i \, \partial x_i} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 a}{\partial x_D^2} \in \mathbb{R}$$

$a \in \mathbb{R}^D$

$$\nabla^2 a \doteq \sum_{j=1}^{D} \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \, \partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_D^2} \\ \dots \\ \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 a_D}{\partial x_D^2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^D$$

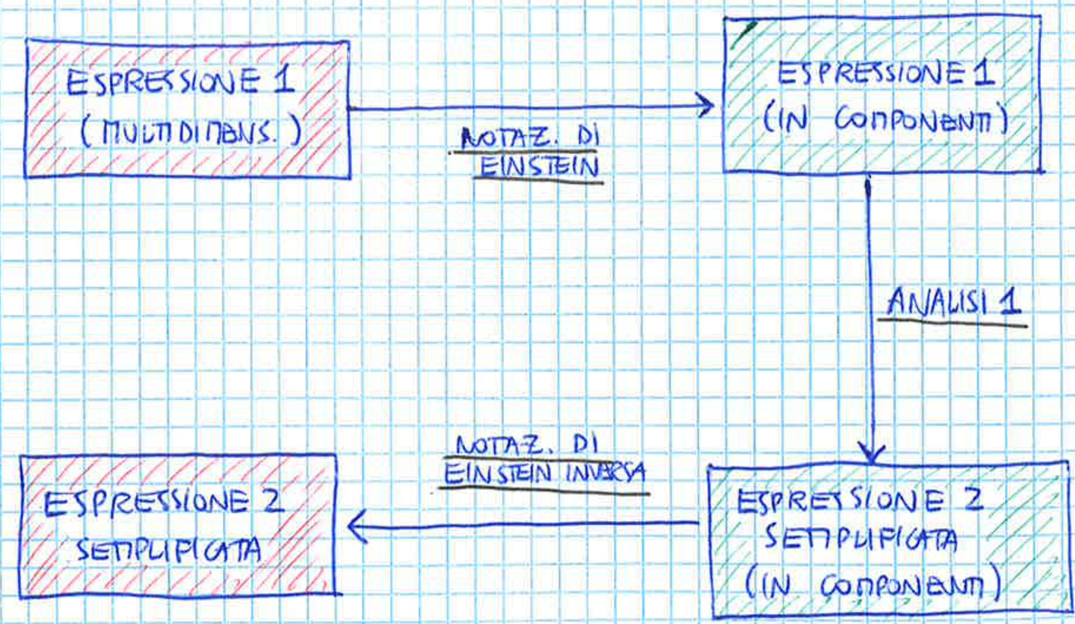
POSSO DUNQUE PROCEDERE IN 2 MODI:

1



QUESTO METODO e' DETTO "DIRETTO" e NON PREVEDE L'UTILIZZO DELLA NOTAZIONE DI EINSTEIN.

2



VEDIAMO UN ESEMPIO APPLICATIVO DI QUESTO SECONDO METODO:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 226

ASSUMEREMO, DUNQUE, CHE LE VARIE GRANDEZZE (COME LA DENSITA') SIANO DEFINIBILI IN OGNI PUNTO.

LA DENSITA' VIENE DEFINITA COME:

$$\rho = \lim_{\Delta V_\Omega \to 0} \frac{\Delta m_\Omega}{\Delta V_\Omega}$$

Ω : VOLUME DI CONTROLLO

DI FATTO NOI ASSUMIAMO CHE QUESTO LIMITE ESISTA (NON ANDIAMO MAI AD INDAGARE VOLUMI CON GRANDEZZE PARAGONABILI A QUELLE ATOMICHE).

ASSUMEREMO INOLTRE CHE LE GRANDEZZE VARINO SIA NELLO SPAZIO CHE NEL TEMPO:

$$\rho = \rho(x, t) \quad \text{CON } x \in \Omega$$

LA SCELTA DEL VOLUME DI CONTROLLO E' ASSOLUTAMENTE ARBITRARIA MA DEVE ESSERE TALE DA NON FAR VARIARE IL VOLUME DI CONTROLLO NEL TEMPO!

VOLUME DI CONTROLLO: UNIVOCO, FISSO E ARBITRARIO

FONDAMENTALI PER NOI SARANNO I FLUSSI CHE ATTRAVERSANO IL VOLUME DI CONTROLLO.

- CONSERVAZIONE DELLA MASSA

CONSIDERO UN VC Ω AVENTE SUPERF. CHIUSA $\partial\Omega$:

NEI CORSI DI BASE ABBIAMO VISTO UN'ESPRESSIONE NON DIVERSA DALLA PRECEDENTE (ASSUMENDO UN CASO STAZIONARIO)!

$$\frac{\partial m_\Omega}{\partial t} = 0 \implies \boxed{G = \text{cost}}$$

POICHÉ UNA DESCRIZ. PUNTUALE DEL PROBLEMA È MOLTO PIÙ RICCA DI UNA DESCRIZ. GLOBALE PASSEREMO AD UNA DESCRIZ. PUNTUALE:

ESSENDO: $m_\Omega = \int_\Omega \rho \, dV$ AVREMO CHE:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \rho \, dV = - \int_{\partial\Omega} \rho \, \vec{u} \cdot \hat{n} \, dS$$

TUTTAVIA, A SECONDO MEMBRO ABBIAMO TUTTI I PUNTI CHE RISIEDONO SUL BORDO DEL VC, MENTRE A PRIMO MEMBRO ABBIAMO TUTTI I PUNTI INTERNI AL VC.

I PUNTI APPARTENGONO AD INSIEMI DIVERSI!

ATTRAVERSO IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA DOBBIAMO QUINDI TRASFORMARE L'INTEGRALE DI SUPERFICIE IN UN INTEGRALE DI VOLUME:

Teorema di Gauss (o della divergenza):

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \int_\Omega \nabla \cdot \vec{F} \, dV}$$

NEI CORSI PRECEDENTI OGNI VOLTA CHE FACEVAMO UN BILANCIO DI FATTO SI FACEVA UNA DIVERGENZA!

FARE IL BILANCIO $\Longrightarrow \nabla \cdot (\;)$

A LIVELLO DI NOTAZIONE SI HA CHE:

$$\nabla \cdot (\rho \underline{u}) = \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_k) = \frac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3}$$

ESSENDO INOLTRE FISSO IL VC NEL TEMPO POSSO:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho \, dV \Longrightarrow \int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

DUNQUE SI RICAVA CHE:

$$\int_\Omega \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int_\Omega \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \, dV \Longrightarrow$$

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) \right] dV = 0$$

POICHÉ IN ANALISI 1 ACCADE CHE:

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0 \quad \neg\Longrightarrow f(x) = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} = 0 \\ \dfrac{\partial(\rho u_1)}{\partial x_1} + \dots \\ \dfrac{\partial(\rho u_2)}{\partial x_2} + \dots \\ \dfrac{\partial(\rho u_3)}{\partial x_3} + \dots \end{cases}$$

PER RISOLVERE L'EQUAZ. ABBIAMO BISOGNO DI ALMENO 3 EQUAZ. DI QUESTO TIPO!

FONDAMENTALE SARA' ANCHE LA SCELTA DI OPPORTUNE CONDIZIONI AL CONTORNO!

IL PROBLEMA DA DARE AL MATEMATICO DEVE SEMPRE ESSERE BEN POSTO, OVVERO RISOLVIBILE!

NELL' IMPLEMENTAZ. AL CALCOLATORE, TUTTAVIA, SARA' ULTERIORM. NECESSARIO APPROSSIMARE (DISCRETIZZARE) LE DERIVATE!

QUESTA DISCRETIZZAZIONE VEDREMO CHE POTRA' ESSERE:

- SPAZIALE (QUELLA VISTA CON CANUTO: $x + \Delta x$, $x - \Delta x$ o LA MEDIA)
- IN TEMPO:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cong \frac{\rho(t+\Delta t) - \rho(t)}{\Delta t} \cong \frac{\rho(t) - \rho(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

DISCRETIZZANDO ED IMPONENDO VALIDE LE EQUAZIONI NEI PUNTI NODALI OTTERREMO CHE:

SE NON MI INTERESSA LA MASSA TOTALE MA UNA CERTA FRAZIONE DI ESSA:

es) COMBUSTIONE ⟹ MI INTERESSA SOLO IL METANO

$$\Delta m = \sum_{k=1}^{M} \Delta m_k$$

$$\rho_{CH_4} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m_{CH_4}}{\Delta V} \qquad \left(\rho = \sum_{k=1}^{M} \rho_k \right)$$

FACENDO RIFERIMENTO AD UNA PARTE K-ESIMA DELLA MASSA TOTALE POSSO SCRIVERE CHE:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}) = w_k$$

$\underline{u}$: VELOCITÀ DI MISCELA (TIPICAMENTE)

w_k: NON HO ZERO POICHÉ LA MASSA DEL METANO NON SI CONSERVA PRIMA E DOPO LA REAZIONE.

SE $\boxed{w_k > 0}$ HO UNA SORGENTE

SE $\boxed{w_k < 0}$ HO UN POZZO (COME IN QUESTO CASO DI COMBUSTIONE)

w_k É DETTO "RATEO DI VARIAZIONE".

QUEST'ULTIMA É NOTA COME EQUAZ. DI BILANCIO DELLA MASSA:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \underline{u}) = w_k}$$

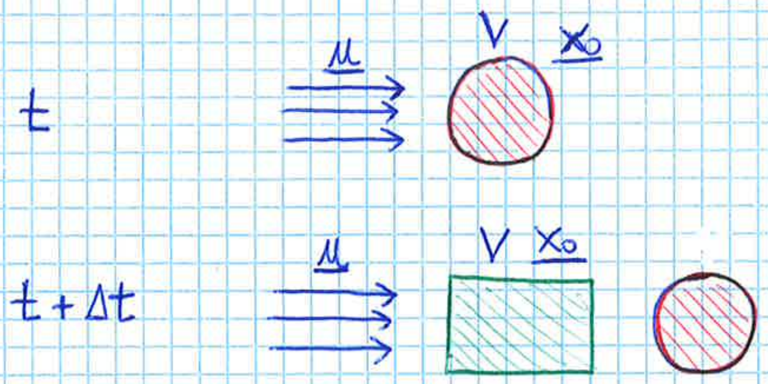
EQUAZ. DI BILANCIO DELLA MASSA (PARZIALE)

PARLANDO DI VARIAZ. DI GRANDEZZE "CAMPO", FACENDO RIFERIMENTO AD UN PUNTO x_0:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t}} = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\rho(t+\Delta t, x_0) - \rho(t, x_0)}{\Delta t}} \Rightarrow \text{DERIVATA EULERIANA}$$

(IN x_0 SI PUÒ IMAGINARE CHE CI SIA UNA SONDA)

GLI ISTANTI t e $t+\Delta t$ NELLA DERIVATA LI POSSO VEDERE COME:



LA PRECEDENTE DERIVATA É DETTA "EULERIANA":

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{\rho(t+\Delta t, x_0)} - \boxed{\rho(t, x_0)}}{\Delta t}$$

AVENDO OPERATO IN QUESTO MODO DI FATTO CONFRONTO TRA DI LORO 2 INSIEMI DIVERSI!

IN ALTERNATIVA, SE NON VOGLIO LAVORARE A VC FISSO MA A GRUPPO FISSO:

$$f\left(x_1+\Delta x,\ x_2+\Delta x_2\right) \cong f(x_1,x_2) + \left.\frac{df}{dx_1}\right|_{x_1}\Delta x_1 + \left.\frac{df}{dx_2}\right|_{x_2}\Delta x_2$$

$t,\ x_1,\ x_2,\ x_3$

HO DUNQUE A CHE FARE CON 4 QUANTITA' !

SECONDO L' APPROSSIMAZ. DI TAYLOR VADO QUINDI A SCRIVERE CHE:

$$f\left(t+\Delta t,\ x_1^{(0)}+u_1\Delta t,\ x_2^{(0)}+u_2\Delta t,\ x_3^{(0)}+u_3\Delta t\right) \cong$$

$$f(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_1}u_1\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_2}u_2\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x_3}u_3\Delta t$$

PER OTTENERE LA DERIVATA LAGRANGIANA, PORTANDO A PRIMO MEMBRO $f(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ E DIVIDENDO TUTTO PER Δt OTTENGO CHE:

$$\boxed{\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}u_3}$$

UTILIZZANDO LA NOTAZ. DI EINSTEIN:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1}u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}u_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3}u_3 = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_j}u_j \Longrightarrow$$

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \underline{u}$$

A LIVELLO DI COORDINATE, DI TEMPO E DI VELOCITA':

$$\begin{cases} t^* = t & \text{(IN CONDIZ. NON RELATIVISTICHE)} \\ x^* = x - ct \\ u^* = u - c \end{cases}$$

CALCOLANDO LA DERIVATA LAGRANGIANA NELLE COORDINATE DEL LABORATORIO SI OTTIENE LO STESSO RISULTATO RISPETTO ALLE COORDINATE DELLA BARCA:

$$\boxed{\frac{D\varphi}{Dt}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \varphi \quad \text{(CALCOLATA RISPETTO AL LABORATORIO)}$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{D\varphi(t^*, x^*)}{Dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t^*}\frac{\partial t^*}{\partial t} + \nabla^* \varphi \frac{\partial x^*}{\partial t} + (u^* + c)\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t^*} \nabla t^* + \nabla^* \varphi \cdot \nabla x^*\right]$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t^*} + \cancel{\nabla^* \varphi (-c)} + \cancel{(u^* + c)} \cdot \nabla^* \varphi \Longrightarrow$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial t^*} + u^* \nabla^* \varphi = \boxed{\frac{D^* \varphi}{Dt^*}} \quad \text{(CALCOLATA RISPETTO ALLA BARCA)}$$

PER QUESTO MOTIVO LA DERIVATA LAGRANGIANA RICOPRE UN'IMPORTANZA NOTEVOLE NEI NOSTRI STUDI!

TORNANDO ALL' EQUAZ. DI CONTINUITA' VISTA PRIMA:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

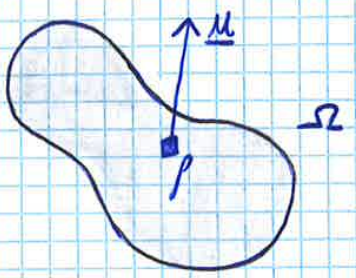
MER 22 MAR

VEDIAMO ORA UN'ALTRA EQUAZ. DEL SISTEMA DI NAVIER-STOKES-FOURIER:

- EQUAZ. DELLA QUANTITA' DI MOTO

LA STRUTTURA DI DERIVAZ. E' DEL TUTTO SIMILE ALL'EQUAZ. DI CONSERVAZ. DELLA MASSA:

PER UN CERTO VOLUME DI CONTROLLO Ω SI VALUTA COSA SUCCEDE ALLA QDM COMPLESSIVA DELL'INTERO VC:



CIASCUN PUNTO POSSIEDE UNA CERTA VELOCITA' $\underline{u}$ ED UNA CERTA DENSITA' ρ DUNQUE:

$$\text{QDM TOT DELL'INTERO VC} = \int_\Omega \rho \underline{u}\, dV$$

SI DEFINISCE COME VELOCITA' MEDIA:

$$\underline{u}_\Omega = \frac{1}{m_\Omega} \int_\Omega \rho \underline{u}\, dV$$ (MEDIA PONDERATA SULLA MASSA)

QUANDO CONSIDERO QUESTA QUANTITA' POSSO ANCHE DIRE CHE:

ESSENDO: $\rho\, dV = dm$ $\quad m_\Omega = \int_\Omega dm \quad$ SI HA CHE:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 29 di 226

IN QUESTO CASO ABBIAMO DIVERSI TIPI DI FLUSSO:

$$F(\rho \underline{u}) = \underbrace{F_{ADV}}_{\text{FLUSSO AVVETTIVO}}^{①} + \underbrace{F_{STAT}}_{\text{TERMINE STATICO}}^{②} + \underbrace{F_{DYN}}_{\text{TERMINE DINAMICO}}^{③}$$

(SI PARLA DI AVVEZIONE QUANDO $\underline{u} \neq 0$, SI PARLA DI CONVEZIONE QUANDO QUESTO MOTO HA ANCHE EFFETTI TERMICI)

VEDIAMO ORA UNA TABELLA CON LE QUANTITA' D'INTERESSE e I LORO FLUSSI:

	QUANTITA'	FLUSSO (AVVETTIVO)
DENSITA'	$\rho \in \mathbb{R}$	$\rho \underline{u} \in \mathbb{R}^3$
QDM	$\rho \underline{u} \in \mathbb{R}^3$	$\rho \underbrace{\underline{u} \otimes \underline{u}}_{\text{PRODOTTO DIADICO}} \in \mathbb{R}^{3\times3}$

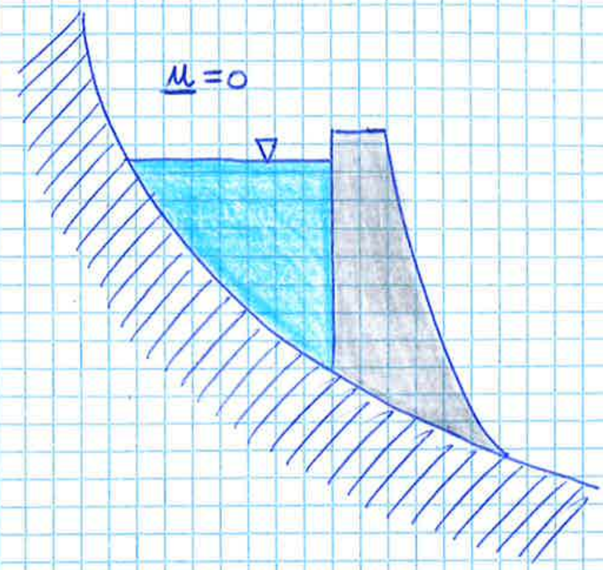
TABELLA CHE RIPORTA L'ANALOGIA MASSA - QDM

SI OSSERVA QUINDI CHE IL "TRASPORTO" DELLE QUANTITA' e' NON-LINEARE!

VEDREMO SUCCESSIVAM. CHE IL TERMINE "$\rho \underline{u} \otimes \underline{u}$" SARA' IL RESPONSABILE DELLA "CREAZIONE" DEI FLUSSI TURBOLENTI e DEI FENOMENI ASSOCIATI AL NUMERO DI REYNOLDS.

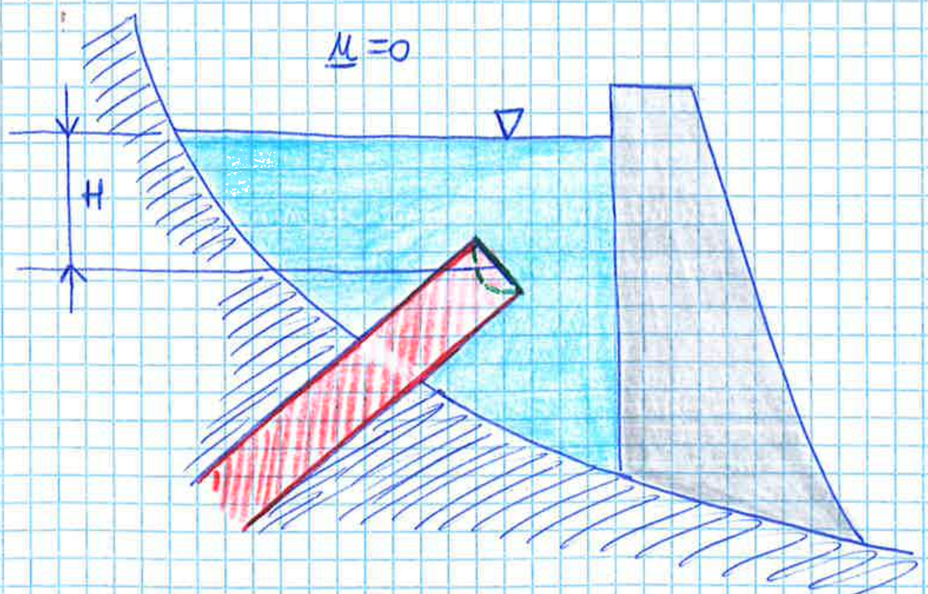
RAGIONANDO CONSIDERANDO IL SINGOLO COMPONENTE SI OTTIENE OVVIAMENTE UN RISULTATO ANALOGO:

IL **TERMINE STATICO** PUÒ ESSERE ESAMINATO CONSIDERANDO UN BACINO IDROGRAFICO:



IN QUESTO CASO QUALSIASI SIA LA FORZA (O LE FORZE) CHE TROVO NON POTREI SICURAMENTE IMPUTARLA AL MOTO DEL FLUIDO IN QUANTO QUESTO È IN QUIETE!

SE ORA INTRODUCO UN TUBO CON UNA MEMBRANA AD UNA CERTA ALTEZZA H SOTTO IL PELO LIBERO:



QUI L'UNICA COSA CHE CONTA È LA PROFONDITÀ H ALLA QUALE INSERISCO LA MEMBRANA, LA QUALE ANDRÀ A FLETTERSI!

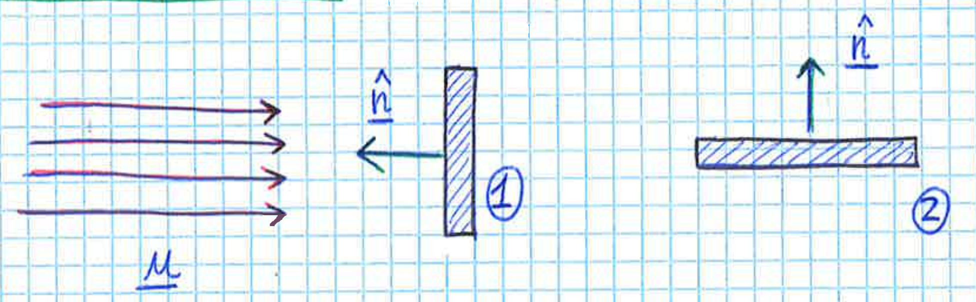
QUESTA COMPONENTE NORMALE E' DUNQUE ISOTROPICA! É SEMPRE LA STESSA INDIPENDENTEM. DA θ!

DALLA PRECEDENTE ESPRESSIONE SI OTTIENE INOLTRE CHE:

(2) $$\boxed{\underline{\underline{T}}^{(s)} = p\,\underline{\underline{I}}}$$ ($\underline{\underline{I}}$ É IL TENSORE IDENTITA')

NEL CASO STATICO DUNQUE L'ISOTROPIA DERIVANTE DALLA SPERIMENTAZ. CI FA CAPIRE CHE L'OPERATORE TENSORE E' "GIUSTO" MA E' FIN TROPPO "ESAGERATO" POICHE' E' SUFFICIENTE MOLTIPLICARE IL TENSORE IDENTITA' PER LA p!

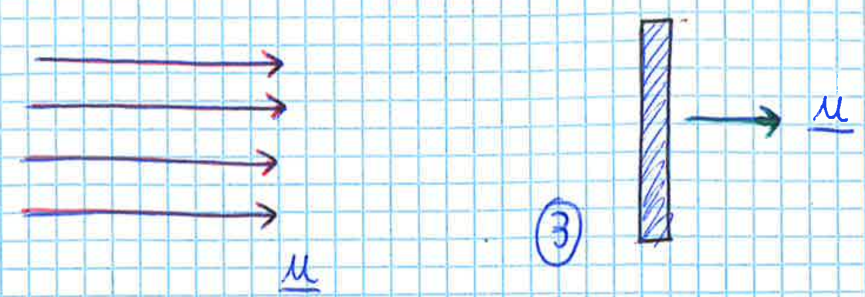
PER QUANTO RIGUARDA IL $\boxed{\text{TERMINE DINAMICO}}$ INVECE ABBIAMO OVVIAMENTE CHE $\underline{u} \neq 0$:



QUESTA CONDIZ. NON PUÒ ESSERE ISOTROPA POICHE' OVVIAMENTE L'ORIENTAZ. DI $\hat{n}$ RISPETTO A $\underline{u}$ E' FONDAMENTALE!

ANZI, DOBBIAMO PROPRIO DISCRIMINARE IL CASO (1) DAL CASO (2)!

CONSIDERANDO ANCHE UN TERZO CASO:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 35 di 226

UN MODO PER RENDERE SIMETRICO IL GRADIENTE E':

$$\left(\nabla \underline{u} + (\nabla \underline{u})^T \right)$$

$(\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}}$ INVECE E' GIA' SIMETRICO (ADDIRITTURA DIAGONALE)

NEL MIO MODELLO VOGLIO DUNQUE USARE QUESTE 2 DERIVATE SPAZIALI (TENSORIALI) DI $\underline{u}$!

POSSO DUNQUE ASSUMERE CHE:

$$\underline{\underline{\Pi}}^{(D)} \underset{\text{PROPORZ.}}{\sim} \left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \beta (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} \right)$$

(DOVE IL COEFF. β PER ORA NON E' SPECIFICATO)

DAL PUNTO DI VISTA DIMENSIONALE QUELLO CHE STIAMO FACENDO HA SENSO?

$$\underline{\underline{\Pi}}^{(D)} = \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

$$\nabla \underline{u} = \left[\frac{1}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m}}{s} \right] = \left[\frac{1}{s} \right]$$

LA COSTANTE DA INTERPORRE E' DUNQUE:

$$\underline{\underline{\Pi}}^{(D)} = -\rho \nu \left(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T + \beta (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{\underline{I}} \right)$$

SI RICORDA CHE:

$$\boxed{\rho \nu = \mu}$$

ν: VISCOSITA' CINEMATICA

μ: VISCOSITA' DINAMICA

NEL CASO DINAMICO HO CHE:

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underline{\underline{\Pi}}^{(s)} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)}$$

DUNQUE SE RAGIONO IN ANALOGIA A PRIMA:

$$p \overset{?}{=} \underbrace{\frac{1}{3} Tr\left(\underline{\underline{\Pi}}^{(s)}\right)}_{p} + \underbrace{\frac{1}{3} Tr\left(-\mu\left(\nabla\underline{u} + \nabla\underline{u}^T + \beta(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}}\right)\right)}_{?}$$

IL SECONDO TERMINE SI PUÓ ESPRIMERE COME:

$$-\frac{\mu}{3}\left[Tr(\nabla\underline{u}) + Tr(\nabla\underline{u}^T) + Tr\left[\beta(\nabla\cdot\underline{u})\underline{\underline{I}}\right]\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{\mu}{3}\left[\nabla\cdot\underline{u} + \nabla\cdot\underline{u} + 3\beta(\nabla\cdot\underline{u})\right]$$ DUNQUE:

$$p \overset{?}{=} p - \frac{\mu}{3}\left(2\nabla\cdot\underline{u} + 3\beta(\nabla\cdot\underline{u})\right)$$

SI POSSONO DUNQUE DISTINGUERE $\boxed{2 \text{ CASI}}$:

(A) SE $\beta = -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $p = p + 0$

(B) SE $\beta \neq -\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $p \neq \frac{1}{3} Tr\left(\underline{\underline{\Pi}}\right)$

$$\nabla \cdot (p \underline{\underline{I}}) = \nabla \cdot (p\, \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(p\, \delta_{ij}) = \frac{\partial p}{\partial x_i} = \nabla p$$

QUESTO È IL PERCHÉ MI TROVO NELL'EQUAZ. IL GRADIENTE DI p!

RIASSUMENDO, L'EQUAZ. DIVENTA:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho \underline{u}\, dV = -\oint_{\partial\Omega} (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)}) \cdot \hat{\underline{n}}\, ds + \int_{\Omega} \rho \underline{a}\, dV$$

DOVE: $\underline{a}$ É UN CAMPO ESTERNO (NEL NOSTRO CASO LA GRAVITA')

PROCEDENDO IN MANIERA ANALOGA A QUANTO FATTO PER LA MASSA:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t}\, dV = -\underbrace{\int_{\Omega} \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)})\, dV}_{\text{th DI GAUSS}} + \int_{\Omega} \rho \underline{a}\, dV$$

$$\int_{\Omega} \left[\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)}) \right] dV = \int_{\Omega} \rho \underline{a}\, dV$$

ANCHE QUI, AVENDO INFINITI Ω CHE VERIFICANO LA RELAZ.
NECESSARIAMENTE DEVE SUCCEDERE CHE:

$$\boxed{\frac{\partial(\rho \underline{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u} + p \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)}) = \rho \underline{a}}$$

GLI "STRUMENTI" CHE SERVONO ANCHE QUI SONO:

- th DI GAUSS PER RIPORTARE TUTTI GLI INTEGRALI SU Ω
- GLI ∞ Ω CHE CONSENTONO DI UGUAGLIARE GLI ARGOM. DEGLI INTEGRALI

SI DEFINISCE ORA COME DENSITA' DI ENERGIA:

$$e_\Omega = \frac{E_t}{m_\Omega} = \frac{1}{m_\Omega}\int_\Omega \rho e_t \, dV$$ (MEDIAZ. RISPETTO ALLA MASSA)

DI QUESTA E_t POSSO SEMPRE ANDARE A STUDIARE LA DERIVATA EULERIANA:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho e_t \, dV = -\oint_{\partial\Omega} \underline{f}(\rho e_t)\cdot \underline{\hat{n}} \, dS$$

POSSO AGIRE SOLO ATTRAVERSO I FLUSSI AL BORDO! ⟶ NON CI SONO TERMINI DI SORGENTE O POZZO!

$\boxed{\underline{f}(\rho e_t) : \text{FLUSSO}}$

RICHIAMANDO LA TABELLA VISTA LA SCORSA VOLTA (PER QUANTO RIGUARDA L'AVVEZIONE):

	QUANTITA'	FLUSSO (AVVETTIVO)
MASSA	$\rho \in \mathbb{R}$	$\rho\underline{u} \in \mathbb{R}^3$
QDM	$\rho\underline{u} \in \mathbb{R}^3$	$\rho\underline{u}\otimes\underline{u} \in \mathbb{R}^{3\times3}$
ENERG. TOT	$\rho e_t \in \mathbb{R}$	$\rho e_t \underline{u} \in \mathbb{R}^3$

I VARI FLUSSI IN GIOCO ANCHE QUI SONO MOLTEPLICI MA, RISPETTO ALLA QDM QUI I FLUSSI SONO VETTORIALI E, DUNQUE, PIU' SEMPLICI DA TRATTARE:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 43 di 226

DIMENSIONALMENTE CHE COS'È L'ULTIMO TERMINE?

$$\underline{f}_{ADV} = \rho e t \underline{u} = \left[\frac{\cancel{kg}}{m^{3}} \frac{J}{\cancel{kg}} \frac{\cancel{m}}{s} \right] = \left[\frac{W}{m^2} \right] \Longrightarrow$$ POTENZA PER UNITÀ DI SUPERF.

DIMENSIONALM. SI OTTIENE DUNQUE UN FLUSSO AREICO (CHE È UNA DENSITÀ AREICA DI POTENZA).

PER QUANTO RIGUARDA IL $\boxed{\text{TERMINE DI FLUSSO TERMICO}}$, QUESTO DERIVA DAL MODELLO DI FOURIER:

$$\boxed{\underline{f}_{THERM} = \underline{q}_{\alpha} = -\lambda \nabla T = -\rho c_p \alpha \nabla T} \quad (2)$$

IL PROBLEMA DI QUESTO MODELLO È CHE PRESUPPONE UNA VELOCITÀ DI SCAMBIO TERMICO INFINITA (LA PERTURBAZIONE TERMICA SI MUOVE ISTANTANEAMENTE).

IL MODELLO DI FOURIER NON PREVEDE DUNQUE ALCUN TEMPO DI RISPOSTA!

QUESTO DIVENTA IMPORTANTE SE STO PARLANDO DI PICCOLE DISTANZE $\Longrightarrow$ IL MODELLO DI FOURIER NON SI APPLICA QUINDI IN QUESTE SITUAZIONI.

NONOSTANTE TUTTE QUESTE LIMITAZ. UTILIZZIAMO COMUNQUE IL MODELLO DI FOURIER PERCHÉ CHIAMA IN CAUSA SOLO OPERATORI SPAZIALI DEL PRIMO ORDINE $\Longrightarrow$ È MOLTO SEMPLICE! QUESTO MODELLO DIPENDE SOLO DAL GRADIENTE DI TEMPERATURA!

λ: CONDUCIBILITÀ TERMICA $[W/mK]$

α: DIFFUSIVITÀ TERMICA $[m^2/s]$ $\Longrightarrow$ $\alpha = \dfrac{\lambda}{\rho c_p}$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega} \rho e_t \, dV = -\oint_{\partial\Omega} \left(\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u}\right) \cdot \hat{\underline{n}} \, ds + \text{ALTRI FLUSSI} \begin{cases} \text{AVVETTIVO} \\ \text{TERMICO} \end{cases}$$

APPLICANDO GAUSS e L'ARBITRARIETÀ DEGLI ∞ VC :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t) + \nabla \cdot \left(\underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u} + \dots\right) = 0$$

POSSO INOLTRE DIVIDERE IL TERMINE MECCANICO IN 2 MODI :

$$\underline{\underline{\Pi}} = \underbrace{\underline{\underline{\Pi}}^{(s)} + \underline{\underline{\Pi}}^{(D)}}_{\text{SUDDIVISIONE TERMODINAMICA}} = \underbrace{p\,\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\Pi}}_v}_{\text{SUDDIVISIONE FLUIDODINAMICA}}$$

$\underline{\underline{\Pi}}_v$: PARTE VISCOSA DEL TENSORE DEGLI SFORZI

UTILIZZANDO QUEST'ULTIMA SUDDIVISIONE :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho e_t \underline{u} + p\,\underline{\underline{I}} \cdot \underline{u}\right) = \nabla \cdot \left(-\underline{q}_\alpha + \underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u}\right)}$$

I TERMINI LEGATI AL FLUSSO TERMICO e ALLA PARTE VISCOSA DEL TENSORE DEGLI SFORZI SI PONGONO ENTRAMBI A 2° MEMBRO POICHÉ DIPENDONO DA PROPRIETÀ TERMOFISICHE $(\alpha$ e $\nu)$.

SI RICORDA CHE : $\boxed{Pr = \dfrac{\nu}{\alpha} = \dfrac{\text{MECCANICA}}{\text{TERMICA}}}$

IL SISTEMA DI EQUAZ. PREVEDE 5 EQUAZ. (LA SECONDA EQUAZ. e' VETTORIALE, DUNQUE e' TRIPLICE!) IN ALTRETTANTE INCOGNITE, OVVERO:

$\boxed{(\rho\,,\ \underline{u}\,,\ e_t)}$ oppure $\boxed{(\rho\,,\ \underline{u}\,,\ T)}$

SCELTA #1 — L'ENERGIA TOTALE e' DIFFICILM. MISURABILE

SCELTA #2

RISOLVENDO IL SISTEMA PER VIA NUMERICA SI TROVERANNO DUNQUE DELLE STIME NODALI DELL'ENERGIA TOTALE O DELLA TEMPERATURA!

TRA LE 2 SCELTE LA SECONDA É PIÚ SEMPLICE COME CALCOLO DI ∇T MA PIÚ COMPLICATA COME CALCOLO DI $\frac{\partial}{\partial t}(\rho e_t)$, MENTRE PER LA PRIMA SUCCEDE IL CONTRARIO.

TUTTAVIA TIPICAMENTE SI SCEGLIE LA TEMPERAT. POICHÉ MOLTO PIÚ FACILMENTE MISURABILE!

IN ALCUNI CASI PERÓ (COME I CAMBIAM. DI STATO) É PIÚ UTILE LA SCELTA #1 POICHE' LE INFORMAZ. SULLA T NON MI DICONO GRANCHE' DI NUOVO!

MER 29 MAR

VEDIAMO OGGI ALCUNE CONSIDERAZ. SUL SISTEMA DI NAVIER-STOKES-FOURIER:

- BASTANO QUESTE EQUAZ. PER IL DIMENSIONAM. TERMO-TECNICO?

COME CARATTERISTICHE COMUNI DELLE EQUAZ. DEL SISTEMA ABBIAMO CHE:

LE DERIVATE EULERIANA e LAGRANGIANA SI RICORDA CHE:

- EULERIANA $\Rightarrow$ FACILE DA MISURARE
- LAGRANGIANA $\Rightarrow$ OPPORTUNA SE HO UNA CERTA DINAMICA DI PROCESSO

IN FORMA LAGRANGIANA POSSO QUINDI SCRIVERE CHE:

$$\begin{cases} \boxed{\dfrac{D\rho}{Dt} = -\rho \, \nabla \cdot \underline{u}} & \text{equaz. di CONSERVAZ. della MASSA TOTALE} \\ \boxed{\rho \dfrac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}} + \rho \, \underline{a}} & \text{equaz. della QDM (equaz. NON-CONSERVATA)} \\ \boxed{\rho \dfrac{De_t}{Dt} = -\nabla \cdot \left(\underline{q_\alpha} + \underline{\underline{\Pi}} \cdot \underline{u} \right)} & \text{equaz. di CONSERVAZ. dell' ENERGIA TOTALE} \end{cases}$$

LA PRIMA equaz. e' COMUNQUE CONSERVATIVA POICHÉ LA VALUTAZ. SI BASA SULLA FORMULAZ. EULERIANA!

ESSENDO QUASI SEMPRE TRASCURABILE LA GRAVITÀ NEI NOSTRI CASI, PER ORA ABBIAMO PRATICAM. PARLATO SOLO DI GRANDEZZE CONSERVATE.

DAL PUNTO DI VISTA INGEGNERISTICO QUESTO e' SUFFICIENTE?

SE HO $\boxed{\text{2 SISTEMI}}$ e VOGLIO CAPIRE:

- QUALITÀ / RENDIM.
- USURA / ETÀ

$$E_t \longrightarrow \boxed{\text{SISTEMA}} \longrightarrow E_t$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 51 di 226

LA DIFFERENZA TRA IL TERMINE DELL'ENERGIA CINETICA e L'EQUAZ. DELLA QDM e' LA "MONEROSITA'" DI $\underline{u}$:

$$\begin{cases} e_k = \frac{1}{2}\,\underline{u}\cdot\underline{u} & \underline{u} \text{ COMPARE } \boxed{2 \text{ VOLTE}} \\ \rho \frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla\cdot\underline{\underline{T}} + \rho\,\underline{a} & \underline{u} \text{ COMPARE } \boxed{1 \text{ VOLTA}} \end{cases}$$

PASSANDO IN COORD. EULERIANE e MOLTIPLICANDO $\overset{\text{SCALARMENTE}}{\text{TUTTO}}$ PER $\underline{u}$ POSSO "UNIFORMARE" LE 2 EQUAZ. :

$$\underbrace{\rho\frac{\partial\underline{u}}{\partial t}\cdot\underline{u}}_{①} + \underbrace{\left(\rho\,\underline{u}\cdot\nabla\underline{u}\right)\cdot\underline{u}}_{②} = \underbrace{-\left(\nabla\cdot\underline{\underline{T}}\right)\cdot\underline{u}}_{③} + \underbrace{\rho\,\underline{a}\cdot\underline{u}}_{④}$$

ANDIAMO A TRATTARE SEPARATAM. QUESTI 4 TERMINI PER VEDERE SE IN QUALCHE MODO SALTA FUORI L'ENERGIA CINETICA :

① $$\rho\frac{\partial\underline{u}}{\partial t}\cdot\underline{u} = \rho\frac{\partial u_1}{\partial t}u_1 + \rho\frac{\partial u_2}{\partial t}u_2 + \rho\frac{\partial u_3}{\partial t}u_3 \Rightarrow$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho\, 2u_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho\, 2u_2\frac{\partial u_2}{\partial t} + \rho\, 2u_3\frac{\partial u_3}{\partial t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho\frac{\partial(u_1^2)}{\partial t} + \rho\frac{\partial(u_2^2)}{\partial t} + \rho\frac{\partial(u_3^2)}{\partial t}\right]$$

$$= \rho\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\left(u_1^2+u_2^2+u_3\right)\right] = \rho\frac{\partial e_k}{\partial t} \quad \checkmark$$

IL SECONDO TERMINE INVECE :

③

$$\rho \frac{\partial e_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e_k = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} - \rho \underline{u} \cdot \nabla e_p$$

TERMINE NON ANCORA "MANIPOLATO"

DA CUI:

$$\rho \frac{\partial e_k}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla (e_k + e_p) = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

ESSANDO INOLTRE: $\boxed{\frac{\partial e_p}{\partial t} = 0}$ POSSO SCRIVERE CHE:

$$\rho \frac{\partial}{\partial t}(e_k + e_p) + \rho \underline{u} \cdot \nabla (e_k + e_p) = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u} \implies$$

$$\rho \frac{\partial e_m}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e_m = -(\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \underline{u}$$

ORA POSSIAMO SCRIVERE CHE IL PRIMO MEMBRO È:

$$\rho \frac{\partial e_m}{\partial t} + \rho \underline{u} \cdot \nabla e_m = \rho \left(\frac{\partial e_m}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla e_m \right) = \rho \frac{D e_m}{Dt}$$

ABBIAMO DUNQUE TRASFORMATO LA DERIVATA!

$$\left(\rho \frac{D e_m}{Dt} = \frac{\partial (\rho e_m)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e_m \underline{u}) \qquad \boxed{\text{LAGR} = \text{EULER} + \nabla \cdot \text{AVVETTIVO}} \right)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 226

METTENDO INSIEME QUESTO RISULTATO CON I PRECEDENTI:

$$\frac{\partial(\rho e_m)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e_m \cdot \underline{u}) = -\nabla\cdot(\underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{u}) + \underline{\underline{\Pi}} : \nabla\underline{u}$$

$$\boxed{\frac{\partial(\rho e_m)}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho e_m\cdot\underline{u} + \underline{\underline{\Pi}}\cdot\underline{u}\right) = \underline{\underline{\Pi}} : \nabla\underline{u}}$$

QUESTO TERMINE DIPENDE SOLO DALL'INTERNO DEI PUNTI DEL VC

$$\boxed{\underline{\underline{\Pi}} : \nabla\underline{u}} \Rightarrow \forall P \in \Omega$$

- NON È FRUTTO DI UN BILANCIO
- NON DIPENDE SOLO DAL BORDO MACCHINA

ABBIAMO DUNQUE RITROVATO CHE L'ENERGIA MECCANICA NON RAPPRESENTA UNA GRANDEZZA CONSERVATA!

L'ENERGIA MECCANICA È LA 1° GRANDEZZA NON CONSERVATA CHE VEDREMO NEL CORSO!

VEDIAMO ORA L'ENERGIA INTERNA COME 2° GRANDEZZA NON CONSERVATA:

$e_t = e_m + e_i$ DOVE:

CONOSCO $\begin{cases} \text{equaz. } (e_t) \\ \text{equaz. } (e_m) \end{cases}$

NEL SISTEMA DI NAVIER - STOKES - FOURIER :

$$\begin{cases} \bullet \text{ MASSA} \\ \bullet \text{ QDM} \\ \bullet \text{ ENERGIA TOTALE} \end{cases} \Longrightarrow$$

QUESTO SISTEMA E' SEMPRE RISOLTO DA UN SOFTWARE (CFD)

① AL POSTO DELL'ENERGIA TOTALE POSSO USARE ALTRE ENERGIE (PAGANDO IL FATTO CHE A 2° MEMBRO NON AVRÒ PIÙ ZERO!)
SPESSO SI PUÒ LAVORARE CON e_i O CON h (ENTALPIA).

② IL SISTEMA SI PUÒ RISOLVERE RISPETTO A :

- $(\rho, u_1, u_2, u_3, e_t)$
- (p, u_1, u_2, u_3, T)

LAVORANDO PER ESEMPIO CON (ρ, u_1, u_2, u_3, T)

$$\underbrace{u_1, u_2, u_3}_{e_k} \quad T \downarrow e_i$$

$$e_k + e_i + e_p = e_t$$

LAVORARE CON IL PRIMO PIUTTOSTO CHE IL SECONDO "SET" DIPENDE DALLA CONVENIENZA RELATIVA ALLO SPECIFICO PROBLEMA!

IN GENERALE, RISOLTO IL SISTEMA :

- CONOSCO IL "CAMPO DI MOTO" $\Longrightarrow$ IN OGNI PUNTO DEL VC SO TUTTO!

ATTRAVERSO LE VARIE RELAZIONI POSSO CALCOLARMI TUTTO QUELLO CHE VOGLIO! E' PROPRIO DOPO AVER RISOLTO IL SISTEMA CHE INIZIO AD UTILIZZARE LE GRANDEZZE NON CONSERVATE!

NEL SISTEMA DI NAVIER - STOKES - FOURIER :

$$\begin{cases} \bullet \text{ MASSA} \\ \bullet \text{ QDM} \\ \bullet \text{ ENERGIA TOTALE} \end{cases} \Longrightarrow$$ QUESTO SISTEMA E' SEMPRE RISOLTO DA UN SOFTWARE (CFD)

① AL POSTO DELL' ENERGIA TOTALE POSSO USARE ALTRE ENERGIE (PAGANDO IL FATTO CHE A 2° MEMBRO NON AVRÒ PIÙ ZERO!)
SPESSO SI PUÒ LAVORARE CON e_i O CON h (ENTALPIA).

② IL SISTEMA SI PUÒ RISOLVERE RISPETTO A :

- $(\rho, u_1, u_2, u_3, e_t)$
- (p, u_1, u_2, u_3, T)

LAVORANDO PER ESEMPIO CON (ρ, u_1, u_2, u_3, T)

$$\underbrace{u_1, u_2, u_3}_{e_k} + \underbrace{T}_{e_i} + e_p = e_t$$

LAVORARE CON IL PRIMO PIUTTOSTO CHE IL SECONDO "SET" DIPENDE DALLA CONVENIENZA RELATIVA ALLO SPECIFICO PROBLEMA!

IN GENERALE, RISOLTO IL SISTEMA :

- CONOSCO IL "CAMPO DI MOTO" $\Longrightarrow$ IN OGNI PUNTO DEL VC SO TUTTO!

> ATTRAVERSO LE VARIE RELAZIONI POSSO CALCOLARMI TUTTO QUELLO CHE VOGLIO! E' PROPRIO DOPO AVER RISOLTO IL SISTEMA CHE INIZIO AD UTILIZZARE LE GRANDEZZE NON CONSERVATE!

NEI CORSI DI BASE ABBIAMO DETTO CHE:

$$\boxed{h = e_i + p v} \qquad \text{DOVE: } v = \frac{1}{\rho}$$

APPLICANDO LA DERIVATA LAGRANGIANA:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De_i}{Dt} + \underbrace{\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right)}_{\text{QUESTO TERMINE É NOTO}}$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{p}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho^2}p\frac{D\rho}{Dt}$$

ORA, MOLTIPLICANDO TUTTO PER ρ:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = \rho\frac{De_i}{Dt} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}$$

$$\rho\frac{De_i}{Dt} = \frac{\partial(\rho e_i)}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho e_i \underline{u}) = -\nabla\cdot\underline{q} - \underline{\underline{\Pi}} : \nabla\underline{u}$$

INOLTRE, ESSENDO: $\boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho\nabla\cdot\underline{u}}$ SI OTTIENE CHE:

$$\rho\frac{Dh}{Dt} = -\nabla\cdot\underline{q} - \underline{\underline{\Pi}} : \nabla\underline{u} + \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho}\left(-\rho\nabla\cdot\underline{u}\right) \Rightarrow$$

DAI CORSI DI BASE AVEVAMO VISTO CHE LE RELAZIONI DI GIBBS AFFERMANO CHE:

δq ⇒ DIFFERENZIALE NON ESATTO (NON ARRIVA DA UNA DERIVATA)

I° PT $\boxed{\delta q - \delta l_i = de_i}$

PUR ESSENDO LA RELAZ. DI GIBBS GENERALE, NOI LA RICAVEREMO IN UN CASO REVERSIBILE:

$\boxed{Tds - pdv = de_i}$ ⇒ RELAZ. (1) DI GIBBS (GENERALE)

ORA, PER OTTENERE LA 2° RELAZ.:

$$Tds - pdv = dh - d(pv) = dh - pdv - vdp \Rightarrow$$

$\boxed{Tds + vdp = dh}$ ⇒ RELAZ. (2) DI GIBBS (GENERALE)

PER USARE ORA LE RELAZ. RICAVATE NEI CORSI DI 1° LIVELLO MI E' SUFFICIENTE PRENDERE IN CONSIDERAZ. LE DERIVATE LAGRANGIANE:

$$T\frac{Ds}{Dt} + \frac{1}{\rho}\frac{Dp}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} \Rightarrow T\rho\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} \quad (C)$$

DA CUI PRENDENDO IN CONSIDERAZ. LA RELAZ. DELL'ENTALPIA:

$$T\rho\frac{Ds}{Dt} = \text{equaz. ENTALPIA} - (C) = (A) + (B) \Rightarrow$$

$$\|u\|_{max} = u$$

c_s ⟹ VELOCITÀ DEL SUONO (ca. $340 \frac{m}{s}$ IN ARIA)

È DUNQUE COMODO FAR INTERVENIRE IL NUMERO DI MACH:

$$\boxed{Ma = \frac{u}{c_s}}$$

SE $\boxed{Ma < 0{,}2}$ ⟹ APPLICAZ. TERRESTRI "STANDARD"

SE $\boxed{Ma > 0{,}2}$ ⟹ APPLICAZ. AERONAUTICHE

NEL CASO IN CUI $Ma < 0{,}2$ È POSSIBILE EFFETTUARE DELLE SEMPLIFICAZIONI DEL SISTEMA DI NAVIER-STOKES-FOURIER:

$$\frac{D\rho}{Dt} = -\rho \nabla \cdot \underline{u}$$

SE $\boxed{Ma \ll 1}$ SI PUÒ ASSUMERE CHE $\boxed{\rho = \rho_0}$ DUNQUE:

$$\boxed{\nabla \cdot \underline{u} = 0}$$

TUTTAVIA PERCHÉ SCORRERE LENTAMENTE (CON DEFLUSSI A BASSA VELOCITÀ) IMPLICA AVERE DENSITÀ COSTANTE?

SI CONSIDERI UN CONDOTTO AVENTE SEZIONE VARIABILE:

LA SCORSA VOLTA ERAVAMO ARRIVATI A SCRIVERE:

$$T\rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{-\nabla \cdot \underline{q}_\alpha}_{\text{(A) TERMICO (FLUSSO)}} + \underbrace{\underline{\underline{\Pi}}_v : \nabla \underline{u}}_{\text{(B) FLUIDODINAMICO (NON E' UN FLUSSO)}}$$

IN QUESTA RELAZ. INTERMEDIA PER RICAVARE L'ESPRESSIONE DELL' ENTROPIA:

- C'É SIA LA COMPONENTE TERMICA CHE QUELLA MECCANICA $\Rightarrow$ C'É UNA CERTA ESAUSTIVITA'
- TUTTAVIA UNO E' UN FLUSSO E UNO INVECE NO

INOLTRE ABBIAMO CHE:

$$[\underline{q}_\alpha] = \text{FLUSSO ENERGETICO} = \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

$$\left[\rho \frac{Ds}{Dt}\right] = \frac{[\nabla \cdot \underline{q}]}{[T]} = \left[\frac{W}{m^2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{K}\right] = \left[\frac{W}{m^3 K}\right]$$

É PRESENTE LA TEMPERAT.

QUELLO CHE NOI VORREMO É UN FLUSSO ENTROPICO:

$$[\underline{q}_\alpha] = \left[\frac{W}{m^2}\right] \Rightarrow \text{FLUSSO ENTROPICO?}$$

- UNA PARTE SIMMETRICA
- UNA PARTE ANTISIMMETRICA

(QUESTA "PROPRIETÀ" VEDREMO IN SEGUITO CHE CI CONSENTIRÀ DI SEMPLIFICARE I CALCOLI)

SI RICORDA CHE:

definiz.: $\underline{\underline{A}}^T = \underline{\underline{A}}$

TENSORE ASIMMETRICO

definiz.: $\underline{\underline{A}}^T = -\underline{\underline{A}}$

TENSORE ANTISIMMETRICO

IL GRADIENTE DI $\underline{u}$ SI PUÒ DUNQUE DECOMPORRE IN:

$$\nabla \underline{u} = \underbrace{\frac{(\nabla \underline{u} + \nabla \underline{u}^T)}{2}}_{\text{TERMINE SIMMETRICO}} + \underbrace{\frac{(\nabla \underline{u} - \nabla \underline{u}^T)}{2}}_{\text{TERMINE ANTISIMMETRICO}}$$

PERCHÉ TUTTAVIA SCOMPONIAMO IL GRADIENTE IN TERMINI SIMMETRICI?

LO FACCIAMO PER VIA DI UNA CERTA PROPRIETÀ:

proprietà: SE $\underline{\underline{A}}$ È SIMMETRICO E $\underline{\underline{B}}$ È ANTISIMMETRICO

$$\boxed{\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = 0}$$

QUALCHE VOLTA SI SCRIVE ANCHE:

$$\nabla \underline{u}^{(s)} : \nabla \underline{u}^{(s)} = \left(\nabla \underline{u}^{(s)} \right)^{2} \in \mathbb{R}$$

QUADRATO CON DOPPIO PRODOTTO SCALARE

QUESTO TERMINE SARA' DUNQUE SEMPRE POSITIVO! QUESTO INIZIA GIA' A RICHIAMARE IL 2° PPT (DOVE LA PRODUZ. DI ENTROPIA DOVUTA ALLE IRREVERSIBILITA' E' UN QUALCOSA DI SEMPRE POSITIVO!).

VEDIAMO ORA IL TERMINE (A):

$$T \rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{- \nabla \cdot \underline{q}_{\alpha}}_{(A)} + 2\mu \left(\nabla \underline{u}^{(s)} \right)^{2}$$

PER LAVORARE SUL TERMINE (A) SI EFFETTUANO LE SEGUENTI OPERAZ.:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = - \frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q}_{\alpha} + \frac{2\mu}{T} \left(\nabla \underline{u}^{(s)} \right)^{2}$$

IL TERMINE (A) DIVIENE DUNQUE UN QUALCOSA DI INTERMEDIO TRA UNA DIVERGENZA E UN QUALCOSA CHE NON E' DIVERGENZA!

RICORDANDO IL MODELLO DI FOURIER: $\boxed{\underline{q}_{\alpha} = - \lambda \nabla T}$

COMPLESSIVAMENTE SI OTTIENE QUINDI CHE:

$$\boxed{\rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{-\nabla\cdot\left(\frac{1}{T}\,\underline{q}_\alpha\right) + \frac{\lambda}{T^2}\left(\nabla T\right)^2}_{(A)/T} + \underbrace{\frac{2\mu}{T}\left(\nabla \underline{u}^{(s)}\right)^2}_{(B)/T}}$$

IL TERMINE (A) CONTIENE DENTRO DI SE' LA DIVERGENZA DI UN FLUSSO ENTROPICO $\left(\frac{1}{T}\,\underline{q}_\alpha\right)$

COME NOMENCLATURA:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \underbrace{-\nabla\cdot\left(\frac{1}{T}\,\underline{q}_\alpha\right)}_{\nabla\cdot\text{ FLUSSO ENTROPICO}} + \underbrace{\frac{\lambda}{T^2}\left(\nabla T\right)^2}_{\text{IRREVERSIBILITA' TERMICA } (\geq 0)} + \underbrace{\frac{2\mu}{T}\left(\nabla \underline{u}^{(s)}\right)^2}_{\text{IRREVERSIBILITA' FLUIDODINAMICA } (\geq 0)}$$

CERCANDO DI RENDERE SIMILE LA SCRITTURA DELL' EQUAZ. DELL' ENTROPIA A QUELLA DELLE ALTRE GRANDEZZE:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \underbrace{\nabla\cdot(\rho s \underline{u})}_{\text{FLUSSO AVVETTIVO}} = -\nabla\cdot\left(\frac{1}{T}\,\underline{q}_\alpha\right) + \sigma_\alpha + \sigma_\nu$$

DOVE:

$$\boxed{\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\lambda}{T^2}\left(\nabla T\right)^2 \\ \sigma_\nu &= \frac{2\mu}{T}\left(\nabla \underline{u}^{(s)}\right)^2 \end{aligned}}$$

A VOLTE QUESTI 2 TERMINI SI POSSONO ANCHE SCRIVERE COME:

L'ASPETTO CHE A NOI REALMENTE INTERESSA È IL 2° MEMBRO "$\sigma_\alpha + \sigma_v$" DELL'ESPRESSIONE PRECEDENTE!

VOGLIAMO ORA GENERALIZZARE I TERMINI $\sigma_\alpha + \sigma_v$ POICHÉ SPESSO POSSO AVERE FENOMENI FISICI NON ASSOCIABILI DIRETTAM. AD UN QUALCOSA DI TERMICO O DI FLUIDODINAMICO:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho s \underline{u} + \frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right) = \sum_{n=1}^{\text{TUTTI I FENOMENI IRREVERSIBILI}} \sigma_n \geq 0$$

CIASCUN FENOMENO FISICO PORTA CON SÉ UNA $\sigma \geq 0$!

QUELLI CHE ABBIAMO VISTO PRIMA (σ_α e σ_v) NON SONO NIENT'ALTRO CHE 2 ESEMPI DI FENOMENI IRREVERSIBILI!

LE σ PER GENERICI FENOMENI FISICI IRREVERSIBILI SONO TUTTE CARATTERIZZATE DALLA SEGUENTE STRUTTURA:

$$\boxed{\sigma_n = \frac{1}{T} \cdot \text{PROPRIETÀ TERMOFISICA} \cdot \left(\nabla f * \nabla f \right) \in \mathbb{R}}$$

LE σ_n SONO SEMPRE $\in \mathbb{R}$ ANCHE SE I FENOMENI SONO REGOLATI DA OPERATORI COMPLETAMENTE DIVERSI TRA DI LORO.

DIMENSIONALMENTE:

$$[\sigma] = \left[\nabla \cdot \left(\frac{1}{T} \underline{q}_\alpha \right) \right] = \left[\frac{1}{m} \cdot \frac{W}{m^2} \cdot \frac{1}{K} \right] = \left[\frac{W/K}{m^3} \right]$$

POTENZA ENTROPICA PER UNITÀ DI VOLUME

QUALSIASI **FENOMENO** IRREVERSIBILE PORTA CON SÉ UNA σ CHE DIMENSIONALMENTE È UNA POTENZA ENTROPICA PER UNITÀ DI VOLUME $\rightarrow$ LE σ_N SONO TUTTE CONFRONTABILI TRA DI LORO!

RISPETTO AI CORSI DI 1° LIVELLO QUI TRATTO L'ENTROPIA:

- SCOMPONGO IL FENOMENO A LIVELLO LOCALE
- DISTINGUO DIVERSI FENOMENI FISICI (σ PER I VARI FENOMENI)

FACCIAMO DUNQUE UNA "DOPPIA DECOMPOSIZIONE" CIRCA LA PRODUZIONE DI ENTROPIA:

- PER PUNTI $\quad P \in \Omega$
- PER FENOMENO $\quad \sum \sigma_h$

NEI CORSI DI 1° LIVELLO ERA IMPOSSIBILE CALCOLARE DIRETTAM. LA PRODUZ. DI ENTROPIA DOVUTA ALLE IRREVERSIBILITÀ POICHÉ NON SI FACEVA UN USO DOVUTO DEL GRADIENTE (IL QUALE CONSENTE DI TRATTARE DISTRIBUZIONI DISOMOGENEE).

SE TUTTO È OMOGENEO NON HO GRADIENTI E DUNQUE NON HO σ_N!

NEI CORSI DI 1° LIVELLO ASSUMEVAMO SEMPRE CAMPI OMOGENEI!

IL FATTO CHE IO POSSA RICONDURRE TUTTI I FENOMENI AD UNA CERTA σ_N FA SÌ CHE QUESTO CONCETTO SI PONGA COME "TERMINE DI PARAGONE"!

TUTTAVIA, NELLA PRECEDENTE EQUAZ. (DI STEVIN) SE SI IPOTIZZA $\rho \cong 0$ OPPURE UN SOLIDO INDEFORMABILE (COME NEL NOSTRO CASO) SI OTTIENE CHE:

- $\rho = \text{cost} \Rightarrow \boxed{Ⓒ = 0}$

PERTANTO COMPLESSIVAMENTE AVREMO CHE:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q}$$

RICORDANDO FOURIER INOLTRE:

$$\rho \frac{\partial h}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T)$$

(NEL CASO DI MATERIALI COMPOSITI:

$$\lambda \longrightarrow \Lambda \text{ (TENSORE)} \Rightarrow \underline{q} = -\Lambda \cdot \nabla T$$

SI ESPRIME LA CONDUCIBILITA' TERMICA CON UN TENSORE!)

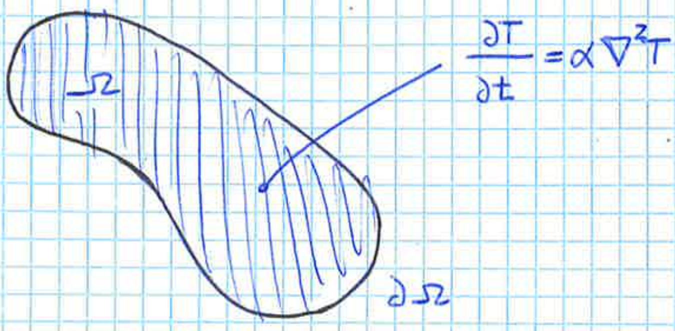
CONSIDERANDO ORA LA COSTANZA DELLE PROPRIETA' TERMOFISICHE:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla \cdot \nabla T = \lambda \nabla^2 T$$

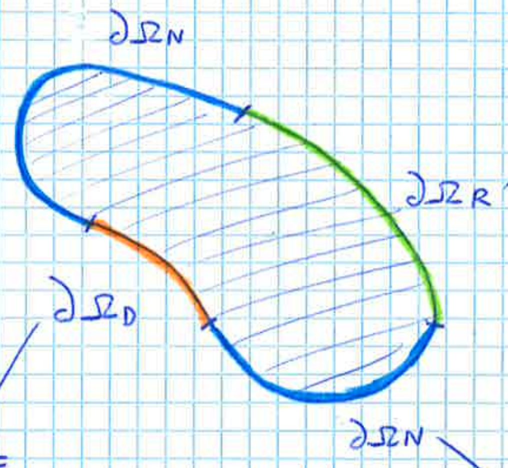
(SI RICORDA CHE: $\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2}$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 81 di 226

SI SUPPONGA DI AVERE UN VC Ω, UN BORDO $\partial\Omega$ e L'EQUAZ. DELLA CONDUZIONE:



DISTINGUIAMO ORA IL BORDO $\partial\Omega$ IN ALCUNI "SOTTOBORDI" CHE SODDISFANO LE DIVERSE CONDIZ. AL CONTORNO:



QUI CI ASPETTIAMO DI POTER APPLICARE LE CONDIZ. AL CONTORNO DI ROBIN

QUI CI ASPETTIAMO DI POTER APPLICARE LE CONDIZ. AL CONTORNO DI DIRICHLET

QUI CI ASPETTIAMO DI POTER APPLICARE LE CONDIZ. AL CONTORNO DI NEUMANN

DUNQUE NOI AVREMO CHE:

$$\boxed{\partial\Omega = \underbrace{\partial\Omega_D}_{1} \cup \underbrace{\partial\Omega_N}_{2} \cup \underbrace{\partial\Omega_R}_{3}}$$

VEDIAMO ORA QUESTE 3 CONDIZ. AL CONTORNO:

NORMALMENTE NELLE NOSTRE ANALISI LA TEMPERATURA SARÀ L'INCOGNITA DEL PROBLEMA, CONSEGUENZA DEI FLUSSI TERMICI IMPOSTI!

② CONDIZ. AL BORDO DI NEUMANN

$$P \in \partial\Omega_N \qquad \boxed{\underline{q} = \underline{q}_N \quad \text{NOTO}} \qquad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$

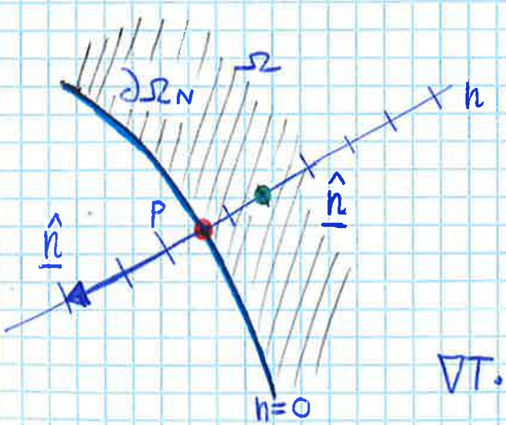
CON QUESTE CONDIZIONI VADO AD IMPORRE UN FLUSSO!

TUTTAVIA NEL PRESENTARE IL PROBLEMA AD UN MATEMATICO DOVRÒ ADOTTARE QUALCHE ACCORGIM. POICHÉ L'EQUAZ. DIFFER. È SCRITTA RISPETTO ALLA TEMPERATURA!

DEVO QUINDI RIFORMULARE IL FLUSSO TERMICO FACENDO "SALTAR FUORI" LA TEMPERATURA:

$$-\lambda \nabla T = \underline{q}_N \qquad (\text{MODELLO DI FOURIER})$$

SUL BORDO DI NEUMANN QUELLO CHE SI FA È PROIETTARE QUESTA CONDIZ. AL CONTORNO LUNGO $\underline{\hat{n}}$:



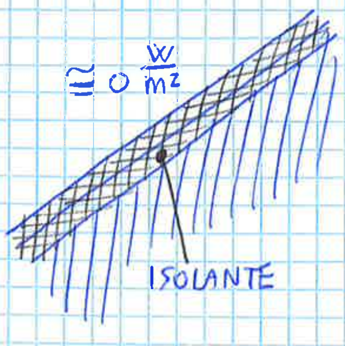
$$-\lambda \nabla T \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{q}_N \cdot \underline{\hat{n}}$$

COMPARE QUINDI LA DERIVATA DIREZIONALE! OVVERO:

$$\nabla T \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{\partial T}{\partial x_1}\hat{n}_1 + \frac{\partial T}{\partial x_2}\hat{n}_2 + \frac{\partial T}{\partial x_3}\hat{n}_3$$

$$\nabla T \cdot \underline{\hat{n}} = \frac{\partial T}{\partial n} = \lim_{\Delta n \to 0} \frac{T(\Delta n) - T(0)}{\Delta n} \Rightarrow$$

LA DERIVATA DIREZ. CI DEVE ESSERE SOLO NEI PUNTI DALLA PARTE DEL DOMINIO



$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial n} = 0}$$ (NEUMANN OMOGENEO)

③ CONDIZ. AL BORDO DI ROBIN

QUESTA RAPPRESENTA LA CONDIZ. AL CONTORNO PIÙ VERSATILE! DAL PUNTO DI VISTA MATEMATICO TUTTAVIA È QUELLA PIÙ "DEBOLE":

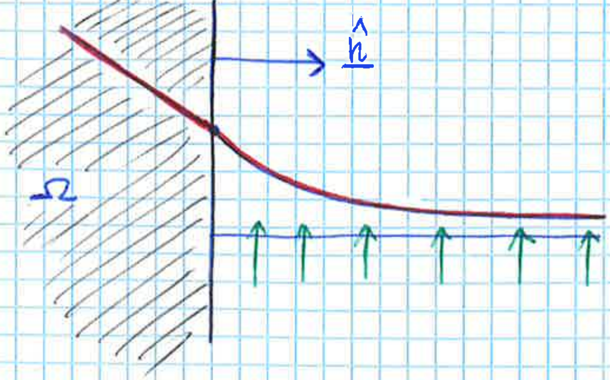
$P \in \partial\Omega_R$ $$\boxed{\underline{q} = \underline{f}(T)}$$ (FLUSSO AL BORDO)

PARTENDO ANCHE QUI DALL'ESPRESSIONE DI FOURIER:

$$-\lambda \nabla T = \underline{f}(T) \Rightarrow -\lambda \nabla T \cdot \underline{\hat{n}} = \underline{f}(T) \cdot \underline{\hat{n}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

QUELLE CHE VEDREMO NOI SONO LE CONDIZ. DI ROBIN LINEARI (DOVE LA FUNZIONE $\underline{f}(T)$ È DEL PRIMO ORDINE):

CONSIDERANDO PER ESEMPIO UN SOLIDO PIÙ CALDO DELL'AMBIENTE RAFFREDDATO DA UN CERTO VENTO:



IL GRADIENTE PUNTA VERSO LE ZONE A MASSIMA TEMPERATURA

$\Downarrow$

$$\boxed{\underline{q} \cdot \underline{\hat{n}} > 0 \ \wedge \ \nabla T \cdot \underline{\hat{n}} < 0}$$

CONSIDERANDO LA RELAZ. DI NEWTON PER LO SCAMBIO TERMICO CONVETTIVO:

- PARTO DALL' APPLICAZIONE
- STIMO IL DEFLUSSO
- CALCOLO IL NUMERO DI Re
- CALCOLO IL NUMERO DI Nu
- CALCOLO hc
- RICAVO L'ESPRESSIONE DELLA CONDIZ. AL CONTORNO DI ROBIN

IN PARTICOLARE:

$$\boxed{Nu = \frac{h_c\, L}{\lambda_{FLUIDO}}}$$

L: LUNGH. CARATTERISTICA

SI OSSERVA CHE NELLA PRECEDENTE ESPRESSIONE LA CONDUCIBILITA' NON E' QUELLA DEL SOLIDO, BENSI' E' QUELLA DEL FLUIDO!

NUMERICAMENTE INOLTRE:

$$\lambda_{SOLIDO} >> \lambda_{FLUIDO}$$

CONSIDERANDO LA RELAZ. DI ROBIN É ANCHE POSSIBILE INTRODURRE UN ALTRO NUMERO ADIMENSIONALE:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{h_c\,(T_\infty - T)}{\lambda_{(SOLIDO)}} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial (n/L)} = \frac{h_c L}{\lambda_{(SOLIDO)}}\,(T_\infty - T)$$

RELATIVA AL FLUIDO!

$\boxed{Bi \ (BIOT)}$

$\Downarrow$

NUMERO ADIMENSIONALE METÀ RELATIVO AL FLUIDO E METÀ RELATIVO AL SOLIDO!

ATTENZIONE POICHÉ:

$$\boxed{Bi = \frac{h_c L}{\lambda_{(SOLIDO)}} \neq Nu = \frac{h_c L}{\lambda_{(FLUIDO)}}}$$

SAPENDO INOLTRE CHE, AVENDO UNA CONDUZIONE:

$$\underline{q} \cdot \underline{\hat{n}} = k(T - T_\infty) \Rightarrow \text{HO UN FENOMENO DI CONDUZIONE}$$

PUR AVENDO UN FENOMENO FISICO COMPLETAM. DIFFERENTE DA PRIMA PER ANALOGIA ELETTRICA POSSO AFFERMARE CHE LA PRECEDENTE RELAZ. SIA LA MEDESIMA DI QUELLA RELATIVA ALLE CONDIZ. DI ROBIN (DOVE HO FENOMENI CONVETTIVI).

IL "k" DI FATTO DERIVA DALL'ANALOGIA ELETTRICA!

> DUNQUE PER POTER APPLICARE ROBIN È SUFFICIENTE AVERE UNA RELAZ. CHE LEGHI UN FLUSSO AD UNA DIFFER. DI TEMPERAT.!

MER 26 APR

VEDIAMO ORA L'ANALISI DI SISTEMA, CHE SI DIFFERENZIA DALL'ANALISI DI COMPONENTE PER:

- LIVELLO DI DETTAGLIO

NELL'ANALISI DI SISTEMA AVREMO DUNQUE BISOGNO DI STRUMENTI PIÙ SEMPLICI $\Rightarrow$ DESCRIZIONE SEMPLIFICATA.

LA DESCRIZIONE SEMPLIFICATA CHE USEREMO È QUELLA INTEGRALE (UNA VOLTA SCELTO IL VC OVVIAMENTE).

DI FATTO PARTIAMO DA UNA DESCRIZIONE PUNTUALE E POI INTEGRIAMO. IN QUESTO MODO:

- RITROVIAMO I TERMINI VISTI NEI CORSI DI PRIMO LIVELLO
- SCOPRIAMO COME CALCOLARE QUESTI TERMINI NELLO SPECIFICO

PER UN GENERICO PUNTO $P \in \Omega$, PER ESEMPIO, CONSIDERANDO L'EQUAZ. DELL'ENTROPIA:

VEDIAMO QUESTI TERMINI UNO AD UNO:

- $$\int_{\Omega} \boxed{\nabla \cdot (-\underline{q}_\alpha)}\, dV = \int_{\partial\Omega} (-\underline{q}) \cdot \hat{\underline{n}}\, ds = \int_{\partial\Omega} \underline{q} \cdot (-\hat{\underline{n}})\, ds$$

UTILIZZANDO IL TEOREMA DI GAUSS "AL CONTRARIO"

SUDDIVIDENDO ORA IL BORDO DI Ω IN TANTE PORZIONI (QUESTA OPERAZ. E' COMODA DAL PUNTO DI VISTA APPLICATIVO):

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=0}^{M} \partial\Omega_j$$

DUNQUE SI OTTIENE:

$$= \sum_{j=0}^{M} \underbrace{\int_{\partial\Omega_j} \underline{q} \cdot (-\hat{\underline{n}})\, ds}_{\phi_j} = \boxed{\sum_{j=0}^{M} \phi_j}$$

ϕ_j (POSITIVO SE ENTRANTE) $(-\hat{\underline{n}})$

DEVO QUINDI CALCOLARE UN INTEGRALE DI SUPERF. DI UN FLUSSO PROIETTATO $\Rightarrow$ DISCRETIZZAZIONE DEL DOMINIO.

- $$\int_{\Omega} \boxed{\nabla \cdot (\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u})}\, dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{\Pi}}_v \cdot \underline{u}) \cdot \hat{\underline{n}}\, ds$$

th DI GAUSS

AFFINCHE' QUEST'ULTIMO INTEGRALE SIA $\neq 0$ DEV'ESSERCI QUALCOSA CHE SI MUOVE (ALTRIMENTI NON HO POTENZA MECCANICA)!

OTTENGO DUNQUE:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(U + E_K + E_P\right)}$$

- $$\boxed{\nabla \cdot \left(\rho e_t \underline{u} + \rho p v \underline{u}\right)}$$

$$\left(p \underline{\underline{I}} \cdot \underline{u} = p \underline{u} = \rho p \frac{1}{\rho} \underline{u} = \rho (p v) \underline{u}\right)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\rho e_t \underline{u} + \rho p v \underline{u}\right) dV = \int_{\partial\Omega} \left(\rho e_t \underline{u} + \rho p v \underline{u}\right) \cdot \hat{\underline{n}} \, dS \Rightarrow$$

$$= \int_{\partial\Omega} \rho \left(e_i + e_m + p v\right) \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$

ESSENDO ORA: $\boxed{e_i + p v = h}$ TERMINE DOVUTO ALLO SPOSTAMENTO

$$= \int_{\partial\Omega} \rho \left(h + e_K + e_p\right) \underline{u} \cdot \hat{\underline{n}} \, dS$$

COSÌ FACENDO L'ARGOMENTO DELL'INTEGRALE È MOLTO SIMILE A QUELLO CHE ERAVAMO ABITUATI A VEDERE NEL PRIMO PRINCIPIO X I SISTEMI APERTI NEI CORSI DI BASE.

IN PRATICA, POSSIAMO "ACCORPARE" IL TERMINE pv ALLA FUNZ. DI STATO e_i POICHÉ QUESTO NON DIPENDE NÉ DALLA VISCOSITÀ, NÉ DAL CAMPO DI MOTO [LA PARTE ISOTROPICA DEL TENSORE DEGLI SFORZI NON DIPENDE DA $\nabla \underline{u}$ ⇒ SI PUÒ CONSIDERARE COME FUNZ. DI STATO]

$$(h+ek+ep)_i = \frac{\int_{\partial\Omega i} \rho(u+ek+ep)\underline{u}\cdot\hat{\underline{n}}\,ds}{\int_{\partial\Omega i} \rho\underline{u}\cdot\hat{\underline{n}}\,ds}$$

③ MODO — UN ULTIMO MODO DI VEDERE IL FENOMENO É QUELLO DI USARE UN "PESO":

$$\boxed{dG = \rho\underline{u}\cdot\hat{\underline{n}}\,ds}$$

$$(h+ek+ep)_i = \frac{\int_{\partial\Omega i}(h+ek+ep)\,dG}{\int_{\partial\Omega i} dG}$$

IN OGNI CASO QUELLO CHE OTTENGO É:

$$= \boxed{\sum_{i=0}^{N} G_i\,(h+ek+ep)_i}$$

INTRODUCENDO ORA:
$$\boxed{-\dot{W}t^{*} = -\dot{W}t - \frac{d(p_0V)}{dt}}$$

$$\boxed{\sum_{j=0}^{M}\dot{\Phi}_j - \dot{W}t = \frac{d}{dt}(U+E_k+E_p+p_0V) + \sum_{i=0}^{N} G_i\,(h+ek+ep)_i}$$

IN GENERALE NEL PASSARE DA UN'EQUAZ. ALL'ALTRA DOVRÓ RISOLVERE UN INTEGRALE DI SUPERFICIE!

SCHEMATICAMENTE QUEST'ULTIMA EQUAZ. e':

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 226