NUMERO: 2229A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Bongiorni Lorenzo

MATERIA: Modelli e Metodi Numerici - Prof. Canuto

METODI E MODELLI NUMERICI

GIO 9 MAR

Claudio Canuto

MODELLO NUMERICO $\Longrightarrow$ CONSENTE DI OTTENERE SOLUZIONI A PROBLEMI (IN GENERE COMPLICATI) NON RISOLVIBILI IN FORMA ANALITICA.

ESAME SCRITTO
- → RISOLUZIONE DI ESERCIZI
- → TEST A RISPOSTA MULTIPLA SULLA CONOSCENZA DI MATLAB
- → REDAZIONE PROGETTO (PARTE NUMERICA) (FACOLTATIVO : VALE 5 PUNTI)

• DERIVAZIONE NUMERICA

LE RELAZIONI CHE VEDREMO SONO PERLOPIÙ DIFFERENZIALI. IN GENERALE, NON SEMPRE È POSSIBILE TRATTARE IN MANIERA "ESATTA" QUESTE DERIVATE.

SOSTITUIREMO DUNQUE LA DERIVATA ESATTA CON UNA RELAZ. APPROSSIMATA. DI FATTO APPROSSIMO LA FUNZ. D'INTERESSE CON UN POLINOMIO (IL QUALE RISULTA FACILMENTE DERIVABILE).

SIA v UNA FUNZIONE : $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ DERIVABILE + VOLTE

SE VOGLIO CALCOLARE LA DERIVATA PRIMA DI v IN x:

RICORRENDO AGLI SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR:

$$v(x+\Delta x) = v(x) + v'(x)\Delta x + \frac{1}{2} v''(x)\Delta x^2 + o(\Delta x^2)$$

QUELLO APPENA SCRITTO E' UNO SVILUPPO ARRESTATO AL 2° ORDINE

CON QUALCHE PASSAGGIO SI OTTIENE CHE:

$$\frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} = v'(x) + \frac{1}{2} v''(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

TRASCURANDO IL RESTO DI TAYLOR SI HA CHE:

$$\boxed{err(\Delta x) \cong \frac{1}{2} v''(x)\Delta x} \Rightarrow \text{ERRORE AL 1° ORDINE}$$

IN QUESTO FRANGENTE SI DICE CHE L'APPROSSIMAZ. EFFETTUATA E' DEL PRIMO ORDINE.

GRAFICAMENTE QUINDI:

(IL GRAFICO E' UNA RETTA SOLO SE SI TRASCURA IL RESTO!)

(2) QUI SCELGO UN PUNTO ALLA SINISTRA DI X:

$$\boxed{err(\Delta x) \cong -\frac{1}{2} v''(x)\, \Delta x} \Rightarrow \text{ERRORE DEL PRIMO ORDINE}$$

ANCHE QUI HO UNA PRECISIONE DEL PRIMO ORDINE!

SI OSSERVA CHE IL 1° ed IL 2° METODO APPROSSIMANO LA $v'(x)$ PER ECCESSO E PER DIFETTO!

③ IN QUESTO 3° METODO FACCIO LA MEDIA DELLE APPROSSIMAZ. OTTENUTE NEI 2 CASI PRECEDENTI:

$v'(x)$ LA APPROSSIMO COME $\frac{1}{2}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \frac{1}{2}\frac{v(x)-v(x-\Delta x)}{\Delta x}$

CON QUALCHE CONTO:

$$v'(x) \cong \frac{v(x+\Delta x)-v(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

RAPPORTO INCREMENTALE CENTRATO

DAL PUNTO DI VISTA GEOMETRICO QUELLO CHE STIAMO FACENDO E' CONSIDERARE UNA PARABOLA PASSANTE PER I 3 PUNTI:

IN QUESTO CASO L'ERRORE SARÀ:

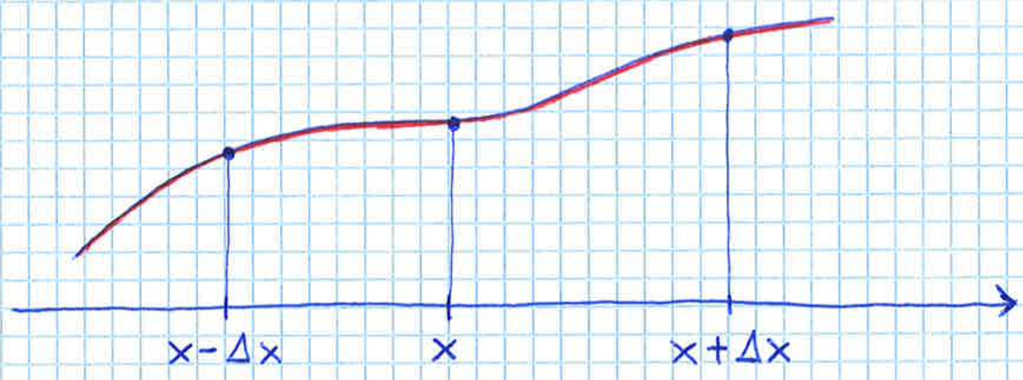
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 7 di 258

SE Δx É PICCOLO QUESTO METODO PORTA UN' APPROSSIMAZ. MIGLIORE!

ESISTONO DELLE FORMULE CHE CONSENTONO DI AVERE UN ERRORE DEL 2° ORDINE ANCHE NEI CASI IN CUI HO UN ESTREMO DEL DOMINIO DELLA FUNZIONE.

- APPROSSIMAZIONE DELLA DERIVATA SECONDA

PER FARE CIÓ POSSIAMO COSTRUIRE UN RAPPORTO INCREM. DI RAPPORTO INCREMENT. :



$$v''(x) = \frac{\dfrac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} - \dfrac{v(x) - v(x-\Delta x)}{\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{v(x+\Delta x) - 2v(x) + v(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$

QUEST'ULTIMA QUANTITA' E' NOTA COME : RAPPORTO INCREM. SECONDO CENTRATO

GEOMETR. QUESTA OPERAZ. CONSISTE NEL CALCOLARE LA DERIVATA SECONDA (COSTANTE) DELLA PARABOLA PASSANTE PER I 3 PUNTI.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 9 di 258

INDICE DEL CORSO

L'EQUAZ. DI EQUILIBRIO DEL VOLUMETTO SARÀ:

$$\int_{\Delta V} f\, dV + \int_{\Sigma_{x_1+\Delta x}} \bar{\sigma}\, n\, d\Sigma - \int_{\Sigma_{x_1}} \bar{\sigma}\, n\, d\Sigma = 0$$

DOVE:

ΔV : IL VOLUME DEFORMATO PER EFFETTO DELLA FORZA APPLICATA

n : NORMALE ALLA SEZIONE TRASFORMATA DEL FILO

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_2 & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{23} & \sigma_3 \end{pmatrix}$$ È IL TENSORE DEGLI SFORZI

POICHÉ LA CONFIGURAZ. DEFORMATA SARÀ MOLTO VICINA ALLA CONFIGURAZ. DI RIFERIMENTO (GLI SPOSTAM. SI SUPPONGONO PICCOLI):

$$\int_{\Delta V} f\, dV \cong \int_{\Delta V_0} f\, dV = \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \left(\int_S f(x, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3 \right) dx = |S| \int_{x_1}^{x_1+\Delta x} \tilde{f}(x)\, dx$$

AVENDO TRASCURATO LE VARIAZ. NELLA SEZIONE, ESSENDO QUESTA MOLTO PICCOLA. DUNQUE:

$$\tilde{f}(x_1) = \frac{1}{|S|} \int_S f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3 \Rightarrow \text{QUANTITÀ MEDIATA}$$

PROCEDENDO IN MODO ANALOGO ANCHE CON GLI INTEGRALI DI SUPERFICIE

SE $\Delta x \to 0$ OTTENGO CHE:

$$\boxed{f_3(x_1) + \frac{d\tau_{31}}{dx}(x_1) = 0}$$

EQUAZ. DI EQUILIBRIO

CON $x_1 \in (0, L)$

QUEST'ULTIMA EQUAZ. ESPRIME LA CONDIZ. DI EQUILIBRIO DEL FILO!

CONSIDERANDO ORA IL MATERIALE COME PERFETTAM. ELASTICO:

$$\underline{\sigma} = 2\mu\,\underline{\varepsilon} + \lambda\,\mathrm{tr}(\underline{\varepsilon})\,\underline{I}$$

$\underline{I}$: TENSORE IDENTITA'

LA COMPONENTE "31" DI QUESTA EQUAZ. E':

$$\tau_{31} = 2\mu\,\varepsilon_{31}$$

DOVE PER DEFINIZIONE:

$$\tau_{31} = \cancel{2}\mu\,\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial u_1}{\partial x_3}}}_{\cong 0}\right)$$

DUNQUE SI OTTIENE CHE:

$$\boxed{\tau_{31} = \mu\,\frac{\partial u_3}{\partial x_1}}$$

$\Rightarrow$ EQUAZ. COSTITUTIVA

PONENDO ORA A SISTEMA L'EQUAZ. DI EQUIL. E L'EQUAZ. COSTITUTIVA E SEMPLIFICANDO LA NOTAZ. TOGLIENDO I PEDICI:

$$\begin{cases} \dfrac{d\tau}{dx} + f = 0 & \text{IN } (0,L) \\[2ex] \tau = \mu\,\dfrac{du}{dx} & \text{IN } (0,L) \\[2ex] u(0) = u(L) = 0 & \Rightarrow \boxed{\text{CONDIZ. AL BORDO}} \end{cases}$$

- IL MODELLO DI SBARRA TERMICA

SUPPONENDO DI AVERE UNA SBARRA METALLICA CHE CONDUCE IL CALORE, INDICANDO CON $u = u(x,t)$ LA TEMPERAT. MEDIA DELLA SBARRA NELLA POSIZ. X E NEL TEMPO t SI HA CHE:

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \rho q$$

NEL CASO STAZIONARIO (IL TRANSITORIO SI E' ESTINTO) SI OTTIENE LA SEGUENTE EQUAZ. SEMPLIFICATA:

$$-\frac{d}{dx}\left(k \frac{du}{dx}\right) = \rho q$$

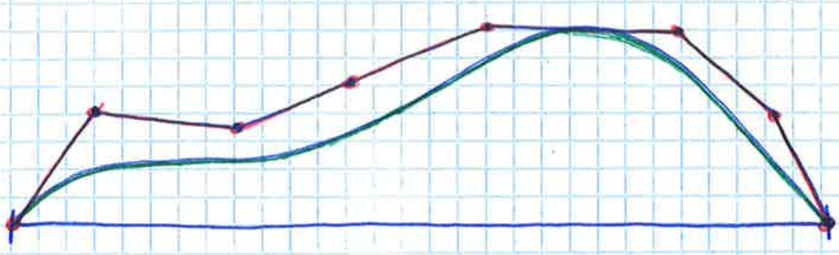
QUEST'ULTIMA HA LA STESSA FORMA DELL'EQUAZ. VISTA NEL CASO PRECEDENTE DEL FILO ELASTICO!

PONENDO QUI COME CONDIZ. AL BORDO:

$u(0) = g_0 \qquad u(L) = g_L \qquad$ CONDIZ. DI DIRICHLET

OPPURE:

$u(0) = g_0 \qquad \mu \frac{du}{dx}(L) = \gamma_L \qquad$ CONDIZ. DI NEUMANN



NEL PROBLEMA DEL FILO ELASTICO NOI CONOSCIAMO:

$$\begin{cases} u_0 = u(0) = 0 \\ u_{N+1} = u(L) = 0 \end{cases}$$

LE INCOGNITE SARANNO DUNQUE I NODI INTERNI CHE VANNO DA 1 A N $\Longrightarrow$ DOBBIAMO TROVARE N INCOGNITE!

UN METODO ALLE DIFFERENZE FINITE SI BASA SUI SEGUENTI INGREDIENTI FONDAMENTALI:

① APPROSSIMO LE DERIVATE CHE COMPAIONO NELLE EQUAZ. MEDIANTE FORMULE DI DERIVAZ. NUMERICA (COME AD ESEMPIO RAPPORTI INCREMENTALI) CHE FANNO INTERVENIRE NODI CONTIGUI DELLA GRIGLIA.

② RICHIEDERE CHE LE EQUAZ. RISULTANTI SIANO VERIFICATE NEI NODI INTERNI.

CONSIDERANDO IL CASO DEL FILO ELASTICO OMOGENEO ($\mu = \text{COST}$):

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = f \Longrightarrow -\mu \frac{d^2u}{dx^2} = f$$

VOLENDO ORA DETERMINARE LE INCOGNITE $u_1, u_2, \dots, u_N$ CONSIDERO UN VETTORE COLONNA DI INCOGNITE, UN VETTORE COLONNA DI QUANTITA' NOTE $f_1, f_2, \dots, f_N$ ED UNA MATRICE AVENTE COME ELEMENTI QUELLI CHE SI OSSERVANO DALLE PRECEDENTI EQUAZIONI:

$$\frac{\mu}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_N \end{bmatrix}$$

SE PER ESEMPIO $N = 5$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{bmatrix}$$

ABBIAMO DUNQUE OTTENUTO UN SISTEMA LINEARE DI N EQUAZ. ed N INCOGNITE!

IL SISTEMA, SCRITTO IN FORMA MATRICIALE SARA':

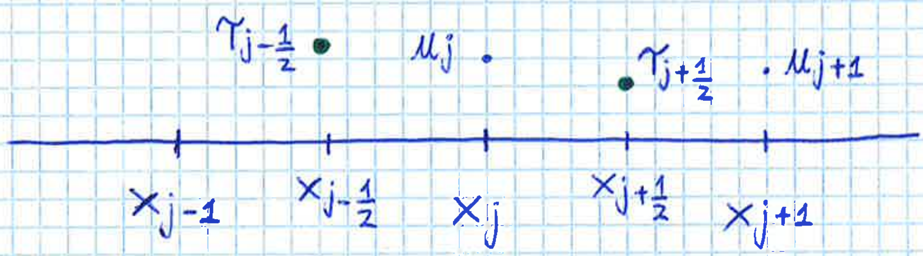
IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE, DUNQUE, TRADUCE UN'EQUAZ. DIFFERENZIALE (ACCOMPAGNATA DALLE SUE CONDIZ. AL BORDO) IN UN SISTEMA ALGEBRICO LINEARE!

GIO 16 MAR

VEDIAMO ORA UN CASO PIÚ GENERALE, CON COEFF μ VARIABILE:

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = f$$

SI INTRODUCONO QUI DEI PUNTI DI SUDDIVISIONE AUSILIARI A x_j (AVENTE PASSO DI DISCRETIZZAZ. h):



FACENDO IL RAPPORTO INCREMENT:

$$\frac{d\tau}{dx}(x_j) \cong \frac{\tau_{j+\frac{1}{2}} - \tau_{j-\frac{1}{2}}}{h} \Rightarrow \text{APPROSSIMAZ. DEL 2° ORDINE!}$$

SOSTITUENDO NELL'EQUAZ. DIFFERENZ:

$$\frac{\tau_{j+1/2} - \tau_{j-1/2}}{h} + f_j = 0 \qquad j = 1, \dots, N$$

LA LEGGE COSTITUTIVA SARÀ INVECE:

$$\tau = \mu \frac{du}{dx} \Rightarrow \tau_{j+1/2} = \mu_{j+1/2} \frac{u_{j+1} - u_j}{h} \qquad j = 0, \dots, N$$

VOGLIAMO IN PRATICA CAPIRE SE LA **MATRICE SIA SINGOLARE.**

SUPPONENDO DI AVERE UNA MATRICE A DI ORDINE $n \times n$:

A NON È SINGOLARE SE UNA DELLE SEGUENTI È VERA:

- $\det A \neq 0$
- MATRICE INVERTIBILE $\Rightarrow \exists B \in \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, AB = BA = I \qquad B = A^{-1}$
- $\forall b \in \mathbb{R}^N \ \exists x \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b}$
- $A\underline{x} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} = \underline{0}$
- 0 NON È AUTOVALORE DI A

(TUTTE QUESTE CONDIZ. SONO TRA DI LORO EQUIVALENTI!)

PROVIAMO DUNQUE A VEDERE SE LA MATRICE A NON SIA SINGOLARE VEDENDO SE 0 NON SIA AUTOVALORE.

INTRODUCIAMO PRIMA IL **TEOREMA DI GERSCHGORIN**:

QUESTO TEOREMA FORNISCE CRITERI DI FACILE VERIFICA PER LOCALIZZARE NEL PIANO COMPLESSO GLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE.

DATA UNA CERTA MATRICE $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ REALE SI INTRODUCONO I "CERCHI DI GERSCHGORIN":

$$C_i = \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq r_i = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

NOTIAMO DUNQUE CHE IL CERCHIO C_i HA CENTRO SULL'ASSE REALE NEL PUNTO DI ASCISSA a_{ii} e RAGGIO UGUALE ALLA SOMMA DEI MODULI DEGLI ELEM. CHE STANNO SULLA RIGA i-ESIMA, AL DI FUORI DELLA DIAGONALE.

"COLLOCATI" GLI AUTOVALORI, CON MATLAB SI VERIFICA QUESTO ASPETTO:

$$\hat{C}'_1 = \hat{C}_2 \cup \hat{C}_3 = [-4,0]$$

$$\hat{C}'_2 = \hat{C}_1 \cup \hat{C}_4 \cup \hat{C}_5 = [1,10]$$

$$\hat{C}'_3 = \hat{C}_6 = [11,25]$$

$\lambda_1 = -2,25\ldots$

$\lambda_2 = -1,23\ldots$

$\lambda_3 = 3,10\ldots$

$\lambda_4 = 4,14\ldots$

$\lambda_5 = 5,88\ldots$

$\lambda_6 = 19,36\ldots$

RITORNANDO ALLA MATRICE A OTTENUTA DALLA DISCRETIZZAZ. DEL PROBLEMA DEL FILO ELASTICO:

teorema: LA MATRICE A É SIMETRICA ED É DEFINITA POSITIVA, DUNQUE IN PARTICOLARE e' NON-SINGOLARE.

SI RICORDA CHE ESSERE DEFINITA POSITIVA SIGNIFICA CHE:

$$x^T A x > 0 \qquad \forall x \neq \underline{0}$$

(OPPURE CHE TUTTI GLI AUTOVALORI DI A SONO > 0)

VEDREMO CHE PER MATRICI SIMETRICHE DEFINITE POSITIVE ESISTONO DEI METODI RAPIDI ED EFFICIENTI PER RISOLVERE GRANDI SISTEMI LINEARI

ANALIZZIAMO ORA IL CASO PARTICOLARE CON $\boxed{\mu = cost}$:

$$A = \frac{\mu}{h^2}\,\mathrm{tridiag}\,[-1\ \ 2\ \ -1]$$

GLI INTERVALLI DI GERSCHGORIN DI A SONO DATI DA:

AD OGNI NORMA DI $\|x\|$ É ASSOCIATA UNA NORMA DI MATRICE $\|A\|$:

$$\|A\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n \; x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \boxed{\max_{x \in \mathbb{R}^n \; \|x\|=1} \|Ax\|}$$

SI DEDUCONO POI ALCUNE PROPRIETA'...

IN PARTICOLARE SI HA:

$$\|A\|_\infty = \|A^T\|_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

LA NORMA PIÚ UTILE e' QUELLA EUCLIDEA e FA INTERVENIRE GLI AUTOVALORI:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$ DOVE:

$\rho(B)$ = RAGGIO SPETTRALE DI $B = \max\{|\lambda|\}$ $\boxed{\lambda \text{: AUTOVAL. DI } B}$

ESSENDO A DEFINITA POSITIVA:

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$$

SE HO UNA MATRICE SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA:

$$\|A\|_2 = \lambda_{max}$$

ESSENDO:

$$Aw = \lambda w \Rightarrow A^{-1} w = \lambda^{-1} w \Rightarrow \|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}$$

PER UNA MATRICE A SIMMETRICA E DEFINITA POSITIVA SI HA CHE:

$$\boxed{\mathrm{COND}_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}}$$

PIÙ GLI AUTOVALORI SONO CONFRONTABILI TRA DI LORO PIÙ LA MATRICE E' BEN CONDIZIONATA!

UN CLASSICO ESEMPIO DI MATRICI MOLTO MALCONDIZIONATE SONO LE MATRICI DI HILBERT, AVENTI COME ELEMENTI:

$$h_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

AL CRESCERE DI n IL NUMERO DI CONDIZIONAMENTO CRESCE IN MODO ESPONENZIALE!

IN GENERALE, OGNI MATRICE PORTA CON SÉ UN NUMERO CHE CI COMUNICA QUANTO SIA AFFIDABILE LAVORARE CON QUESTA!

PER LA MATRICE A DEL FILO ELASTICO SI PUÒ CALCOLARE CHE:

$$\lambda_{h,1} \cong \lambda_1 := \mu \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\lambda_{h,N} \cong \frac{4\mu}{h^2} \propto N^2$$

$$\left(\text{SI RICORDA CHE } h = \frac{L}{N+1}\right)$$

DUNQUE SE NE DEDUCE CHE:

IL VETTORE $\underline{u}$ SODDISFA: $A\underline{u} - \underline{f} = \underline{0}$

IL VETTORE DELLE SOLUZ. ESATTE $\underline{u}^e$ SARÀ TALE PERCIÒ:

$$A\underline{u}^e - \underline{f} = r$$

VETTORE RESIDUO O ERRORE DI TRONCAMENTO

QUESTO "RESIDUO" È DOVUTO AL FATTO CHE APPROSSIMO LE DERIVATE CON RAPPORTI INCREMENTALI CENTRATI.

ABBIAMO VISTO CHE QUANDO APPROSSIMO UNA DERIVATA CON UN RAPPORTO INCREM. CENTRATO COMMETTO UN ERRORE DEL 2° ORDINE RISPETTO AL PARAMETRO DI DISCRETIZZAZ. h.

SI RICAVA INFATTI CHE:

$$\|r\|_{2,m} \leq \frac{1}{12} h^2 \cdot \max_{x \in [0,L]} \left| \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right| = \frac{1}{12} h^2 \max_{x \in [0,L]} \left| \frac{d^2 f}{dx^2}(x) \right|$$

FACENDO LA DIFFERENZA TRA $A\underline{u}^e - \underline{f} = \underline{r}$ e $A\underline{u} - \underline{f} = \underline{0}$:

$$A(\underline{u}^e - \underline{u}) = \underline{r} \implies \underline{u}^e - \underline{u} = A^{-1}\underline{r}$$

DA CUI:

$$\|\underline{u}^e - \underline{u}\|_{2,m} \leq \|A^{-1}\|_2 \, \|\underline{r}\|_{2,m}$$

L'ERRORE CHE CI ATTENDIAMO NELLA DISCRETIZZAZIONE È TANTO PIÙ PICCOLO QUANTO PIÙ È PICCOLO h!

IN PRATICA QUESTO SIGNIFICA CHE IL METODO NUMERICO È CONVERGENTE!

RICONSIDERANDO L'EQUAZ. :

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) = f \qquad \forall x \in [0, L]$$

MOLTIPLICANDO PER v :

$$-\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) v = f v$$

INTEGRANDO ORA TRA 0 ed L :

$$\int_0^L -\frac{d}{dx}\left(\mu \frac{du}{dx}\right) v \, dx = \int_0^L f v \, dx \Rightarrow$$ SCRITTURA INTEGRALE DELL' EQUAZIONE

ESSENDO μ DERIVABILE A TRATTI É UN PROBLEMA DERIVARE 2 VOLTE LA u POICHE' IN CORRISPOND. DI UN PUNTO ANGOLOSO LA f'' NON ESISTE!

PER RISOLVERE QUESTO PROBLEMA, INTEGRANDO PER PARTI SI OTTIENE CHE:

$$\int_0^L \mu \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx - \cancel{\left[\mu \frac{du}{dx} v\right]_0^L} = \int_0^L f v \, dx$$

POICHE' $v(0) = v(L) = 0$

DA QUEST' ULTIMA ESPRESSIONE VEDIAMO CHE NON E' NECESSARIO CHE LA v' SIA CONTINUA POICHE' E' POSSIBILE INTEGRARE UNA FUNZ. ANCHE SE QUESTA E' CONTINUA A TRATTI.

SE v_1 e v_2 VERIFICANO L'EQUAZ.

ANCHE $\alpha v_1 + \beta v_2$ VERIFICHERÀ L'EQUAZ.

(NATURALMENTE ANCHE $\alpha v_1 + \beta v_2$ È SPOSTAM. AMMISSIBILE)

PASSANDO DAGLI INFINITI SPOSTAM. AMMISSIBILI AD UN NUMERO FINITO DI SPOSTAMENTI AMMISSIBILI (SIGNIFICATIVI RISPETTO AL PROBLEMA) VADO A CONSIDERARE LE LORO COMBINAZ. LINEARI:

IDENTIFICO COSÌ UNO SPAZIO VETTORIALE V_h, CHE È SOTTOSPAZIO VETTORIALE DI V.

CHIAMEREMO "SPOSTAM. DISCRETI" GLI SPOSTAM. CHE PONIAMO IN V_h.

CERCHEREMO DUNQUE UNO SPOSTAM. AMMISSIBILE DISCRETO GENERICO APPARTENENTE A V_h:

$$\begin{cases} u_h \in V_h \quad \text{E SODDISFA} \\ \displaystyle\int_0^L \mu \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx}\, dx = \int_0^L f\, v_h\, dx \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

QUEST'ULTIMA È NOTA COME "FORMULAZ. VARIAZIONALE DISCRETA".

IL NOSTRO FOCUS SARÀ SUI $\boxed{\text{POLINOMI}}$ A CAUSA DELLA LORO SEMPLICITÀ DI "MANIPOLAZIONE".

ANDIAMO QUINDI A SUDDIVIDERE L'INTERVALLO $[0, L]$ CON UNA GENERICA DISTRIBUZ. DI INTERVALLI (NON EQUI-SPAZIATA):

NOI UTILIZZEREMO ELEMENTI FINITI LINEARI!

DUNQUE:

POLINOMI DI 1° GRADO

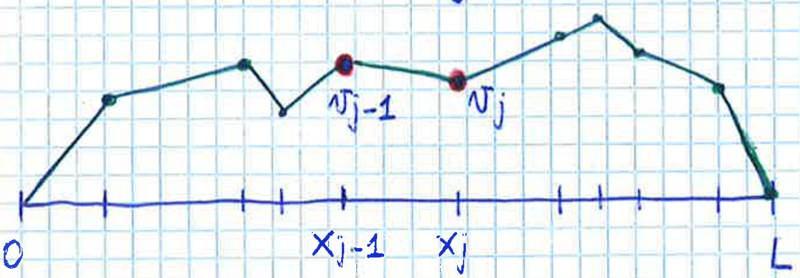
$$V_h = \{ v_h \in V \mid v_{h|I_j} \in \mathbb{P}_1 \quad \text{PER} \quad j = 1, \ldots, N+1 \}$$

SI PARLA IN QUESTO CASO DI "ELEMENTI FINITI LINEARI".

PER UTILIZZARE IL CALCOLATORE DEVO "TRASFORMARE" LO SPOSTAM. AMMISSIBILE IN UN VETTORE.

PER FARE CIÒ È SUFFICIENTE CONOSCERE I_j E I VALORI ESTERNI A QUESTO INTERVALLO.

v_h QUINDI E' UNIVOCAMENTE INDIVIDUATO DALLA CONOSCENZA DEI VALORI DEI NODI INTERNI v_j:



PERTANTO LA FUNZIONE v_h LA "TRADUCIAMO" IN UN CERTO VETTORE COLONNA:

$$v_h \longrightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \ldots \\ v_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$$

IN OGNI INTERVALLO I_j SI AVRÀ CHE:

$$v_h(x) = v_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + v_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j}$$

(FUNZ. RETTA PASSANTE PER 2 PUNTI)

LA FUNZIONE φ_j É DEFINITA COME:

$\varphi_j \Rightarrow$ FUNZ. A CAPPELLO O A TENDA

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{j-1}}{h_j} & \text{SE } x \in I_j \\ \dfrac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}} & \text{SE } x \in I_{j+1} \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

POSSIAMO DUNQUE RAPPRESENTARE OGNI $v_h \in V_h$ COME:

$$v_h(x) = v_1 \varphi_1(x) + v_2 \varphi_2(x) + \dots + v_N \varphi_N(x) = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j(x)$$

LE FUNZIONI DI BASE φ_j CON $j = 1, \dots, N$ COSTITUISCONO LA "BASE DI LAGRANGE" IN V_h.

PER ARRIVARE AL SISTEMA LINEARE: OTTENIAMO LE N EQUAZ. IMPONENDO CHE L'EQUAZ. SIA SODDISFATTA PER $v_h = \varphi_j$:

$$\int_0^L \mu \frac{du_h}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx}\, dx = \int_0^L f \varphi_j \, dx \qquad \text{PER } j = 1, \dots, N$$

QUESTO SISTEMA E' TUTTAVIA EQUIVALENTE A QUELLO VISTO IN PRECEDENZA COME "FORMULAZ. VARIAZ. DISCRETA" IN QUANTO OGNI v_h E' UNA COMBINAZ. LINEARE DELLE FUNZ. DI BASE.

POICHE' STO CERCANDO LO SPOSTAMENTO u_h, RAPPRESENTANDO QUESTO NELLA BASE DI LAGRANGE:

$$u_h = \sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k$$

GIO 23 MAR

LA SCORSA VOLTA ABBIAMO DETTO CHE:

$$a_{jk} = \int_0^L \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx = \sum_{m=1}^{N+1}\int_{I_m} \mu \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{d\varphi_j}{dx}\,dx$$

RISPETTO A k e j SI OSSERVA UNA CERTA SIMMETRIA ⇒ DUNQUE ARRIVEREMO AD UNA MATRICE SIMMETRICA!

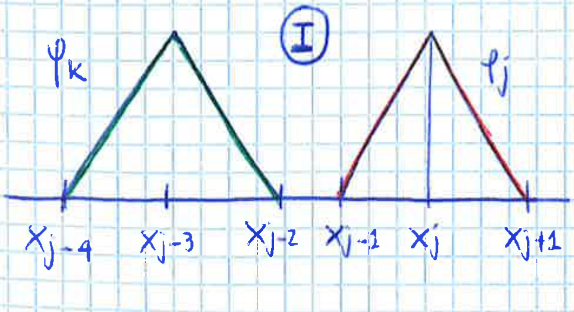
L'ESPRESSIONE PRECEDENTE DI FATTO FA "SPEZZARE" IL DOMINIO DI INTEGRAZIONE IN MOLTI PICCOLI INTERVALLI.

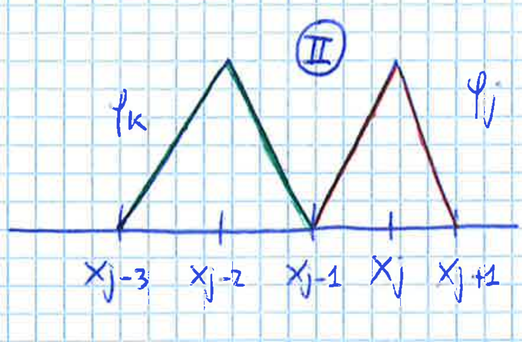
PROVIAMO ORA A CALCOLARE 1 DI QUESTI INTEGRALI:

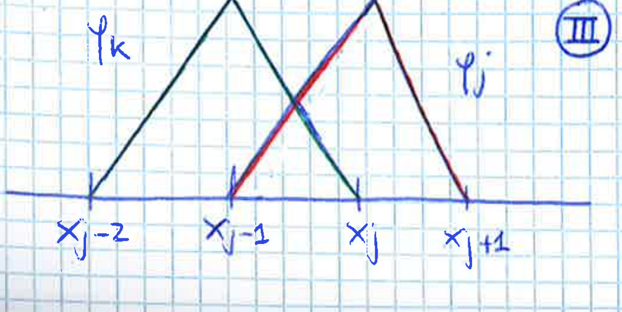
PRIMA DI FARE I CALCOLI SI OSSERVA PERÒ CHE:

$$\varphi_j \neq 0 \quad SE \quad x \in \left]x_{j-1}, x_{j+1}\right[$$

DUNQUE DATE φ_j e φ_k CI POSSONO ESSERE 3 CASI:





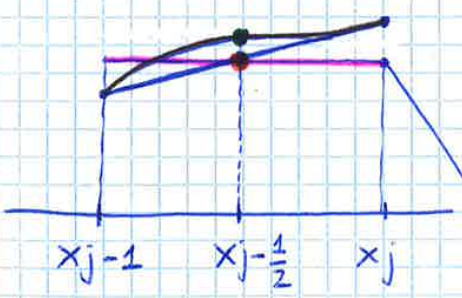


SI RICAVA DUNQUE CHE:

$$\frac{d\varphi_{j-1}}{dx}\cdot\frac{d\varphi_j}{dx} = -\frac{1}{h^2} = \text{COSTANTE}$$ QUINDI:

$$a_{j,j-1} = -\frac{1}{h_j^2}\int_{I_j}\mu\,dx = -\frac{1}{h_j^{\cancel{2}}}\cancel{h_j}\underbrace{\left(\frac{1}{h_j}\int_{I_j}\mu\,dx\right)}_{\text{MEDIA INTEGRALE CHE APPROSSIMIAMO AL PUNTO MEDIO DELL'INTERVALLO}} = -\frac{1}{h_j}\bar{\mu}_{j-1/2}$$

IN ALTERNATIVA SI PUÓ ANCHE APPROSSIMARE LA MEDIA INTEGRALE CON LA SEMISOMMA DEI VALORI ESTERNI DELL'INTERVALLO:



VALORE "ESATTO" DELLA MEDIA INTEGRALE

$$\frac{1}{h_j}\int_{I_j}\mu\,dx \cong \begin{cases}\boxed{\bar{\mu}_{j-1/2}} & \text{(PUNTO MEDIO)}\\[2mm] \boxed{\frac{1}{2}(\mu_j+\mu_{j-1})} & \text{(INTERPOLAZ.)}\end{cases}$$

UTILIZZANDO "L'APPROSSIMAZ. DEL PUNTO MEDIO" DUNQUE:

$$a_{j,j-1} = -\frac{1}{h_j}\mu_{j-1/2}$$

CONSIDERANDO L'ELEMENTO SULLA DIAGONALE a_{jj} DOBBIAMO FARE UN CALCOLO SU 2 INTERVALLI:

$$a_{jj} = \int_{I_j}\mu\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)^2 dx + \int_{I_{j+1}}\mu\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\right)^2 dx$$ DOVE:

OVVERO:

$$A = \frac{\mu}{h} \text{ TRIDIAG } [-1 \quad 2 \quad -1]$$

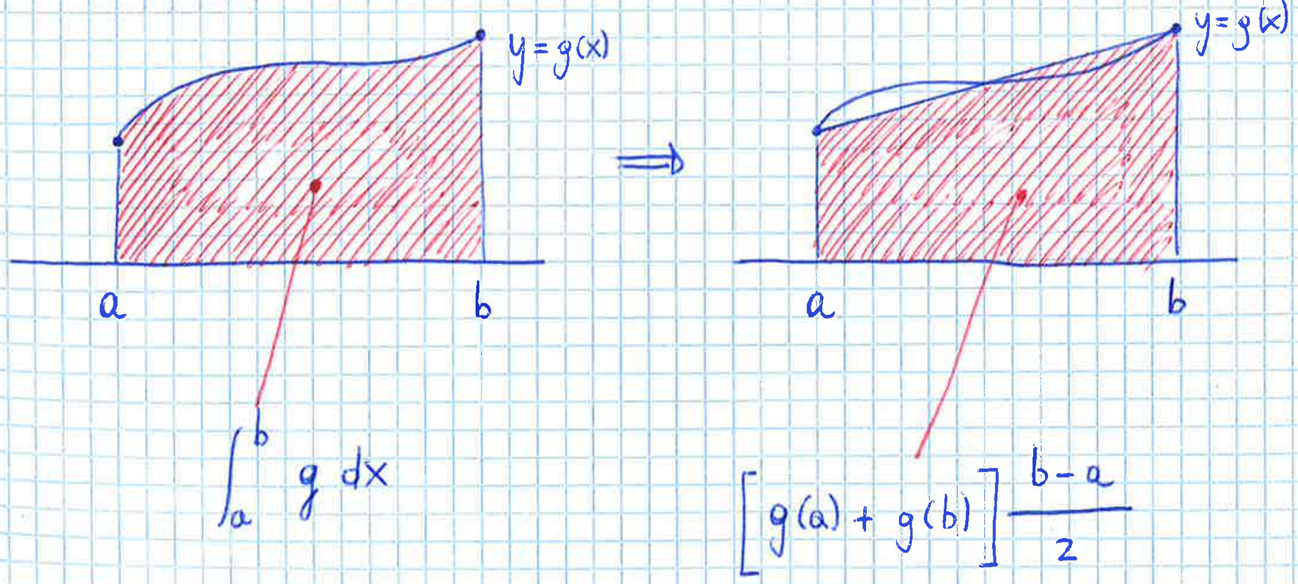
CHE É MOLTO SIMILE ALLA MATRICE OTTENUTA CON LE DIFFERENZE FINITE (μ/h AL POSTO CHE μ/h^2).

PER QUANTO RIGUARDA IL TERMINE NOTO INVECE:

$$f_j = \int_{I_j} f \varphi_j \, dx + \int_{I_{j+1}} f \varphi_j \, dx$$

SE CONOSCIAMO L'ESPRESSIONE ANALITICA DELLA f E SAPPIAMO FARE L'INTEGRALE NON CI SONO PROBLEMI. SE INVECE NON CONOSCIAMO L'ESPRESSIONE ANALITICA DELLA f OPPURE SE L'INTEGRALE NON É CALCOLABILE IN FORMA CHIUSA APPROSSIMIAMO L'INTEGRALE PROPRIO CON IL METODO DEI TRAPEZI:

es.



QUESTA SCELTA NEL NOSTRO CASO SI RIVELA "ESATTA" POICHÉ ABBIAMO FUNZIONI LINEARI A TRATTI!

IN QUESTO CASO DF e EF FORNISCONO LA STESSA SOLUZ. DISCRETA $\Rightarrow$ I 2 METODI COINCIDONO!

PER QUANTO RIGUARDA LA DISCRETIZZAZ. AGLI ELEM. FINITI ABBIAMO INOLTRE CHE:

- LA MATRICE A É DEFINITA POSITIVA (SEMPRE IN VIRTÚ DI GERSCHGORIN)
- IL NUMERO DI CONDIZIONAMENTO DI A SODDISFA:

$$\lambda_{h,min} \sim c h \qquad \lambda_{h,max} \sim c h^{-1}$$

DA CUI: $$\text{COND}_2(A) = \frac{\lambda_{h,max}}{\lambda_{h,min}} \sim c h^{-2}$$

- L'ERRORE TRA SOLUZ. ESATTA e SOLUZ. APPROSSIMATA SODDISFA:

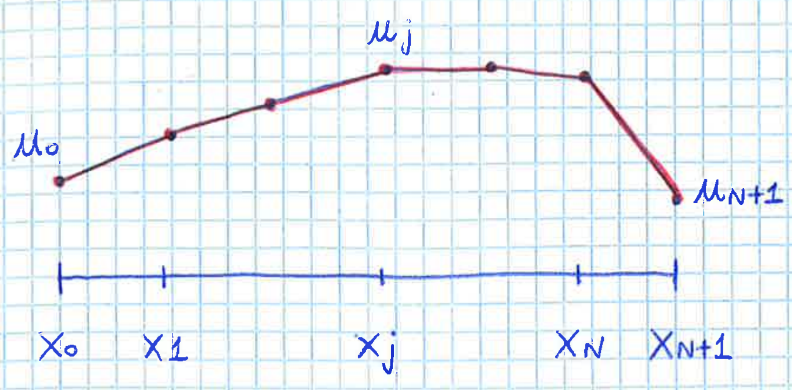
$$\max_{x \in [0,L]} |u(x) - u_h(x)| \le c h^2 \max_{x \in [0,L]} \left| \frac{d^2 u}{dx^2}(x) \right|$$

(SE AVESSIMO USATO AL POSTO CHE TRATTI DI RETTA DEGLI ARCHI DI PARABOLA AVREMMO OTTENUTO UN ERRORE $\propto h^3$)

QUESTE 3 PROPRIETÁ SONO LE STESSE OTTENUTE NEL PROBLEMA DI DISCRETIZZAZIONE MEDIANTE DIFFERENZE FINITE!

VEDIAMO ORA COSA SUCCEDE SE ABBIAMO ALTRE CONDIZ. AL BORDO NEL PROBLEMA:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 258

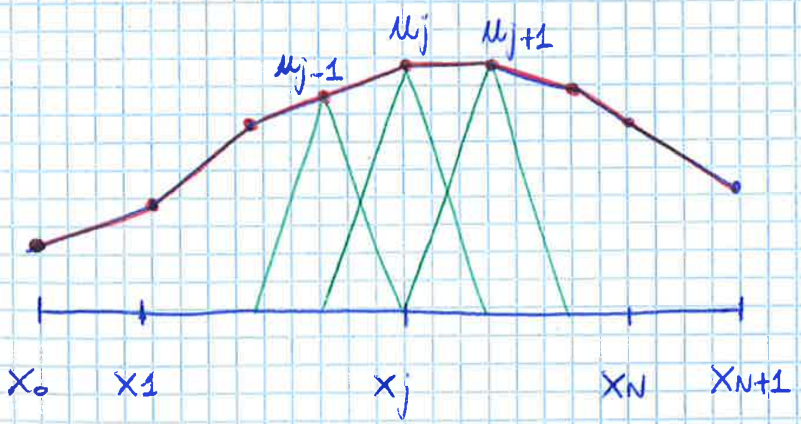


VADO SEMPLICEM. A DIRE CHE:

$$\begin{cases} u_0 = g_0 \\ u_{N+1} = g_L \end{cases}$$

LA PRIMA E L'ULTIMA EQUAZ. (LE QUALI RISENTONO DEI VALORI AGLI ESTREMI) OVVIAMENTE DOVRANNO ESSERE MODIFICATE.

- SE CONSIDERIAMO UN METODO AGLI ELEMENTI FINITI:



IN QUESTO CASO DOVREMO ASSUMERE CHE CI SIANO DELLE VARIAZ. NEI SEGMENTI CARATTERIZZATI DAI VALORI ESTREMI $\Rightarrow$ LE FUNZIONI DOVRANNO AMMETTERE VARIAZIONI ANCHE NEGLI ESTREMI DEL PRIMO E DELL'ULTIMO INTERVALLO.

PER FARE CIÒ FACCIAMO RIFERIM. A 2 NUOVE FUNZIONI φ_0 e φ_{N+1} IDENTICAMENTE NULLE TRANNE CHE IN 0 e N+1:

IN ENTRAMBI I CASI QUELLO CHE SI OTTIENE e' UN LEGAME TRA TRE INCOGNITE SUCCESSIVE:

$$a_j u_{j-1} + b_j u_j + c_j u_{j+1} = f_j$$

IN CORRISPONDENZA DEL PRIMO NODO INTERNO:

$$a_1 u_0 + b_1 u_1 + c_1 u_2 = f_1 \Rightarrow b_1 u_1 + c_1 u_2 = f_1 - a_1 g_0$$

DOVE:

$$a_1 = \begin{cases} -\dfrac{\mu_{1/2}}{h_1^2} & \text{PER DF} \\[2ex] -\dfrac{\mu_{1/2}}{h_1} & \text{PER EF} \end{cases}$$

IN PRATICA QUELLO CHE VADO A FARE e' MODIFICARE IL PRIMO ELEMENTO DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI!

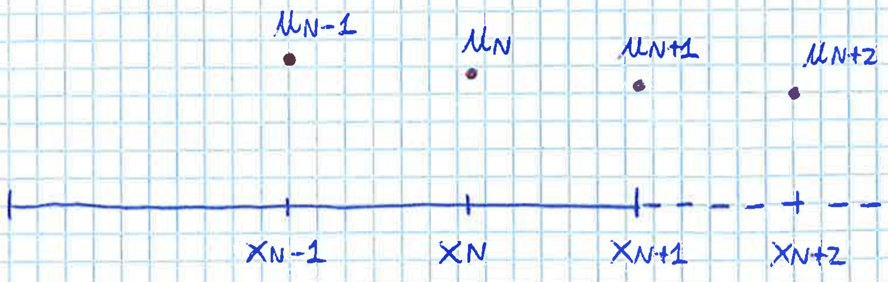
ANALOGAMENTE PER L'ULTIMA EQUAZ. SI HA CHE:

$$a_N u_{N-1} + b_N u_N = f_N - c_N g_L$$

ANCHE QUI L'UNICA COSA CHE SI FA e' CAMBIARE L'ELEMENTO NEL VETTORE DEI TERMINI NOTI.

IN CONCLUSIONE e' SUFFICIENTE MODIFICARE IL PRIMO e L'ULTIMO ELEMENTO DEL VETTORE DEI TERMINI NOTI!

LA MATRICE DEL SISTEMA NON VIENE ASSOLUTAMENTE MODIFICATA DA CONDIZ. AL BORDO DI DIRICHLET NON OMOGENEE!



CON I TRE VALORI u_N, u_{N+1} E u_{N+2} POSSO SCRIVERE IL RAPPORTO INCREMENTALE.

IMPONENDO ORA LA CONDIZ. DI NEUMANN SUL RAPPORTO INCREM. CENTRATO (NECESSARIO AD AVERE UN APPROSSIMAZ. DEL 2° ORDINE):

$$\mu \frac{u_{N+2} - u_N}{2h} = \gamma_L$$

NEL NODO DI BORDO HO DUE EQUAZ.:

- CONDIZ. FISICA (DISCRETIZZATA)
- CONDIZ. DI NEUMANN (DISCRETIZZATA)

METTENDO A SISTEMA QUESTE 2 EQUAZ. POSSO DUNQUE ELIMINARE L'INCOGNITA u_{N+2}. DA TALE SISTEMA SI OTTIENE:

$$\begin{cases} -\mu \dfrac{u_N - 2u_{N+1} + u_{N+2}}{h^2} = f(L) \\[2ex] \mu \dfrac{u_{N+2} - u_N}{2h} = \gamma_L \end{cases} \Longrightarrow \frac{\mu}{h^2}\left(-u_N + u_{N+1}\right) = \frac{1}{2} f(L) + \frac{1}{2}\gamma_L =: f_{N+1}$$

IL COEFF. DELL'INCOGNITA u_{N+1} NON E' "2" MA "1"!
DUNQUE LA MATRICE DEI COEFF. SARA':

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 55 di 258

$$\int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx - \left[\mu \frac{du}{dx} v\right]_0^L = \int_0^L f v\,dx \qquad \forall v \in V$$

ESSENDO $v(0)=0$ SI OTTIENE CHE:

$$\left[\mu \frac{du}{dx} v\right]_0^L = \mu \frac{du}{dx}(L)\, v(L)$$

$$\boxed{\mu \frac{du}{dx}(L) = \gamma_L}$$

IMPONENDO LA CONDIZ. DI NEUMANN SI AVRA' CHE:

$$\begin{cases} u \in V \\ \displaystyle\int_0^L \mu \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^L f v\,dx + \gamma_L v(L) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

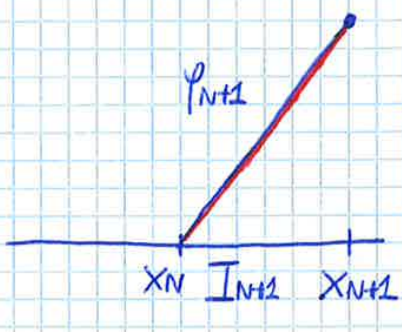
COMPLESSIVAMENTE, CONSIDERANDO GLI SPOSTAM. AMMISSIBILI:

$$\begin{cases} u_h \in V \\ \displaystyle\int_0^L \mu \frac{du_h}{dx}\frac{dv_h}{dx}\,dx = \int_0^L f v_h\,dx + \gamma_L v_h(L) \quad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

PER QUANTO RIGUARDA GLI ELEM. DELLA MATRICE DEI COEFF. NON CAMBIA NULLA A PARTE L'ELEM. $a_{N+1,N+1}$:

$$a_{N+1,N+1} = \int_{I_{N+1}} \mu \left(\frac{\partial \varphi_{N+1}}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{h_{N+1}}\,\mu_{N+1/2}$$

POICHE' L'ULTIMA FUNZIONE DI BASE φ_{N+1} E' DEFINITA SOLO SULL'INTERVALLO I_{N+1}



OVVERO, ELIMINANDO L'INCOGNITA τ:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) + \gamma u = f & \text{IN } (0,L) \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

QUESTO NUOVO TERMINE SI TRATTA AGGIUNGENDO ALLA (VECCHIA) MATRICE $A^{(\mu)}$ UNA NUOVA MATRICE $A^{(\gamma)}$:

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{f} \qquad \text{DOVE:} \qquad \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}}^{(\mu)}}_{\text{EFFETTI DI TAGLIO}} + \underbrace{A^{(\gamma)}}_{\text{RICHIAMO ELASTICO}}$$

- RAGIONANDO CON LE DIFFERENZE FINITE:

$$\frac{1}{h^2}\left(-\mu_{j-1/2}\, u_{j-1} + \left(\mu_{j-1/2} + \mu_{j+1/2}\right) u_j - \mu_{j+1/2}\, u_{j+1}\right) + \gamma_j u_j = f_j$$

DUNQUE SI HA CHE:

$$A^{(\gamma)} = \mathrm{DIAG}\left((\gamma_j)_{1 \le j \le N}\right) \implies A^{(\gamma)} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{N-1} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_N \end{bmatrix}$$

ESSENDO $\gamma_j \ge 0$ LA NUOVA MATRICE A SARA' ANCORA:

- SIMETRICA
- DEFINITA POSITIVA

$$b_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\gamma_{j-1/2}\, h_j + \gamma_{j+1/2}\, h_{j+1}\right) & \text{SE } k=j \\ \frac{1}{6}\gamma_{j-1}\, h_j & \text{SE } k=j-1 \\ \frac{1}{6}\gamma_{j+1/2}\, h_{j+1} & \text{SE } k=j+1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

NEL CASO PARTICOLARE IN CUI γ SIA COSTANTE SU $[0, L]$ E LA SUDDIVISIONE DELL'INTERVALLO SIA EQUISPAZIATA CON PASSO h:

$$b_{jk} = \gamma h \begin{cases} 2/3 & \text{SE } k=j \\ 1/6 & \text{SE } k=j\pm 1 \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

OVVERO:

$$\boxed{B = \gamma h \, \text{TRIDIAG}\left[\frac{1}{6} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{6}\right]} \rightarrow \text{MATRICE DI MASSA MONODIMENSIONALE}$$

LA MATRICE B IN FUTURO VEDREMO CHE SARÀ NOTA COME "MATRICE DI MASSA".

SI OTTENGONO DUNQUE I SEGUENTI INTERVALLI DI GERSCHGORIN:

$$\hat{C}_1 = [-5, 1]$$

$$\hat{C}_2 \cup \hat{C}_3 = [2, 10] \cup [4, 14] = [2, 14]$$

DAL TEOREMA DI GERSCHGORIN POSSIAMO DIRE CHE:

$$\boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 \in \,]-5, 1[\\ \lambda_2, \lambda_3 \in \,]2, 14[\end{array}}$$

INFATTI POSSIAMO DIRE CHE I VALORI ESTREMI DEGLI INTERVALLI NON SONO AUTOVALORI IN QUANTO NON APPARTENGONO A TUTTI I CERCHI.

SU MATLAB SCRIVENDO eig (A) SI OTTIENE CHE:

$$\lambda_1 \cong -2{,}64$$

$$\lambda_2 \cong 4{,}67$$

$$\lambda_3 \cong 10{,}97$$

2 PROBLEMA DI DISCRETIZZAZIONE (FILO ELASTICO)

CONSIDERIAMO IL SEGUENTE PROBLEMA:

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}\left(\mu \dfrac{du}{dx}\right) = f & \text{IN } (0, 4) \\ u(0) = u(4) = 0 \end{cases}$$

DOVE:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 63 di 258

$$\begin{cases} u_h \in V_h \quad \text{SODDISFA} \\ \displaystyle\int_0^4 \mu \frac{du_h}{dx} \frac{dv_h}{dx}\, dx = \int_0^4 f v_h \, dx \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

VEDIAMO ORA MATRICE DI RIGIDEZZA E TERMINE NOTO:

- A È UNA MATRICE TRIDIAGONALE SIMMETRICA, CON ELEM. NON NULLI:

$$\begin{cases} a_{j,j-1} = -\dfrac{\mu_{j-1/2}}{h} \\ a_{jj} = \dfrac{\mu_{j-1/2}}{h} + \dfrac{\mu_{j+1/2}}{h} \qquad 1 \le j \le N \\ a_{j,j+1} = -\dfrac{\mu_{j+1/2}}{h} \end{cases}$$

$$f_j = f(x_j)h = \sin\left(\frac{\pi}{4} x_j\right) h \qquad 1 \le j \le N$$

IN QUESTO CASO: $x_j = jh$

ESSENDO N DISPARI:

$N = 2M - 1 \qquad M \in \mathbb{N}$ DUNQUE:

$$h = \frac{4}{N+1} \Rightarrow h = \frac{4}{2M} \Rightarrow h = \frac{2}{M} \quad \text{QUINDI:}$$

$$x_j = \frac{2}{M} j$$

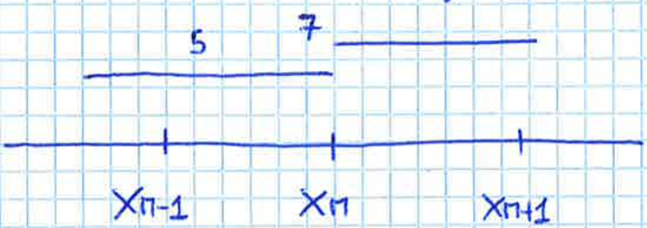
$$\mu_{j-1/2} = 7 \quad \wedge \quad \mu_{j+1/2} = 7$$

NELLA MATRICE DEI COEFF. DUNQUE LA RIGA j SARÀ:

$$a_{j,j-1} = -\frac{7}{h} \qquad a_{jj} = \frac{14}{h} \qquad a_{j,j+1} = -\frac{7}{h}$$

CONSIDERANDO INFINE IL CASO $j=n$:

$$\boxed{j=n}$$



IN QUESTO CASO:

$$\mu_{n-1/2} = 5 \quad \wedge \quad \mu_{n+1/2} = 7$$

DUNQUE LA RIGA n DELLA MATRICE SARÀ:

$$a_{n,n-1} = -\frac{5}{h} \qquad a_{nn} = \frac{12}{h} \qquad a_{n,n+1} = -\frac{7}{h}$$

COMPLESSIVAMENTE LA MATRICE A SARÀ:

$$A = \frac{1}{h} \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccccc} 10 & -5 & & & & & & & \\ -5 & \ddots & & & & & & & \\ & -5 & 10 & -5 & & & & & \\ & & -5 & 10 & -5 & & & & \\ & & & -5 & 12 & -7 & & & \\ & & & & -7 & 14 & -7 & & \\ & & & & & -7 & 14 & -7 & \\ & & & & & & \ddots & & -7 \\ & & & & & & & -7 & 14 \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \text{RIGA } n\text{-ESIMA} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

PERTANTO:

$$\frac{10}{h} u_1 - \frac{5}{h} u_2 = f(x_1) h + \frac{15}{h}$$

ALLO STESSO MODO L'ULTIMA RIGA SARÀ:

$$-\frac{7}{h} u_{N-1} + \frac{14}{h} u_N = f(x_N) h + \frac{7 \cdot 8}{h}$$

SE É INVECE DATA UNA CONDIZ. DI NEUMANN A DESTRA:

$$u(0) = 0 \qquad \left(\mu \frac{du}{dx}\right)(4) = 6$$

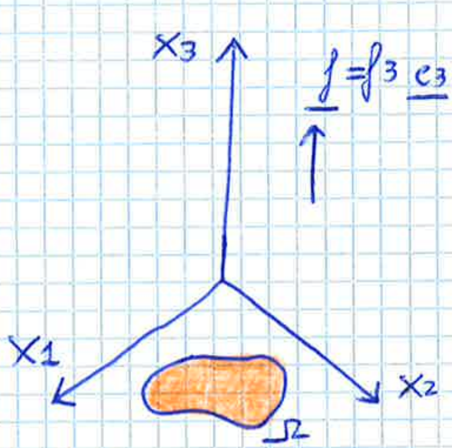
COME SI SCRIVE IL SISTEMA?

MER 5 APR

② • IL MODELLO DI MEMBRANA ELASTICA

QUESTO PROBLEMA É L'ANALOGO DEL FILO ELASTICO IN 2D.
LE IPOTESI CHE FAREMO SONO:

- REGIONE PIANA Ω CONTENUTA SUL PIANO X_1X_2 COMPOSTA DA MATERIALE ELASTICO
- LA (DENSITÀ DI) FORZA CHE APPLICHIAMO É DIRETTA VERSO L'ALTO (// A X_3)
- LA MEMBRANA SI SPOSTERÀ DAL PIANO X_1X_2 ALLA NUOVA CONFIGURAZ. DI EQUIL.
- SUPPONIAMO CHE f SIA MOLTO PICCOLA ⇒ PICCOLI SPOSTAMENTI (MODELLO LINEARE)



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 69 di 258

COMPLESSIVAMENTE:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \tau + f = 0 & \text{IN } \Omega \\ \tau = \mu \nabla u & \text{IN } \Omega \\ u = 0 & \text{IN } \partial\Omega \end{cases}$$

ELIMINANDO LA VARIABILE τ:

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mu \nabla u) = f & \text{IN } \Omega \\ u = 0 & \text{SU } \partial\Omega \end{cases} \Rightarrow \text{MODELLO DEL 2° ORDINE}$$

SULL' INCOGNITA u AGISCONO 2 DERIVATE

LA PRIMA EQUAZ. DI QUESTO SISTEMA E' ESPLICITABILE COME:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f$$

NEL CASO IN CUI $\boxed{\mu = \text{COST}}$ SI OTTIENE:

$$-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f \Rightarrow \boxed{-\mu \Delta u = f} \Rightarrow \text{EQUAZIONE DI POISSON}$$

$\boxed{\Delta u \Rightarrow \text{LAPLACIANO}}$ (SI PUÓ ANCHE INDICARE COME $\nabla^2 u$)

SE f É CONTINUA O CONTINUA A TRATTI QUESTO PROBLEMA AMMETTE 1 ED 1 SOLA SOLUZIONE $\Rightarrow$ IL PROBLEMA E' BEN POSTO!

IN QUESTO CASO I NODI INTERNI SONO CARATTERIZZATI DA:

$$1 \leq \ell, m \leq N$$

QUANTI SONO I NODI INTERNI? SONO IN NUMERO N^2:

- ABBIAMO N^2 INCOGNITE $\Rightarrow$ CI SERVONO N^2 EQUAZ.!

IN TERMINI MATRICIALI DUNQUE LA MATRICE AVRA':

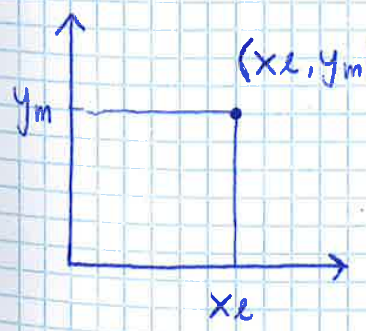
- N^2 RIGHE
- N^2 COLONNE

$\Rightarrow$ N^4 ELEMENTI

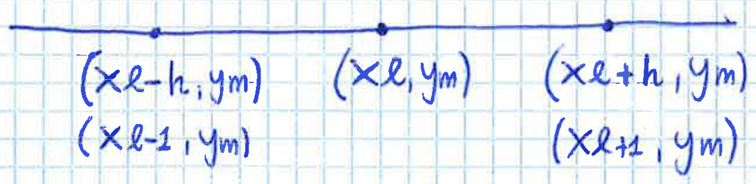
IN CORRISPONDENZA DEI NODI DI BORDO DUNQUE:

$$u_{\ell m} = 0 \quad \text{SE} \quad \ell \in \{0, N+1\} \quad \text{OPPURE} \quad m \in \{0, N+1\}$$

APPROSSIMANDO L'EQUAZ. DI POISSON CON I RAPPORTI INCREMENTALI SECONDI CENTRATI POSSIAMO DEFINIRE TUTTI I NODI INTERNI:



QUANDO DERIVIAMO RISPETTO ALLA X:



RAGIONANDO ALLO STESSO MODO NELLA DIREZ. y POSSIAMO SCRIVERE CHE:

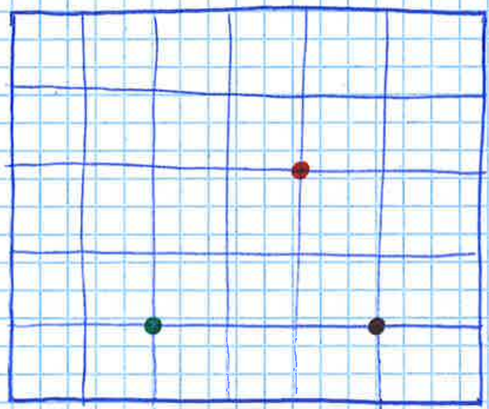
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 73 di 258

ESISTONO ALTRE "MOLECOLE COMPUTAZIONALI" A 9 NODI (CON I VALORI DI N-E, N-O, S-E, S-O)!

TUTTAVIA, FISSANDO UN CERTO NODO E' POSSIBILE CHE UNO O PIÙ DEI VALORI ADIACENTI NON SIANO INCOGNITE MA VALORI DI BORDO.

PER QUESTO MOTIVO SI DISTINGUE TRA:

- NODI INTERNI FORTI $\Rightarrow$ TUTTI I NODI DELLA MOLECOLA SONO NODI INTERNI
- NODI INTERNI DEBOLI $\Rightarrow$ UNO O PIÙ NODI DELLA MOLECOLA SONO NODI DI BORDO



• } NODO INTERNO FORTE

• • } NODO INTERNO DEBOLE

PER I NODI INTERNI FORTI $\Rightarrow$ 5 INCOGNITE
PER I NODI INTERNI DEBOLI $\Rightarrow$ 3 O 4 INCOGNITE

(NATURALMENTE QUANDO VEDREMO LE CONDIZ. AL BORDO DI NEUMANN QUESTA DISTINZIONE SARÀ PRIVA DI SENSO)

• L'EQUAZ. RELATIVA AL NODO DEBOLE (1,1) SARÀ QUINDI:

SI RICAVA DUNQUE CHE:

$$\boxed{j = \ell + (m-1)N} \qquad \text{PER} \quad 1 \le \ell, m \le N$$

CON QUESTA RELAZ. SI PASSA DA (ℓ, m) A j!

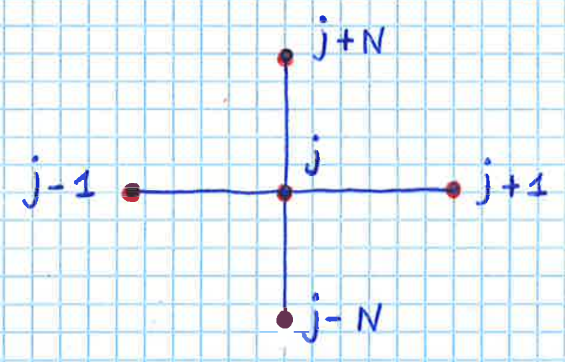
NATURALMENTE ORA ABBIAMO CHE:

$$1 \le j \le N^2$$

D'ORA IN POI AVREMO QUINDI A CHE FARE CON:

$$u_j = u_{\ell m} \qquad f_j = f_{\ell m}$$

SUPPONENDO ORA DI TRATTARE UN NODO INTERNO FORTE j:



OTTENENDO DUNQUE LA SEGUENTE EQUAZ.:

$$\frac{\mu}{h^2}\left(-u_{j-N} - u_{j-1} + 4u_j - u_{j+1} - u_{j+N}\right) = f_j$$

PROVIAMO ORA A SCRIVERE LA MATRICE:

L' EQUAZ. CORRISPONDENTE AL PRECEDENTE NODO É:

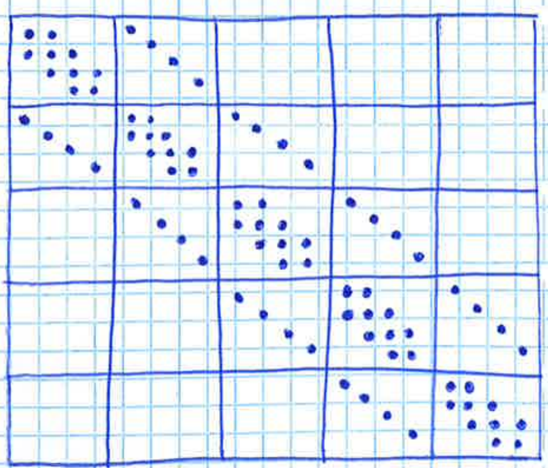
$$\frac{\mu}{h^2}\left(-u_N - u_{2N-1} + 4u_{2N} - u_{3N}\right) = f_{2N}$$

$$\Downarrow$$

NELLA RIGA 2N DELLA MATRICE AVREMO "0" SULLA PRIMA SOPRADIAGONALE!

$$\begin{bmatrix} & & & & & & \\ -1 & \cdots & -1 & 4 & 0 & \cdots & -1 \\ & & & & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ u_{2N} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ f_{2N} \\ \\ \end{bmatrix}$$

LA MATRICE COMPLETA SARA' DUNQUE PARTIZIONABILE COME:



(I PUNTINI RAPPRESENTANO ELEM. DELLA MATRICE NON NULLI!)

POSSO DUNQUE DIVIDERE LA MATRICE IN BLOCCHI!
ALCUNI BLOCCHI SARANNO TRIDIAGONALI, ALTRI SARANNO DIAGONALI!

SI OTTENGONO DUNQUE DELLE PROPRIETÀ DEL TUTTO ANALOGHE A QUELLE OTTENUTE NEL PROBLEMA DEL FILO ELASTICO!

LA MATRICE È DUNQUE NON-SINGOLARE $\Rightarrow$ PROBLEMA BEN POSTO!

QUELLO CHE ABBIAMO VISTO ORA È IL METODO DELLE DIFFERENZE FINITE!

- VEDIAMO ORA LA FORMULAZ. VARIAZIONALE DEL PROBLEMA:

ANCHE QUI INDICHIAMO CON V L'INSIEME DEGLI SPOSTAM. AMMISSIBILI DELLA MEMBRANA. QUESTI DOVRANNO ESSERE:

- FUNZIONI CONTINUE
- NULLI SUL BORDO
- FUNZIONI DERIVABILI A TRATTI

GLI SPOSTAMENTI AMMISSIBILI VENGONO ANCHE DETTI "FUNZIONI DI FORMA" O "FUNZIONI TEST".

MOLTIPLICANDO PER UN GENERICO SPOSTAM. AMMISSIBILE ED INTEGRANDO SU Ω:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla u) v \, d\underline{x} = \int_{\Omega} f v \, d\underline{x}$$

RICORDANDO IL TEOREMA DELLA DIVERGENZA:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{CAMPO VETTORIALE DEFINITO IN } \Omega}}{\underline{g}} \, d\underline{x} = \int_{\partial\Omega} \underline{g} \cdot \underline{\hat{n}} \, ds$$

(L'ORIENTAM. DELLA NORMALE È USCENTE)

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \underline{\hat{n}}} \implies \text{DERIVATA NORMALE DI } u \text{ SU } \partial\Omega$$

INOLTRE, PER IL PROBLEMA CON CONDIZ. DI BORDO DI DIRICHLET SI OSSERVA CHE:

$$v = 0 \quad \text{SU} \quad \partial\Omega \implies \int_{\partial\Omega} \mu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds = 0$$

DUNQUE OTTENIAMO CHE:

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mu \nabla u) v \, d\underline{x} = \int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\underline{x}$$

CONSIDERANDO ORA L'ESPRESSIONE DEL PROBLEMA ALL'INIZIO POSSIAMO SCRIVERE CHE:

$$\begin{cases} u \in V \text{ e SODDISFA} \\ \displaystyle\int_{\Omega} \mu \nabla u \cdot \nabla v \, d\underline{x} = \int_{\Omega} f v \, d\underline{x} \quad \forall v \in V \end{cases}$$

QUEST'ULTIMA È NOTA COME **FORMULAZ. INTEGRALE O VARIAZIONALE** DEL PROBLEMA, CORRISPONDENTE ANCHE QUI AL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

LE APPROSSIMAZ. QUI SONO DATE DAL FATTO CHE CONSIDERIAMO GLI SPOSTAM. AMMISSIBILI COME FINITI ED OTTENIBILI COME COMBINAZ. LINEARE DELLE FUNZIONI DI BASE φ_j.

$$\int_\Omega \mu \nabla \left(\sum_{k=1}^{N} u_k \varphi_k \right) \cdot \nabla \varphi_j \, d\underline{x} = \int_\Omega f \varphi_j \, d\underline{x}$$

UTILIZZANDO ORA LINEARITA' DELLA DERIVAZ. e DELL' INTEGRAZ. :

$$\sum_{k=1}^{N} u_k \int_\Omega \mu \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\underline{x} = \int_\Omega f \varphi_j \, d\underline{x}$$

PONENDO ORA :

$$\underline{\underline{A}} = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{N \times N} \qquad \underline{u} = (u_k) \in \mathbb{R}^N \qquad \underline{f} = (f_j) \in \mathbb{R}^N$$

CON :

$$a_{jk} = \int_\Omega \mu \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \, d\underline{x} \qquad f_j = \int_\Omega f \varphi_j \, d\underline{x}$$

SI OTTIENE PROPRIO : $\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \underline{f}}$ $\Longrightarrow$ SISTEMA CON N equaz. e N incognite

A $\Longrightarrow$ MATRICE DI RIGIDEZZA DEL SISTEMA

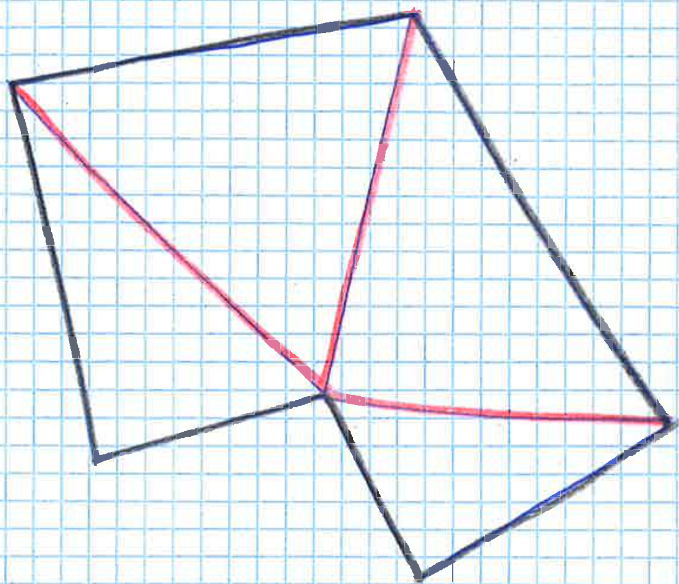
A QUESTO PUNTO LA SCELTA DEGLI SPOSTAM. AMMISSIBILI DISCRETI E' DEL TUTTO ARBITRARIA, PURCHE' LA MATRICE SIA "BUONA" DAL PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE.

VEDIAMO ORA ALCUNE PROPRIETA' DELLA MATRICE A :

$\Downarrow$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 85 di 258

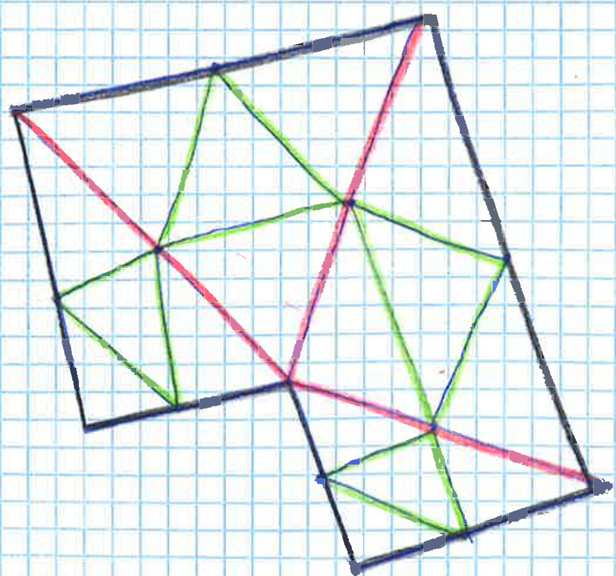
CONSIDERANDO UN POLIGONO L'IDEA E' QUELLA DI SUDDIVIDERLO IN REGIONI TRIANGOLARI:



(I TRIANGOLI NON DEVONO ESSERE DEGENERI, OVVERO I 3 VERTICI NON DEVONO ESSERE ALLINEATI)

É INOLTRE OPPORTUNO FARE IN MODO CHE I TRIANGOLI CONDIVIDANO UN VERTICE O UN LATO.

A QUESTO PUNTO UN MODO PER RAFFINARE LA MESH E' QUELLO DI CONSIDERARE I PUNTI MEDI DEI TRIANGOLI:



- $N_h^i \Rightarrow$ NODI INTERNI (APPARTENENTI A Ω)
- $N_h^b \Rightarrow$ NODI DI BORDO (APPARTENENTI A $\partial\Omega$)

$$\boxed{N_h = N_h^i + N_h^b}$$

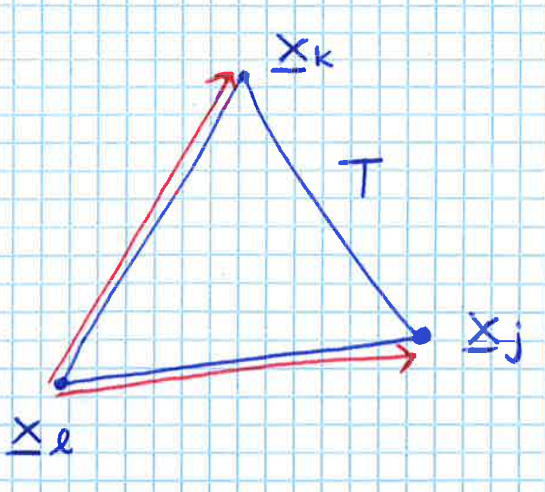
NUMERO DI NODI TOTALE

INDICANDO INOLTRE CON x_j IL j-ESIMO NODO DELLA TRIANGOLAZIONE, QUESTO SARÀ DEFINITO DA UNA COPPIA DI COORDINATE:

$$(x_j, y_j) \quad \text{oppure} \quad (x_{j1}, x_{j2})$$

VEDREMO SUCCESSIVAM. CHE IL MODO CON IL QUALE SI EFFETTUA LA NUMERAZIONE INFLUENZERÀ LA SPARSITÀ DELLA MATRICE!

CONSIDERIAMO ORA UN TRIANGOLO T e VEDIAMO COME POSSO CAPIRE CHE QUESTO NON SIA DEGENERE:



PRODOTTO ESTERNO

SE IL TRIANGOLO NON È DEGENERE: $(\underline{x}_j - \underline{x}_\ell) \wedge (\underline{x}_k - \underline{x}_\ell) \neq 0$

INTRODUCIAMO DUNQUE LO SPAZIO DELLE FUNZIONI CONTINUE E POLINOMIALI A PEZZI SULLA TRIANGOLAZIONE, OVVERO:

$$V_h = \{ v_h : \bar{\Omega} \to \mathbb{R} : v_h \text{ È CONTINUA e } v_h|_T \in \mathbb{P}_1(T) \ \forall T \in \mathcal{T} \}$$

PER ORA TUTTAVIA NON ABBIAMO ANCORA CONSIDERATO LE CONDIZ. AL BORDO!

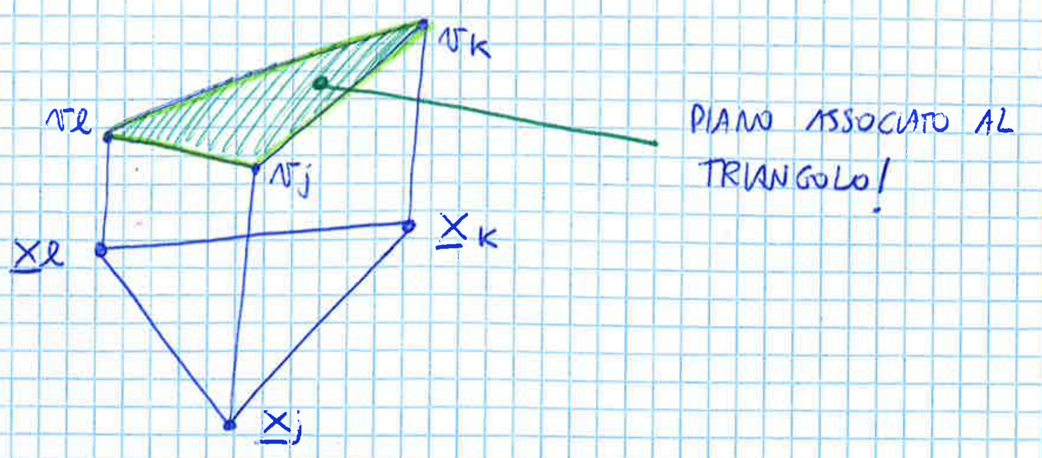
PER QUESTO MOTIVO CONSIDERIAMO LO SPAZIO DEGLI SPOSTAM. AMMISIBILI DISCRETI:

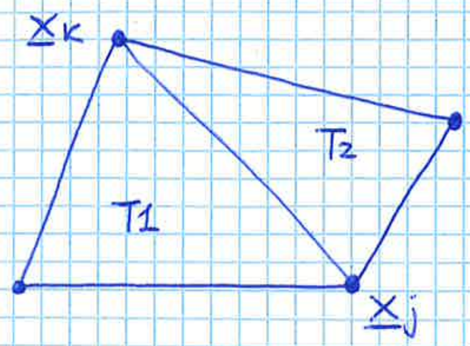
$$V_h = \{ v_h \in V_h : v_h = 0 \text{ su } \partial\Omega \}$$

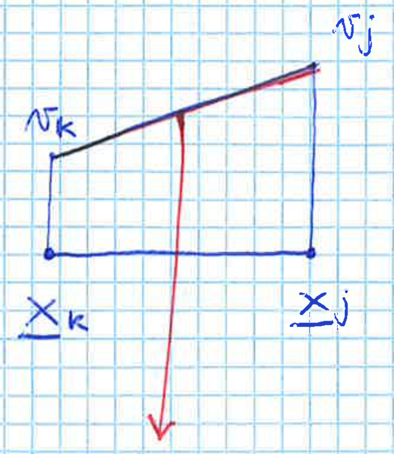
PER DETERMINARE IN MODO UNIVOCO IL POLINOMIO DEVO FORNIRE 3 COEFFICIENTI. VIENE NATURALE:

- ASSEGNARE I VALORI DEL POLINOMIO NEI 3 VERTICI DEL TRIANGOLO $\Rightarrow$ IN QUESTO MODO DEFINISCO IN MODO UNIVOCO IL PIANO ASSOCIATO AL TRIANGOLO!

TUTTAVIA DOBBIAMO ANCHE RISPETTARE IL VINCOLO DELLA CONTINUITA' DEI POLINOMI! CON L'ASSEGNAZ. PRECEDENTE QUESTO PROBLEMA SI RIESCE A TRATTARE AGEVOLMENTE!







ESISTE UN SOLO MODO PER ANDARE DA v_k A v_j CON 1 TRAIETTORIA RETTILINEA!

CON QUESTO CRITERIO:

SE $p_1(x_j) = p_2(x_j) \wedge p_1(x_k) = p_2(x_k)$

ALLORA p_1 E p_2 COINCIDONO LUNGO IL LATO $L = [x_j, x_k]$

PERTANTO:

$$v_h(x) = \begin{cases} p_1(x) & \text{SE } x \in T_1 \\ p_2(x) & \text{SE } x \in T_2 \end{cases}$$

ESTENDENDO QUESTO RAGIONAM. A TUTTE LE COPPIE DI TRIANGOLI CHE CONDIVIDONO UN LATO HO IN AUTOMATICO L' "INCOLLAMENTO" DI TUTTI I POLINOMI!

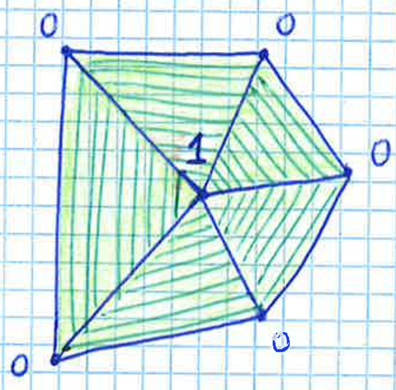
CON QUESTA COSTRUZ. HO LA GARANZIA DI AVERE UNA FUNZIONE (DELLO SPAZIO) POLINOMIALE A TRATTI CONTINUA!

DUNQUE UNA FUNZIONE $v_h \in V_h$ È UNIVOCAMENTE DETERMINATA DAI SUOI VALORI NELLA TRIANGOLAZ.! È QUINDI POSSIBILE ASSOCIARE IL SEGUENTE VETTORE COLONNA:

$$\underline{v} = (v_j)_{1 \le j \le N_h} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 93 di 258

VEDENDOLO DALL'ALTO É POSSIBILE ANCHE ASSOCIARE DELLE LINEE DI LIVELLO:



PER PROBLEMI DI CONDIZIONAM. DELLA MATRICE!

(IL NUMERO DI TRIANGOLI CHE HA IN COMUNE UN CERTO NODO TIPICAMENTE e' < 10!)

IN CORRISPONDENZA DEI NODI DI BORDO OVVIAMENTE LA PIRAMIDE SARA' "TRONCATA"!

SI DEFINISCE COME SUPPORTO DI φ_j L'UNIONE DEI TRIANGOLI:

$$\mathrm{supp}\,\varphi_j = \bigcup_{T \in \mathcal{T}(i)} T$$

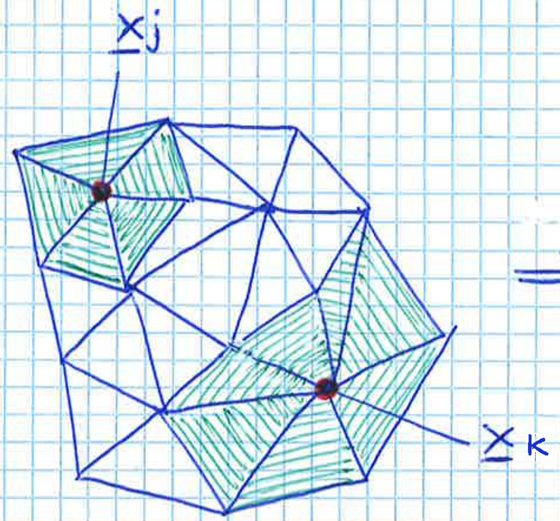
NEL DISEGNO PRECEDENTE IL SUPPORTO e' RAPPRESENTATO DALLA ZONA IN VERDE.

OGNI FUNZIONE $v_h \in V_h$ PUÓ DUNQUE ESSERE ESPRESSA COME:

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^{N_h} v_j \varphi_j(\underline{x}) \qquad \text{CON} \quad v_j = v_h(\underline{x}_j)$$

IMPONENDO ORA LA CONDIZ. DI ANNULLAM. AL BORDO:

QUANDO É CHE QUESTO INTEGRALE VALE ZERO?

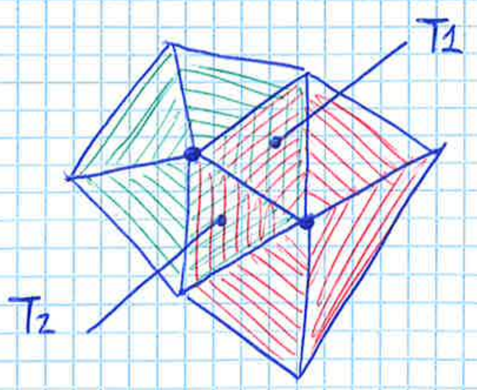


IN QUESTO CASO L' INTEGRALE e' ZERO POICHE' NON e' MAI VERO CHE ENTRAMBE LE φ SIA CONTEMPORANEAM. $\neq 0$!

DUNQUE IN QUESTO CASO SICURAMENTE: $\boxed{a_{jk} = 0}$

QUESTA CONDIZ. e' VALIDA ANCHE QUANDO I 2 SUPPORTI HANNO UN LATO IN COMUNE POICHE' NON ESISTE DI MODO UNA SITUAZ. IN CUI φ_j e φ_k SIANO CONTEMPORANEAM. $\neq 0$!

L' INTEGRALE FORNISCE UN VALORE $\neq 0$ QUANDO I 2 SUPPORTI SI SOVRAPPONGONO:



IN QUESTO CASO SUI 2 TRIANGOLI T_1 e T_2 I 2 GRADIENTI SONO TALI DA POTER DARE UN INTEGRALE $\neq 0$

IN QUESTO CASO DUNQUE CI POSSIAMO ASPETTARE CHE: $\boxed{a_{jk} \neq 0}$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 258