NUMERO: 2227A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Bongiorni Lorenzo

MATERIA: Dinamica dei sistemi Meccanici - (Teoria + esercizi) - Prof. Marchesiello - Fasana

DINAMICA DEI SISTEMI MECCANICI

STEFANO MARCHESIELLO

PROGRAMMA:

SISTEMI A 1 DOF
SISTEMI A PIÚ DOF
MECCANICA ANALITICA
SISTEMI CONTINUI
METODI ENERGETICI
DINAMICA DEI ROTORI

Meccanica delle vibrazioni
FASANA, MARCHESIELLO

Mechanical Vibrations Rao

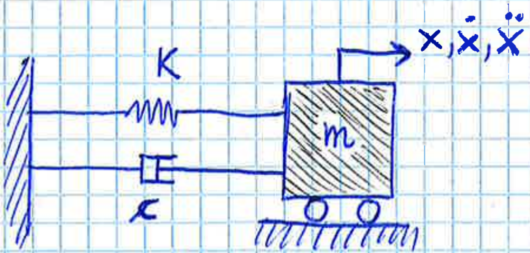
VEN 30 SET

DINAMICA ⇒ STUDIO DEL MOTO DEI CORPI IN RELAZIONE ALLE CAUSE (OVVERO LE FORZE) CHE LO PRODUCONO.

DINAMICA ⇒ É CARATTERIZZATA DALLA VARIABILE TEMPO (IN STATICA NON C'È)

- **SISTEMI AD 1 GRADO DI LIBERTÁ : SDOF**

IL SISTEMA PIÚ SEMPLICE é :



K ⇒ RIGIDEZZA ⇒ ENERG. POTENZ. ELASTICA
m ⇒ MASSA ⇒ ENERG. CINETICA
c ⇒ DISSIPAZIONE EN. ⇒ SMORZATORE VISCOSO

QUESTO MODELLO é SEMPLIFICATO POICHÉ SI SUPPONE CHE SMORZATORE E MOLLA ABBIANO MASSA NULLA. IN GENERALE, SI PARTE SEMPRE DA UN MODELLO SEMPLIFICATO!

DOBBIAMO ORA SCRIVERE L'EQUAZ. DEL MOTO ATTRAVERSO IL DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 3 di 290

A SECONDA DEL SEGNO DEL DISCRIMINANTE:

$$\Delta = c^2 - 4km$$

SI DEFINISCE COME VALORE CRITICO: $C_{CR} = 2\sqrt{km} \Rightarrow \Delta = 0$

SI DEFINISCE COME FATTORE DI SMORZAMENTO: $\boxed{\xi = \frac{c}{C_{CR}}}$

① $\Delta > 0$: GLI ZERI SONO REALI, DISTINTI E NEGATIVI

IN QUESTO CASO IL SISTEMA SI DICE SOVRASMORZATO

② $\Delta = 0$: GLI ZERI SONO REALI, COINCIDENTI

IN QUESTO CASO IL SISTEMA SI DICE CRITICAMENTE SMORZATO

③ $\Delta < 0$: GLI ZERI SONO COMPLESSI CONIUGATI MA $Re(s) < 0$

IN QUESTO CASO IL SISTEMA SI DICE SOTTOSMORZATO

INOLTRE:

$\Delta > 0 \Rightarrow \xi > 1$

$\Delta = 0 \Rightarrow \xi = 1$

$\Delta < 0 \Rightarrow \xi < 1$

LA CASISTICA PIÙ INTERESSANTE E FREQUENTE E' L'ULTIMA!

TIPICAMENTE, NEL TRATTARE L'EQUAZ. DIFFERENZ.:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}x = 0 \Rightarrow$$

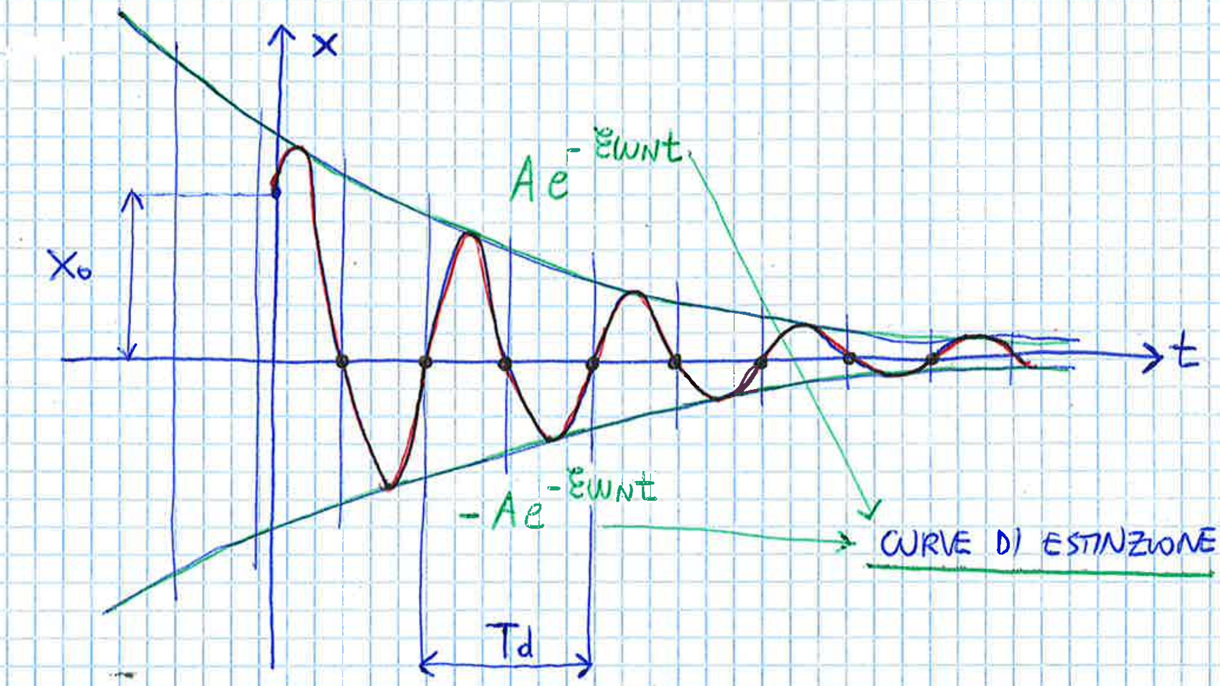
$$\ddot{x} + 2\xi\omega_N\dot{x} + \omega_N^2 x = 0$$ DOVE:

$$\boxed{\frac{c}{m} = 2\xi\omega_N} \wedge \boxed{\frac{K}{m} = \omega_N^2}$$

IN ALTERNATIVA, LA SOLUZ. PUÒ ANCHE ESSERE ESPRESSA COME:

$$x(t) = \left[A \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \alpha)\right] e^{-\xi \omega_N t}$$

QUEST'ULTIMA FUNZIONE, DETTA "PSEUDOPERIODICA", GRAFICAMENTE:



T_d RAPPRESENTA IL PERIODO DELLE OSCILLAZ. LIBERE SMORZATE:

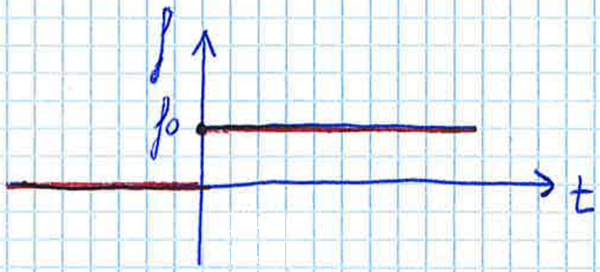
$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_N \sqrt{1-\xi^2}} > T_N = \frac{2\pi}{\omega_N}$$

MER 5 OTT

PROCEDIAMO ORA AL CALCOLO DELLE COSTANTI a e b NEL CASO SOTTOSMORZATO, VOGLIAMO CIOÈ RISOLVERE UN PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \\ x(0) = x_0 \qquad (\xi < 1) \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

- RISPOSTA AL GRADINO (CI OCCUPIAMO SOLO DEL CASO $\xi < 1$)



$$f(t) = f_0 \cdot u(t) \quad \text{DOVE:}$$

$$\boxed{u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}}$$

$\boxed{u(t)}$ SI DEFINISCE COME "GRADINO UNITARIO".

es. LA GRAVITA'

$\Rightarrow$ LASCIANDO DI COLPO LA MASSA SI OSSERVA UNA FORZANTE mg

IN GENERALE:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f_0 \, u(t) \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$$

SOLUZIONE DI QUESTA EQUAZ. NON OMOGENEA E':

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)\, e^{-\xi \omega_n t} + x_p$$

L'INTEGRALE PARTICOLARE VA CERCATO DELLA STESSA FORMA DELLA FORZANTE; INOLTRE NOI SAPPIAMO CHE:

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x_p = \frac{f_0}{k} = x_{STAT}$$

$$\lim_{t \to \infty} x_g(t) = 0 \quad \forall \xi \Rightarrow \text{STABILITA' DEL SISTEMA A SDOF}$$

IMPONENDO LE CONDIZIONI INIZIALI (CHE, PER SEMPLICITA', SI SUPPONGONO NULLE):

• RISPOSTA DI UN SISTEMA SDOF ALLA FORZANTE ARMONICA

L'EQUAZ. DEL MOTO E':

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t) \\ x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = v_0 \end{cases}$$

ALCUNE VOLTE AL POSTO DI W SI UTILIZZA Ω

DOVE: $f(t) = F_0 \cos wt \;\vee\; f(t) = F_0 \sin wt$

QUESTA ECCITAZIONE NELLA PRATICA SPERIMENTALE E' MOLTO DIFFUSA. OGNI FORZANTE ARMONICA, INOLTRE, PUÓ ESSERE VISTA COME "MATTONE" DEGLI SVILUPPI DI FOURIER $\Rightarrow$ CASO AVENTE UN'UTILITA' ENORME.

LA TEORIA DELLE EQUAZ. DIFFERENZ. CI DICE CHE:

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

INOLTRE:

$$\lim_{t \to \infty} x_g(t) = 0 \quad \forall \xi$$

QUINDI, ESAURITO IL TRANSITORIO:

$$x(t) \cong x_p(t) \qquad \text{(ESCLUSO IL CASO DI BATTIMENTO)}$$

SI VUOLE DUNQUE CERCARE LA RISPOSTA A REGIME, RICORDANDO SEMPRE CHE L'INTEGRALE PARTICOLARE E' DA CERCARE NELLA STESSA FORMA DELLA FORZANTE.

SI OSSERVA INOLTRE CHE:

$$F_0 e^{iwt} = F_0 \cos wt + i F_0 \sin wt \qquad \text{(EULERO)}$$

$$F_0 \cos wt = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{iwt}\right]$$

$$F_0 \sin wt = \mathrm{Im}\left[F_0 e^{iwt}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 11 di 290

$$\left[1-\left(\frac{w}{w_N}\right)^2+i2\xi\frac{w}{w_N}\right]X_0=\frac{F_0}{m\,w_N^2}=\frac{F_0}{k}$$

PONENDO ORA:

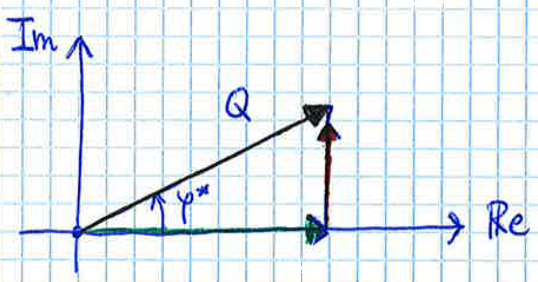
$$r=\frac{w}{w_N} \quad \wedge \quad \frac{F_0}{k}=X_{STAT}$$

LA X_{STAT} NON RAPPRESENTA QUI LA RISPOSTA ALLA FORZA PESO, BENSÌ LA RISPOSTA CHE AVREI A REGIME PER $w \to 0$.

DEFINISCO ANCORA COME "FATTORE DI AMPLIFICAZ. O GUADAGNO":

$$\boxed{Q=\frac{X_0}{X_{STAT}}=\frac{1}{1-r^2+i2\xi r}} \qquad \text{DOVE: } Q=Q\left(\frac{w}{w_N}\right)$$

VOGLIO ORA DETERMINARE MODULO E FASE DI Q (CHE SI RICORDA ESSERE UN NUMERO COMPLESSO):



$$\varphi^*=\text{ANGOLO DI FASE}=\arctan\frac{Im\,Q}{Re\,Q}$$

ESSENDO: $\tan\varphi^*=\frac{Im\,Q}{Re\,Q}$

RAZIONALIZZANDO Q:

$$Q=\frac{(1-r^2)-i(2\xi r)}{(1-r^2)^2+(2\xi r)^2}$$

DUNQUE:

$$\tan\varphi^*=\frac{-2\xi r}{1-r^2}$$

$\Rightarrow$ QUESTO È IL RISULTATO CHE SI OTTIENE CON LA "CONVENZ. DEGLI ANTICIPI"

TUTTAVIA, POICHÉ φ^* VIENE SEMPRE NEGATIVO SI UTILIZZA LA "CONVENZIONE DEI RITARDI":

$$\lim_{r \to 0^+} \tan \varphi = 0^+ \Rightarrow \varphi \to 0$$

$$\lim_{r \to \infty} \tan \varphi = 0^- \Rightarrow \varphi \to \pi \Rightarrow \boxed{\text{OPPOSIZIONE DI FASE}}$$

ABBIAMO QUINDI DIMOSTRATO CHE, QUANDO $r \to \infty$ (LA PULSAZIONE DELLA FORZANTE E' $\gg$ DELLA PULSAZIONE NATURALE) SI OSSERVA UNA RISPOSTA AVENTE UN RITARDO DI 180°.

QUESTO FENOMENO DINAMICO DICE CHE LA FORZA E LO SPOSTAMENTO SONO IN OPPOSIZIONE DI FASE!

DEFINIAMO COME "FREQUENZA DI RISONANZA" LA FREQUENZA CHE PRODUCE LA MASSIMA AMPIEZZA, OVVERO LA FREQUENZA CHE PREVEDE UNA RISPOSTA MASSIMA.

PER DETERMINARLA, CERCO IL MASSIMO DEL MODULO DI Q:

$$|Q| = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

OVVERO:

CERCO IL MINIMO DEL RADICANDO A DENOMINATORE:

$$\frac{d}{dr}\left[(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$2(1-r^2)(-2\cancel{r}) + 4\xi^2 \cdot 2\cancel{r} = 0$$

ESCLUDO $r=0$ COME SOLUZ. POICHE' NON INTERESSANTE

$$2\xi^2 = 1 - r^2 \Rightarrow r = \sqrt{1-2\xi^2}$$

LA FREQUENZA DI RISONANZA QUINDI, PER DEFINIZIONE:

$$\boxed{\omega_{RIS}} = \omega_{max\ amp} = \boxed{\omega_N \sqrt{1-2\xi^2}}$$

NOI VOLEVAMO CALCOLARE LA RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA:

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[X_0 e^{i\omega t}\right] = \mathrm{Re}\left[|X_0| e^{-i\varphi} e^{i\omega t}\right] \Rightarrow$$

$$= |X_0| \cdot \cos(\omega t - \varphi)$$

RICAPITOLANDO SULLE "OMEGA":

- ω_N → PULSAZIONE PROPRIA (K, m)
- ω_d → PULSAZIONE DELLE OSCILLAZIONI LIBERE SMORZATE: $\omega_N \sqrt{1-\xi^2}$
- $\omega\,(o\ \Omega)$ → PULSAZIONE DELLA FORZANTE
- ω_{RIS} → PULSAZIONE DI RISONANZA: $\omega_N \sqrt{1-2\xi^2}$ (PULSAZ. DELLA MAX AMPIEZZA)

— SISTEMA
— FORZANTE

SE ξ è PICCOLO LA SECONDA e L'ULTIMA SONO PRATICAMENTE UGUALI.

NOTA LA RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA SI PUÒ CALCOLARE LA RISPOSTA ALLA FORZANTE PERIODICA:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

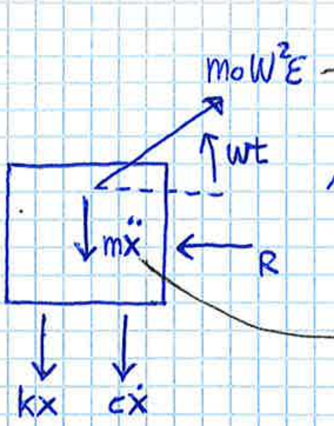
SE f_1 PRODUCE x_1
SE f_2 PRODUCE x_2
$\Rightarrow$ ALLORA: $af_1 + bf_2$ PRODUCE $ax_1 + bx_2$

QUEST'ULTIMA è NOTA COME SOVRAPPOSIZ. LINEARE DEGLI EFFETTI.

QUALUNQUE FUNZIONE PERIODICA DI PERIODO T PUÒ ESSERE SCRITTA COME:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)\right] \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T}\right)$$

Fourier



FORZA CENTRIPETA ROTANTE NEL TEMPO

QUESTO TERMINE CONTIENE LA FORZA DI INERZIA DELLA SCATOLA $(m - m_0)$ E DI m_0

IMPONENDO L'EQUILIBRIO ALLA TRASLAZ. VERTICALE (equaz. del moto):

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - m_0 W^2 \varepsilon \sin(Wt) = 0 \Rightarrow$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \mathrm{Im}\left[m_0 W^2 \varepsilon\, e^{iWt}\right]$$

MER 12 OTT

PASSIAMO ORA ALL'EQUAZ. COMPLESSA:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m_0 W^2 \varepsilon\, e^{iWt}$$

LA SOLUZ. COMPLESSA PARTICOLARE (A REGIME) E':

$$x = X_0 e^{iWt}$$

ORA:

$$(k - mW^2 + iWc) X_0 \cancel{e^{iWt}} = m_0 W^2 \varepsilon \cancel{e^{iWt}} \Rightarrow$$

$$\frac{X_0}{\varepsilon} = \frac{m_0 W^2}{k - mW^2 + iWc} = \left(\frac{m_0}{m}\right) \frac{W^2}{W_N^2 - W^2 + i2\xi W W_N} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{X_0}{\varepsilon} = \left(\frac{m_0}{m}\right) \frac{(W/W_N)^2}{1 - \left(\frac{W}{W_N}\right)^2 + i2\xi \frac{W}{W_N}}} \Rightarrow$$

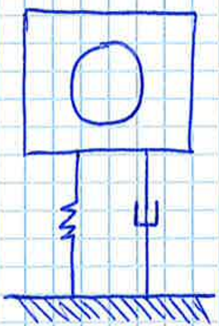
DOBBIAMO ORA TROVARE MODULO E FASE!

$$\omega_{RIS} = \frac{\omega_N}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

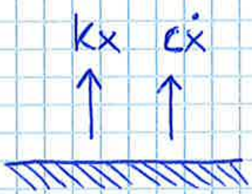
IN GENERALE, QUESTO ANDAMENTO ESISTE PER TUTTE LE MACCHINE ROTANTI ⇒ POICHE' L'ECCENTRICITA' PUO' ESSERE PICCOLA MA C'E' SEMPRE!

INTUITIVAMENTE, VERREBBE DA DIRE CHE ALL'AUMENTARE DELLO SMORZAMENTO (ξ) LE VIBRAZIONI DIMINUISCONO SEMPRE ⇒ CONVIENE SEMPRE SMORZARE! TUTTAVIA, NON E' SCONTATO IL DISCORSO DELLA TRASMISSIONE A TERRA DI SOLLECITAZIONI:

- TRASMISSIBILITA' DELLA LAVATRICE



VOGLIAMO QUI CALCOLARE LA FORZA TRASMESSA AL VINCOLO!



$$f_v(t) = kx + c\dot{x} \Rightarrow$$

$$f_v(t) = (k + i\omega c)\, X_0\, e^{i\omega t} \qquad (X_0 \in \mathbb{C})$$

SI OTTIENE QUINDI UNA FORZA DI TIPO ARMONICO:

$$f_v(t) = F_v\, e^{i\omega t} \qquad (\text{con } F_v \in \mathbb{C})$$

VIENE DEFINITA COME TRASMISSIBILITA' DELLA LAVATRICE:

VALUTANDO LA FUNZIONE IN $\sqrt{2}$:

$$|T(\sqrt{2})| = 2\sqrt{\frac{\cancel{1+8\varepsilon^2}}{\cancel{1+8\varepsilon^2}}} = 2 \quad \forall \varepsilon$$

TUTTE LE CURVE, QUINDI, PASSERANNO PER IL PUNTO $(\sqrt{2}, 2)$, DETTO "PUNTO DI INVARIANZA". → I

STUDIANDO IL COMPORTAMENTO ASINTOTICO:

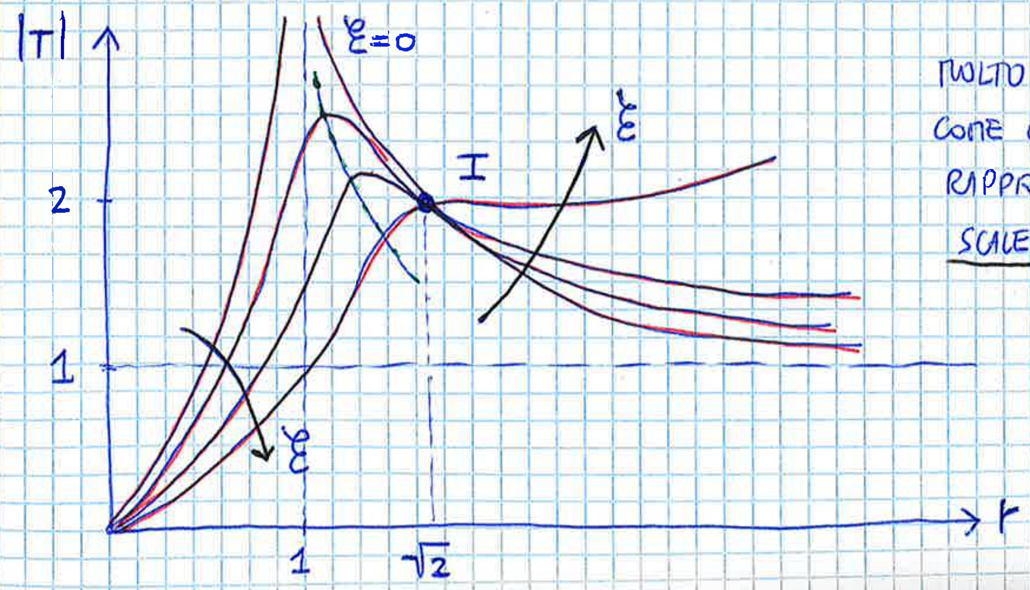
$$\lim_{r\to 0} |T| = 0$$

$$\lim_{r\to\infty} |T| = \begin{cases} \infty & \text{SE } \varepsilon \neq 0 \\ 1 & \text{SE } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

COME SCELGO ε ?

- SE $\varepsilon = 0 \Rightarrow$ PROBLEMA DI RISONANZA "INFINITA"
- SE $\varepsilon \neq 0 \Rightarrow$ PROBLEMA DELLE SOLLECITAZIONI SCARICATE A TERRA

L'ANDAMENTO DI $|T|$ VS r E':



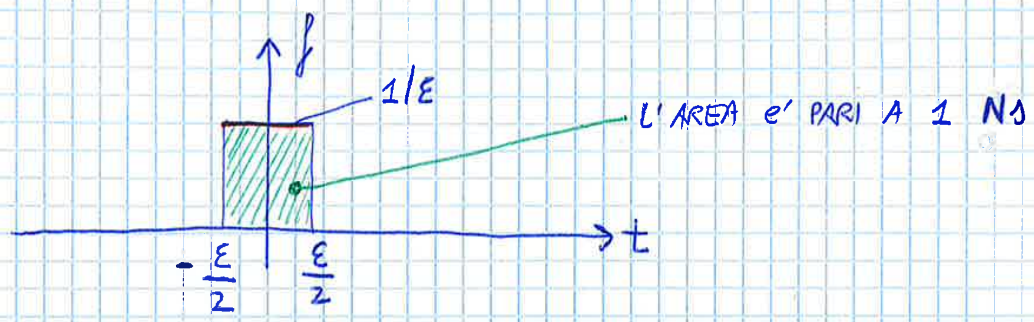
MOLTO SPESSO, GRAFICI COME QUESTO SONO RAPPRESENTATI IN SCALE DOPPIO-LOGARITMICHE

→ POSSO APPREZZARE VALORI MOLTO PICCOLI E VALORI MOLTO GRANDI

• RISPOSTA ALL' IMPULSO UNITARIO (IMPULSE RESPONSE FUNCTION - IRF)

QUI VOGLIO CERCARE DI CALCOLARE LA RISPOSTA AD UNA FORZANTE IMPULSIVA (ES. UNA MARTELLATA).

POSSO PENSARE ALLA SOLLECITAZ. IMPULSIVA COME:

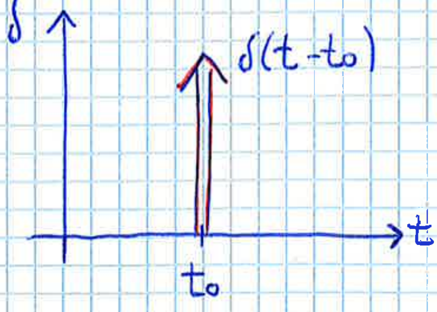


QUELLO CHE SI FA QUI E' INTRODURRE LA "$\boxed{\text{DELTA DI DIRAC}}$" $\delta(t)$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(t) = \delta(t)$$

(LA $\delta(t)$ CHIARAMENTE PUÒ NON ESSERE RAPPRESENTATA IN ZERO)

LA DEFINIZ. DELLA "DELTA DI DIRAC" E' LA SEGUENTE:



$$\boxed{\delta(t-t_0) \Rightarrow \begin{cases} \delta(t-t_0) = 0 & \forall t \neq t_0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0)\, dt = 1 \end{cases}}$$

UNA PROPRIETA' DELLA "DELTA DI DIRAC" E' CHE PUÒ ESSERE VISTA COME UNA DERIVATA DEL GRADINO:

$$\delta(t-t_0) = \frac{d}{dt}\left[u(t-t_0)\right]$$

RITORNANDO AL PROBLEMA INIZIALE:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \longrightarrow$$ FORZANTE, IL CUI IMPULSO E' UNITARIO

CON LE CONDIZ. INIZIALI:

$$\begin{cases} x(0^-) = 0 \\ \dot{x}(0^-) = 0 \end{cases} \qquad \left(\text{SICURAMENTE: } \begin{matrix} x(0^+) \neq 0 \\ \dot{x}(0^+) \neq 0 \end{matrix} \right)$$

QUELLO CHE SI FA QUI E' UN DOPPIO PROCESSO DI INTEGRAZIONE:

$$\int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \int_{-\varepsilon/2}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\, dt\, d\tau = \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \int_{-\varepsilon/2}^{\tau} \delta(t)\, dt\, d\tau$$

QUESTO PERO' NON BASTA, PER "SFRUTTARE" LE CARATTERISTICHE DELLA DELTA DI DIRAC DEVO FAR TENDERE ε A ZERO:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \int_{-\varepsilon/2}^{\tau} (m\ddot{x} + c\dot{x} + kx)\, dt\, d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \int_{-\varepsilon/2}^{\tau} \delta(t)\, dt\, d\tau$$

CALCOLIAMO ORA L'INTEGRALE A 2° MEMBRO:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \int_{-\varepsilon/2}^{\tau} \delta(t)\, dt\, d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \left[u(\tau) - \cancel{u\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right] d\tau \Rightarrow$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\tau\, u(\tau) \right]_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varepsilon}{2} \underbrace{u\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}_{=1} + \frac{\varepsilon}{2} \cancel{u\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)} \right] = 0$$

PER QUANTO RIGUARDA IL 1° MEMBRO, INVECE:

PERTANTO SI OTTIENE: $\boxed{\dot{x}(0^+) = \frac{1}{m}}$

TUTTAVIA, DAL PUNTO DI VISTA DIMENSIONALE L'EQUAZ. SEMBREREBBE NON TORNARE!

QUESTO POICHÉ:

$\delta \Rightarrow [s^{-1}]$

$[N \cdot s] \Rightarrow$ UNITÀ DI MISURA DELL'IMPULSO DI UNA FORZA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 1 \cdot \delta(t)$$

PERTANTO:

$$\dot{x}(0^+) = \left[\frac{N \cdot s}{kg}\right] = \left[\frac{kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot s}{kg}\right] = \left[\frac{m}{s}\right]$$

IL 1 È IL MOTIVO DEL NOME "IMPULSO UNITARIO" $\Rightarrow$ NON CONOSCO LA FORZA DELLA MARTELLATA, MA SOLO IL SUO IMPULSO!

VEN 14 OTT

ANDIAMO ORA AD APPLICARE LE CONDIZ. INIZIALI (IL SISTEMA È $\xi < 1$):

$$x(t) = (a \cos \omega_d t + b \sin \omega_d t)\, e^{-\xi \omega_n t}$$

IN QUESTO CASO:

$x(0^+) = a = 0$ $\Rightarrow$ QUI CONVIENE PRIMA APPLICARE LE CONDIZ. INIZIALI COSÌ SI SEMPLIFICA IL PROBLEMA!

DERIVANDO:

$$\dot{x}(t) = b\omega_d \cos \omega_d t\, e^{-\xi\omega_n t} - \xi\omega_n e^{-\xi\omega_n t} \cdot b \sin \omega_d t$$

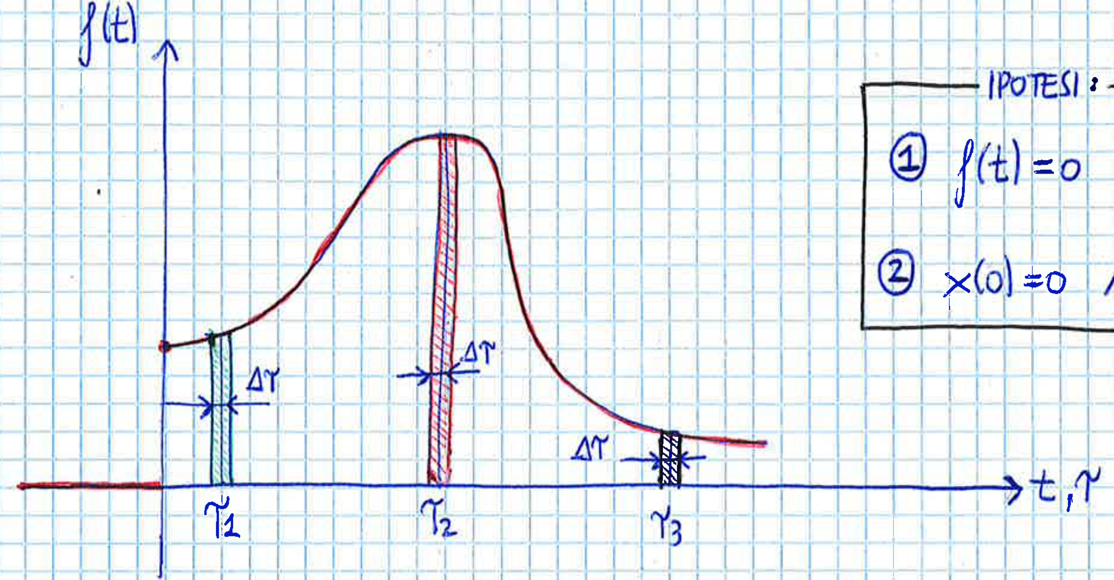
$$\dot{x}(0^+) = b\,\omega_d = 1/m$$

• FORZANTE ARBITRARIA

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

CON $f(t)$: FUNZIONE QUALUNQUE

CONSIDERIAMO INIZIALMENTE 2 GRAFICI e PRENDIAMO 3 GENERICI ISTANTI ED I RELATIVI IMPULSI:

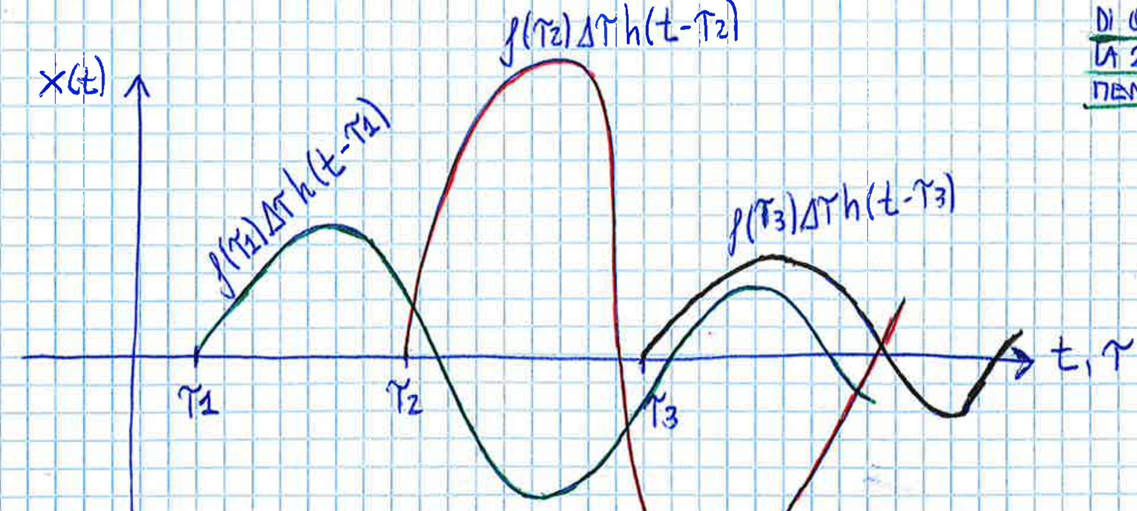


IPOTESI:

① $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$

② $x(0) = 0 \ \wedge \ \dot{x}(0) = 0$

DI QUESTE 2 IPOTESI LA 2° e' ELIMINABILE, MENTRE LA PRIMA NO!



NON CONOSCO ANCORA LA $f(t)$ MA SO CALCOLARE LA RISPOSTA AD UN IMPULSO DI UNA CERTA ENTITA' $\Rightarrow$ CONSIDERO QUINDI τ_1, τ_2 e τ_3.
IMMAGINO ORA CHE AGISCA UN SOLO RETTANGOLO $\Rightarrow$ QUESTO GENERERA' UNA CERTA RISPOSTA: $f(\tau_1)\,\Delta\tau\, h(t-\tau_1)$ $\Rightarrow$ RISPOSTA AL SOLO RETTANGOLO VERDE.
APPLICANDO ORA IL RETTANGOLO ROSSO $\Rightarrow$ QUESTA VOLTA PERO' L'AMPIEZZA

QUEST'ULTIMO SI DEFINISCE COME INTEGRALE DI CONVOLUZIONE O DI DUHAMEL:

$$\boxed{x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau} \Longrightarrow \text{INTEGRALE DI CONVOLUZIONE}$$

VEDIAMO ORA ALCUNE PROPRIETA' DI QUESTO INTEGRALE:

1. PONENDO $\boxed{t-\tau=\lambda} \Rightarrow \tau = t-\lambda$

$$\left.\begin{aligned} \tau = 0 &\Rightarrow \lambda = t \\ \tau = t &\Rightarrow \lambda = 0 \end{aligned}\right\} \text{ESTREMI DI INTEGRAZ.} \qquad d\tau = -d\lambda$$

DUNQUE SI OTTIENE CHE:

$$x(t) = \int_t^0 f(t-\lambda)h(\lambda)(-d\lambda) = \int_0^t f(t-\lambda)h(\lambda)\,d\lambda = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

NELL'ULTIMO PASSAGGIO HO SOSTITUITO λ CON τ POICHE' "VARIABILE MUTA".
CONFRONTANDO GLI INTEGRALI ALL'INIZIO E ALLA FINE:

$$\int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau \Longleftrightarrow \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

POSSO DUNQUE "SHIFTARE" UNA DELLE 2 FUNZIONI. → PROPRIETA' DI CONVOLUZIONE

SIMBOLICAMENTE, QUINDI, LA CONVOLUZIONE VIENE INDICATA CON:

$$f(t) * h(t)$$

QUEST'ULTIMA RAPPRESENTA IL PRODOTTO DI 2 FUNZIONI, DI CUI UNA E' SHIFTATA (TIPICAM. QUELLA PIU' FACILE).

③ SE LE CONDIZ. INIZIALI NON SONO NULLE (NON VALE PERTANTO UNA DELLE IPOTESI INIZIALI) QUELLO CHE BISOGNA FARE E' AGGIUNGERE LA RISPOSTA ALLE CONDIZ. INIZIALI:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau + \text{RISPOSTA ALLE CONDIZ. INIZIALI}$$

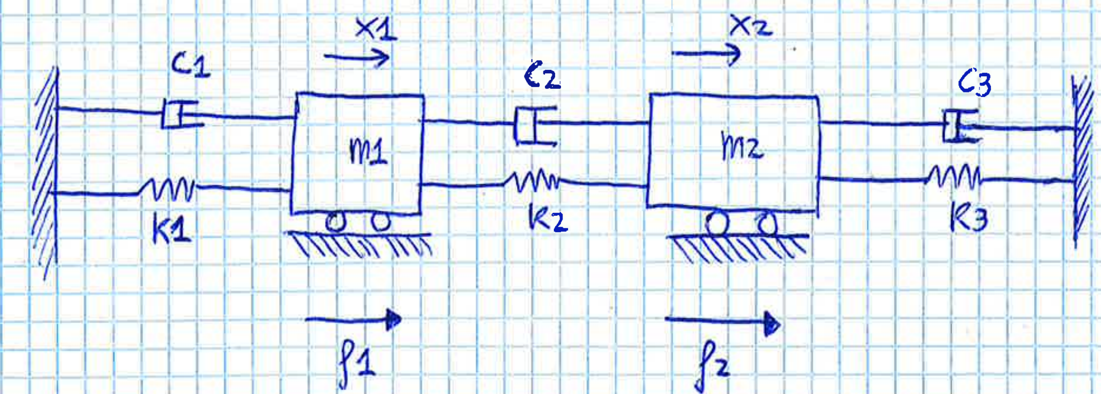
QUI LE CONDIZ. INIZIALI SONO TALI PERCHÉ IO STO APPLICANDO UNA FORZA MENTRE IL SISTEMA SI STA GIÀ MUOVENDO!

MER 19 OTT

VEDREMO ORA SISTEMI CON PIÙ DI 1 GRADO DI LIBERTA': PER FARE CIÒ ABBIAMO BISOGNO DELL'ANALISI MODALE E DEGLI AUTOVALORI.

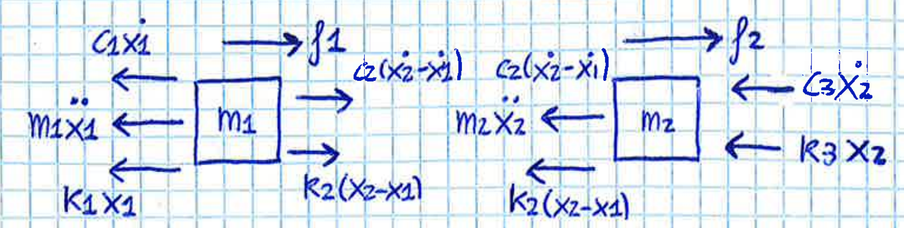
- SISTEMI MDOF (A MOLTI GRADI DI LIBERTA')

NOI SAPPIAMO TUTTO SUI SISTEMI SDOF:



IL PROBLEMA NASCE QUANDO I 2 SISTEMI SDOF SONO ACCOPPIATI!
QUELLO CHE SAPPIAMO FARE E' SCRIVERE LE EQUAZ. DEL MOTO:

DCL



FACCIAMO ORA IL SALTO DAL PARTICOLARE AL GENERALE:

PER I SISTEMI MDOF (A PIÚ DI 2 DOF) LE EQUAZ. DEL MOTO SI POSSONO SEMPRE SCRIVERE IN QUESTO MODO:

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}}$$

$$\{x\} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_m]^T$$

LA TRASPOSTA SERVE SOLO ED ESCLUSIVAMENTE PER RISPARMIARE SPAZIO

$\{x\} \Rightarrow$ 1 COLONNA n RIGHE

$\{x\}^T \Rightarrow$ 1 RIGA n COLONNE

COME NOMENCLATURA:

$[m] \Rightarrow$ MATRICE DI MASSA

$[c] \Rightarrow$ MATRICE DI SMORZAMENTO

$[k] \Rightarrow$ MATRICE DI RIGIDEZZA

$\in \mathbb{R}^{n,n}$

PROPRIETA'

1° É SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE LE EQUAZ. DEL MOTO IN MODO CHE LE TRE MATRICI SIANO SIMMETRICHE (QUESTO VALE PER I "SISTEMI NATURALI").

NATURALMENTE, é POSSIBILE CHE LE MATRICI NELL'EQUAZ. SCRITTA NON SIANO SIMMETRICHE:

$\boxed{\text{É SEMPRE POSSIBILE} \ \neg \Rightarrow \text{SUCCEDE SEMPRE!}}$

TUTTAVIA, POICHÉ L'ANALISI MODALE SI FONDA SULLA SIMMETRIA DEVO FARE IN MODO CHE LE MATRICI SIANO COMUNQUE SIMMETRICHE!

2° $[m]$ É DEFINITA POSITIVA

$[k]$ e $[c]$ SONO DEFINITE POSITIVE o SEMIDEFINITE POSITIVE

POSSO QUI RICICLARE QUELLO CHE HO SCRITTO PRIMA PONENDO:

$$[c] = 0 \qquad [k] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

UTILIZZANDO IL CRITERIO DI SYLVESTER:

$$\det k = k > 0$$

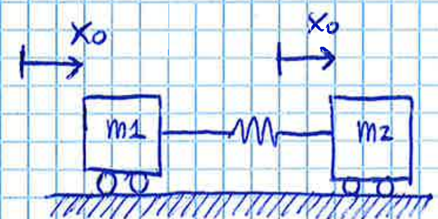
$$\det \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = k^2 - k^2 = 0 \rightarrow \text{MATRICE SEMIDEFINITA POSITIVA!}$$

QUESTO POICHÉ L'ENERGIA POTENZ. ELASTICA PER UN SISTEMA MDOF:

$$V = \frac{1}{2} \{x\}^T [k] \{x\}$$

ESISTE PERTANTO UN $\{x\} \neq \{0\}$ CHE NON FA VARIARE L'ENERGIA POTENZIALE ELASTICA.

QUESTO INSIEME È CHIARAMENTE DATO DA: $\boxed{x_1 = x_2}$



QUESTI SISTEMI SI DICONO "SEMIDEFINITI" e AVRANNO SEMPRE ALMENO UN AUTOVALORE NULLO ($\omega_1^2 = 0$).

$\boxed{\text{MATRICI SEMIDEFINITE POSITIVE}}$ $\Rightarrow$ ESISTE UN INSIEME DI SPOSTAMENTI (NON NULLI) CHE NON ALTERA L'ENERGIA POTENZ. ELASTICA

• ANALISI MODALE

VOGLIAMO QUI TRASFORMARE UN SISTEMA AVENTE n DOF IN n SISTEMI SDOF $\Rightarrow$ VOGLIAMO DISACCOPPIARE!

QUELLO CHE FAREMO SEGUE QUESTO PROCESSO:

$$\boxed{[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}}$$

$\boxed{[c]=[0] \wedge \{f\}=\{0\}} \rightarrow$

$\downarrow$

RICERCA SOLUZ. SINCRONE

$\downarrow$

AUTOPROBLEMA (EVP) $\rightarrow$ $\{\psi_i\}$ AUTOVETTORI $\boxed{\text{MODI}}$; ω_i^2 AUTOVALORI

$\downarrow$

ORTOGONALITA' DEI MODI

$\downarrow$

TEOREMA DI ESPANSIONE

$\downarrow$

TRASFORMAZ. MODALE

$\downarrow$

DISACCOPPIAMENTO DELLE EQUAZ.

SMORZAMENTO PROPORZIONALE $\rightarrow$

$\rightarrow$ RISPOSTA LIBERA

$\boxed{\{f\} \neq \{0\}} \rightarrow$

$\rightarrow$ RISPOSTA ALLA FORZANTE ARMONICA

$$\frac{\ddot{g}(t)}{g(t)} = - \frac{\{X_0\}^T \cdot [k] \{X_0\}}{\{X_0\}^T \cdot [m] \cdot \{X_0\}} = - \omega^2$$

($\omega = 0$ QUANDO $[k]$ E' SEMIDEFINITA POSITIVA)

ω RAPPRESENTA UNA "PULSAZIONE".

NEL DOMINIO DEL TEMPO, PERTANTO:

$$\ddot{g}(t) + \omega^2 g(t) = 0$$

LA CUI SOLUZIONE E':

- $g(t) = \cos(\omega t + \theta)$ SE $\omega^2 > 0$
- $g(t) = At + B$ SE $\omega^2 = 0$

SUPPONENDO CHE $\omega^2 > 0$, ALLORA LA SOLUZ. SINCRONA E':

$$\boxed{\{x(t)\} = \{X_0\} \cos(\omega t + \theta)}$$

PER TROVARE $\{X_0\}$, IL QUALE MI COMUNICA L'ENTITA' DEGLI SPOSTAM. DELLE VARIE MASSE:

$$-\omega^2 [m] \{X_0\} \cancel{\cos(\omega t + \theta)} + [k] \{X_0\} \cancel{\cos(\omega t + \theta)} = \{0\} \Rightarrow$$

$$\boxed{([k] - \omega^2 [m]) \{X_0\} = \{0\}} \Rightarrow$$

PROBLEMA AGLI AUTOVALORI (EIGENVALUE PROBLEM) → EVP

QUESTI CI DICONO IN QUALCHE MODO COME SI MUOVE LA STRUTTURA.
QUESTI MODI SI COMBINANO TUTTI INSIEME.

ESISTONO n AUTOVETTORI e n AUTOVALORI: IN REALTÀ GLI AUTOVETTORI SONO DEFINITI A MENO DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA, OVVERO:

es.
$$\left.\begin{aligned} \{\psi_1\} &= [1\ \ 2\ \ 5\ \ -3]^T \\ \{\psi_2\} &= [10\ \ 20\ \ 50\ \ -30]^T \end{aligned}\right\} \{\psi_1\} = \{\psi_2\}$$

PER QUESTO MOTIVO GLI AUTOVETTORI NON SONO n, MA ∞^n $\Rightarrow$ NOI DIREMO PERÒ CHE SONO n.

A DIFFERENZA DI UNA COSTANTE MOLTIPLICATIVA LO SPOSTAMENTO DELLA MASSA 1 HA LA STESSA FORMA DELLO SPOSTAMENTO DELLA MASSA 2 (QUESTO SPIEGA IL PERCHÉ DEL TERMINE "FORMA MODALE").

IN GENERALE:

$\boxed{\omega_i^2 \text{ e } \{\psi_i\} \text{ DEFINISCONO IL MODO DI VIBRARE } i\text{-ESIMO}}$

DEFINISCO ORA:

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N^2 \end{bmatrix} = [\Lambda]$$

INSERENDO GLI AUTOVETTORI PER COLONNA IN UNA MATRICE, DEFINISCO LA MATRICE MODALE (O MATRICE DEGLI AUTOVETTORI):

$$\big[\{\psi_1\}\ \{\psi_2\}\ \dots\ \{\psi_N\}\big]_{N\times N} = [\psi] \Rightarrow \boxed{\text{MATRICE MODALE}}$$

$$\{\psi_s\}^T \omega_r^2 [m] \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T [k] \{\psi_r\} \qquad (1)$$

$$\{\psi_r\}^T \omega_s^2 [m] \{\psi_s\} = \{\psi_r\}^T [k] \{\psi_s\} \qquad (2)$$

TRASPONENDO LA SECONDA:

$$\{\psi_s\}^T \omega_s^2 [m]^T \{\psi_r\} = \{\psi_s\}^T [k]^T \{\psi_r\} \qquad (2^T)$$

ESSENDO $[m]$ e $[k]$ SIMMETRICHE: $[m] = [m]^T \wedge [k] = [k]^T$

CALCOLO ORA $(1) - (2)^T$:

$$(\omega_r^2 - \omega_s^2) \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0 \qquad (1)-(2)^T$$

MER 26 OTT

M-ORTOGONALITÀ

ORA, $\boxed{\text{SE } \omega_r \neq \omega_s}$:

POICHÉ $(\omega_r^2 - \omega_s^2) \neq 0 \Rightarrow \{\psi_s\}^T [m] \{\psi_r\} = 0$

QUESTA CONDIZ. SI CHIAMA "M-ORTOGONALITÀ" (M-⊥) ⇒
GLI AUTOVETTORI $\{\psi_s\}$ e $\{\psi_r\}$ SONO ORTOGONALI ATTRAVERSO LA MATRICE $[m]$

$\boxed{\text{SE } \omega_r = \omega_s}$ ($r = s$, NO AUTOVALORI RIPETUTI):

$\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\}$ PUÒ ESSERE NULLO OPPURE NO!

IN REALTÀ POSSIAMO DIRE CHE:

$$\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} = m_r > 0$$ (ESSENDO $[m]$ DEFINITA POSITIVA)

MASSA MODALE

SFRUTTIAMO QUESTA PROPRIETÀ

DIMOSTRIAMO ORA (PER ASSURDO) IL TEOREMA:

CONSIDERO UNA COMBINAZ. LINEARE DI AUTOVETTORI E SI IPOTIZZA CHE QUESTA SIA NULLA CON C_r NON TUTTI NULLI:

$$c_1\{\psi_1\} + \dots + c_n\{\psi_n\} = \sum_{r=1}^{n} c_r\{\psi_r\} = 0$$ CON C_r NON TUTTI NULLI

QUESTO IMPLICA CHE CI SIANO DEGLI AUTOVETTORI LINEARM. DIPENDENTI.

UTILIZZANDO ORA $\boxed{\text{"L'AMMAZZA AUTOVETTORI"}}$:

$$\{\psi_s\}^T[m]$$

MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER QUESTA ENTITA':

$$\{\psi_s\}^T[m]\sum_{r=1}^{n} c_r\{\psi_r\} \Rightarrow \sum_{r=1}^{n}\{\psi_s\}^T[m]\{\psi_r\}c_r = 0 \Rightarrow$$

$$\{\psi_s\}^T[m]\{\psi_1\}c_1 + \dots + \{\psi_s\}^T[m]\{\psi_n\}c_n = 0$$

APPLICANDO LA M-ORTOGONALITA', SE $S \neq 1$ ALLORA IL 1° TERMINE E' NULLO... :

$$0 + 0 + \dots + m_s c_s + 0 + \dots + 0 = 0$$

L'AMMAZZA AUTOVETTORI AMMAZZA TUTTI TRANNE IL VALORE DI $r = s$!

POICHE' $m_s \neq 0 \Rightarrow c_s = 0$

RIPETENDO ORA PER OGNI S:

$$\forall s: \; c_s = 0 \quad (\text{CON } s = 1, \dots, n)$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 49 di 290

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

ABBIAMO INOLTRE IL RISULTATO DEL PROBLEMA AGLI AUTOVALORI:

$$EVP([k],[m]) = (\omega_r^2, \{\psi_r\})$$

L'OPERAZ. CHE SI FA È QUELLA DI APPLICARE LA TRASFORMAZ. MODALE (DIRETTA):

$$\boxed{\{x\} = [\psi]\{\eta\}}$$

DOVE: $\{\eta(t)\} \Rightarrow$ VETTORE DELLE COORDINATE MODALI

QUEST'ULTIMA RAPPRESENTA UNA SORTA DI "CAMBIO DI COORDINATE".
NON RIESCO A RISOLVERE L'EQUAZ. IN X $\Rightarrow$ INTRODUCO UNA NUOVA VARIABILE!

FARÒ CIÒ UTILIZZANDO LA MATRICE MODALE.

I VARI PASSAGGI PREVEDONO:

LE COORD. MODALI (o COORD. NATURALI) RAPPRESENTANO DELLE COORD. PRIVILEGIATE, CHE ANDRÒ AD UTILIZZARE NELL'EQUAZ. DEL MOTO:

$$\{\ddot{x}\} = [\psi]\{\ddot{\eta}\}$$

(ESSENDO LA MATRICE $[\psi] \in \mathbb{R}^{n,n}$ COSTANTE PER I SISTEMI LINEARI TEMPO INVARIANTI)

DUNQUE:

$$[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [k][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

MOLTIPLICANDO A SINISTRA PER $[\psi]^T$ (STO APPLICANDO L'AMMAZZA AUTOVETTORI):

POICHÉ ALMENO 1 DELLE 3 MATRICI NON E' DIAGONALE LE EQUAZ. SONO SICURAM. ACCOPPIATE.

CONSIDERO ORA L'AUTOPROBLEMA (EVP) $\boxed{\text{NON SMORZATO}}$:

$$EVP\left([k],[m]\right) = \left(\omega_r^2, \{\psi_r\}\right)$$

LA MATRICE MODALE $[\psi]$ E' RELATIVA AL PROBLEMA $\boxed{\text{NON SMORZATO}}$!

QUINDI, APPLICANDO LA TRASFORMAZ. MODALE (APPLICATA AL PROBL. NON SMORZATO):

$$[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

MOLTIPLICANDO PER $[\psi]^T$:

$$[\psi]^T[m][\psi]\{\ddot{\eta}\} + [\psi]^T[c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [\psi]^T[k][\psi]\{\eta\} = \{0\}$$

$$[\diagdown m_r \diagdown]\{\ddot{\eta}\} + \{\psi\}^T[c][\psi]\{\dot{\eta}\} + [\diagdown k_r \diagdown]\{\eta\} = \{0\}$$

PER QUANTO RIGUARDA IL 2° ADDENDO:

GENERALMENTE $[\psi]^T[c][\psi]$ NON E' DIAGONALE!

$\boxed{\text{NELLA PRATICA, NOI FAREMO FINTA CHE QUESTA MATRICE SIA DIAGONALE, OVVERO ADOTTEREMO UN'IPOTESI DI SMORZAMENTO PROPORZIONALE.}}$

QUESTA APPARENTE APPROSSIMAZ. E' NECESSARIA POICHÉ ALTRIMENTI NON SE NE ESCE DALLA QUESTIONE.

SI DEFINISCE, PERTANTO, COME "SMORZAMENTO PROPORZIONALE" $[c]$ TALE CHE:

$[\psi]^T[c][\psi]$ É DIAGONALE

QUEST' ULTIMA E' VALIDA SOLO SE C'E' SMORZAM. PROPORZIONALE!

VEDIAMO ORA PULSAZ. PROPRIA e FATTORE DI SMORZAMENTO:

$$\ddot{\eta}_r + \frac{c_r}{m_r}\dot{\eta}_r + \frac{k_r}{m_r}\eta_r = 0 \Rightarrow$$

$$\ddot{\eta}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{\eta}_r + \omega_r^2 \eta_r = 0$$

ω_r e ξ_r SI DICONO " $\boxed{\text{PARAMETRI MODALI}}$ " !

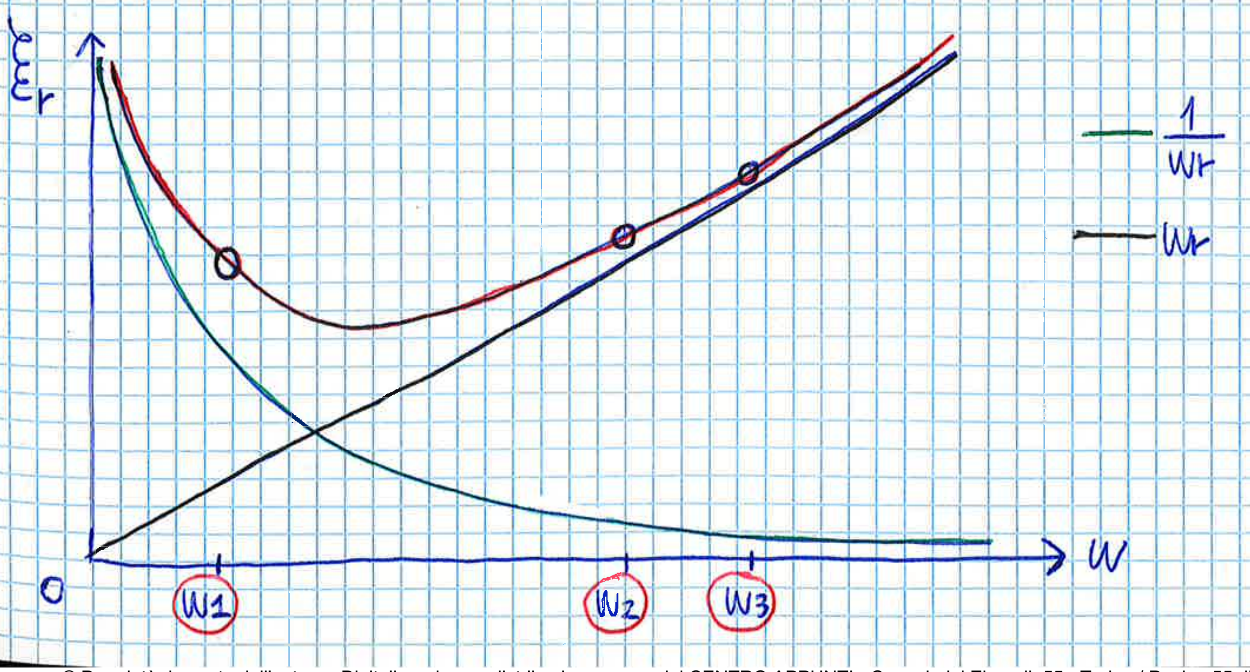
NEL CASO SPECIFICO POSSIAMO CALCOLARE IL PARAMETRO DI SMORZAMENTO IN FUNZIONE DI α e β:

$$2\xi_r \omega_r = \frac{c_r}{m_r} = \frac{\alpha m_r + \beta k_r}{m_r} \qquad (c_r: \text{SMORZAM. MODALE})$$

$$2\xi_r \omega_r = \alpha + \beta \omega_r^2 \Rightarrow \boxed{\xi_r = \frac{\alpha}{2}\frac{1}{\omega_r} + \frac{\beta}{2}\omega_r}$$

QUI C'E' IL LEGAME TRA IL FATTORE DI SMORZAM. e LE PULSAZ. PROPRIE!

QUESTA LEGGE GRAFICAMENTE e':



POICHÉ VALE PER OGNI ISTANTE DI TEMPO, LA TRASFORMAZ. MODALE INVERSA E' ANCHE:

$$\{\dot{\eta}(t)\} = [\Psi]^{-1}\{\dot{x}(t)\}$$

IL PROBLEMA DI CAUCHY CHE DOBBIAMO RISOLVERE E' IL SEGUENTE:

$$\begin{cases} [m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \\ \{x(0)\} = \{x_0\} \\ \{\dot{x}(0)\} = \{\dot{x}_0\} \end{cases}$$

$2n$ CONDIZ. INIZIALI

DEVO DETERMINARE A_r e B_r: HO $2n$ COSTANTI DA DETERMINARE $\Rightarrow$ HO BISOGNO DI $2n$ EQUAZ. $\Rightarrow$ LE CONDIZ. INIZIALI!

NEL CASO DI SISTEMI SDOF: $n=1$

IL PROBLEMA E' TRASFERIRE LE CONDIZ. INIZIALI DAL DOMINIO FISICO A QUELLO MODALE! APPLICANDO LE $2n$ CONDIZ. INIZIALI:

$$\{\eta_0\} = [\Psi]^{-1}\{x_0\} \qquad \{\dot{\eta}_0\} = [\Psi]^{-1}\{\dot{x}_0\} \qquad (t=0)$$

DEVO QUINDI RISOLVERE UN SISTEMA ALGEBRICO LINEARE!

($[\Psi]$, INOLTRE, NON E' SINGOLARE, OVVERO: $\det([\Psi]) \neq 0$ SICURAMENTE
IN ALTRE PAROLE SIGNIFICA CHE $[\Psi]$ E' INVERTIBILE.)

LA 1° STRADA PREVEDE QUINDI L'INVERSIONE DELLA MATRICE MODALE O LA RISOLUZIONE DEL SISTEMA ALGEBRICO LINEARE!

TUTTAVIA, SE I GRADI DI LIBERTA' SONO TANTI E' MOLTO ONEROSO O ADDIRITTURA IMPOSSIBILE (DAL PUNTO DI VISTA COMPUTAZIONALE) INVERTIRE LE MATRICI!

ANALOGAMENTE PER LE VELOCITA':

$$\{\psi_s\}^T[m]\{\dot{x}_0\} = \{\psi_s\}^T[m]\sum_{r=1}^{n}\{\psi_r\}\dot{\eta}_{r0} = m_s\dot{\eta}_{s0} \Rightarrow$$

$$= m_s\left(B_s\,\omega_{ds} - \xi_s\,\omega_s A_s\right)$$

POSSO ORA RICAVARE A_s e B_s (CON IL PEDICE r, CHE POSSO CAMBIARE A PIACIMENTO):

$$\boxed{A_r = \frac{\{\psi_r\}^T[m]\{x_0\}}{m_r} \qquad B_r = \frac{\{\psi_r\}^T[m]}{m_r\,\omega_{dr}}\left(\{\dot{x}_0\} + \xi_r\,\omega_r\{x_0\}\right)}$$

QUESTO e' IL RISULTATO DELLA 2° STRADA!

VEDIAMO ORA I $\boxed{\text{VANTAGGI}}$ DELLA 2° STRADA:

- NON É RICHIESTA L'INVERSIONE DI $[\psi]$ e NON DEVO COMUNQUE RISOLVERE UN SISTEMA ALGEBRICO LINEARE.

- SE VOGLIO CONOSCERE LA RISPOSTA DEI PRIMI MODI NON SONO OBBLIGATO A CALCOLARMI TUTTI GLI ALTRI MODI! QUESTO e' PARTICOLARM. VANTAGGIOSO POICHE' TIPICAMENTE CONTANO PROPRIO I PRIMI MODI. POSSO PERTANTO LAVORARE CON I PRIMI MODI SENZA CONOSCERE I SUCCESSIVI!

QUESTI VANTAGGI SONO TANTO PIÚ EVIDENTI QUANTO PIÚ SONO ELEVATI I GRADI DI LIBERTA'!

MER 2 NOV

- RISPOSTA FORZATA SISTEMI MDOF CON SMORZAM. PROPORZ.

L'EQUAZ. DEL MOTO FORZATO CHE CONSIDERIAMO E':

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f(t)\}$$

APPLICO LA TRASFORMAZ. MODALE DIRETTA:

$$\{x(t)\} = [\Psi]\{\eta(t)\}$$ DUNQUE:

$$[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [k][\Psi]\{\eta\} = \{f(t)\}$$

MOLTIPLICO ORA A SINISTRA PER $[\Psi]^T$:

$$[\Psi]^T[m][\Psi]\{\ddot{\eta}\} + [\Psi]^T[c][\Psi]\{\dot{\eta}\} + [\Psi]^T[k][\Psi]\{\eta\} = [\Psi]^T\{f(t)\}$$

PONIAMO ORA: $[\Psi]^T\{f(t)\} = \{Q(t)\}$ $\Rightarrow$ VETTORE DELLE FORZANTI MODALI

QUEST'ULTIMA OPERAZ. "SPALMA" LA FORZANTE SUI VARI MODI!

POICHÉ SI OTTENGONO 3 MATRICI DIAGONALI, L'EQUAZ. MATRICIALE SI TRADUCE IN n EQUAZ. DISACCOPPIATE:

$$m_r\ddot{\eta}_r + c_r\dot{\eta}_r + k_r\eta_r = \{\Psi_r\}^T\{f(t)\} = Q_r(t)$$

QUESTO E' UN SDOF FORZATO!

LA RISPOSTA SI CALCOLA CON L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE:

(2.65) pag 49

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 61 di 290

$$\{x(t)\} = \{x_0\} e^{iwt}$$

DUNQUE, SOSTITUENDO NELL'EQUAZ. DEL MOTO :

$$\{\ddot{x}\} = -w^2 \{x_0\} e^{iwt}$$

$$\left([k] - w^2[m] + iw[c]\right) \{x_0\} \cancel{e^{iwt}} = \{F_0\} \cancel{e^{iwt}}$$

PASSIAMO QUINDI NEL DOMINIO DELLE FREQUENZE.

definiz : $[k] - w^2[m] + iw[c] = [K_{din}(w)]$ → MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA

MATRICE DI RIGIDEZZA DINAMICA

DOBBIAMO ORA CALCOLARE IL VETTORE DELLE AMPIEZZE COMPLESSE $\{x_0\} \in \mathbb{C}^n$. QUESTO VETTORE CONTIENE INFORMAZ. SULLE AMPIEZZE e ANCHE SULLE FASI !

A CAUSA DELLE TANTE FREQUENZE e DELLE TANTE FASI NON C'È POSSIBILE ESPRIMERE LA RISPOSTA IN MODO "GRADEVOLE" ⇒ IL MOTO COMPLESSIVO È UN BEL "CASINO" !

PER RICAVARE $\{x_0\}$:

MATRICE INVERSA

$$\{x_0\} = \left([k] - w^2[m] + iw[c]\right)^{-1} \cdot \{F_0\} = [K_{din}(w)]^{-1} \cdot \{F_0\} \Rightarrow$$

$$= [\alpha(w)] \cdot \{F_0\} \quad \text{DOVE :}$$

$$[\alpha(w)] = [K_{din}(w)]^{-1} \Rightarrow \text{MATRICE DI RECETTANZA}$$

$$\left(k_r - \omega^2 m_r + i\omega c_r \right) \eta_{r_0} \cancel{e^{i\omega t}} = \{\psi_r\}^T \{F_0\} \cancel{e^{i\omega t}}$$

DA QUESTA RICAVO η_{r_0} :

$$\eta_{r_0} = \frac{\{\psi_r\}^T \{F_0\}}{k_r - \omega^2 m_r + i\omega c_r}$$

TEOREMA DI ESPANSIONE

ESSENDO: $\{x(t)\} = \{x_0\} e^{i\omega t} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\} \eta_{r_0} e^{i\omega t} \Rightarrow$

$$\frac{\{x(t)\}}{e^{i\omega t}} = \{x_0\} = \sum_{r=1}^{n} \{\psi_r\} \eta_{r_0}$$

RICAVO DUNQUE CHE:

$$\boxed{\{x_0\} = \sum_{r=1}^{n} \frac{\{\psi_r\}^T \{F_0\} \{\psi_r\}}{k_r - m_r \omega^2 + i\omega c_r}}$$

$\{x_0\} \in \mathbb{C}^n$ A CAUSA DELLA PRESENZA DELLO SMORZAMENTO : $i\omega c_r$

- SE C'È SMORZAMENTO LA RISPOSTA È COMPLESSA!

INOLTRE, LA SOMMATORIA "ACCOPPIA" TUTTI I MODI, CHE PERTANTO RISULTANO DIFFICILM. DISTINGUIBILI NELLA RISPOSTA.

VANTAGGI E SVANTAGGI DI QUESTA 2° STRADA SONO I COMPLEMENTARI DI QUELLI VISTI NELLA PRIMA.

QUESTA STRADA CONSENTE, INOLTRE, DI ANALIZZARE SOLO I PRIMI MODI $\Rightarrow$ GLI ALTRI NON LI CONSIDERO PROPRIO!
È ANCHE POSSIBILE CAPIRE LE CAUSE DI EVENTUALI "ANOMALIE" $\Rightarrow$ STUDIO I SINGOLI MODI.

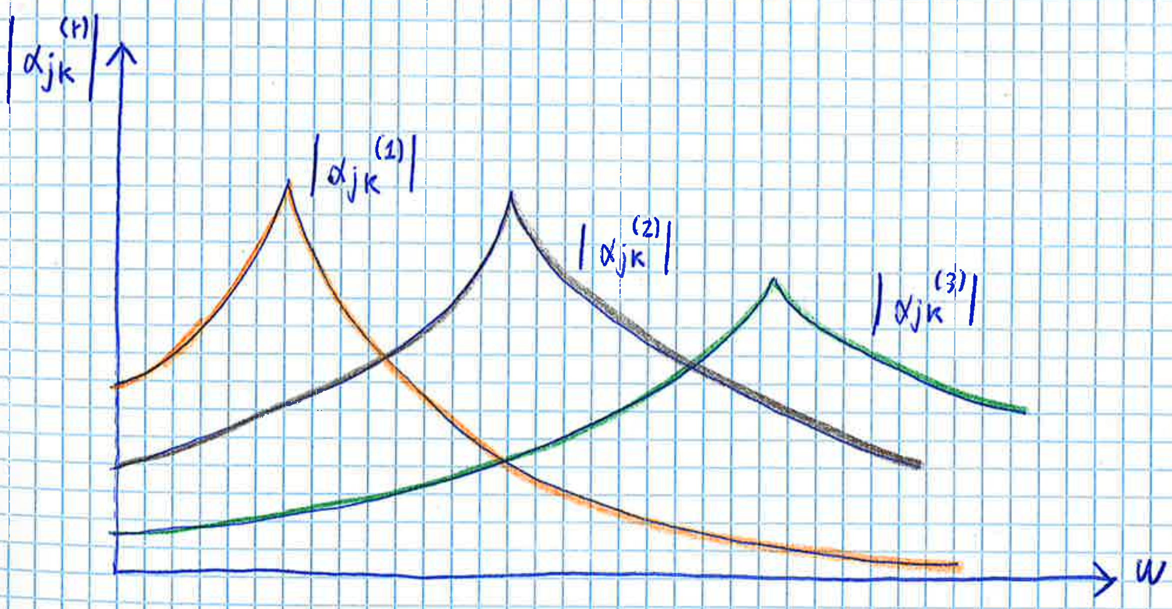
AVENDO n DOF NON ESISTE, TUTTAVIA, UNA FORMULA PER CALCOLARE LE VARIE FREQUENZE DI RISONANZA.

SI PUÓ RAGIONARE PARTENDO DAL CASO NON SMORZATO ($C_r = 0$):

SE $C_r = 0$ LE PULSAZIONI DI RISONANZA SONO $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \ldots \leq \omega_n$

QUANDO LO SMORZAM. E' PICCOLO POSSO APPROSSIMARE LE PULSAZ DI RISONANZA A QUEST' ULTIME.

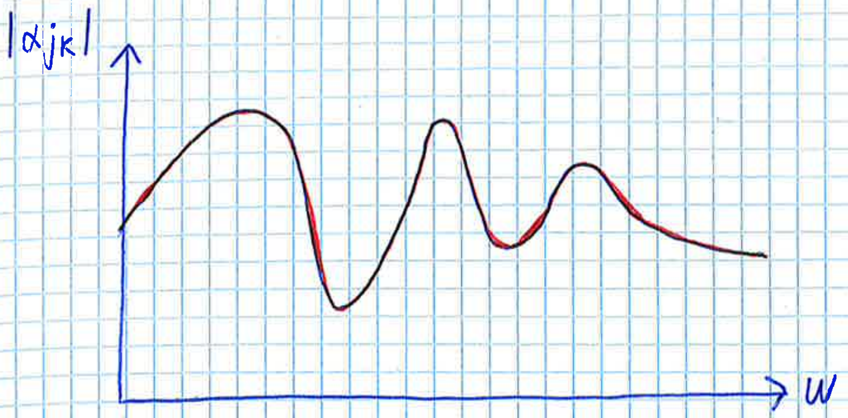
UN TIPICO GRAFICO, SUPPONENDO CHE I GRADI DI LIBERTA' SIANO TRE:



PURTROPPO, ESSENDO $\alpha_{jk}^{(r)} \in \mathbb{C}$ ACCADE CHE:

$$|\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| \neq |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| \Rightarrow$$ DIPENDE DAI PARAMETRI IN GIOCO!

TUTTO QUELLO CHE PUÓ SUCCEDERE E' RIASSUNTO NEL SEGUENTE GRAFICO:



IN ASSENZA DI SMORZAMENTO, INOLTRE:

$$\lim_{w \to w_i} |\alpha_{jk}(w)| = \infty$$ (w_i SONO LE PULSAZIONI PROPRIE)

GLI ALTRI MODI DANNO CONTRIBUTI TRASCURABILI

VEN 5 NOV

COSA SUCCEDE SE ECCITO IL SISTEMA AD UNA FREQUENZA VICINA AD UNA FREQUENZA DI RISONANZA?

IL PRIMO PICCO E' DATO QUASI ESCLUSIVAMENTE DAL 1° MODO ⇒

POSSO QUINDI "VEDERE" UN MODO SE VADO AD ECCITARE CON UNA FREQUENZA VICINA A QUELLA PROPRIA E SE QUESTE FREQUENZE PROPRIE NON SONO VICINE (NON DEVO INOLTRE NEMMENO ECCITARE NEL NODO DEL MODO).

IL NODO E' PUNTO DELLA STRUTTURA CHE HA SPOSTAM. MODALE NULLO

ABBIAMO CONCLUSO LO STUDIO DEI SISTEMI MDOF CON L' FRF.

COME POSSO RENDERE SIMMETRICHE LE MATRICI?

APPLICANDO UNA "TRASFORMAZIONE ELEMENTARE": SOSTITUISCO ALLA PRIMA EQUAZIONE LA PRIMA + LA SECONDA:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 \\ m_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\Delta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_3 & k_3 \\ k_3 & k_2+k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \Delta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1-f_2 \\ -f_2 \end{Bmatrix}$$

LE MATRICI SONO ORA SIMMETRICHE (USANDO CHIARAMENTE LE STESSE COORDINATE)!

IN GENERALE, E' SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE LE EQUAZ. DEL MOTO IN MODO TALE CHE LE MATRICI SIANO SIMMETRICHE (PER I SISTEMI "NATURALI").

SE I DOF SONO MOLTI, TUTTAVIA, QUESTA PROCEDURA PUO' ESSERE MOLTO DISPENDIOSA COME CALCOLI!

CON IL METODO DI LAGRANGE LE MATRICI SONO SEMPRE (AUTOMATICAMENTE) SIMMETRICHE (PER I SISTEMI "NATURALI").

A LIVELLO LOGICO:

APPROCCIO ALLA NEWTON / D'ALEMBERT CORRETTO $\Longrightarrow$ MATRICI SIMMETRICHE

APPROCCIO ALLA LAGRANGE CORRETTO $\Longrightarrow$ MATRICI SIMMETRICHE

NEGANDO QUESTE 2 PROPOSIZIONI (SE $A \Rightarrow B$ ALLORA $\neg A \Rightarrow \neg B$):

MATRICI NON SIMMETRICHE $\Longrightarrow$ APPROCCIO ALLA NEWTON / D'ALEMBERT NON CORRETTO

MATRICI NON SIMMETRICHE $\Longrightarrow$ APPROCCIO ALLA LAGRANGE NON CORRETTO

MER 9 OTT

SIA $\vec{F}_{RIS}$ LA FORZA RISULTANTE:

$$\vec{F}_{RIS} = m\ddot{\vec{r}} \Rightarrow \text{SECONDA LEGGE DI NEWTON}$$

IL LAVORO INFINITESIMO DI QUESTA FORZA E':

$$d\overline{W} = \vec{F}_{RIS} \cdot d\vec{r} = m\ddot{\vec{r}}\, dr = m \frac{d\dot{\vec{r}}}{\cancel{dt}} \cdot \dot{\vec{r}}\, \cancel{dt} = d\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)$$

ORA DEFINIAMO:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}} \Rightarrow \text{ENERGIA CINETICA}$$

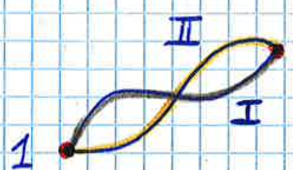
DUNQUE:

$$\int_{r_1}^{r_2} d\overline{W} = \int_{r_1}^{r_2} d\left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = \int_1^2 dT = T_2 - T_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{RIS} \cdot d\vec{r} = \Delta T} \Rightarrow \text{TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA}$$

SE IL LAVORO NON DIPENDE DAL PERCORSO SI PARLA DI "FORZE CONSERVATIVE".
PARTENDO DA QUESTO DEFINIZ., IL LAVORO DI UNA FORZA CONSERVATIVA E':

$$\left(\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_I = \left(\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_{II}$$



DA CUI:

$$\left(\int\right)_I - \left(\int\right)_{II} = 0 \Rightarrow \left(\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_I - \left(\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}\right)_{II} = 0$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} d(T+V)$$

DEFINIAMO ORA:

$$\boxed{T + V = E} \Rightarrow \text{ENERGIA TOTALE}$$

COMPLESSIVAMENTE, QUINDI:

$$\int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = \Delta E = E_2 - E_1$$

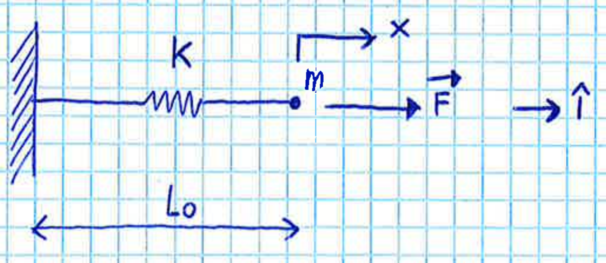
COME DIRETTA CONSEGUENZA:

$$\boxed{SE \quad \vec{F}_{NC} = \vec{0} \Rightarrow E = \text{COST}} \Rightarrow \text{PRINCIPIO DI CONSERVAZ. DELL'ENERGIA TOTALE}$$

QUESTO PRINCIPIO É UN CASO PARTICOLARE DELL' "EQUAZ. DELL' ENERGIA".

VEDIAMO ORA 2 ESEMPI APPLICATIVI:

esempio 1 : MOLLA LINEARE



$$\vec{r} = (L_0 + x)\,\hat{\imath} \Rightarrow \text{VETTORE POSIZIONE}$$

$dr = dx$ (HO TOLTO IL SIMBOLO VETTORIALE POICHÉ $\hat{\imath}$ e' COSTANTE)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 290

$$\int_1^2 \vec{F_c} \cdot d\vec{r} = \int_{h_1}^{h_2} (-mg)\,\hat{j}\,dy\,\hat{j} = mg\,(h_1 - h_2) = -\Delta V$$

ESSENDO $h_1 < h_2$ LA FORZA PESO COMPIE UN LAVORO NEGATIVO!

DUNQUE:

$\boxed{V = mgh}$ SE h E' POSITIVA VERSO L'ALTO

$V = -mgh$ SE h É POSITIVA VERSO IL BASSO

} ENERGIA POTENZ. GRAVITAZIONALE

IN PRATICA IL SEGNO DI V DIPENDE DAL S.R. (DALLA DIREZ. DI $\hat{j}$) ADOTTATO! QUESTA ENERGIA POTENZ. QUINDI, A DIFFER. DI QUELLA ELASTICA, NON E' SEMPRE POSITIVA!

- PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI (PLV)

QUESTO RAPPRESENTA IL 1° PRINCIPIO VARIAZIONALE CHE NOI INCONTRIAMO E CI CONSENTIRA' DI INTRODURRE LE POSIZ. VIRTUALI.

definiz: $\delta\vec{r}$: - SPOSTAMENTO INFINITESIMO

SPOSTAMENTO VIRTUALE

- ARBITRARIO, MA COMPATIBILE CON I VINCOLI, SUPPOSTI FISSATI IN UN CERTO ISTANTE ("IRRIGIDITI")

LA DIFFERENZA CON IL $d\vec{r}$ STA NEL FATTO CHE QUESTO NON E' DETTO CHE AVVENGA ⇒ É UNO SPOSTAMENTO FITTIZIO, CHE IN REALTA' RAPPRESENTA UNA VARIAZ. DI COORDINATE. PIÚ NELLO SPECIFICO:

- SPOSTAMENTO FITTIZIO CHE IN REALTA' RAPPRESENTA UNA VARIAZ. DI COORDINATE CHE NON RICHIEDE UNA VARIAZ. DI TEMPO ⇒ $\delta t = 0$

$$\boxed{\delta \overline{W_i} = \vec{R_i} \cdot \delta \vec{r_i}} \Rightarrow \text{LAVORO VIRTUALE}$$

IN CONDIZ. DI EQUILIBRIO: $\delta \overline{W_i} = 0$ (VALIDO NON SOLO PER LA PARTICELLA i-ESIMA MA PER TUTTE LE PARTICELLE)

PERTANTO LA SOMMA DEI LAVORI VIRTUALI SARÀ ANCH'ESSA NULLA:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{R_i} \cdot \delta \vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \delta \overline{W_i} = \boxed{\delta \overline{W} = 0}$$

DEFINIAMO ORA IL CONCETTO DI FORZE ATTIVE (ESTERNE O INTERNE) e DI REAZ. VINCOLARI:

PENSANDO AD UN D.C.L.

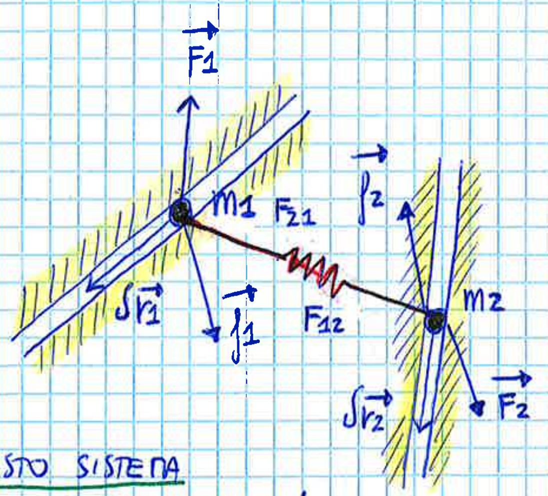
$\vec{F_i} \Rightarrow$ FORZE ATTIVE

$\vec{f_i} \Rightarrow$ REAZ. VINCOLARI

AVREMO DUNQUE CHE:

$$\vec{R_i} = \vec{F_i} + \vec{f_i}$$

VEDIAMO UN ESEMPIO:



IN QUESTO CASO GLI SPOSTAM., PUR ESSENDO ARBITRARI, DEVONO RISPETTARE I VINCOLI!

QUESTO SISTEMA È IN EQUILIBRIO STATICO!

$\vec{F_1}$ e $\vec{F_2} \Rightarrow$ FORZE ATTIVE ESTERNE

$\vec{F_{12}}$ e $\vec{F_{21}} \Rightarrow$ FORZE ATTIVE INTERNE

$\vec{f_1}$ e $\vec{f_2} \Rightarrow$ REAZ. VINCOLARI

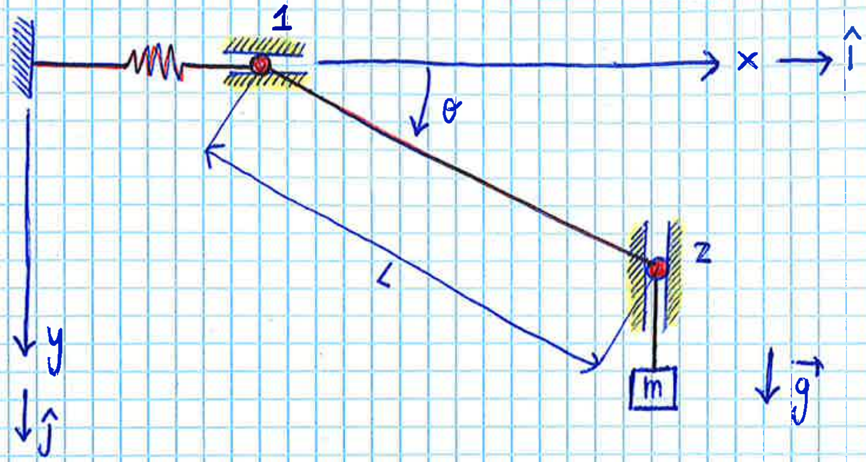
$\delta\vec{r_1}$ e $\delta\vec{r_2} \Rightarrow$ SPOSTAM. VIRTUALI

VEN 11 NOV

VEDIAMO UN ESEMPIO CHE SPIEGA MEGLIO QUESTO PRINCIPIO:

esempio

SISTEMA 1 DOF



• POSIZ. DI EQUILIBRIO

QUANDO $\theta = 0$ LA MOLLA E' INDEFORMATA (HA LUNGH. ZERO)

CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE ATTIVE E GLI SPOSTAM. VIRTUALI!

INIZIO CONSIDERANDO GLI SPOSTAM. EFFETTIVI:

$$\vec{r_1} = x\,\hat{\imath}$$

$$\vec{r_2} = y\,\hat{\jmath} + L\,\hat{\imath}$$

LE FORZE IN GIOCO SONO:

$$\vec{F_1} = -kx\,\hat{\imath}$$

$$\vec{F_2} = mg\,\hat{\jmath}$$

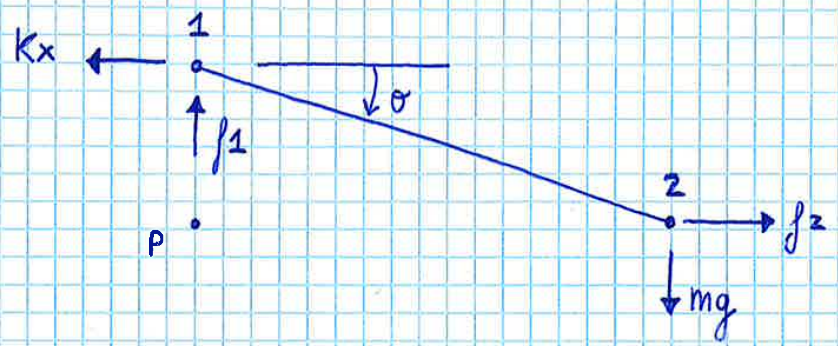
GLI SPOSTAM. VIRTUALI SI CALCOLANO NEL SEGUENTE MODO:

- PRENDO LA $\vec{r_1}$ E CONSIDERO UNA SUA VARIAZIONE:

$$\boxed{(1-\cos\theta)\tan\theta = \frac{mg}{KL}}$$ $\Rightarrow$ EQUAZ. TRASCENDENTE (NON FORMATA DA POLINOMI)

PER CALCOLARE LE POSIZ. DI EQUILIBRIO DEVO USARE UNA PROCEDURA NUMERICA AL CALCOLATORE $\Rightarrow$ MATLAB!

COME METODO ALTERNATIVO, POSSO STUDIARE IL D.C.L.:



$$\begin{cases} f_1 - mg = 0 \\ f_2 - kx = 0 \\ mgL\cos\theta - f_2 L\sin\theta = 0 \end{cases}$$

IL PUNTO P NON E' NIENT'ALTRO CHE IL CENTRO DI ISTANT. ROTAZ.

TUTTAVIA, CALCOLANDO L'EQUIL. DEI MOMENTI NEL PUNTO P:

$$\boxed{mgL\cos\theta - kxL\sin\theta = 0}$$ $\Rightarrow$ STESSA EQUAZ. DI PRIMA!

IL PLV EQUIVALE DUNQUE AD USARE UN APPROCCIO VETTORIALE "INTELLIGENTE", CHE MI ESCLUDE DAL CALCOLO LE REAZ. VINCOLARI! NATURALMENTE QUESTO NON E' SEMPRE POSSIBILE (PER ES. QUANDO HO MOLTI DOF!).

PROSEGUIAMO ORA CON IL PLV:

DOVRÒ DUNQUE CALCOLARE IL LAVORO VIRTUALE DELLE FORZE D'INERZIA ⇒ NON È DETTO CHE QUESTO SIA SEMPLICE!

VEDIAMO ORA LO STESSO ESEMPIO DI PRIMA, MA IN DINAMICA:

esempio L'EQUAZ. SIMBOLICA DELLA DINAMICA QUI È:

$$\vec{F_1}\,\delta\vec{r_1} + \left(\vec{F_2} - m_2\ddot{\vec{r_2}}\right)\cdot\delta\vec{r_2} = 0$$

DEVO CALCOLARE: $\ddot{\vec{r_2}} = \ddot{y}\,\hat{j}$

$$-kx\,\delta x + (mg - m\ddot{y})\,\delta y = 0$$

PER LO STESSO MOTIVO DI PRIMA ANCHE QUI DEVO "TRASFORMARE" LE COORDINATE (x, y) IN θ:

$$y = L\sin\theta \Rightarrow \dot{y} = L\cos\theta\cdot\dot{\theta} \Rightarrow$$

$$\ddot{y} = L\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - L\sin\theta\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\theta} = L\left[\cos\theta\cdot\ddot{\theta} - \sin\theta\cdot(\dot{\theta})^2\right]$$

$$x = L(1-\cos\theta)$$

COMPLESSIVAMENTE SI OTTIENE:

$$\left[-kL(1-\cos\theta)L\sin\theta + mgL\cos\theta - mL\left(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta\right)L\cos\theta\right]\delta\theta = 0$$

ANCHE QUI, ESSENDO GLI SPOSTAM. VIRTUALI ARBITRARI, QUEST'ULTIMA EQUAZ. DEVE ESSERE VERIFICATA PER OGNI $\delta\theta$, DUNQUE:

$$[\ldots] = 0$$

ANCHE QUI QUEST'EQUAZ. (DEL MOTO) NON È RISOLVIBILE IN FORMA CHIUSA!

DOBBIAMO ORA TRATTARE IL $\boxed{\text{TERMINE} \quad m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}}$:

PARTO CONSIDERANDO QUESTA DERIVATA:

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}\right) = m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} + m\dot{\vec{r}}\,\delta\dot{\vec{r}}$$

QUI HO SUPPOSTO CHE:

- m COSTANTE
- $\frac{d}{dt}$ e δ INTERCAMBIABILI

PROSEGUENDO:

$$= m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} + \delta\left(\frac{1}{2} m\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) = m\ddot{\vec{r}}\,\delta\vec{r} + \delta T \qquad \text{DUNQUE:}$$

ABBIAMO IN QUALCHE MODO RELAZIONATO $m\ddot{\vec{r}} \cdot \delta\vec{r}$ CON L'ENERGIA CINETICA E CON UN ALTRO TERMINE, DUNQUE:

$$-\delta V + \delta \overline{W_{NC}} - \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i\,\delta\vec{r}_i\right) + \delta T = 0$$

HAMILTON PRESE QUEST'EQUAZ. E LA INTEGRÒ TRA 2 ESTREMI t_1 e t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\delta(T-V) + \delta\overline{W_{NC}}\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) dt$$

L'INTEGRALE A 2° MEMBRO SI CALCOLA COME:

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} \left(\delta \mathcal{L} + \delta \overline{W}_{NC} \right) dt = 0 \\ \delta \vec{r_i}(t_1) = \delta \vec{r_i}(t_2) = 0\end{gathered}}$$

$\Longrightarrow$ PRINCIPIO DI HAMILTON ESTESO (C'È ANCHE $\delta \overline{W}_{NC}$)

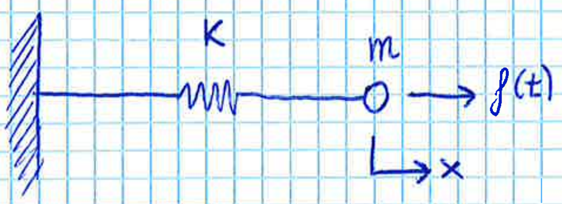
SI DEFINISCE COME "PRINCIPIO DI HAMILTON":

$$\boxed{\begin{gathered}\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} \, dt = 0 \\ \delta \vec{r_i}(t_1) = \delta \vec{r_i}(t_2) = 0\end{gathered}}$$

$\Longrightarrow$ PRINCIPIO DI HAMILTON

L'UNICA DIFF. TRA I 2 STA NELL' INCLUDERE O MENO LE FORZE NON CONSERVATIVE.

VEDIAMO ORA COME APPLICAZ. L'OSCILLATORE ARMONICO CON FORZANTE:



LA LAGRANGIANA IN QUESTO CASO È:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} K x^2$$

INOLTRE:

$$\delta \overline{W}_{NC} = f(t) \cdot \delta x$$

PER IL PRINCIPIO DI HAMILTON ESTESO:

- COORDINATE LAGRANGIANE

FINORA ABBIAMO DESCRITTO LE POSIZ. DELLE MASSE CON:

$\vec{r_i}(t)$ ⇒ QUESTE, IN GENERALE, NON SONO INDIPENDENTI

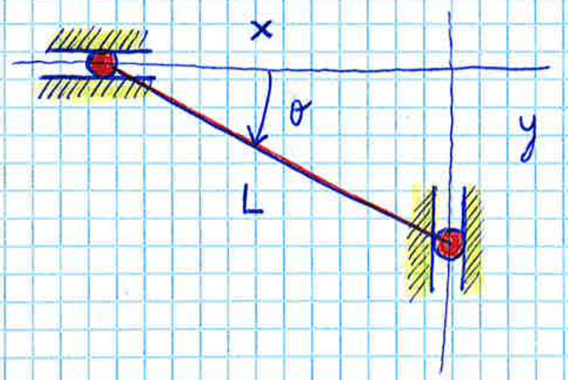
INTRODUCIAMO ORA LE COORD. LAGRANGIANE O COORD. GENERALIZZATE:

$q_i(t)$ ⇒ IN GENERALE SONO $\boxed{\text{INDIPENDENTI}}$

$\boxed{\text{QUESTE, ESSENDO INDIPENDENTI, SONO PARI AL NUMERO DI DOF!}}$

QUALI SONO LE COORD. LAGRANGIANE? VEDIAMO UN ESEMPIO:

esempio



$n = 1 \Rightarrow 1$ DOF

$y = L \sin\theta \Rightarrow y$ e θ NON POSSONO ESSERE ENTRAMBE COORD. LAGRANGIANE

DELLE 2 SCEGLIAMO COME COORD. LAGRANGIANA θ (LA PIÚ INTUITIVA).

COORD. LAGRANGIANA ⟺ COORD. INDIPENDENTE

DUNQUE, DOPO AVER INTRODOTTO QUESTE COORDINATE:

$$\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

QUESTA FORZA GENERALIZZATA NON HA SIGNIFICATO FISICO!

LA FORZA GENERALIZZATA VIENE ANCHE DETTA "COMPONENTE LAGRANGIANA DELLE FORZE" (HO TANTE COMPONENTI QUANTI SONO I DOF).

IN ALTERNATIVA, POSSO:

$$\dot{\vec{r}_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_n}\dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

QUESTO TERMINE C'È PERCHÉ IL MOTO C'È ASSOLUTO ⇓ DERIVATA TOTALE

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t}$$

ESSENDO:

$$\frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} \Rightarrow$$

ESPRESSIONE CHE SI OTTIENE DERIVANDO $\dot{\vec{r_i}}$ (RICORDANDOSI CHE LE COORD. $\dot{q}_i$ SONO INDIPENDENTI)

DUNQUE:

$$\boxed{Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,NC}\,\frac{\partial \dot{\vec{r_i}}}{\partial \dot{q}_k}} \Rightarrow$$

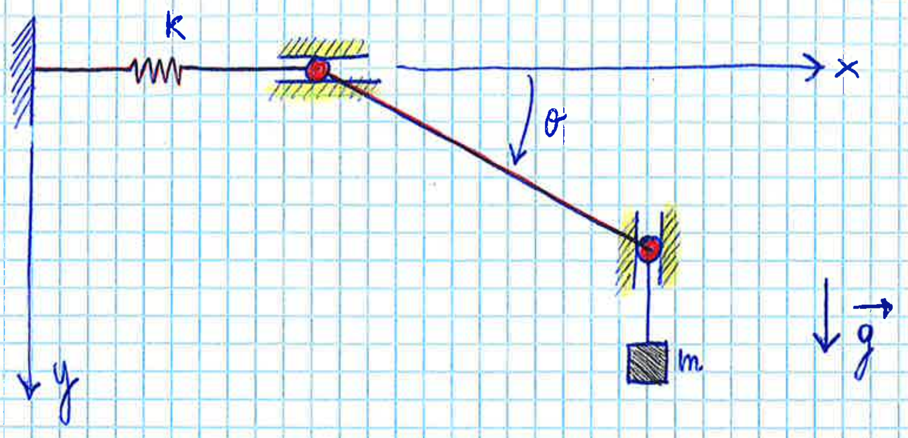
QUESTA RAPPRESENTA UNA FORMULA "ALTERNATIVA" ALLA PRECEDENTE

ABBIAMO DUNQUE CALCOLATO IL LAVORO DELLE FORZE NON CONSERVATIVE.

VEDIAMO ORA L'INTEGRALE DELLA LAGRANGIANA:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$$

IL PRINCIPIO DI HAMILTON ESTESO DICE CHE:



SISTEMA SDOF

$x = L(1-\cos\theta)$

$y = L\sin\theta$

SCEGLIAMO θ COME COORD. LAGRANGIANA.

CONSIDERANDO L'EQUAZ. DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

$Q = 0$ POICHÉ NON CI SONO F_{NC}

$$T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k x^2 - m g y$$

QUESTE DUE BISOGNA FARE MOLTA ATTENZIONE A SCRIVERLE!

SOSTITUENDO $\dot{y}$, x e y IN $\dot{\theta}$ e θ:

$$T = \frac{1}{2} m L^2 \cos^2\theta \cdot \dot{\theta}^2$$

$$V = \frac{1}{2} k L^2 (1-\cos\theta)^2 - m g L \sin\theta$$

ORA: $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{\theta}} = 0$ $\Rightarrow$ QUESTA PROPRIETÀ È SEMPRE VERIFICATA PER I SISTEMI CHE VEDREMO

ESSENDO QUESTA UNA FORZA NON CONSERVATIVA:

$$Q_k^{(visc)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_V} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k}$$

TUTTAVIA, RISULTA MOLTO PIÙ SEMPLICE INTRODURRE UNA FUNZIONE, DETTA "FUNZIONE DISSIPATIVA DI RAYLEIGH" $\mathcal{F}$:

$\mathcal{F}$ È UNA FORMA QUADRATICA NELLE VELOCITÀ $\dot{q}_k$ CHE SI COSTRUISCE IN ANALOGIA CON V.

$$Q_k^{(visc)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_V} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_k} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k}$$

DUNQUE $\mathcal{F}$ SI CALCOLA COME SI CALCOLA L'ENERGIA POTENZ. ELASTICA!

$\Downarrow$ FACILE APPLICABILITÀ!

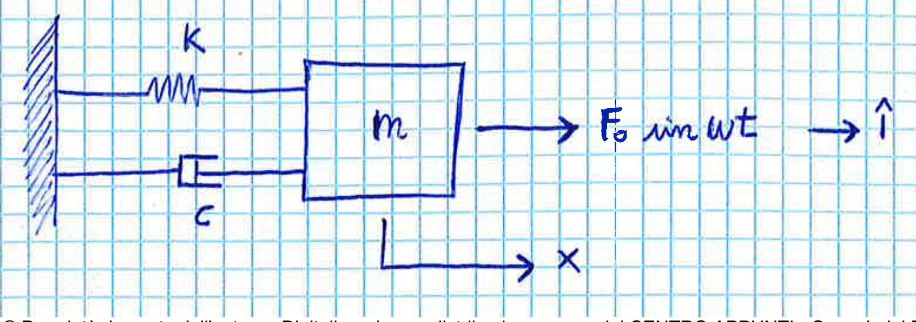
PERTANTO, AVREMO CHE:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{(visc)} + Q_k^{(non\ visc)} \Longrightarrow$$

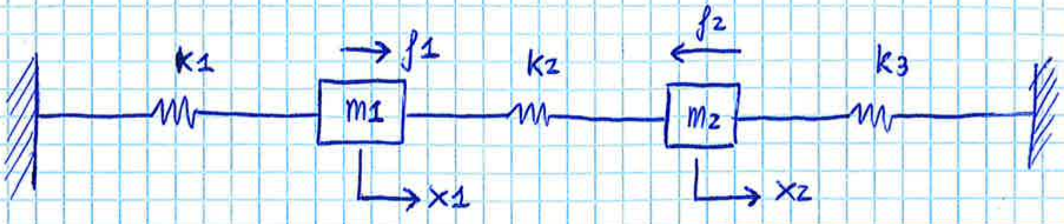
$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k^{(non\ visc)}}$$

FORZE NON CONSERVATIVE e NON VISCOSE!

VEDIAMO ORA UN ESEMPIO:



VEDIAMO UN ALTRO ESEMPIO DI LAGRANGE :



SI ASSUMA : $q_1 = x_1$ e $q_2 = x_2 - x_1 = \Delta$ $\quad \cdot T, V$

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{\Delta} + \dot{x}_1)^2$$

$$V = \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{3} k_3 x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \Delta^2 + \frac{1}{2} k_3 (\Delta + x_1)^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{q}_k} = 0 \qquad \text{DUNQUE:}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i,NC} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k}$$

VEDIAMO LA 1° EQUAZ. DI LAGRANGE $(q_1 = x_1)$:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1 \dot{x}_1 + m_2 (\dot{\Delta} + \dot{x}_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 + k_3 (\Delta + x_1)$$

$$Q_1 = \sum_{i=1}^{2} \vec{F}_{i,NC} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} = (f_1 \hat{i}) \frac{\partial (x_1 \hat{i})}{\partial x_1} - (f_2 \hat{i}) \frac{\partial (x_1 + \Delta) \hat{i}}{\partial x_1} \Rightarrow$$

$$= f_1 - f_2 \qquad \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 1 \right)$$

MER 23 NOV

VEDIAMO ORA DA DOVE ARRIVA LA SIMMETRIA DELLE MATRICI:

IMPOSTIAMO IL CALCOLO DELL' E_c DI UN SISTEMA COSTITUITO DA N PARTICELLE:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \, \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = \sum_{k,j}^{n} \frac{1}{2} M_{jk}\, \dot{q}_k \dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n} M_k \dot{q}_k + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left| \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right|^2$$

DI QUESTA FORMULA NON VEDREMO LA DIMOSTRAZIONE!

GENERALMENTE:

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

T_2: É UNA FORMA QUADRATICA

T_1: HA UNA DIPENDENZA LINEARE

T_0: NON DIPENDE DALLE COORD. LAGRANGIANE

INOLTRE, NELLA FORMA QUADRATICA:

$$M_{jk} = M_{kj} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \Longrightarrow \text{COEFF. SIMMETRICI}$$

ORA, SE $T_2 \neq 0$ e $T_1 = T_0 = 0$ E SE $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$, ALLORA:

IL SISTEMA SI DICE "NATURALE"

QUANDO IL SISTEMA E' NATURALE, INOLTRE, SUCCEDE CHE:

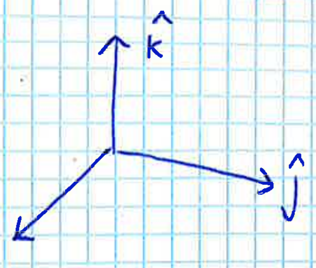
$$T_2 = \frac{1}{2}\{\dot{q}\}^T [m] \{\dot{q}\}$$

(QUESTO E' UN MODO ALTERNATIVO PER SCRIVERE UNA FORMA QUADRATICA)

HO MESSO m E NON M POICHÉ SI PUÓ DIMOSTRARE CHE GLI ELEMENTI DI $[m]$ (MATRICE DI MASSA) SONO IN EFFETTI M_{jk}!

SI RICORDA CHE:

$$\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$$



$\hat{i}$: INDICE
$\hat{j}$: MEDIO
$\hat{k}$: POLLICE

REGOLA MANO dx

CALCOLO ORA LA DERIVATA DI $\vec{r}$ NEL TEMPO:

$$\frac{d}{dt}\vec{r} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j}) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + x\frac{d\hat{i}}{dt} + y\frac{d\hat{j}}{dt}$$

CONSIDERANDO LE FORMULE DI POISSON:

$$\frac{d\hat{i}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{i} = \Omega\hat{j}$$

$$\frac{d\hat{j}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \hat{j} = -\Omega\hat{i}$$

DUNQUE:

$$\vec{v} = (\dot{x} - \Omega y)\hat{i} + (\dot{y} + \Omega x)\hat{j}$$

ORA:

$$T = \frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right] \Rightarrow$$

IN UN ESERCIZIO "NORMALE" MI POTREI FERMARE QUI!

CHE "FORMA" ASSUME QUEST'ENERGIA CINETICA? FACENDO ALCUNI CALCOLI:

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + m\Omega(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} m\Omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$T_2 = f(\{\dot{q}\}) \qquad T_1 = f(\{q\}, \{\dot{q}\}) \qquad T_0 = f(\{q\})$$

ANALOGAMENTE, PER Δx SI OTTIENE CHE:

$$\boxed{\Delta x \cong x}$$

DUNQUE, SI OTTIENE CHE:

$$V = \frac{1}{2} k_x \cdot x^2 + \frac{1}{2} k_y \cdot y^2$$

AGGIUNGENDO ORA LO SMORZAMENTO (NON RAPPRESENTATO NEL DISEGNO):
AVREMO 2 SMORZATORI IN PARALLELO ALLE 2 MOLLE.

PER GLI SMORZAM. VISCOSI, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE:

$$\Delta\dot{x} \cong \dot{x}$$
$$\Delta\dot{y} \cong \dot{y}$$

(ANCHE QUI OVVIAM. $x \ll l_0 \wedge y \ll l_0$)

CONSIDERANDO LA FUNZ. DISSIPATIVA DI RAYLEIGH:

$$\mathcal{D}' = \frac{1}{2} c_x \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} c_y \cdot \dot{y}^2$$

(NELLA DINAMICA DEI ROTORI QUESTO SMORZAMENTO SI DICE "INTERNO")

INOLTRE, CONSIDERANDO ANCHE L'EFFETTO DISSIPATIVO LEGATO ALLA VELOCITA' ASSOLUTA (EFFETTO VENTILANTE):

$$\mathcal{D}'' = \frac{1}{2} h v^2 = \frac{1}{2} h \left[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} + \Omega x)^2 \right]$$

LE EQUAZ. DI LAGRANGE SARANNO QUINDI:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_k} = Q_k = 0 \qquad (k = 1, 2)$$

ANCHE QUI: $\dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0$

$$[m]\{\ddot{q}\} + \left([C^*] + [G]\right)\{\dot{q}\} + \left([K^*] + [H]\right)\{q\} = \{0\}$$

DOVE:

$[K^*]$ = MATRICE DI RIGIDEZZA "MODIFICATA" → INTERVIENE $-m\Omega^2$, OVVERO C'È IL CONTRIBUTO DELLA FORZA CENTRIFUGA (TERMINE DI TRASCINAMENTO)

$[C^*]$ = MATRICE DI SMORZAMENTO "MODIFICATA" → LO SMORZAM. VIENE INCREMENTATO DALL'EFFETTO VENTILANTE

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & -2m\Omega \\ 2m\Omega & 0 \end{bmatrix}$$ = MATRICE GIROSCOPICA → TERMINE LEGATO ALLA FORZA DI CORIOLIS

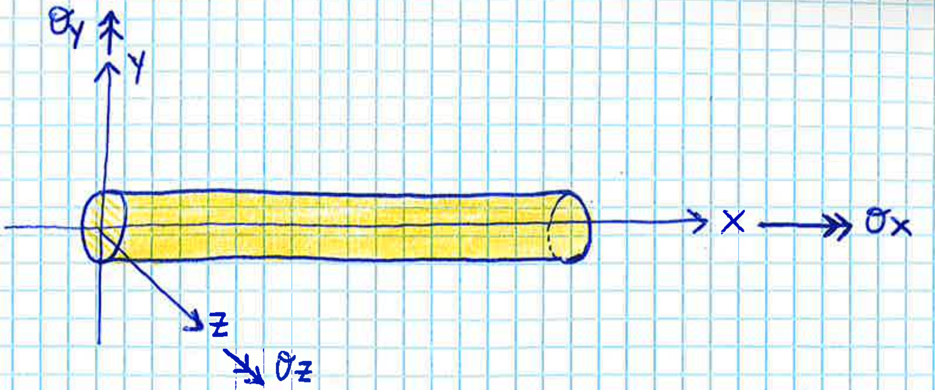
$$[H] = \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix}$$ = MATRICE CIRCOLATORIA

SI OSSERVA CHE $[H]$ e $[G]$ SONO ANTISIMMETRICHE, OVVERO:

$$[A]^T = -[A]$$

PER COLPA DELLE MATRICI NON SIMMETRICHE, DUNQUE, PER QUESTO SISTEMA NON POSSO APPLICARE L'ANALISI MODALE!

$$\left(\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m\Omega^2 & 0 \\ 0 & -m\Omega^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -h\Omega \\ h\Omega & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



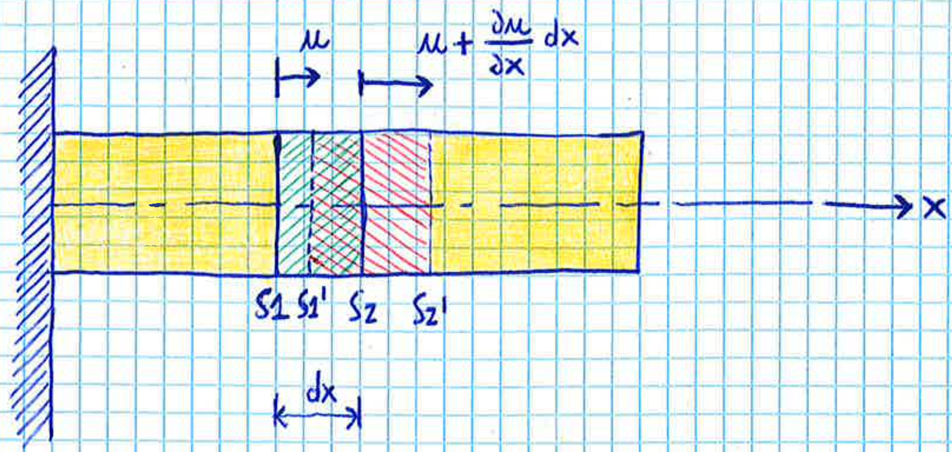
SI DEFINISCONO I GDL COME:

1. TRASLAZ. ASSIALE u (LUNGO X) ⇒ SPOSTAM. DI UNA SEZ. LUNGO X
2. TRASLAZ. TRASVERSALE v ⇒ SPOSTAM. DI UNA SEZ. LUNGO Y
3. TRASLAZ. TRASVERSALE W ⇒ SPOSTAM. DI UNA SEZ. LUNGO Z
4. ROTAZ. TORSIONALE θ_x (ATTORNO A X)
5. ROTAZ. FLESSIONALE θ_y (ATTORNO A Y)
6. ROTAZ. FLESSIONALE θ_z (ATTORNO A Z)

A CIASCUNO DI QUESTI DOF SI ASSOCIA UNA FORZA GENERALIZZATA:

1. FORZA ASSIALE N
2. FORZA DI TAGLIO T_y
3. FORZA DI TAGLIO T_z
4. MOMENTO TORCENTE M_x
5. MOMENTO FLETTENTE M_y
6. MOMENTO FLETTENTE M_z

QUESTI GRADI DI LIBERTA', NEI NOSTRI STUDI, AVRANNO ALCUNE GRANDEZZE DISACCOPPIATE TRA DI LORO:



LE OSCILLAZ., AVENDO PICCOLA ENTITÀ ED ELEVATA FREQUENZA, NON SONO OSSERVABILI MA COMUNQUE CI SONO!

SUPPONGO DI DARE UNA MARTELLATA:

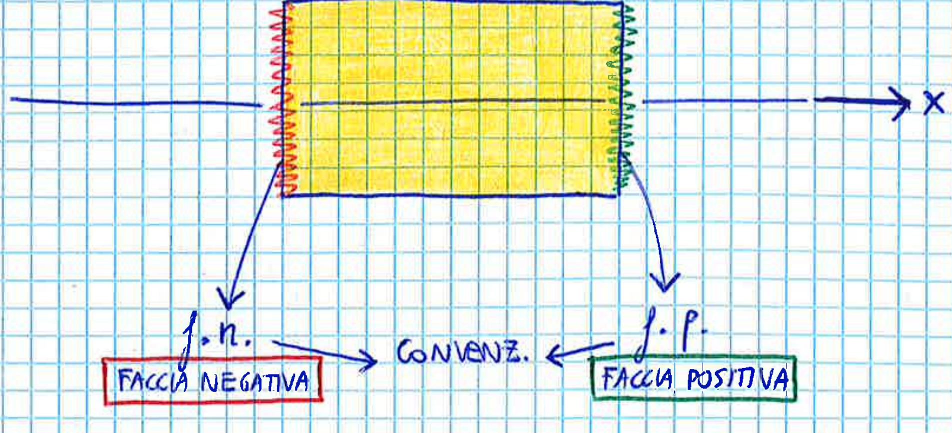
$$S_1 \rightarrow S_1' \qquad S_2 \rightarrow S_2'$$

COME COORDINATE:

$$S_1 : x \qquad S_2 : x + dx$$

$$S_1' : x + u \qquad S_2' : x + dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

PER RICAVARE L'EQUAZ. DEL MOTO UTILIZZO UN APPROCCIO NEWTONIANO, CONSIDERANDO IL DCL DEL PEZZETTO DI TRAVE IN VERDE, DEFINENDO UNA CERTA CONVENZIONE:



$$\boxed{AE \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$\Rightarrow$ EQUAZ. DEL MOTO DELLE OSCILLAZ. ASSIALI

INTRODUCENDO ORA:

$$\mu = \rho \cdot A$$

SI OTTIENE CHE:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

CON: $\boxed{\frac{E}{\rho} = c^2}$ VELOCITA' DI PROPAGAZ. DELLE ONDE (ASSIALI)

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}$$

$\Rightarrow$ EQUAZ. DELLE ONDE

QUEST'ULTIMA E' NOTA COME EQUAZ. DELLE ONDE o equaz. DI D'ALEMBERT.
LA SOLUZ. DI QUEST'EQUAZ. DIFFER. ALLE DERIVATE PARZIALI SI PUÒ TROVARE A VARIABILI SEPARABILI:

$$\boxed{u(x,t) = \phi(x) \cdot \eta(t)}$$

QUESTA "PROPOSTA" DI SOLUZ. E' MOTIVATA DAL SEGUENTE MOTIVO:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$ MOLTO ELEVATA (NEGLI ACCIAI 5190 m/s)

PER SISTEMI "STANDARD" (NON LUNGHI 10 Km) IL TRANSITORIO SI ESAURISCE IN TEMPI MOLTO BREVI $\Rightarrow$ SUBITO LA SOLUZ. A REGIME.

SOSTITUENDO:

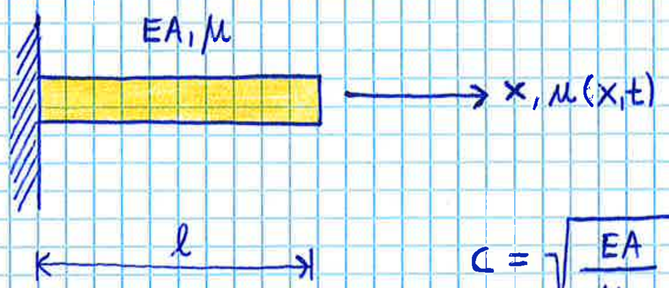
$$\phi(x) \cdot \ddot{\eta}(t) = c^2 \phi''(x) \eta(t) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{cases} \eta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t & \Rightarrow \text{COORD. MODALE} \\ \phi(x) = C\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) & \Rightarrow \text{AUTOFUNZIONE} \end{cases}}$$

MER 30 NOV

ENTRAMBE LE FUNZIONI η E ϕ POSSIEDONO UNA DIPENDENZA ARMONICA!

CONSIDERIAMO ORA IL CASO PARTICOLARE DI UN'ASTA INCASTRATA LIBERA:



$$c = \sqrt{\frac{EA}{\mu}}$$

ABBIAMO VISTO LA SCORSA VOLTA CHE:

$$\phi(x) = C\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{c}x\right)$$

PROVIAMO ORA A CONSIDERARE LE CONDIZ. AL BORDO:

LE CONDIZ. AL BORDO RIGUARDANO CIÓ CHE ACCADE AGLI ESTREMI DEL DOMINIO:

$$u(0,t) = \phi(0)\,\eta(t) = 0 \qquad \text{1° CONDIZ. AL BORDO}$$

DA CUI SI OTTIENE CHE: $\boxed{\phi(0) = 0}$

PER QUANTO RIGUARDA L'ESTREMITÀ LIBERA, INVECE:

$\boxed{\text{ESTREMITÀ LIBERA}} \Rightarrow \boxed{\text{NON SONO APPLICATE FORZE}} \Rightarrow \boxed{\text{CONDIZ. DI FORZA}}$

NON POSSIAMO DIRE $u(\ell, t) =$ QUALCOSA MA POSSIAMO DIRE CHE:

IN GENERALE UN SISTEMA CONTINUO POSSIEDE INFINITE PULSAZ. NATURALI ω_r!

$\Downarrow$

GRANDE DIFFERENZA RISPETTO AI SISTEMI DISCRETI!

POSSO DUNQUE SCRIVERE LA $u(x,t)$ COME UNA SERIE (INFINITA):

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\omega_r}{c} x\right) \eta_r(t)$$

LA RISPOSTA LIBERA DI QUESTO SISTEMA E', QUINDI, DATA DALLA SOMMA DI INFINITI CONTRIBUTI MODALI!

QUESTI CONTRIBUTI MODALI SI POSSONO SOMMARE TRA DI LORO POICHE' OGNUNO DI QUESTI FORNISCE UNA SINGOLA RISPOSTA.

LE PULSAZ. PROPRIE, DUNQUE, SONO:

$$\boxed{\omega_r = r \frac{\pi}{2l} \sqrt{\frac{AE}{\mu}}} \qquad \text{CON } r = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$$

PER QUANTO RIGUARDA LE FORME MODALI:

$$\phi_r(x) = \sin\left(r \frac{\pi}{2l} x\right)$$

IL SIGNIFICATO DI QUESTE E' ANALOGO A QUELLO PER I SISTEMI DISCRETI, OVVERO SONO I MATTONI CHE ESPRIMONO L'EQUAZ. DEL MOTO.

COME LUNGH. D'ONDA ASSOCIATA ABBIAMO CHE:

$$\lambda_r = \frac{2\cancel{\pi}}{r \frac{\cancel{\pi}}{2l}} = \frac{4l}{r} \qquad \text{CON } r = 1, 3, 5, \dots, 2n+1$$

GRAFICAMENTE, QUESTE FORME MODALI SONO:

LA TIPOLOGIA DI FUNZ. DIPENDE DALLE CONDIZ. INIZIALI.

SI DEFINISCE:

$$\boxed{f_1(x-ct)} \Rightarrow \text{ONDA PROGRESSIVA}$$

$$\boxed{f_2(x+ct)} \Rightarrow \text{ONDA REGRESSIVA}$$

DIMOSTRIAMO ORA CHE LA FUNZ. PROGRESSIVA E' SOLUZ. DELL'EQUAZ:

$$f_1(x-ct) = f_1(y) \qquad \text{PONENDO: } y = x-ct$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = \frac{df_1}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = -c\,\frac{df_1}{dy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-c)(-c)\frac{d^2 f_1}{dy^2} = c^2\frac{d^2 f_1}{dy^2} \Rightarrow \text{II MEMBRO}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{df_1}{dy}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y}$$

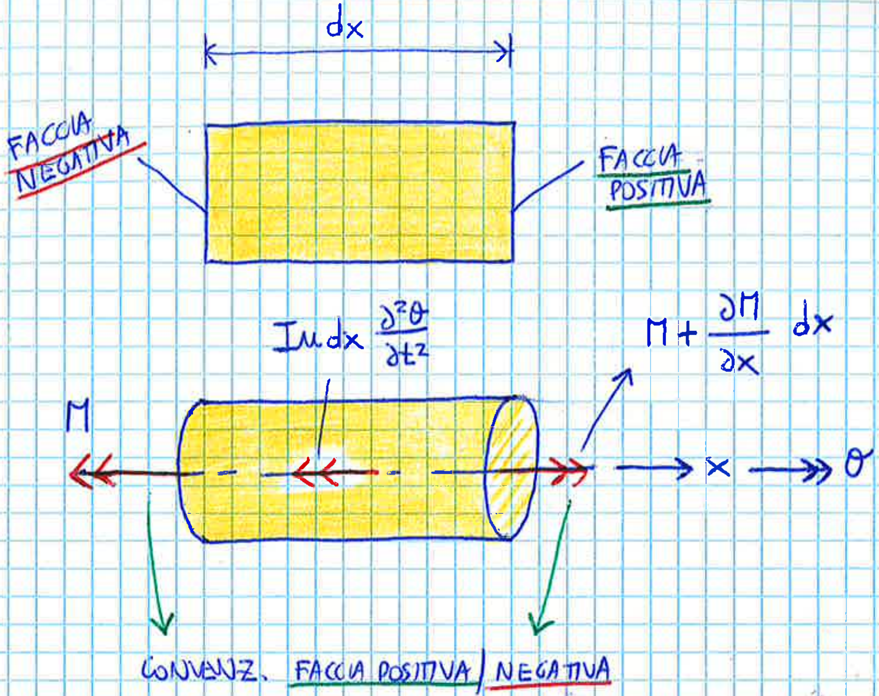
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{d^2 f_1}{dy^2} \Rightarrow \text{I MEMBRO} = c^2\frac{d^2 f_1}{dy^2} \qquad \text{DUNQUE:}$$

$$\boxed{\text{I MEMBRO}} = \boxed{\text{II MEMBRO}} \Rightarrow \text{IDENTITA'} \Rightarrow ✓$$

ANALOGAMENTE, SI PUO' DIMOSTRARE LO STESSO PER LA f_2!

QUAL E' IL SIGNIFICATO FISICO DI f_1 E f_2?

CONSIDERIAMO UNA BARRA AVENTE LUNGHEZZA INFINITA E SUPPONIAMO CHE A $t=0$ AGISCA UNA PERTURBAZIONE IN UN CERTO PUNTO:



IL MOMENTO DI INERZIA DEL CONCIO SI INDICA CON:

$I_u\, dx$ DOVE: $I_u \Rightarrow$ MOMENTO POLARE DI INERZIA PER UNITÀ DI LUNGH.

e, INOLTRE, L'ACCELERAZ. ANGOLARE È: $\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}$

$$I_u = [kg \cdot m]$$

IMPONENDO L'EQUIL. ALLA ROTAZ. OTTENGO CHE:

$$\cancel{M} + \frac{\partial M}{\partial x} \cancel{dx} - \cancel{M} - I_u \cancel{dx} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial x} = I_u \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}}$$

$\Rightarrow$ QUESTA TUTTAVIA NON È L'EQUAZ. DEL MOTO!

PER LA TEORIA DELL'ELASTICITÀ:

SE LA SEZ. È CIRCOLARE O ANULARE $\Rightarrow$ $\boxed{M = G J_p \frac{\partial\theta}{\partial x}}$

$$\boxed{\theta(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \left(A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t\right)\left(C_r \cos\left(\frac{\omega_r}{c}x\right) + D_r \sin\left(\frac{\omega_r}{c}x\right)\right)}$$

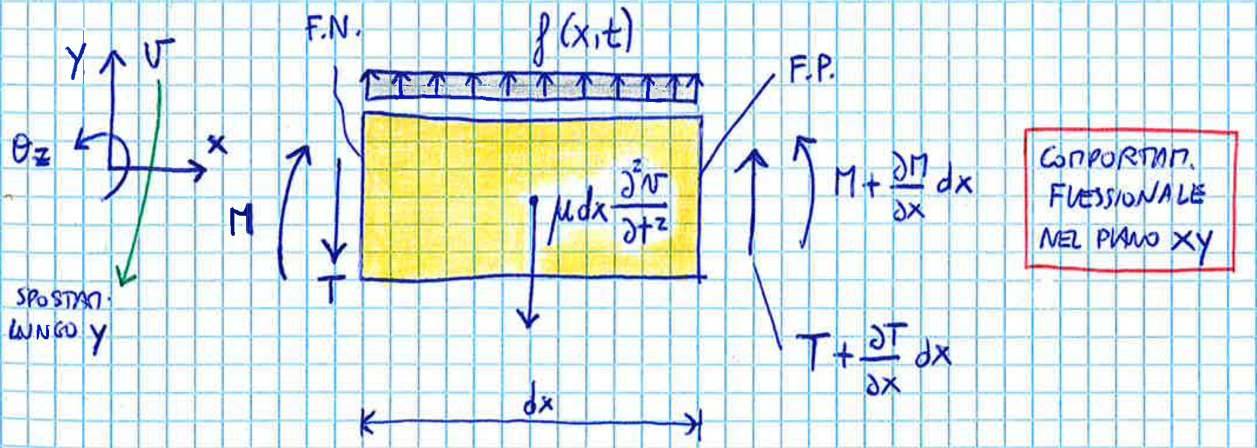
VEN 2 DIC

3) VIBRAZIONI FLESSIONALI – LA TRAVE DI EULERO – BERNOULLI

LE IPOTESI CHE UTILIZZEREMO SONO PER I VARI MODELLI ESISTENTI:

	DEFORMABILITÀ A TAGLIO	INERZIA ROTAZIONALE DELLE SEZIONI
TIMOSHENKO	SI	SI
RAYLEIGH	NO	SI
EULERO-BERNOULLI	NO	NO

PER RICAVARE LE EQUAZ. DEL MOTO SI CONSIDERI UN CONCIO INFINITESIMO:



NEL MODELLO DI EULERO – BERNOULLI SI PUÒ ANCHE INTRODURRE UNA FORZANTE COME DISTRIBUZ. DI FORZA.

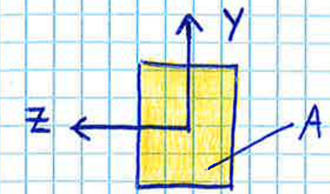
IMPONENDO L'EQUIL. ALLA TRASLAZ. VERTICALE:

$$\theta = \frac{\partial v}{\partial x} \qquad M_z = E I_z \frac{\partial \theta_z}{\partial x}$$ → TEORIA DELL' ELASTICITÀ

DUNQUE:

$$M_z = E I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \Longrightarrow \boxed{M = E I_z \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}$$

SI RICORDA CHE:



$$I_z = \int_A y^2 \, dA = [m^4]$$

POSSIAMO DUNQUE SCRIVERE CHE:

$$T = -\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)$$

SOSTITUENDO NELLA (1):

$$\boxed{-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + f(x,t) = 0}$$ ⟹ equaz. DEL MOTO (GENERALE)

SUPPONENDO CHE $EI = cost$ e $f(x,t) = 0$:

$$\boxed{EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0}$$ ⟹ equaz. DI EULERO-BERNOULLI

RISPETTO ALLE VIBRAZ. ASSIALI e TORSIONALI QUI HO:

- DIFFERENZE NEL SEGNO (IL ⊕)
- L'ORDINE max DI DERIVAZIONE (4°)

$$(\lambda+\beta)(\lambda-\beta)(\lambda+i\beta)(\lambda-i\beta)=0 \implies$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \beta \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\beta$$

ORA, CON ALCUNI PASSAGGI POSSIAMO ASSOCIARE:

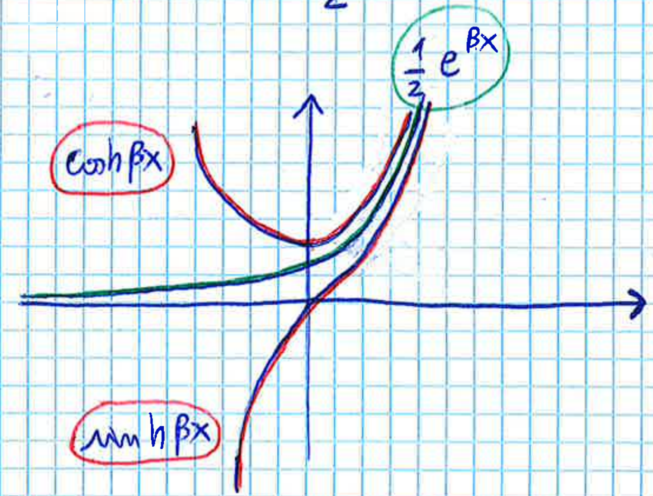
$$\lambda_{1,2} = \pm \beta \rightarrow \cosh\beta x, \ \sinh\beta x \qquad \lambda_{3,4} = \pm i\beta \rightarrow \cos\beta x, \ \sin\beta x$$

SI RICORDA CHE:

$$\cosh\beta x = \frac{e^{\beta x}+e^{-\beta x}}{2} \qquad \sinh\beta x = \frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\cosh\beta x = \beta\sinh\beta x$$

$$\frac{d}{dx}\sinh\beta x = \beta\cosh\beta x$$



DUNQUE, SI OTTIENE CHE:

$$\boxed{\phi(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x + C\cosh\beta x + D\sinh\beta x}$$

LA SOLUZ. TOTALE SARA' QUINDI DATA DA:

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \phi_r(x)\,\eta_r(t)} \quad \text{DOVE:}$$

$$\boxed{\eta_r(t) = F_r\cos\omega_r t + H_r\sin\omega_r t}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 127 di 290

③ $v = 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ DUNQUE: LA DEFORMATA RIMANE ⊥ ALL'INCASTRO

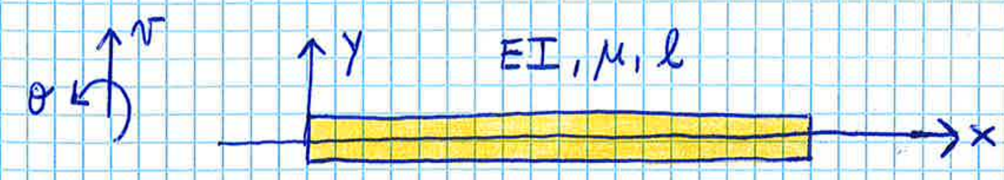
$$\boxed{\begin{cases} \phi = 0 \\ \phi' = 0 \end{cases}} \Rightarrow$$ CONDIZ. AL BORDO ESTREMITÀ INCASTRATA

UNA SITUAZ. TIPICA È QUELLA DELLA TRAVE APPOGGIATA - APPOGGIATA:

(PROVARE A FARLA)

VEDIAMO ORA IL CASO PARTICOLARE "LIBERO - LIBERO" ⇒ È LA MODALITÀ DI PROVA SPERIMENTALE CON LA QUALE SI SOSPENDE L'OGGETTO CON ELASTICI MOLTO CEDEVOLI (FREQUENZE DI SOSPENSIONE PIÙ PICCOLE DI 2 ORDINI DI GRANDEZZA RISPETTO ALLE FREQUENZE PROPRIE) ⇒ POSSO TRASCURARE L'INFLUENZA DEI VINCOLI, OVVERO DELLE "MOLLE".

CONSIDERIAMO UNA TRAVE LIBERA-LIBERA E CALCOLIAMO LE FREQUENZE PROPRIE:



CONDIZ. AL BORDO $\Rightarrow \begin{cases} T(0,t) = 0 = T(\ell,t) \\ M(0,t) = M(\ell,t) = 0 \end{cases}$

ORA, RICORDANDO CHE:

$$M = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad T = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}$$

MER 7 DIC

IN FORMA MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

NATURALM., ANCHE QUI VOGLIAMO EVITARE LA SOLUZ. BANALE:

$A = B = C = D = 0 \implies$ SOLUZ. BANALE

QUESTO LO SI OTTIENE IMPONENDO:

$$\det \begin{bmatrix} - & - \\ - & - \end{bmatrix} = 0 \implies$$

$$(\cosh \beta l - \cos \beta l)^2 - (\sinh \beta l - \sin \beta l)(\sinh \beta l + \sin \beta l) = 0 \implies$$

$$\cosh^2 \beta l + \cos^2 \beta l - 2 \cosh \beta l \cos \beta l - \sinh^2 \beta l + \sin^2 \beta l = 0 \implies$$

$$\boxed{2 - 2\cosh \beta l \cos \beta l = 0} \implies$$ E' UNA DELLE EQUAZ. CARATTERISTICHE

QUEST'ULTIMA EQUAZ. NON E' RISOLVIBILE IN FORMULA CHIUSA (NOI IMPOSTEREMO UNA SOLUZ. GRAFICA).

QUELLO CHE SI FA E' TIPICAMENTE RICORRERE A FUNZIONI NOTE, DI CUI SI CONOSCE GIA' IL GRAFICO:

$$2 - 2\cosh \beta l \cdot \cos \beta l = 0 \implies \boxed{\cos \beta l = \frac{1}{\cosh \beta l}} = \frac{2}{e^{\beta l} + e^{-\beta l}}$$

DUNQUE, GRAFICAMENTE:

$$\phi' = B + 2CX + 3DX^2$$

$$\phi'' = 2C + 6DX$$

$$\phi''' = 6D$$

DUNQUE: $C = D = 0$ QUINDI RIMANE:

$$\boxed{\phi(x) = A + BX}$$ ⟹ FORMA MODALE CORRISPOND. ALLA PULSAZ. NULLA $(\omega = 0)$

QUESTO è QUINDI IL CASO DI $\boxed{\text{MOTI RIGIDI}} \Rightarrow \boxed{\omega = 0}$

SI PUÒ VEDERE UN GENERICO MOTO LINEARE COME SOMMA DI TRASLAZ. E DI UNA ROTAZ. ATTORNO AL BARICENTRO:

IL MOTO RIGIDO è UN MOTO CHE AVVIENE SENZA DEFORMAZ. ⟹ QUESTO MOTO NASCE QUANDO IL SISTEMA è DEBOLM. VINCOLATO.

I 2 MOTI SONO INDIPENDENTI ⟹ QUESTO È COERENTE CON IL FATTO CHE $\beta \ell = 0$ SIA UNO ZERO CON MOLTEPLICITÀ DOPPIA ⟹ 2 AUTOFUNZIONI COINCIDENTI.

I MODI VERI E PROPRI SI OTTENGONO CONSIDERANDO LE PULSAZ. NON NULLE, RISOLVENDO (IN MANIERA APPROSSIMATA) L'EQUAZ. CARATTERISTICA!

A TITOLO DI ESEMPIO: $\beta \ell = 4{,}730 \; (r=1), \quad 7{,}853 \; (r=2), \quad 10{,}996 \; (r=3), \quad 14{,}137 \; (r=4)$

- VIBRAZIONI DI SISTEMI CONTINUI : APPROCCIO UNIFICATO

VEDIAMO QUELLO RICAVATO FINORA IN FORMA DEL TUTTO GENERALE è :

(1) VIBRAZ. ASSIALI DI ASTE

$$\boxed{\mu(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[AE(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]=0}$$

(2) VIBRAZ. TORSIONALI DI BARRE

$$\boxed{I_\mu(x)\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[G J_p(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right]=0}$$

(3) VIBRAZ. FLESSIONALI DI TRAVI

$$\boxed{\mu(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]=0}$$

TUTTE E 3 QUESTE EQUAZ. CONTENGONO :

- $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ⟹ FORZE DI INERZIA ⟹ ENERGIA CINETICA

- TERMINE DOVUTO ALLE FORZE ELASTICHE ⟹ ENERGIA POTENZ. ELASTICA

POSSO SCRIVERE IN FORMA RIASSUNTIVA QUESTE 3 EQUAZ. COME :

$$\boxed{\mathbb{M}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right]+\mathbb{K}\left[w\right]=0}$$

(W) : SPOSTAM. GENERALIZZATO ⟹ $w(x,t)\in\mathbb{R}$

$$\frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} = -\frac{\mathcal{K}[\phi]}{\mathcal{M}[\phi]} = -w^2$$

ANCHE QUI L'UNICA SOLUZ. DELL'EQUAZ. E' LA FUNZ. COSTANTE (LA QUALE NON DIPENDE NE' DA t NE' DA x) $\Rightarrow$ QUESTA COSTANTE LA CHIAMO w^2!

DUNQUE, SI OTTIENE CHE:

$$\boxed{\ddot{\eta}(t) + w^2\eta(t) = 0} \Rightarrow \text{EQUAZ. DEL MOTO ARMONICO}$$

INOLTRE:

$$\boxed{\mathcal{K}[\phi] = w^2\mathcal{M}[\phi]} \Rightarrow \text{AUTOPROBLEMA (EVP) DIFFERENZIALE}$$

FINALMENTE, POSSO CHIAMARE:

$w^2 \Rightarrow$ AUTOVALORE

$\phi(x) \Rightarrow$ AUTOFUNZIONE

NEL CASO DEI SISTEMI DISCRETI ABBIAMO VISTO CHE, PER APPLICARE L'ANALISI MODALE, LE MATRICI DOVEVANO ESSERE SIMMETRICHE.

PARALLELAM., NEI SISTEMI CONTINUI GLI OPERATORI DOVRANNO ESSERE:

- OPERATORI AUTOAGGIUNTI: $\mathcal{M}$, $\mathcal{K}$

  DATE 2 FUNZIONI u, v CHE SODDISFANO LE CONDIZ. AL BORDO, SI DEFINISCE COME "PRODOTTO INTERNO"

$$\boxed{(u, \mathcal{L}[v]) = \int_\theta u \cdot \mathcal{L}[v]\, d\theta}$$

NOTAZ. DI UN PRODOTTO INTERNO

$\mathcal{L}$: OPERATORE LINEARE

ANCHE QUI, ANALOGAM., PER QUALSIASI CONDIZ. AL BORDO $u'v''=0$!

DUNQUE, PROSEGUENDO CON LE INTEGRAZ. PER PARTI SI ARRIVA A:

$$\int_0^l u\, v^{IV}\, dx = \int_0^l u^{IV}\, v\, dx \Rightarrow \left(u, \mathcal{K}[v]\right) = \left(v, \mathcal{K}[u]\right)$$

DUNQUE, PER LA TRAVE ANCHE $\mathcal{K}$ É AUTOAGGIUNTO!

VEN 9 DIC

L'ENUNCIATO DELL'ORTOGONALITÀ DEI MODI (NON FAREMO TUTTI I PASSAGGI COME PER I SISTEMI DISCRETI) E':

$$\boxed{\int_D \phi_i \cdot M[\phi_j]\, dD = m_i\, \delta_{ij} \quad \text{DOVE:}}$$

$\delta_{ij} \Rightarrow$ OPERATORE DI KRONECKER (OPERAT. BOOLEANO) $\begin{cases} 0 & \text{SE } i \neq j \\ 1 & \text{SE } i = j \end{cases}$

ANALOGAMENTE, PER L'OPERATORE DI RIGIDEZZA:

$$\boxed{\int_D \phi_i\, \mathcal{K}[\phi_j]\, dD = k_i\, \delta_{ij} = m_i\, \omega_i^2\, \delta_{ij}}$$

HO QUINDI DEFINITO $m_i \Rightarrow$ MASSA MODALE i-ESIMA ($m_i > 0$ POICHÉ M E' DEFINITO POSITIVO) e $k_i \Rightarrow$ RIGIDEZZA MODALE i-ESIMA ($k_i \geq 0$ POICHE' $\mathcal{K}$ E' DEFINITO POSITIVO O SEMIDEFINITO POSITIVO).

($\mathcal{K}$ É SEMIDEFINITO POSITIVO SE $\omega = 0$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 139 di 290

$$\omega_r^2 \{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\} = \{\psi_r\}^T [k] \{\psi_r\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega_r^2 = \frac{\{\psi_r\}^T [k] \{\psi_r\}}{\{\psi_r\}^T [m] \{\psi_r\}}}$$

NEI CONTINUI IL PROBLEMA E' CHE NON SONO IN GRADO DI CALCOLARE ω_r e $\{\psi_r\}$!

COME E' COSTITUITO ω_r^2:

PER UN SISTEMA ELASTICO LINEARE SI HA CHE:

$$V = \frac{1}{2} \{x\}^T [k] \{x\} \qquad \text{(ENER. POTENZ. ELAST.)}$$

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{x}\}^T [m] \{\dot{x}\} \qquad \text{(ENERG. CINETICA)}$$

ω_r PUÒ IN QUALCHE MODO ESSERE SCRITTO COME RAPPORTO DI ENERGIE?

ω_r^2 RICORDA UN RAPPORTO DI ENERGIA $\left(\frac{V}{T}\right)$!

INVECE, DI METTERE $\{\psi_r\}$ NEL RAPPORTO, QUINDI, METTO UNA SORTA DI AUTOVETTORE APPROSSIMATO:

$$\omega^2 = R(\{u\}) = \frac{\{u\}^T [k] \{u\}}{\{u\}^T [m] \{u\}} \Rightarrow \text{DEFINIZIONE DEL QUOZIENTE DI RAYLEIGH}$$

DOVE: $\{u\} \in \mathbb{R}^n$ É UN VETTORE DI "TENTATIVO"

IL QUOZIENTE DI RAYLEIGH É STAZIONARIO NELL' INTORNO DELL' AUTOVETTORE $\Longrightarrow$ PRINCIPIO DI STAZIONARIETA'

VEDIAMO ORA UN COROLLARIO PER $r = 1$:

PRIMA FREQUENZA PROPRIA

$$R(\{u\}) \cong \omega_1^2 + \sum_{i=2}^{n} \varepsilon_i^2 \left(\omega_i^2 - \omega_1^2\right)$$

ESSENDO :

$$\begin{cases} \varepsilon_i^2 \geq 0 \\ \omega_{i+1}^2 \geq \omega_i \quad (\text{PER COSTRUZIONE}) \end{cases} \Longrightarrow \left(\omega_i^2 - \omega_1^2\right) \geq 0$$

SI OSSERVA CHE :

IL QUOZIENTE DI RAYLEIGH $R(\{u\})$ SOVRASTIMA SEMPRE IL 1° AUTOVALORE !

L' APPROSSIMAZ. SUL PRIMO MODO SARA', DUNQUE, SEMPRE PER ECCESSO !

CON DIVERSI TENTATIVI DI $\{u\}$ IL QUOZIENTE DI RAYLEIGH CON L' APPROSSIMAZ. MIGLIORE SARA' QUELLO PIU' PICCOLO !

VEDIAMO ORA UNA TABELLA DI CONFRONTO DISCRETO VS CONTINUO :

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 143 di 290

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\} \qquad \text{nDOF}$$

$$\{x(t)\} = \{X_0\}\, g(t) \Rightarrow \text{SOLUZ. SINCRONA}$$

DOVE : $g(t)$ É UNA FUNZ. ARMONICA

L'ENERGIA CINETICA VALE :

$$T = \frac{1}{2}\{\dot{x}\}^T [m] \{\dot{x}\} = \frac{1}{2}(\dot{g}(t))^2 \{X_0\}^T [m] \{X_0\}$$

L'ENERGIA POTENZ. ELASTICA, INVECE, E' :

$$V = \frac{1}{2}\{x\}^T [k] \{x\} = \frac{1}{2}(g(t))^2 \{X_0\}^T [k] \{X_0\}$$

DUNQUE :

$$T(t) = \frac{1}{2}\{X_0\}^T [m] \{X_0\}\, \omega^2 \sin^2(\omega t + \alpha)$$

$$V(t) = \frac{1}{2}\{X_0\}^T [k] \{X_0\} \cos^2(\omega t + \alpha)$$

(SCEGLIENDO : $g(t) = \cos(\omega t + \alpha)$)

QUANDO $\cos^2(\omega t + \alpha) = 0$:

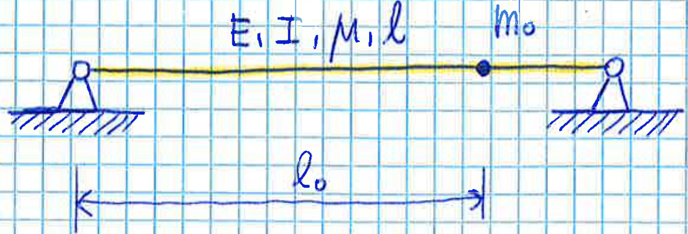
$V = 0 = V_{min}$ (V NON PUÒ MAI ESSERE < 0)

CONTEMPORANEAMENTE $\sin^2(\omega t + \alpha) = 1$, DUNQUE :

$T = T_{max}$ (IL $\sin^2$ NON PUÒ MAI ESSERE > 1)

PERTANTO :

esempio 1



$m_0 << \mu l$

• 1° PULSAZ. PROPRIA

ASSUMO COME FUNZIONE DI TENTATIVO:

$$\phi(x) = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)$$ ⟹ 1° AUTOFUNZIONE DEL SISTEMA SENZA m_0

QUESTA PUÒ ESSERE UNA BUONA SCELTA POICHÉ m_0 RAPPRESENTA DI FATTO UNA PERTURBAZIONE.

DOPODICHÉ, SI ASSUME:

$$\boxed{v(x,t) = \sin\left(\frac{\pi}{l}x\right)\cdot\sin(\omega t+\alpha)}$$

SI COSTRUISCONO $T(t)$ e $V(t)$ e SI MASSIMIZZANO ⟹ SI CALCOLA:

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{\tilde{T}}$$ ecc ecc...

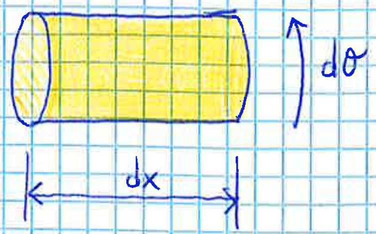
esempio 2

• STIMA 1° FREQ. PROPRIA ω_1

POSSO DIRE CHE:

$$\boxed{\theta(x,t) = u(x)\cdot\sin(\omega t+\alpha)}$$ ⟹ QUESTA ESPRESSIONE E' VALIDA PER UN SISTEMA CONSERVATIVO!

SE NON È SPECIFICATO NEL TESTO LA DIPENDENZA DAL TEMPO E' ARMONICA!



PER IL TEOREMA DI CLAPEYRON: $\boxed{dV = \frac{1}{2} M_t \, d\theta}$

INOLTRE, ESSENDO:

$$M_t = G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \text{ED ESSENDO:} \qquad d\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} dx$$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} dx = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \Longrightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx} \Longrightarrow$$ ENERGIA POTENZ. ELASTICA DI UNA BARRA DI TORSIONE

SUPPONENDO ORA CHE: $\theta(x,t) = u(x) \cdot \sin(\omega t + \alpha)$

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \sin^2(\omega t + \alpha)$$

DA CUI:

$$\boxed{V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l G J_p \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx \cdot 1}$$

IL sin E' MAX IN 1

PER QUANTO RIGUARDA L'ENERGIA CINETICA, INVECE:

QUEST'ULTIMO E' NOTO COME "QUOZIENTE DI RAYLEIGH"!

COME SCELGO LA $u(x)$?

UN CRITERIO PUÒ ESSERE QUELLO DI CONSIDERARE UNA SITUAZ. SIMILE.

IN GENERALE, IL CRITERIO È IL SEGUENTE:

LE FUNZIONI DI TENTATIVO DEVONO RISPETTARE ALMENO LE CONDIZ. AL BORDO GEOMETRICHE.

RICORDIAMO QUALI SIANO QUESTE CONDIZ. GEOMETRICHE:

	CONDIZ. GEOMETRICHE	CONDIZ. NATURALI
TRAVE	v, v'	v'', v'''
ASTA	u	u'
BARRA	θ	θ'

LE CONDIZ. NATURALI COINVOLGONO LE FORZE O I MOMENTI! $\Rightarrow$ A NOI INTERESSANO SOLO LE CONDIZ. GEOMETRICHE!

NELL'ESERCIZ. POSSIAMO SCEGLIERE COME PRIMA SCELTA:

$$u(x) = x$$

$$\frac{du}{dx} = 1$$

SOSTITUENDO NEL QUOZ. DI RAYLEIGH:

COME TERZA SCELTA POSSO SCEGLIERE:

$$u(x) = x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

OTTENGO, COMPLESSIVAM. CHE:

$$w^2(u = x^2) = \frac{4}{3} \frac{\frac{G J_p}{l}}{\frac{I_u l}{5} + I}$$

SI PUÒ DIMOSTRARE CHE, IN QUESTO CASO:

$$w^2(u = x^2) > w^2(u = x) \quad \left(> w^2_{\text{"VERA"}} \right)$$

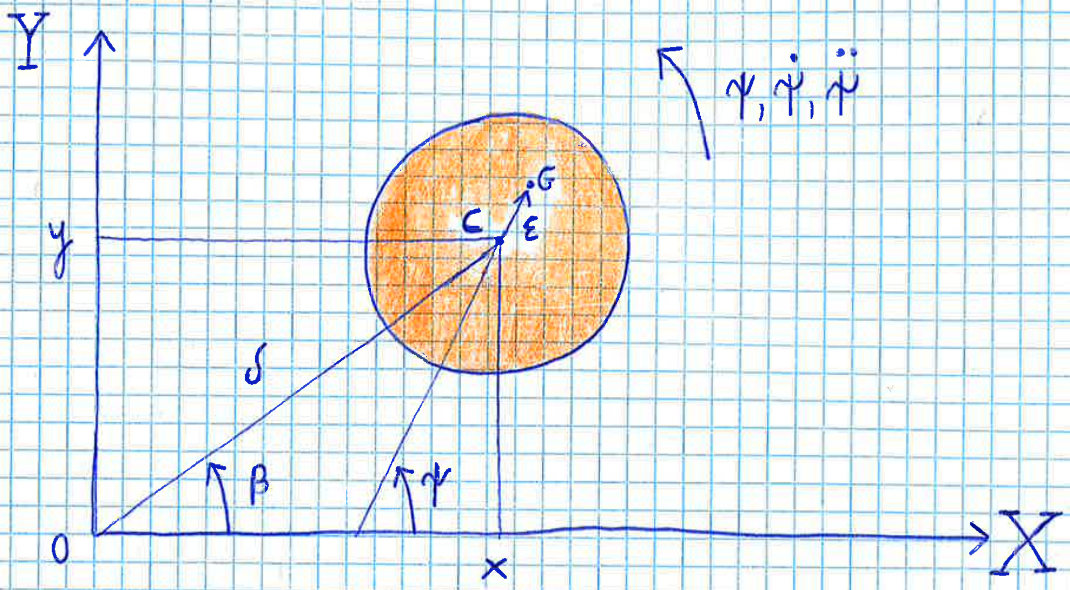
DUNQUE, LA STIMA EFFETTUATA CON $u = x$ (PER ORA) È LA MIGLIORE DELLE 3 (SI RICORDA CHE IL QUOZIENTE DI RAYLEIGH SOVRASTIMA SEMPRE, PER QUANTO RIGUARDA IL 1° MODO, LA W1!)

VEN 16 DIC

VEDIAMO ORA UN MODELLO DI ROTORE (INTRODUZ. ALLA DINAMICA DEI ROTORI):

NOI SIAMO INTERESSATI AL MOTO DEL CENTRO GEOMETRICO C!

CONSIDERIAMO COME RIFERIM. IL PIANO MEDIO DEL DISCO:



DEFINISCO δ COME "FRECCIA ELASTICA" $\Rightarrow$ DESCRIVE IL MOTO DELLA DEFORMATA ELASTICA.

β $\Rightarrow$ ANGOLO DI PRECESSIONE

ψ $\Rightarrow$ ANGOLO DI ROTAZ. DEL DISCO (USEREMO QUESTA PER LE F. INERZIA)

β NON É UN ANGOLO DI ROTAZ. DEL DISCO POICHÉ INDIVIDUA LA POSIZ. DEL PUNTO C RISPETTO ALL'ORIGINE DEL SISTEMA DI RIFERIM. $\Rightarrow$ INDIVIDUA LA POSIZ. DI UN PUNTO DEL DISCO e NON LA POSIZ. DI TUTTO IL DISCO!

SUPPONENDO CHE IL ROTORE SIA AD ASSE VERTICALE ($\vec{g}$ $\perp$ AL PIANO XY) INDICHIAMO LE FORZE IN GIOCO:

$$\begin{cases} \ddot{x}_G = \ddot{x} - \varepsilon \omega^2 \cos(\omega t) \\ \ddot{y}_G = \ddot{y} - \varepsilon \omega^2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

SOSTITUENDO SI OTTIENE:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = m\omega^2 \varepsilon \cos(\omega t) & (1) \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = m\omega^2 \varepsilon \sin(\omega t) & (2) \end{cases}$$

LA SUPPOSIZ. $\omega = \text{cost}$ HA FATTO SÍ CHE I GDL SIANO SOLO x e y!

DI FATTO DELLE 3 EQUAZ. DI EQUIL. SCRITTE USIAMO SOLO LE PRIME 2 (LA TERZA SERVE PER CALCOLARE $M(t)$ / $\omega = \text{cost}$ ⟹ COSA CHE NOI NON FAREMO).

QUESTE 2 EQUAZ. DEL MOTO SONO DISACCOPPIATE ED, INOLTRE, I COEFF. DELLE DERIVATE SONO GLI STESSI!

SUPPONENDO ORA DI $(1) + i\,(2)$:

$$m(\ddot{x} + i\ddot{y}) + c(\dot{x} + i\dot{y}) + k(x + iy) = m\omega^2 \varepsilon (\cos \omega t + i \sin \omega t)$$

DEFINENDO ORA UNA COORD. COMPLESSA (PRIVA DI SENSO FISICO):

$$z = x + iy \in \mathbb{C}$$

SI OTTIENE CHE:

$$\boxed{m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = m\omega^2 \varepsilon\, e^{i\omega t}}$$ equaz. complessa

LA FORMULAZ. COMPLESSA NON SOLO MI CONSENTE DI "SINTETIZZARE" LE 2 EQUAZ., MA ANCHE DI RISOLVERLE SINGOLARMENTE (SI RICORDI QUELLO VISTO NELLA PRIMA PARTE DEL CORSO).

ESSENDO :

CONVENZ. DEGLI ANTICIPI

$$z(t) = |z_0|\, e^{i\omega t} \cdot e^{-i\varphi} = |z_0|\, e^{i(\omega t-\varphi)} \Rightarrow$$

$$z(t) = \delta\, e^{i(\omega t-\varphi)}$$

SEMPRE IN ANALOGIA AI SDOF :

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_N}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2}}$$

QUANTO VALE $\dot{\varphi}$? $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} = 0$ (NON COMPARE LA VARIABILE TEMPO !)

DUNQUE, POSSIAMO DIRE CHE IL RITARDO DI FASE φ SIA COSTANTE !

VOLENDO CAPIRE COME X e Y VARINO NEL TEMPO, ED ESSENDO :

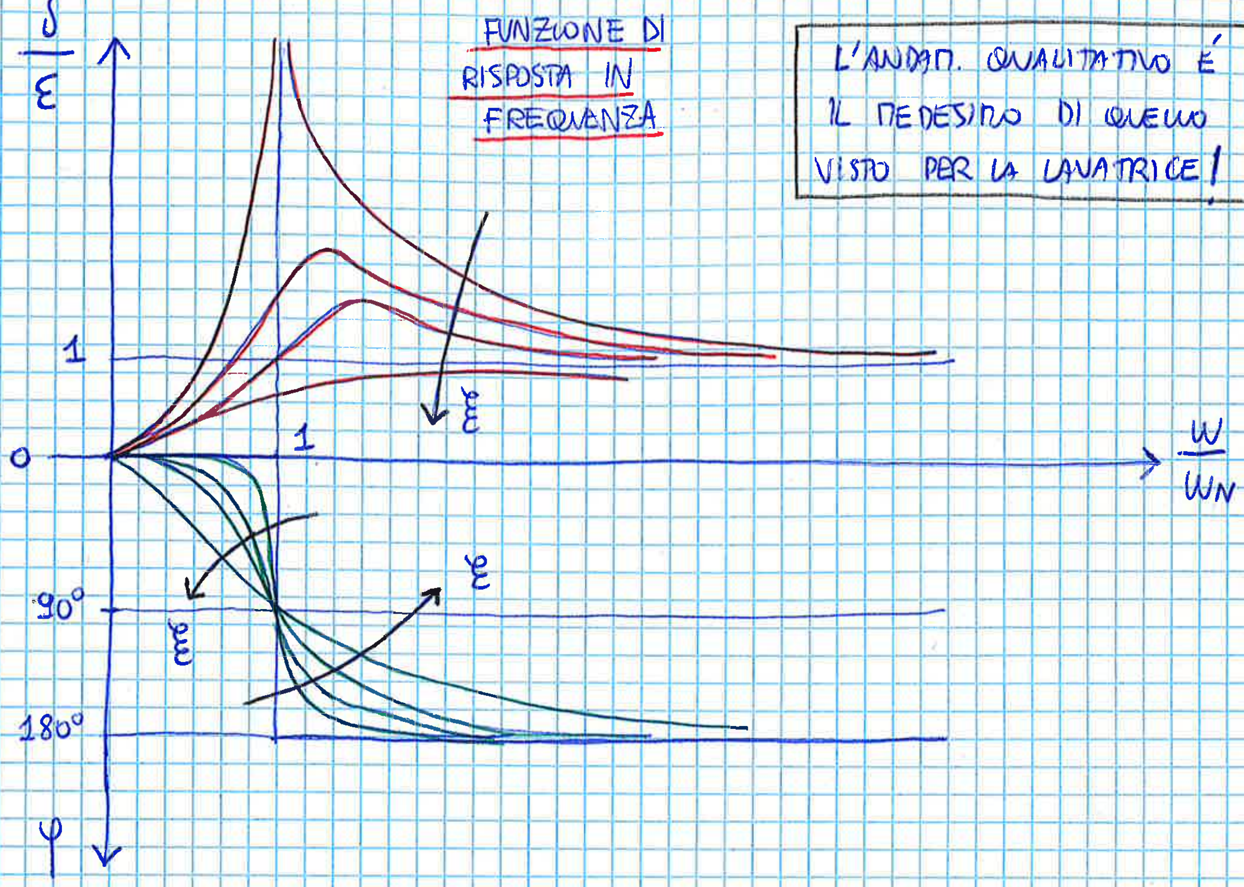
$$\begin{cases} x = Re(z) = Re\left[\delta e^{i(\omega t-\varphi)}\right] = \delta \cos(\omega t-\varphi) \\ y = Im(z) = Im\left[\delta e^{i(\omega t-\varphi)}\right] = \delta \sin(\omega t-\varphi) \end{cases}$$

IL LUOGO GEOMETRICO DESCRITTO DALLE SUCCESSIVE POSIZ. DEL CENTRO GEOMETRICO C SARA' QUINDI :

$$x^2 + y^2 = \delta^2 \Rightarrow \text{equaz. circonf} \Rightarrow \boxed{\text{L'ORBITA E' CIRCOLARE !}}$$

SI PARLA ANCHE DI "MOTO DI PRECESSIONE CIRCOLARE".

FACENDO RIFERIM. AL DISEGNO PRECEDENTE :



L'ANDAM. QUALITATIVO É IL MEDESIMO DI QUELLO VISTO PER LA LAVATRICE!

ANALIZZIAMO ORA IL PROBLEMA DELLA RISONANZA:

SI PUÓ DIMOSTRARE CHE:

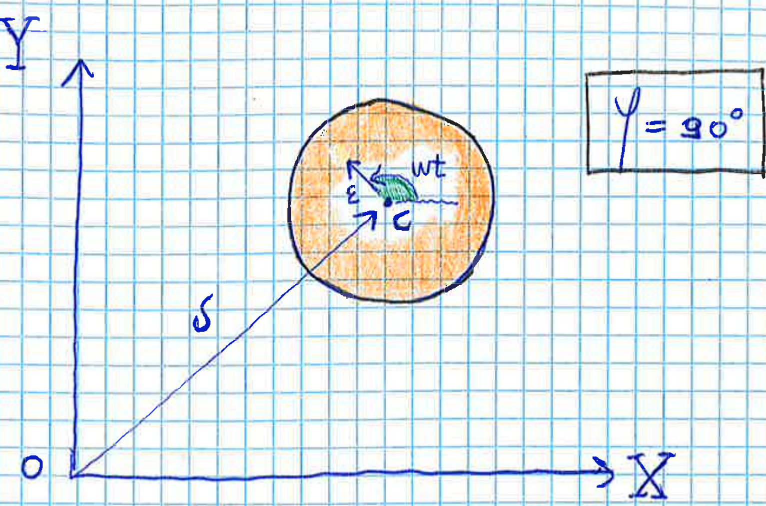
$$\omega_{ris} = \omega_{\text{DI MAX AMPIEZZA}} = \frac{\omega_N}{\sqrt{1 - 2\xi^2}} = \omega_{\text{CRITICA FLESSIONALE}}$$

QUESTA VELOCITÁ NELLA DINAMICA DEI ROTORI SI DEFINISCE COME VELOCITÁ CRITICA FLESSIONALE!

SE $\xi \ll 1$, OVVIAMENTE: $\omega_{\text{CRIT FLEX}} \cong \omega_N$

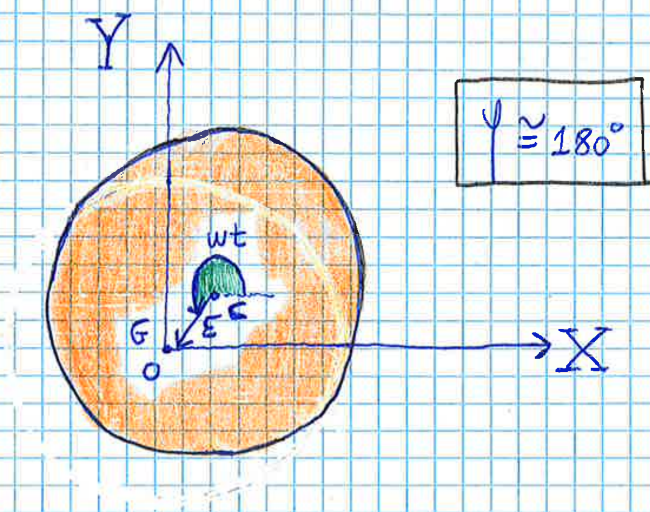
IN GENERALE, LA VELOCITÁ CRITICA É UNA VELOCITÁ DI ROTAZ. (rpm) IN CORRISPONDENZA DELLA QUALE UNA DELLE CAUSE ECCITATRICI PRESENTA UNA FREQUENZA COINCIDENTE CON UNA DELLE FREQUENZE PROPRIE.

(2) $\boxed{\omega = \omega_N}$



LA SPEZZATA OCG RUOTA RIGIDAMENTE. I RAPPORTI RIMANGONO INALTERATI (ABBIAMO INFATTI DETTO CHE $\dot{\varphi} = 0$).

(3) $\boxed{\omega >> \omega_N}$



LA TRAIETTORIA DI G E' INTERNA ALLA TRAIETTORIA DI C. TUTTO RUOTA ATTORNO AD O.

IN QUESTA CONDIZ. SI OSSERVA IL FENOMENO DELL' "AUTOCENTRAMENTO":

$$\boxed{\lim_{\frac{\omega}{\omega_N} \to \infty} (x_G, y_G) = (0,0)}$$

IN QUESTO MODO MINIMIZZO GLI EFFETTI DELLA FORZA CENTRIFUGA.

LE IPOTESI PREVEDONO:

- ALBERO INFINITAMENTE RIGIDO
- CUSCINETTI CEDEVOLI E ANISOTROPI (ORTOTROPI) — ANISOTROPO IN CUI LE DIREZ. PRINCIPALI SONO $\perp$
- $C_x = C_y = 0 \Rightarrow$ ASSENZA DI SMORZAMENTO
- DISCO IN MEZZERIA

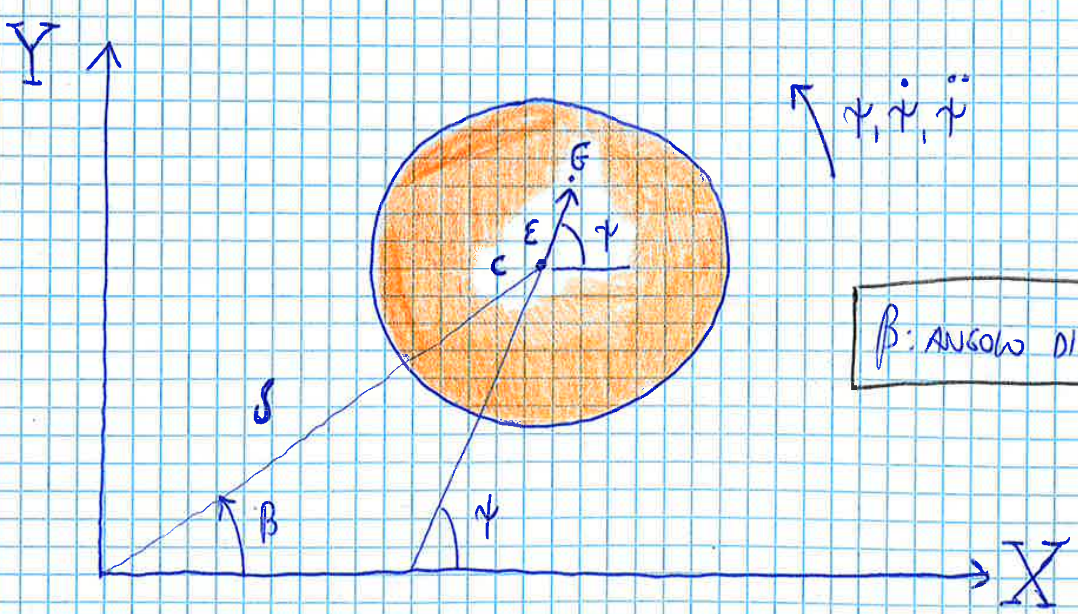
PERCHÉ $k_x \neq k_y$?

SUPPONENDO DI AVERE:

- CUSCINETTI MAGNETICI
- CUSCINETTI LUBRIFICATI

SE SI EFFETTUA UNA LINEARIZZAZ. DELLE EQUAZ. FLUIDODINAMICHE SI OTTIENE CHE $k_x \neq k_y$! $\Rightarrow$ HA SENSO DIRE CHE $k_x \neq k_y$!

CONSIDERANDO IL PIANO MEDIO DEL DISCO:



β: ANGOLO DI PRECESSIONE

CONSIDERIAMO ORA IL D.C.L:

QUELLO CHE VADO A FARE È, QUINDI, CERCARE LA SOLUZ. A REGIME COME:

$$\begin{cases} x = x_0 \cos \omega t \\ y = y_0 \sin \omega t \end{cases}$$

SI RICORDA CHE, NON ESSENDOCI SMORZAMENTO, IL RITARDO DI FASE φ PUÒ ESSERE 0° O 180°:

$$\boxed{x_0, y_0 \in \mathbb{R} \quad (\text{EVENTUALM. NEGATIVI})}$$

SOSTITUENDO NELLE EQUAZ. DEL MOTO, INFATTI:

$$\begin{cases} (k_x - \omega^2 m)\, x_0 \cos \omega t = m\omega^2 \varepsilon \cos \omega t \\ (k_y - \omega^2 m)\, x_0 \sin \omega t = m\omega^2 \varepsilon \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{m\omega^2 \varepsilon}{k_x - \omega^2 m} \qquad y_0 = \frac{m\omega^2 \varepsilon}{k_y - \omega^2 m}$$

DIVIDENDO PER m:

$$\boxed{x_0 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{\frac{k_x}{m} - \omega^2}} \qquad \boxed{y_0 = \frac{\omega^2 \varepsilon}{\frac{k_y}{m} - \omega^2}}$$

SI OSSERVA CHE QUANDO $\boxed{\omega^2 = \frac{k_x\ (\text{o } k_y)}{m}}$ IL DENOMINAT. VA A ZERO, DUNQUE:

$$\omega_x^2 = \frac{k_x}{m} \quad \text{e} \quad \omega_y^2 = \frac{k_y}{m}$$

RAPPRESENTANO 2 VELOCITÀ CRITICHE FLESSIONALI!

IN GENERALE, NON POSSO DIRE CHE QUEST'ULTIMO RAPPORTO SIA UNITARIO:

- LA PRECESSIONE NON E' SINCRONA!

SPECIFICANDO x_0 e y_0:

$$\boxed{x_0 = \frac{\varepsilon \omega^2}{\omega_x^2 - \omega^2}} \qquad \boxed{y_0 = \frac{\varepsilon \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2}}$$

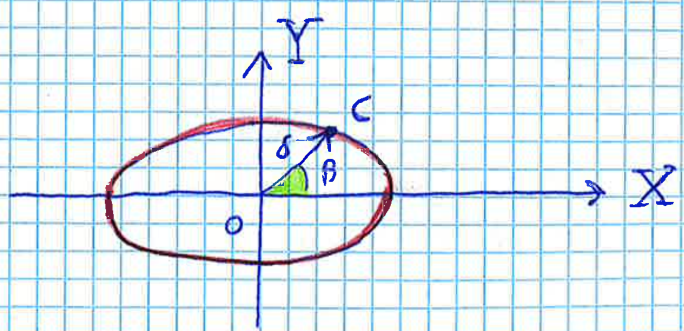
CON INOLTRE:

$$\begin{cases} x_c = x_0 \cos \omega t \\ y_c = y_0 \sin \omega t \end{cases}$$

POSSIAMO ORA SCRIVERE CHE:

$$\boxed{\left(\frac{x_c}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y_c}{y_0}\right)^2} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) \boxed{= 1} \qquad \left(\text{COSTANTE RISPETTO AL TEMPO}\right)$$

LA TRAIETTORIA DEL PUNTO C PREVEDERA', QUINDI, UN'ORBITA ELLITTICA:



POSSO, INOLTRE, DIRE CHE:

$$\boxed{\operatorname{sign}\left(\frac{\dot{\beta}}{\omega}\right)} = \operatorname{sign}\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \boxed{\operatorname{sign}\left(\frac{\omega_x^2 - \omega^2}{\omega_y^2 - \omega^2}\right)}$$

ANDIAMO ORA A CONSIDERARE 3 SITUAZ. TIPICHE:

SI RICORDA CHE:

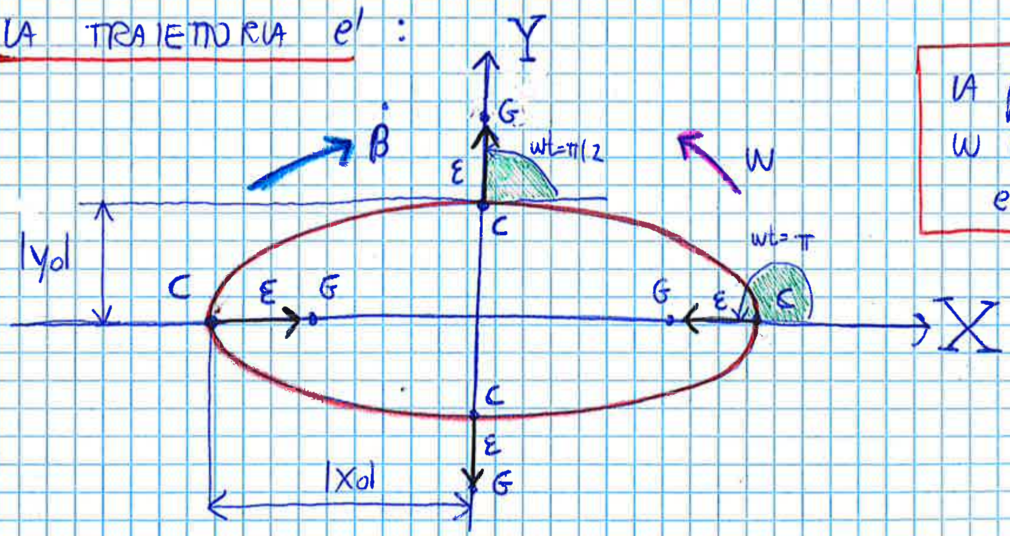
$$\begin{cases} x_G = x_c + \varepsilon \cos \omega t \\ y_G = y_c + \varepsilon \sin \omega t \end{cases} \qquad \begin{cases} x_G = (x_0 + \varepsilon) \cos \omega t \\ y_G = (y_0 + \varepsilon) \sin \omega t \end{cases}$$

(1) $\boxed{\text{MOTO BACKWARD}}$: $\boxed{\omega_x < \omega < \omega_y}$ $\begin{cases} x_0 < 0 \\ y_0 > 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{matrix}(P_2) \\ (P_1)\end{matrix}}$ $|x_0| > |y_0|$ ↓ PER COME HO FATTO IL DISEGNO

ANDIAMO A RAPPRESENTARE LA TRAIETTORIA:

SE $\omega t = 0$: $\begin{cases} x_c = -|x_0| \\ y_c = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_G = -|x_0| + \varepsilon \\ y_G = 0 \end{cases}$

LA TRAIETTORIA e':



LA $\dot\beta$ É OPPOSTA ALLA W PERCHÉ IL MOTO e' BACKWARD!

SE $\omega t = \frac{\pi}{2}$: $\begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = y_0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_G = 0 \\ y_G = y_0 + \varepsilon \end{cases}$

ANDANDO AVANTI SI OTTENGONO GLI ALTRI PUNTI...

COME É FATTO $\dot\beta$? $\Rightarrow$ ESSENDO IL MOTO BACKWARD : $\frac{\dot\beta}{\omega} < 0 \Rightarrow$

$\dot\beta$ e' OPPOSTO A ω IN VERSO!

MER 11 GEN

VEDIAMO ORA LA RISPOSTA DI UN ROTORE ALLO SQUILIBRIO DINAMICO:

- ## ROTORE DISALLINEATO

VEDIAMO PRIMA UN RICHIAMO SUL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE DI INERZIA:

IN CASI DI TRIDIMENSIONALITÀ SI HA CHE:

$$\boxed{\vec{M}_O^{(1)} = \frac{d\vec{K}_O}{dt}}$$

DOVE: O E' PUNTO FISSO / BARICENTRO

(1) MOMENTO DOVUTO AD UN'AZIONE INERZIALE E NON AD UNA FORZA

$\vec{K}_O$ = MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

INOLTRE, SE $O \equiv$ FISSO OPPURE $O \equiv$ BARICENTRO:

$$\boxed{\{K_O\} = [I]\{w\}}$$

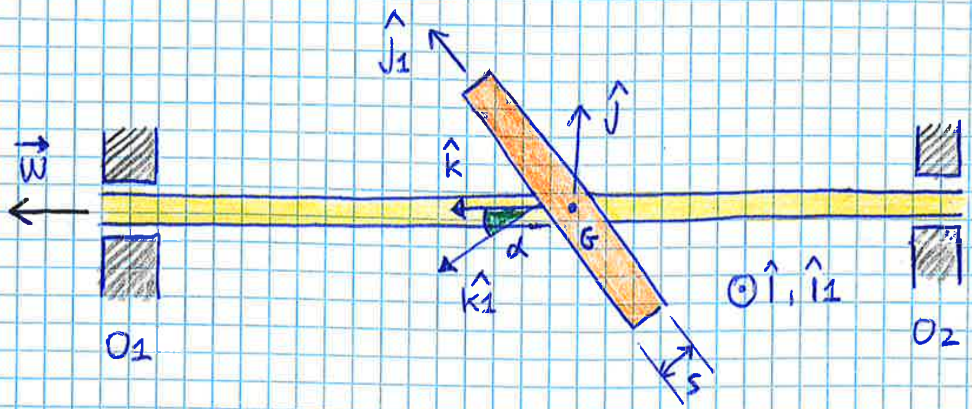
DOVE:

$$\vec{w} = \begin{Bmatrix} p \\ q \\ r \end{Bmatrix}$$ ⟹ VELOCITÀ DI ROTAZ. IN UNA TERNA DI RIFER. CENTRATA IN O

INOLTRE:

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}_{simm}$$ ⟹ TENSORE DI INERZIA

DOVE:



$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ⇒ TERNA FISSA

$\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ ⇒ TERNA MOBILE, ROTANTE ALLA VELOCITÀ $\vec{w}$

POICHÉ I MOMENTI DI INERZIA DEL DISCO RISPETTO ALLA TERNA FISSA VARIANO NEL TEMPO ⇒ IMPORTANZA TERNA CENTRALE!

$\vec{w}$ ⇒ VELOCITÀ DI ROTAZ. DELLA TERNA CENTRALE

SCRIVO IL MOMENTO ANGOLARE NELLA TERNA MOBILE:

$$\vec{K}_G = I_{x_1x_1} w_{x_1} \hat{i}_1 + I_{y_1y_1} w_{y_1} \hat{j}_1 + I_{z_1z_1} w_{z_1} \cdot \hat{k}_1$$

(SE LA TERNA NON È CENTRALE CI SONO MOLTI PIÙ TERMINI!)

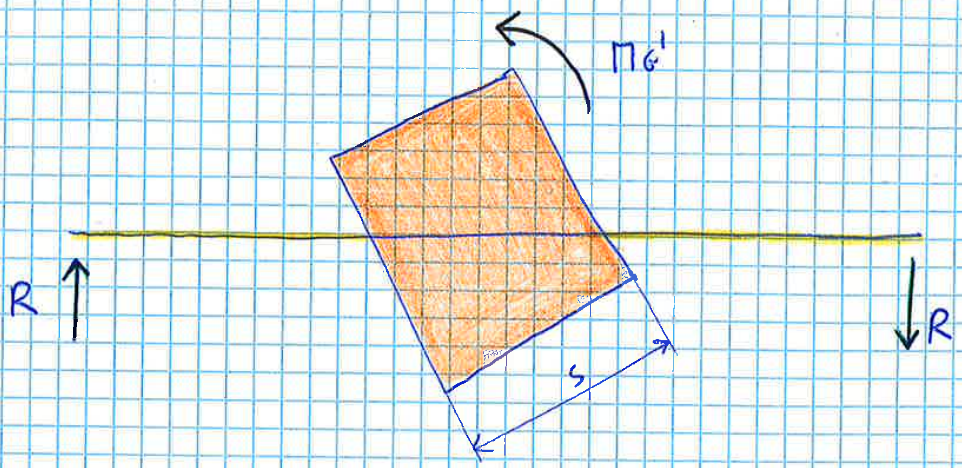
CON QUALCHE CALCOLO SI OTTIENE CHE:

$$\vec{M}'_G = -\frac{d\vec{K}_G}{dt} = -(I_p - I_d)\, w^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \; \hat{i}_1$$ DOVE:

$$\boxed{I_p = I_{z_1z_1} = \frac{1}{2} mR^2}$$ ⇒ MOMENTO POLARE

$$\boxed{I_d = I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ms^2}$$ ⇒ MOMENTO DIAMETRALE

QUESTA SITUAZ. SI HA CON S ABBASTANZA GRANDE:

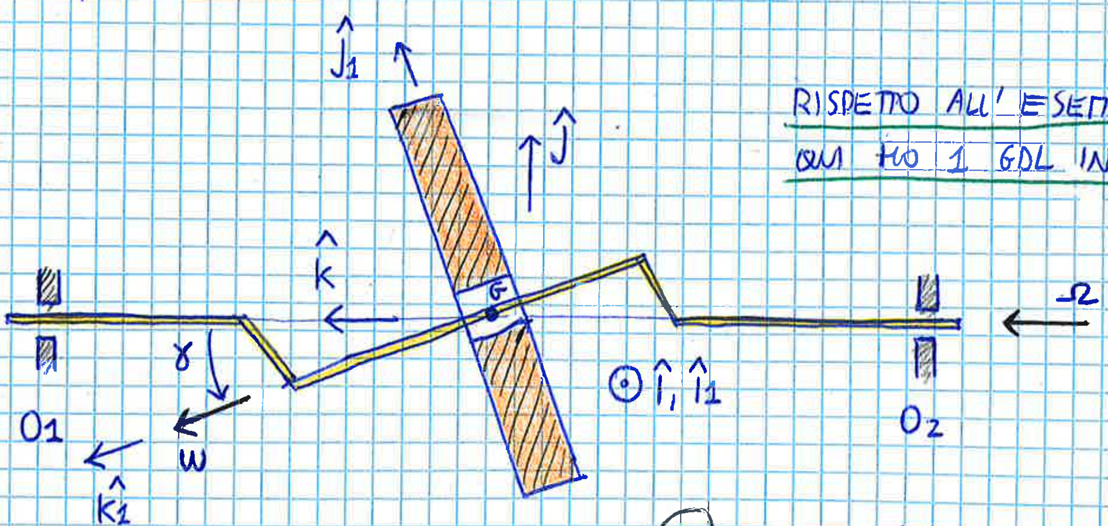


IN QUESTO CASO M'G E' RIBALTANTE, OVVERO TENDE AD ACCENTUARE L'ERRORE ANGOLARE.

QUESTO PROVOCA LE REAZ. VINCOLARI R!

(ANCHE QUI, OVVIAMENTE, TUTTO RUOTA!)

$\boxed{\text{esempio 2}}$: DISCO LIBERO DI RUOTARE SU UNA FORCELLA RIGIDA



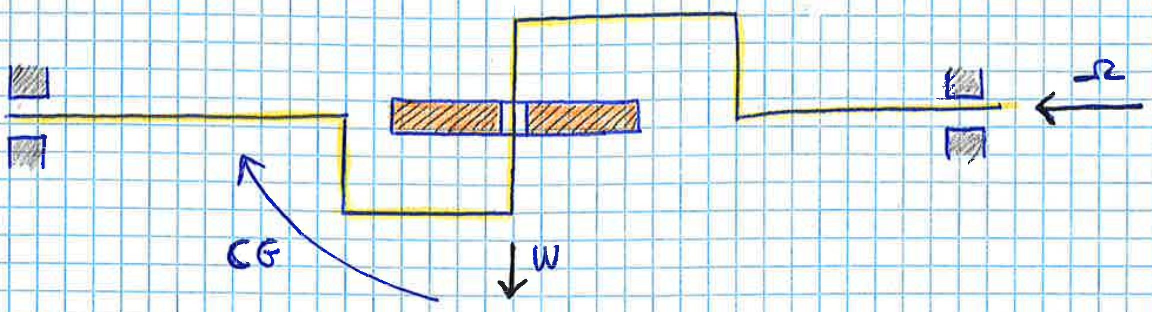
RISPETTO ALL'ESEMPIO 1 QUI HO 1 GDL IN PIÙ!

Ω ⟹ VELOCITÀ DI TRASCINAM. (O PRECESSIONE)

ω ⟹ VELOCITÀ DI ROTAZIONE PROPRIA (RELATIVA)

$\boxed{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}}$ ⟹ TERNA FISSA

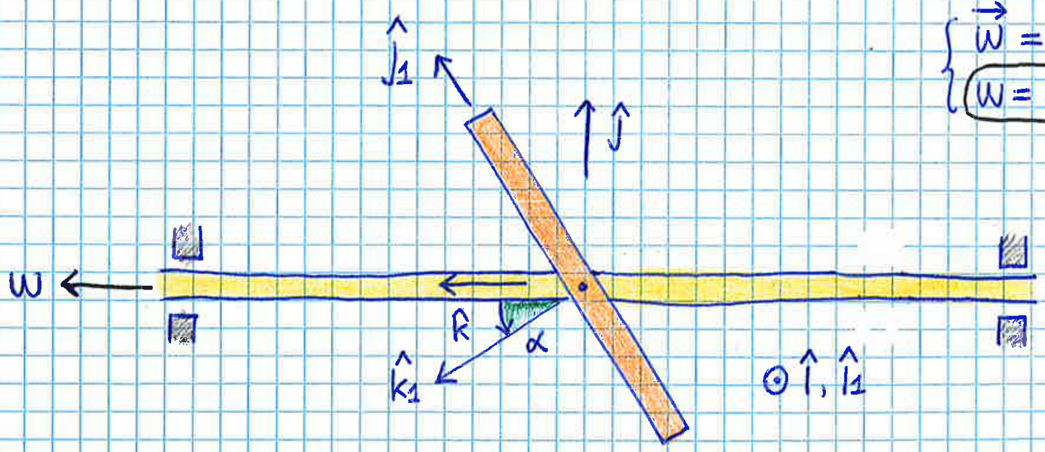
$\boxed{\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1}$ ⟹ TERNA MOBILE es.



LE COPPIE GIROSCOPICHE RISULTANO CONTROINTUITIVE!

VEDIAMO ORA UN ROTORE CON SQUILIBRIO DINAMICO e CON ALBERO DEFORMABILE:

SUPPONENDO CHE IL DISCO SIA IN MEZZERIA:

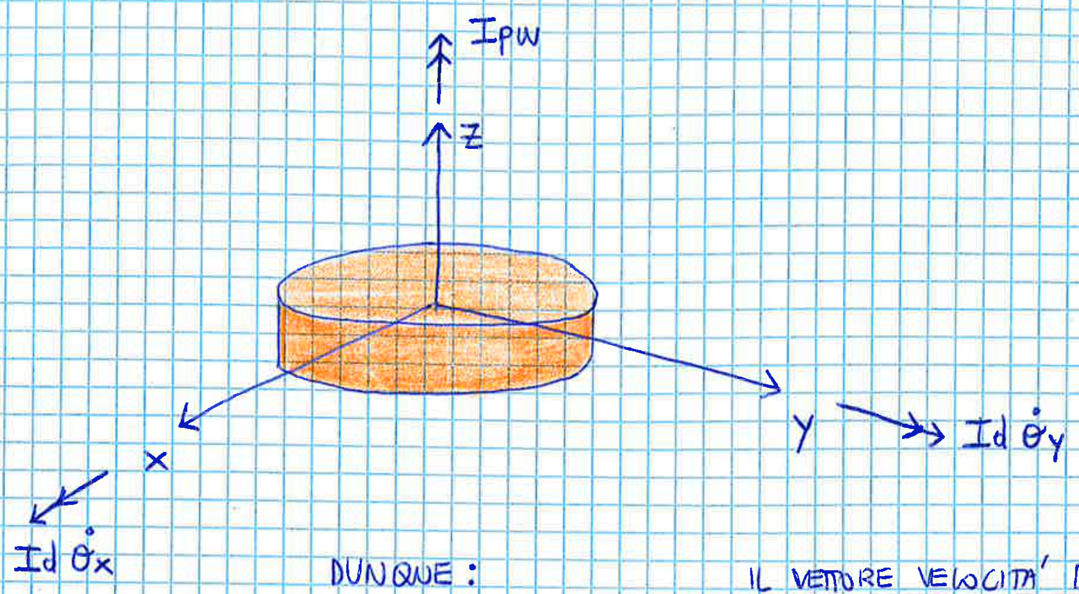


$$\begin{cases} \vec{W} = W\hat{k} \\ W = \text{COST} \end{cases}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ ⟹ TERNA BARICENTRICA e FISSA

$\hat{i}_1, \hat{j}_1, \hat{k}_1$ ⟹ TERNA CENTRALE ROTANTE

ESSENDO L'ALBERO DEFORMABILE LA DEFORMATA ELASTICA FA SÌ CHE α SIA VARIABILE NEL TEMPO!



DUNQUE:

$$[I_G] = \mathrm{diag}\,(I_d, I_d, I_p)$$

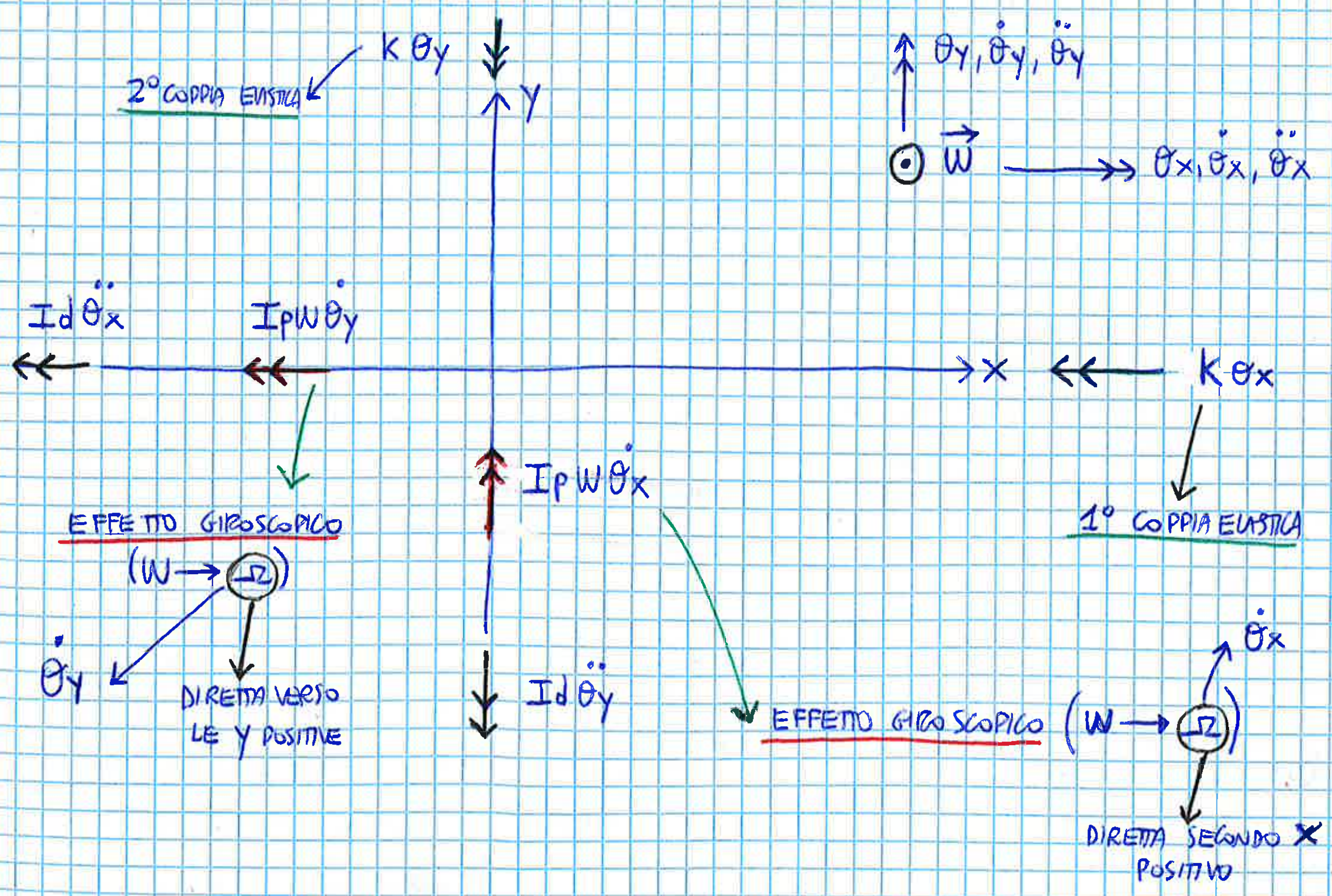
$$\boxed{\vec{M}'_G = -\frac{d\vec{K}_G}{dt}}$$

IL VETTORE VELOCITA' DI TRASCINAMENTO HA CONE COMPONENTI:

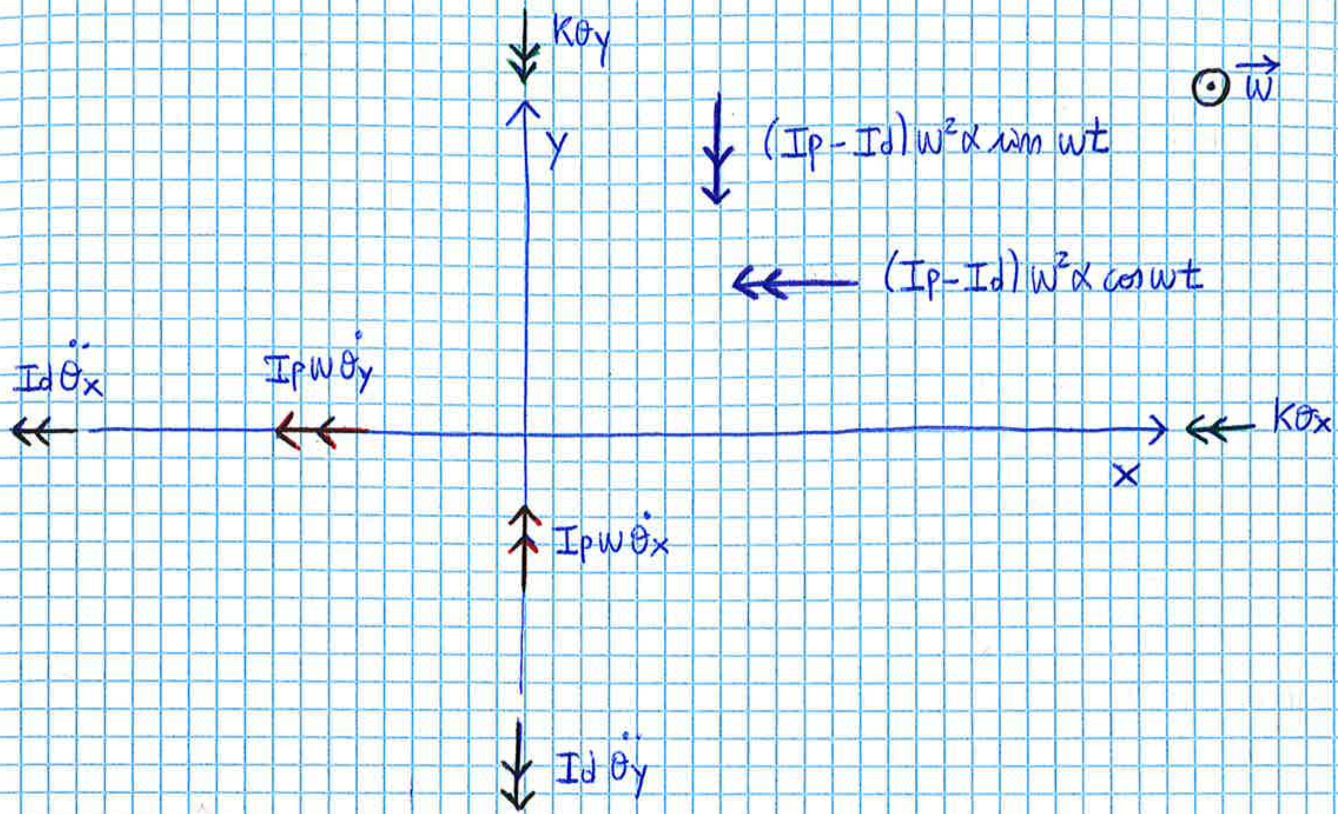
$$\boxed{\dot{\theta}_x \hat{i} + \dot{\theta}_y \hat{j}}$$

LE COPPIE

IL DCL DEL DISCO É RAPPRESENTABILE CONE:



© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 181 di 290



SCRIVENDO LE EQUAZ. DI EQUILIBRIO:

$$
\begin{cases}
I_d \ddot{\theta}_x + k\theta_x + I_p W \dot{\theta}_y + (I_p - I_d)\, W^2 \alpha \cos Wt = 0 & (1) \\
I_d \ddot{\theta}_y + k\theta_y - I_p W^2 \dot{\theta}_x + (I_p - I_d)\, W^2 \alpha \sin Wt = 0 & (2)
\end{cases}
$$

IN FORMA MATRICIALE, INOLTRE:

$$
\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_x \\ \ddot{\theta}_y \end{Bmatrix}
+ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I_p W \\ -I_p W & 0 \end{bmatrix}}_{\substack{\text{MATRICE} \\ \text{GIROSCOPICA} \\ \text{(ANTISIMMETRICA)}}}
\begin{Bmatrix} \dot{\theta}_x \\ \dot{\theta}_y \end{Bmatrix}
+ \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix}
= (I_d - I_p)\, W^2 \alpha \begin{Bmatrix} \cos Wt \\ \sin Wt \end{Bmatrix}
$$

QUESTO É UN SISTEMA NON NATURALE!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 183 di 290

$$\boxed{I_d \lambda^2 - I_p \omega \lambda - k = 0} \Rightarrow$$ EQUAZ. CARATTERISTICA

$$\Delta = (I_p \omega)^2 + 4kI_d > 0 \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

(SE AVESSI USATO s AVREI OTTENUTO UN IMMAGINARIO PURO $\Rightarrow$ POCO COMODO!)

$\lambda_{1,2}$, INOLTRE, SONO DISCORDI (PER CARTESIO).

$$\lambda_{1,2} = \frac{I_p\omega \pm \sqrt{(I_p\omega)^2 + 4kI_d}}{2I_d} \in \mathbb{R}$$ DUNQUE:

$$\theta(t) = \theta_{10}\, e^{i\lambda_1 t} + \theta_{20}\, e^{i\lambda_2 t} = \theta_x + i\,\theta_y$$

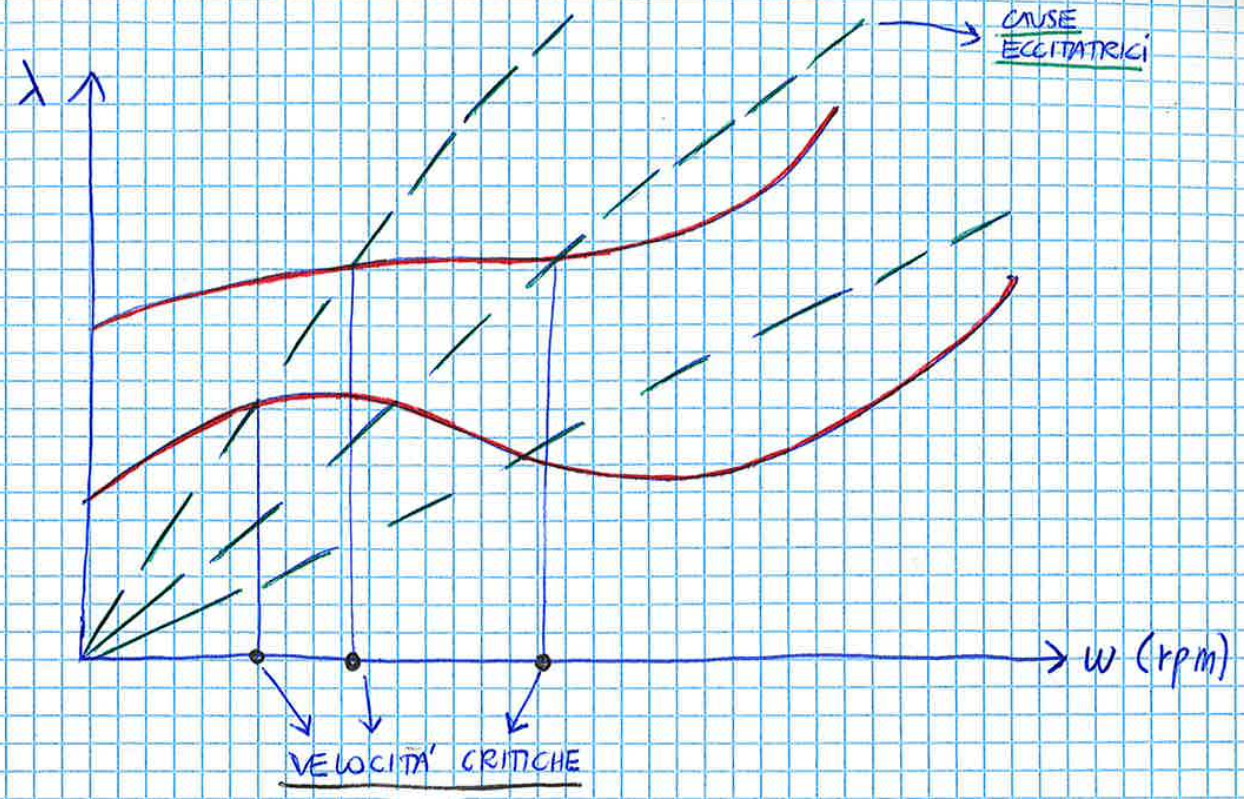
IL MOTO LIBERO ($\alpha = 0$) É, DUNQUE, UNA PRECESSIONE CONICA (DELL' ASSE DEL ROTORE)!

$$\boxed{\lambda_1 = \frac{I_p\omega + \sqrt{}}{2I_d} > 0} \Rightarrow$$ PRECESSIONE IN AVANTI (FORWARD)

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{I_p\omega - \sqrt{}}{2I_d} < 0} \Rightarrow$$ PRECESSIONE DISCORDE (BACKWARD)

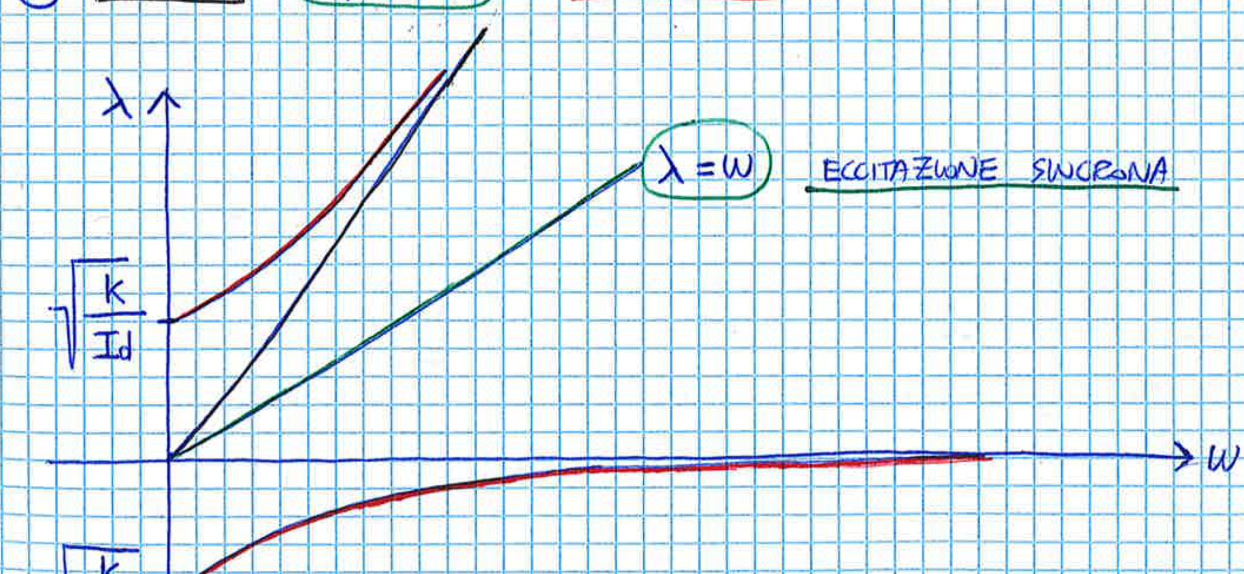
GLI ZERI DELL' EQUAZ. CARATTERISTICA λ_1 e λ_2 SONO FUNZIONI DI ω $\Rightarrow$ LE PULSAZ. PROPRIE DEL ROTORE DIPENDONO DALLA VELOCITA' ANGOLARE DEL ROTORE STESSO!

PER QUANTO RIGUARDA I DIAGRAMMI DI CAMPBELL:



PER IL ROTORE CON SQUILIBRIO DINAMICO, INVECE, DISTINGUIAMO 2 CASISTICHE:

① $\boxed{\text{CASO 1}}$ $I_p < I_d$ (DISCO SOTTILE)



NON CI SONO VELOCITA' CRITICHE POICHÉ NON CI SONO INTERSEZIONI TRA LE CURVE ROSSE E VERDE.

$$\bar{\theta} = \alpha \frac{\omega^2 (I_d - I_p)}{K - \omega^2 (I_d - I_p)}$$

SI OSSERVA, INOLTRE, CHE:

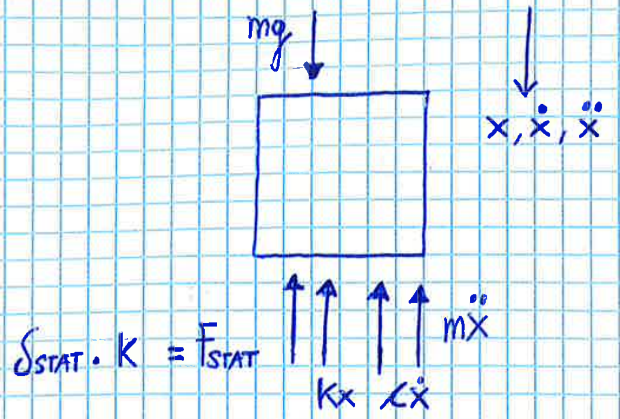
$$DEN = 0 \implies \omega = \sqrt{\frac{K}{I_d - I_p}}$$

QUANDO ω ASSUME QUEST'ULTIMO VALORE SI PARLA DI VELOCITA' CRITICA $\implies$ VELOCITA' ALLA QUALE SI SPACCA TUTTO!

$$\boxed{\omega_{CRITICA} = \omega_C = \sqrt{\frac{K}{I_d - I_p}}}$$

(OVVIAMENTE SE $I_d > I_p$)

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 189 di 290



$$mg = K \cdot \delta_{STAT}$$

IN QUESTO CASO, QUINDI:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx + \cancel{K\delta_{STAT}} - \cancel{mg} = 0 \Rightarrow$$

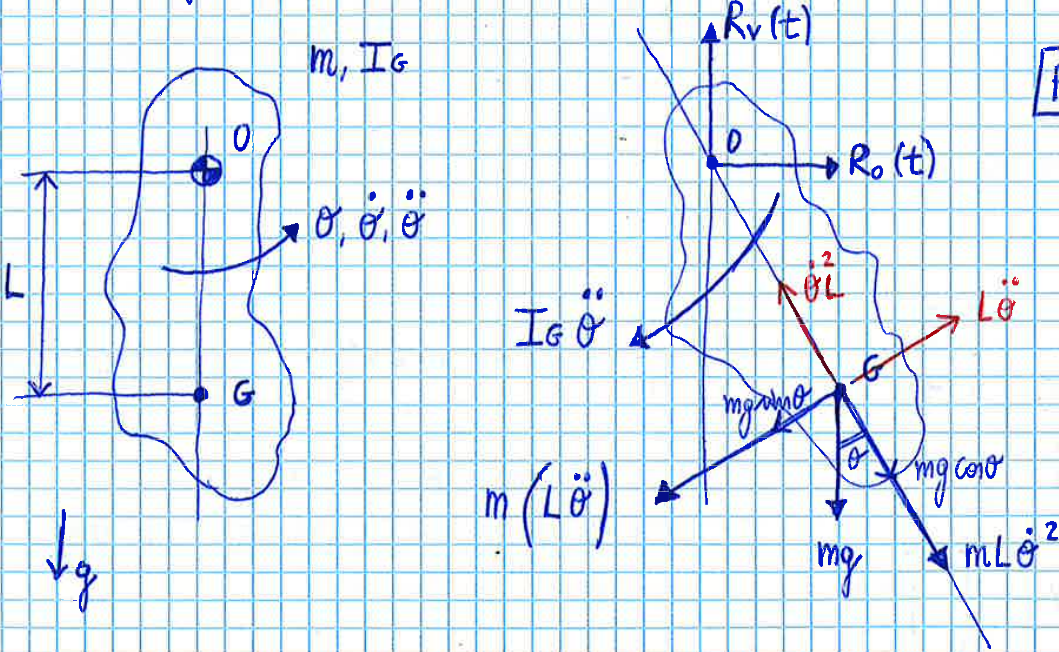
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx = 0$$

LE FORZE STATICHE SE SI TROVANO A SECONDO MEMBRO NON INFLUENZANO IL COMPORTAMENTO DINAMICO DEL SISTEMA!

TUTTAVIA, mg NON SEMPRE E' TRASCURABILE:

(2)

PENDOLO



POICHÉ LE REAZIONI VINCOLARI SONO INCOGNITE SCRIVO UN'EQUAZ. DI EQUILIBRIO DI MOMENTO:

$$I_G\ddot{\theta} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$(I_G + mL^2)\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$I_O\ddot{\theta} + mgL\sin\theta = 0$$

$$\ddot{y} \cong \dots$$

NEL CASO DEL PENDOLO:

$$\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta$$

I) CERCO ORA I PUNTI DI EQUILIBRIO:

$$0 = -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta_e \Rightarrow \theta_e = 0 \vee \theta_e = \pi$$

II) CALCOLO ORA LO SVILUPPO IN SERIE:

$$f(\theta, \dot{\theta}) = -\frac{mgL}{I_0} \sin\theta$$

SI SUPPONE DUNQUE DI AVERE DELLE OSCILLAZIONI MOLTO PICCOLE

TRONCANDO LO SVILUPPO AL PRIMO TERMINE:

$$f(\theta, \dot{\theta}) \cong 0 + \left(-\frac{mgL}{I_0}\cos\theta\right)_{eq} (\theta - \theta_{eq}) + 0 \cdot \dot{\theta}$$

DUNQUE:

$$\ddot{\theta} \cong \left(-\frac{mgL}{I_0}\cos\theta\right)_{eq} (\theta - \theta_{eq})$$

AVRÒ DUNQUE 2 EQUAZIONI:

a) $\boxed{\theta_{eq} = 0}$

$$\ddot{\theta} = \left(-\frac{mgL}{I_0}\right)\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgL}{I_0}\theta = 0$$

QUEST'ULTIMA E' VALIDA NELL'INTORNO IN CUI $\theta = 0$.

ORA, POSSO DEFINIRE ω_n:

$$\omega_n^2 = \frac{mgL}{I_0}$$

VEN 7 OTT

BATTIMENTO ⟹ SI OSSERVA QUANDO 2 ARMONICHE DI FREQUENZA SIMILE INTERAGISCONO TRA DI LORO, DANDO ORIGINE AD UN' ONDA RISULTANTE (CON LA STESSA FREQUENZA) MA AMPIEZZA NON COSTANTE.

(1) SISTEMA AD 1 GRADO DI LIBERTA' SENZA SMORZAMENTO

$$m\ddot{x} + kx = f_0 \cos \Omega t$$

$$x(t) = x_{GEN} + x_{PART} = A \cos \omega_N t + B \sin \omega_N t + \frac{f_0}{k - m\Omega^2} \cos \Omega t$$

$$X = \text{ampiezza} = \frac{f_0}{k - m\Omega^2 + \cancel{i\Omega c}}$$

$$\tan \varphi = - \frac{2\cancel{\xi} r}{1 - r^2} \qquad r = \frac{\Omega}{\omega_N}$$

POICHE' LO SMORZAM. E' ZERO:

$$X = \frac{f_0}{k - m\Omega^2}$$

$$\varphi = 0$$

IMPONGO ORA LE CONDIZ. INIZIALI:

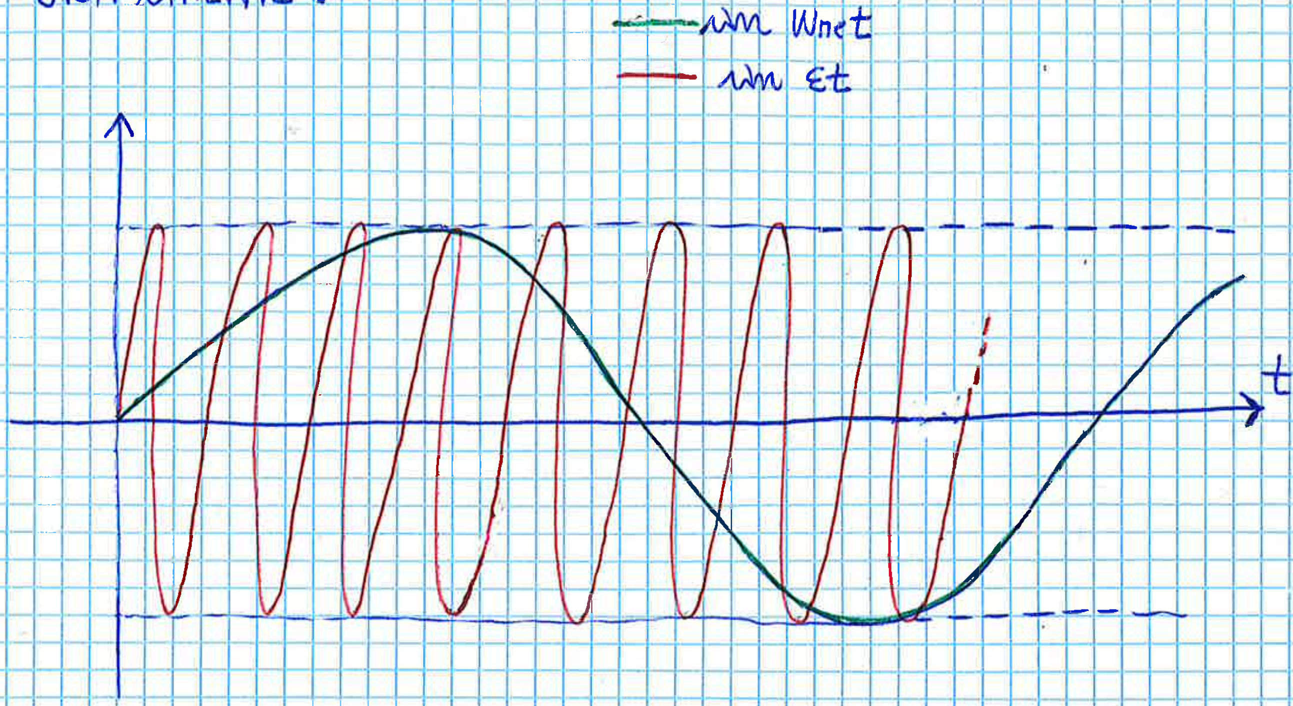
$$x(0) = x_0 = 0$$

$$\dot{x}(0) = v_0 = 0$$

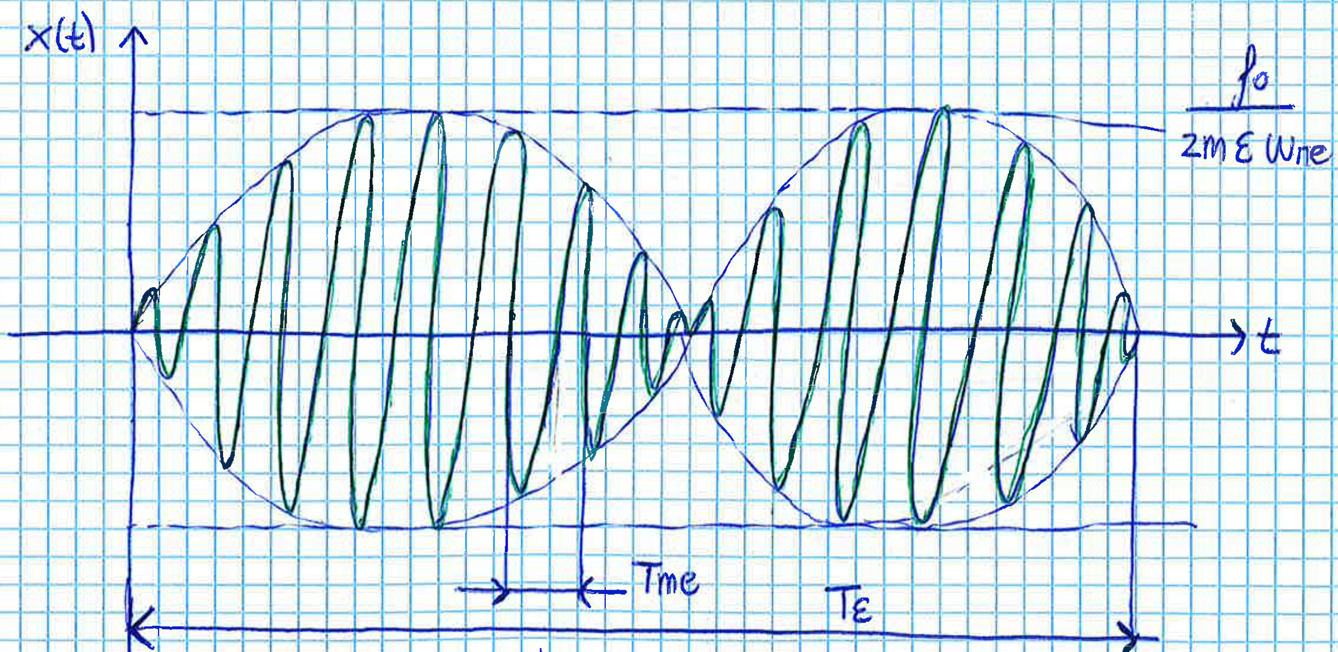
$$\begin{cases} A + \dfrac{f_0}{k - m\Omega^2} = 0 \\ \omega_N \cdot B = 0 \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{f_0}{k - m\Omega^2} \left(\cos \Omega t - \cos \omega_N t \right) \Longrightarrow$$

GRAFICAMENTE:



COMPLESSIVAMENTE, IL LORO PRODOTTO E':



$$x(t) = \frac{f_0 l m}{2\,\omega_{ne} \cdot \varepsilon}\,\sin \omega_{ne} t \cdot \sin \varepsilon t$$

TERMINE PORTANTE

TERMINE MODULANTE

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 197 di 290

$$x(t) = \frac{f_0/m}{\omega_N^2 - \Omega^2}\left(\cos\Omega t - \cos\omega_N t\right)$$

UTILIZZANDO LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL :

CHIARAMENTE DERIVO RISPETTO A Ω!

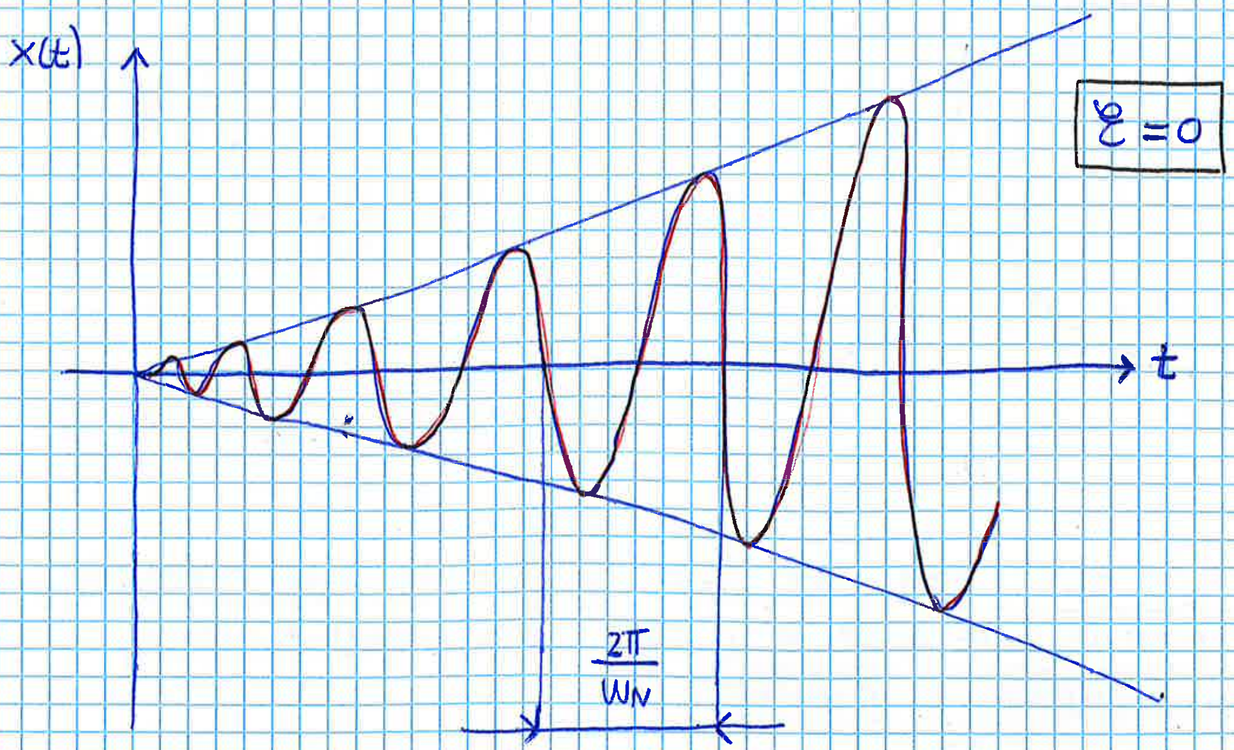
$$\lim_{\Omega \to \omega_N} \frac{f_0\left[-t \cdot \sin\Omega t\right]}{m\,(-2\Omega)}$$

$$= \frac{f_0}{2m}\, t\, \frac{\sin\omega_N t}{\omega_N} \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = \frac{f_0}{2m\,\omega_N}\, t \cdot \sin\omega_N t}$$

NEL CASO DI RISONANZA DI UN SISTEMA SDOF PRIVO DI SMORZAMENTO L'ANDAMENTO NEL TEMPO E' QUESTO!

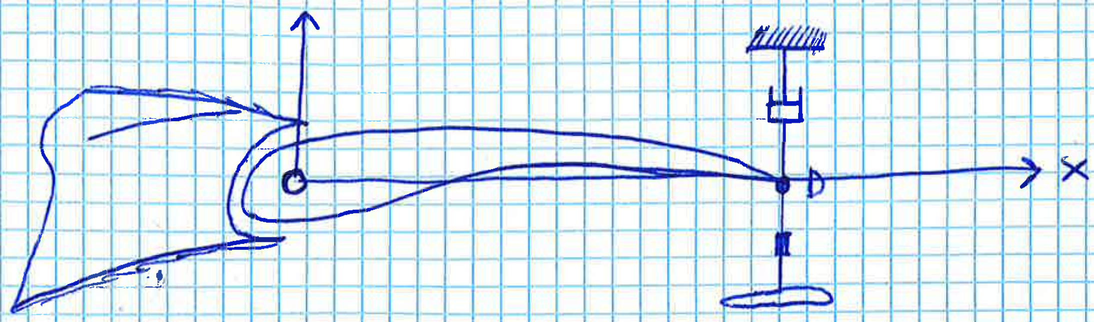
GRAFICAMENTE :



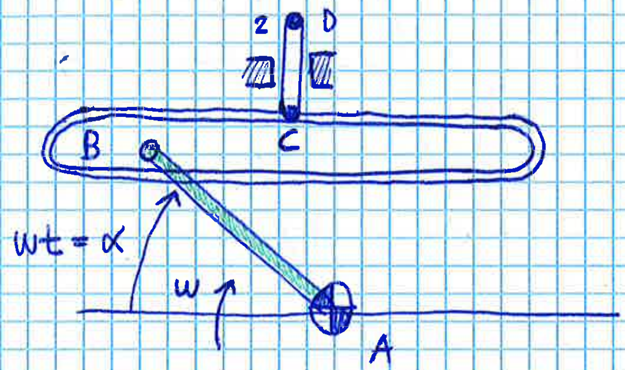
© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 199 di 290

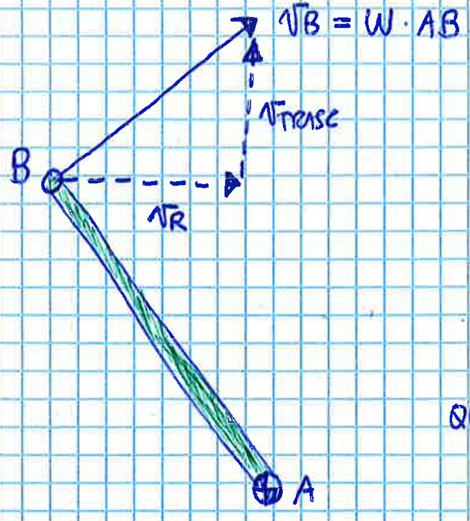
VEN 14 OTT

es. 7 PROVA DINAMICA SU UN ALETTONE



LE FORZE AERODINAMICHE TENDERANNO A SOLLEVARE L'ALETTONE. NOI, ATTRAVERSO COMANDI IDRAULICI, PUNTEREMO A MANTENERE L'ALETTONE NELLA SUA POSIZIONE.



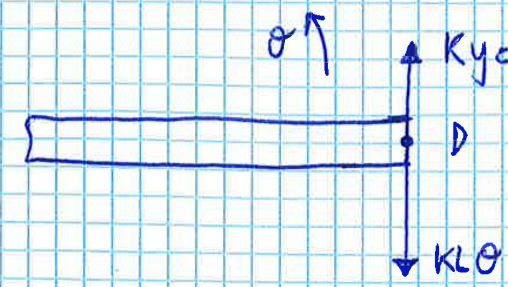


LEGGE ARMONICA

$$y_C = AB \cdot \sin(\omega t) = AB \cdot \sin(\Omega t)$$

QUI CONOSCIAMO LO SPOSTAMENTO e NON LA FORZA!

L'AST CD HA UNA RIGIDEZZA k $\Rightarrow$ IL PUNTO C ed IL PUNTO D NON SI SPOSTANO DELLA STESSA QUANTITA'!



$Ky_c \Rightarrow$ SE CI FOSSE SOLO C (SI SPOSTA SOLO D ↑)

⇓

IN SEGNO OPPOSTO!

$KL\theta \Rightarrow$ SE CI FOSSE SOLO D (SI SPOSTA SOLO C ↑)

SCRIVO ORA L'EQUAZ. (DI MOMENTO) DEL MOTO:

$$\circlearrowright O) \quad I_G\ddot{\theta} + m\overline{OG}^2\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + K_T\theta + K(L\theta - y_c)L = 0$$

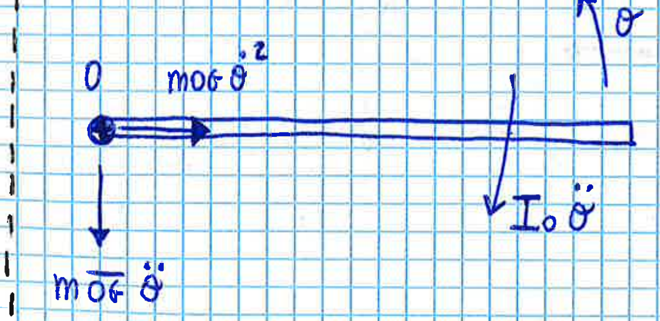
$$\underbrace{(I_G + m\overline{OG}^2)}_{I_O}\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + \underbrace{(K_T + KL^2)}_{K_{eq}}\theta = KLy_c \Rightarrow$$

$$I_O\ddot{\theta} + cL^2\dot{\theta} + K_{eq}\theta = KL\overline{AB}\sin\Omega t$$

K_T? ω_n? ω_{ris}? φ? $\varepsilon = 0{,}6$

NOI SAPPIAMO CHE A REGIME: $\theta_{max} = 5°$ (IN RISONANZA)

RESTA DA CALCOLARE LA POSIZ. DI G e I_G, OPPURE DIRETTAM. I_O:



SE VOGLIO SCRIVERE L'EQUAZ. CON I_O E NON CON I_G DEVO RICORDARMI CHE LE FORZE DI INERZIA SARANNO APPLICATE IN O E NON IN G!

$$\theta_{max} = \frac{(K L \overline{AB}) / K_{eq}}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2 - 8\xi^4}} \Rightarrow$$

$$\theta_{max} = \frac{(K L \overline{AB}) / K_{eq}}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \Rightarrow K_{eq} = 117\,100 \ \frac{Nm}{rad}$$

ESSENDO: $K_{eq} = K_T + KL^2 \Rightarrow \boxed{K_T = 19\,000 \ \frac{Nm}{rad} = 332 \ \frac{Nm}{GRADO}}$

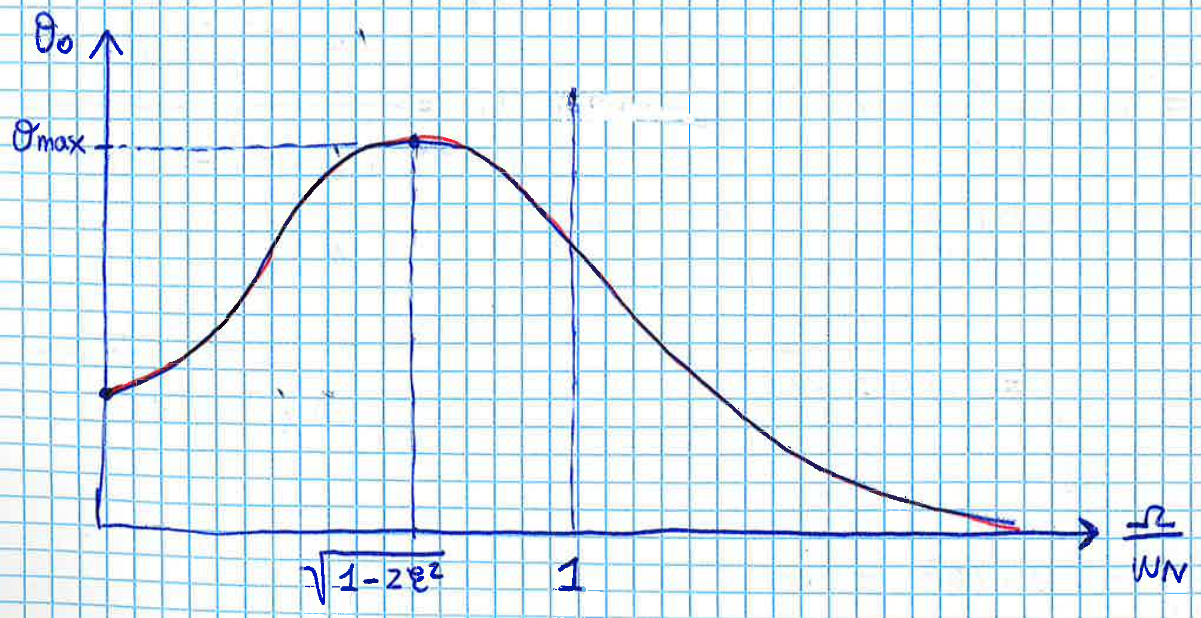
APPLICO 32 kg SU UN BRACCIO DI 1m PER AVERE UNO SPOSTAM. DI 1°

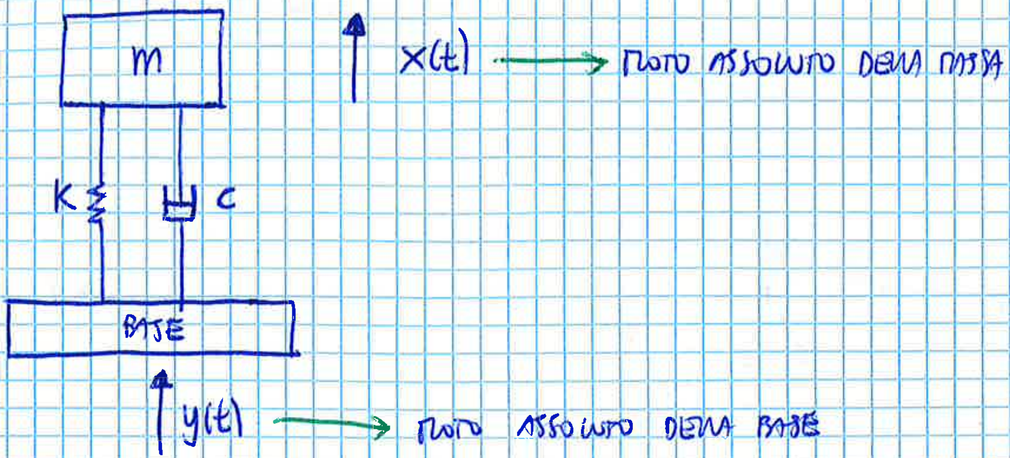
ORA:

$$\omega_N = \sqrt{\frac{K_{eq}}{I_0}} = 335 \ rad/s$$

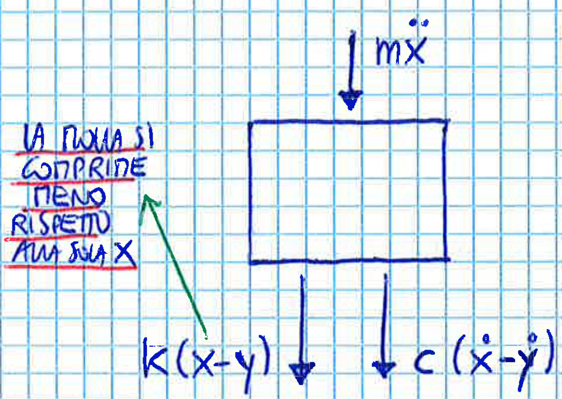
$$\boxed{\omega_{RIS} = 177 \ rad/s}$$

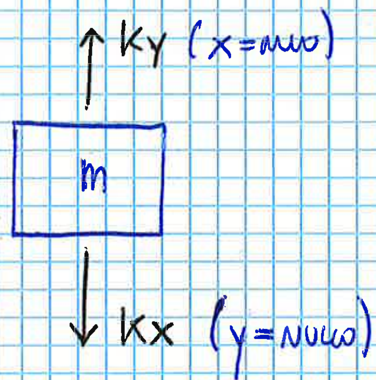
GRAFICAMENTE:



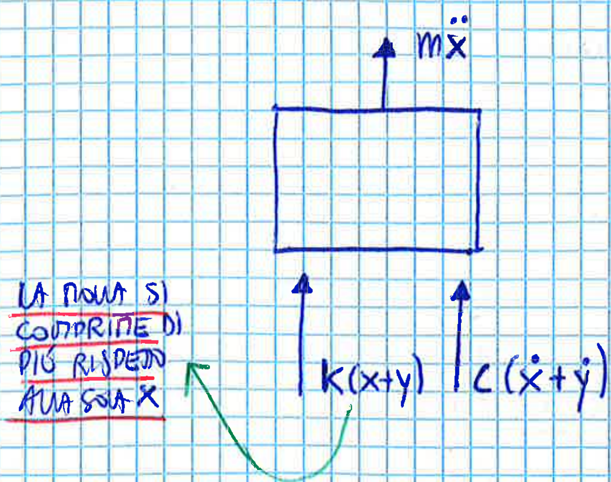


SCRIVO L'EQUAZ. DEL MOTO DAL D.C.L. :

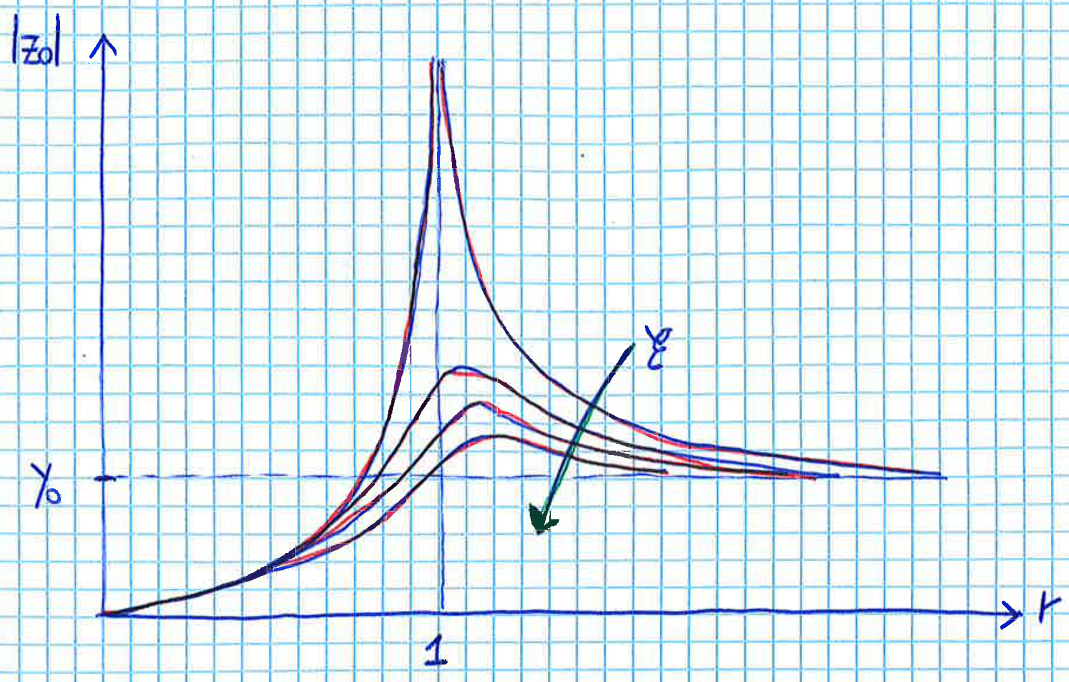




SE AVESSI SCELTO X VERSO IL BASSO :



CHIARAMENTE ENTRAMBI I D.C.L. SONO CORRETTI!



SE $\boxed{r \ll 1 \quad E \quad \xi \cong 0}$, ALLORA:

$$|z_0| \cong Y_0 r^2 = Y_0 \frac{\Omega^2}{\omega_N^2} = \frac{1}{\omega_N^2} Y_0 \Omega^2 \qquad \text{MA:}$$

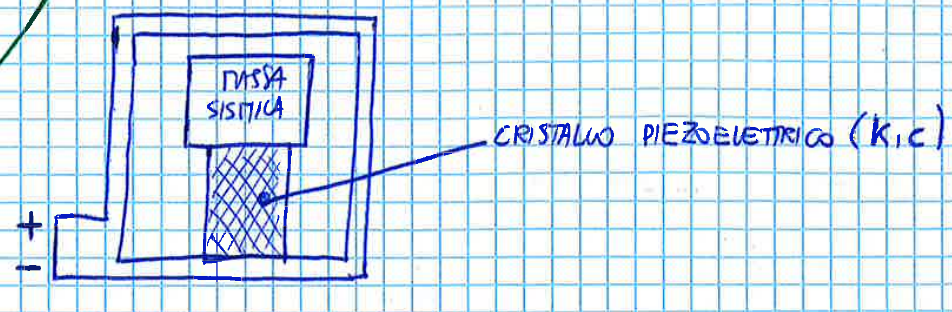
$Y_0 \Omega^2$ E' L'ACCELERAZ. DELLA BASE!

$$|z_0| \cong \frac{1}{\omega_N^2} \cdot \text{ACCELERAZ. BASE} \qquad \left(\text{TUTTO QUESTO CON } r \ll 1 \text{ e } \xi \cong 0\right)$$

$\downarrow$ $\boxed{\text{MOTO RELATIVO} \propto \text{ACCELERAZ. BASE}}$ $\qquad (\varphi \cong 0)$

QUESTO E' IL FUNZIONAMENTO DELL'ACCELEROMETRO! DENTRO QUESTO C'E' UNA MASSA MINUSCOLA, DETTA "MASSA SISMICA":

$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$



INOLTRE, SE $\Omega \ll \omega_N$:

$$\varphi \cong -\pi$$

DUNQUE:

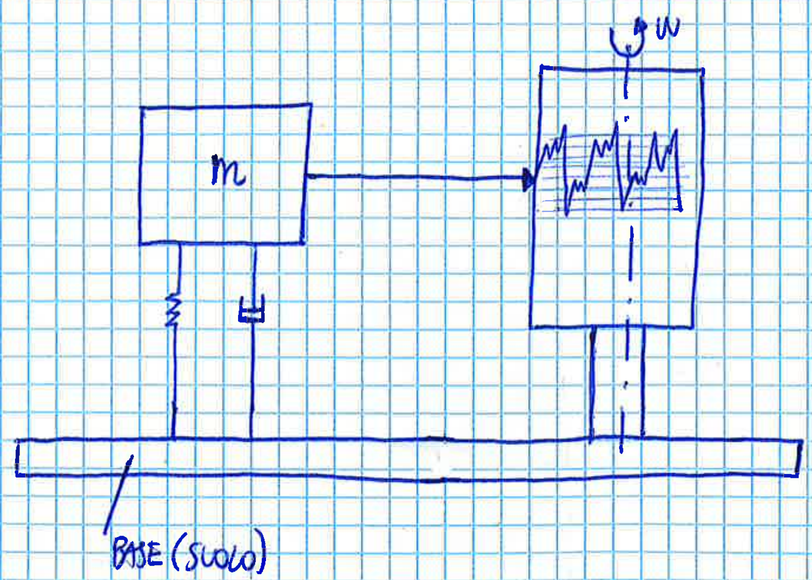
$$x(t) = z + y = y_0 \sin \Omega t + |z_0| \sin(\Omega t + \varphi) \cong$$

$$= y_0 \sin \Omega t + y_0 \sin(\Omega t - \pi) \Rightarrow$$

$$= y_0 \sin \Omega t - y_0 \sin \Omega t = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{x(t) \cong 0}$ $\Rightarrow$ MENTRE LA BASE VA SU E GIÙ LA MASSETTA E' FERMA!

QUESTO STRUMENTO RAPPRESENTA UN SISMOGRAFO:



LA MASSA DEL SISMOGRAFO, CHIARAMENTE, DEVE ESSERE MOLTO GRANDE!

$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}}$ DEVE ESSERE PICCOLA!

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\alpha = \Omega\tau \qquad \beta = \omega_N(t-\tau)$$

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_N}\int_0^t \cos\left(\Omega\tau - \omega_N t + \omega_N\tau\right) - \cos\left(\Omega\tau + \omega_N t - \omega_N\tau\right)\, d\tau$$

ESSANDO $\Omega = \omega_N$:

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_N}\int_0^t \cos\left(\omega_N\tau - \omega_N t + \omega_N\tau\right) - \cos(\omega_N t)\, d\tau \Rightarrow$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_N}\int_0^t \cos\left(2\omega_N\tau - \omega_N t\right) - \cos\left(\omega_N t\right)\, d\tau \Rightarrow$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_N}\left[\frac{\sin(2\omega_N\tau - \omega_N t)}{2\omega_N} - \cos(\omega_N t)\,\tau\right]_0^t \Rightarrow$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_N}\left[\frac{\sin(2\omega_N t - \omega_N t) - \sin(0 - \omega_N t)}{2\omega_N} - t\cos(\omega_N t)\right]$$

$$= \frac{f_0}{2m\omega_N}\left[-t\cos(\omega_N t) + \frac{\sin(\omega_N t) + \sin(\omega_N t)}{2\omega_N}\right]$$

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega_N}\left[-t\cos(\omega_N t) + \frac{\sin(\omega_N t)}{\omega_N}\right]$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 213 di 290

$$\lim_{\Omega \to \omega_N} x(t) = f_0 \cdot \lim_{\Omega \to \omega_N} \frac{\partial(\text{NUMERAT.}) / \partial \Omega}{\partial(\text{DENOMIN.}) / \partial \Omega} \Rightarrow$$

$$= f_0 \lim_{\Omega \to \omega_N} \frac{t \cos \Omega t - \dfrac{\sin \omega_N t}{\omega_N}}{-2 m \Omega} \Rightarrow$$

$$= \frac{f_0}{2 m \omega_N} \left(- t \cos \omega_N t + \frac{1}{\omega_N} \sin \omega_N t \right)$$

STESSO RISULTATO DI PRIMA (CON L'INTEGRALE DI CONVOLUZIONE)

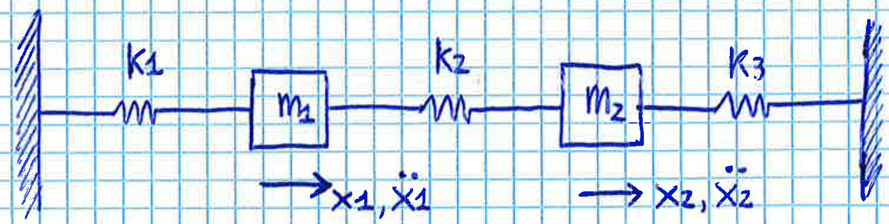
VEN 28 OTT

MDOF CON 2 DOF

$m_1 = 5\ kg$ $\quad k_1 = 2\ N/m$ $\quad k_3 = 4\ N/m$

$m_2 = 10\ kg$ $\quad k_2 = 2\ N/m$

1



- eq moto
- ω_N sistema
- $[\Psi]$
- RISPOSTA LIBERA SISTEMA CON CONDIZ. INIZ. I e II

SI CONSIDERANO COME 2 DOF GLI SPOSTAM. ASSOLUTI DELLE 2 MASSE.

LE EQUAZ. DEL MOTO SONO:

$$\leftarrow \quad m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = 0 \qquad (\text{massa } 1)$$

$$\leftarrow \quad m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \qquad (\text{massa } 2)$$

"TRASFERENDO" LE EQUAZ. IN FORMA MATRICIALE:

AUTOVETTORI
$$\begin{cases} \boxed{\omega_2^2 = 1 \ (rad/s)^2} \\ \boxed{\omega_1^2 = \frac{2}{5} \ (rad/s)^2} \end{cases}$$

(SI RICORDA CHE GLI ω^2 SI ORDINANO IN MODO CRESCENTE!)

SE 1 O 2 PULSAZIONI^2 VENGONO NEGATIVE $\Rightarrow$ ERRORE!

PER CALCOLARE GLI AUTOVETTORI:

$$[k]\{A\} = \omega^2[m]\{A\} \Rightarrow ([k] - \omega^2[m])\{A\} = \{0\} \Rightarrow$$

(I) $$([k] - \omega_1^2[m])\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 4 - 5 \cdot \frac{2}{5} & -2 \\ -2 & 6 - 10 \cdot \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2A_1 - 2A_2 = 0 \\ -2A_1 + 2A_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A_1 = A_2 \\ A_1 = A_2 \end{cases}$$ $\Rightarrow$ QUESTO CI STA PERCHÉ ABBIAMO IMPOSTO $\det(\ ) = 0$!

L'AUTOVETTORE $\{\Psi_1\}$ CONTERRA' A_1 e A_2:

$$\{\Psi_1\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 217 di 290

$$[\Psi]^T [m] [\Psi] = \mathrm{diag}(m_r)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\overline{m}_r)$$

IN QUESTO CASO PARTICOLARE

$[\Psi]^T \equiv [\Psi]$ POICHÉ $[\Psi]$ E' SIMMETRICA!

CALCOLANDO:

$$\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\overline{m}_r) \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} \end{bmatrix} = \mathrm{diag}(\overline{m}_r)$$

LE MASSE MODALI VALGONO PERTANTO: $\begin{cases} \overline{m}_1 = 15 \quad (Kg) \\ \overline{m}_2 = 15/2 \quad (Kg) \end{cases}$ UNITA' DI MISURA FITTIZIE

LE UNITA' DI MISURA DI QUESTE MASSE NON SI METTONO POICHÉ NEGLI SPOSTAMENTI GENERICI DI $[\Psi]$ NON INDICO L'UNITA' DI MISURA:

$$[\text{spostam}][\text{massa}][\text{spostam}] \Longrightarrow \mathrm{diag}(m_r)$$

NOI LE USCEREMO ADIMENSIONATE!

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 219 di 290

PER TROVARE a e b, INOLTRE, DEVO CONOSCERE:

$$\left.\begin{aligned} \eta_r(0) &= \eta_{r0} \\ \dot{\eta}_r(0) &= \dot{\eta}_{r0} \end{aligned}\right\} ? \Rightarrow \text{QUESTE NON LE CONOSCO!} \Rightarrow \text{MA CONOSCO } x_0 \text{ e } \dot{x}_0!$$

RICORRENDO ALLA TRASFORMAZ. MODALE INVERSA:

$$\{x\} = [\psi]\{\eta\} \Rightarrow \{\eta\} = [\psi]^{-1}\{x\}$$

INVERTO QUINDI $[\psi]$:

$$[\psi] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$[\psi]^{-1} = \frac{1}{\det\psi}\begin{bmatrix} -1/2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

CALCOLO ORA LE CONDIZ. INIZIALI SULLE COORD. MODALI:

$$\{\eta_0\} = [\psi]^{-1}\{x_0\} = [\psi]^{-1}\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\dot{\eta}_0\} = [\psi]^{-1}\{\dot{x}_0\} = \frac{2}{3}\begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

SI VEDE QUINDI CHE LA 2° MASSA MODALE "DORME", OVVERO NON FA NULLA! IN GENERALE, PER I 2 MODI:

$$\eta_1(0) = \eta_{10} = 0 \qquad \eta_2(0) = \eta_{20} = 0$$

$$\dot{\eta}_1(0) = \dot{\eta}_{10} = 2 \qquad \dot{\eta}_2(0) = \dot{\eta}_{20} = 0$$

$$\boxed{\left\{ X \right\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{10} \sin \sqrt{\frac{2}{5}}\, t \\ \sqrt{10} \sin \sqrt{\frac{2}{5}}\, t \end{Bmatrix}} \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ rad/s}$$

IN QUESTO CASO PARTICOLARE LE CONDIZ. INIZIALI SONO TALI DA ESSERE PROPORZIONALI TRA DI LORO $\Rightarrow$ MI BASTA 1 SOLO MODO!

POICHÉ IL 1° MODO DESCRIVE PERFETTAM. LO SPOSTAM. E LE VELOCITÀ DELLE 2 MASSE, IL 2° MODO NON SERVE, NON DÀ NESSUN CONTRIBUTO!

$\boxed{\text{SE LE CONDIZ. INIZIALI RISPETTANO 1 FORMA MODALE} \Rightarrow \text{TUTTE LE ALTRE È COME SE NON CI FOSSERO!}}$

$$\left\{ x_0 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \left\{ \dot{x}_0 \right\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix} \qquad \left\{ \psi_1 \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \; !$$

VEDIAMO ORA UN 2° SETUP DI CONDIZ. INIZIALI:

II

$$\left\{ x_0 \right\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \dot{x}_0 \right\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

UTILIZZERÒ QUI LA STRADA ALTERNATIVA ALL'INVERSIONE DELLA MATRICE MODALE:

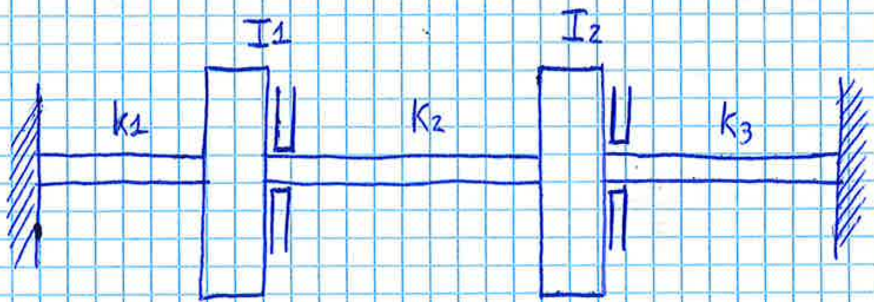
POICHÉ LO SFORZAMENTO È NULLO, LA RISPOSTA SARÀ:

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 223 di 290

$$\boxed{\{x(t)\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right) + \frac{2}{3}\cos(t) \\ \frac{1}{3}\cos\left(\sqrt{\frac{2}{5}}t\right) - \frac{1}{3}\cos(t) \end{Bmatrix}}$$

VEN 4 NOV

4 OSCILLAZIONI TORSIONALI DI ALBERI ELASTICI



- EQUAZ. MOTO
- $k_1 = k_2 = k_3$ e $I_2 = 2I_1$

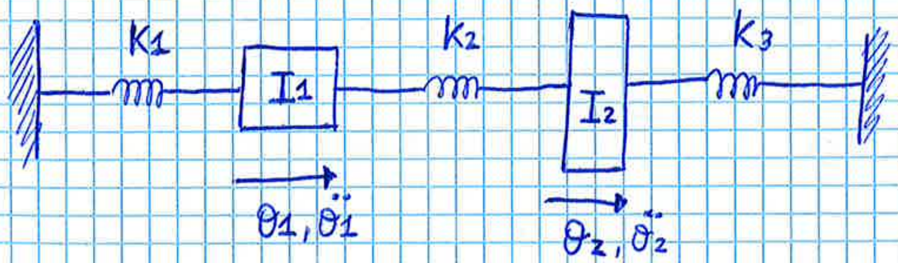
↓

AUTOVALORI + $[\Psi]$

- ω_1, ω_2 CON DATI
- FREQ. ANTIRISONANZA

ROTAZ. ASSOLUTE DEI 2 VOLANI

SCHEMATICAMENTE:

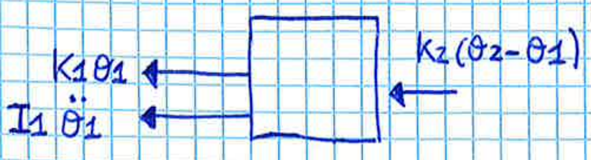


$$[k] = \frac{\text{MOMENTO}}{\text{ROTAZIONE}}$$

↓

$$[k] = \frac{N \cdot m}{rad}$$

TRACCIO IL DCL, ISOLANDO IL 1° VOLANO:



$$\det\left(\begin{bmatrix} 2k_T - \omega^2 I & -k_T \\ -k_T & 2k_T - 2\omega^2 I \end{bmatrix}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$2I^2\omega^4 - 6k_T I\omega^2 + 3k_T^2 = 0 \Rightarrow \omega^2_{1,2} \quad \boxed{\omega_1^2 = \frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{k_T}{I}} \quad \boxed{\omega_2^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2}\frac{k_T}{I}}$$

(SI RICORDA CHE: $0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2$)

VERIFICO LE UNITA' DI MISURA DI ω^2:

$$[\omega^2] = \left[\frac{N\cdot m}{rad}\cdot\frac{1}{kg\cdot m^2}\right] = \left[\frac{\cancel{kg}\cdot\frac{\cancel{m}}{s^2}\cdot\cancel{m}}{rad}\;\frac{1}{\cancel{kg}\cdot\cancel{m^2}}\right] = \left[\frac{1}{T^2}\right]$$

DETERMINO L'AUTOVETTORE ASSOCIATO A ω_1^2:

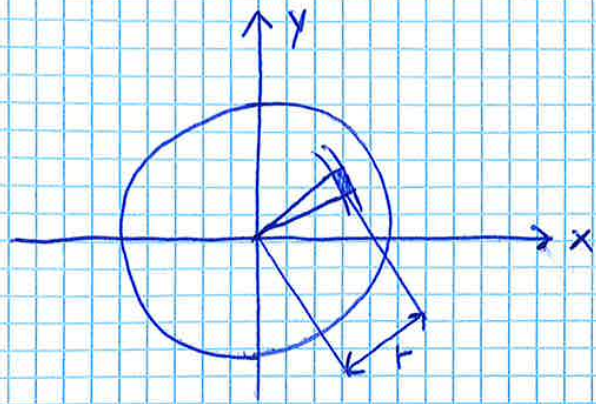
$$\begin{bmatrix} 2k_T - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{k_T}{I}\cdot I & -k_T \\ -k_T & 2k_T - \frac{3-\sqrt{3}}{2}\frac{k_T}{I}\cdot 2I \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{21}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix}$$

ESSENDO LE 2 EQUAZ. LINEARM. DIPEND. NE CALCOLO SOLO UNA:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\psi_{11} = \psi_{21} \Rightarrow \boxed{\{\psi_1\} = \begin{Bmatrix}1\\1{,}37\end{Bmatrix}}$$

L'AUTOVETTORE ASSOCIATO A ω_2^2 E':

$$\begin{bmatrix} 2k_T - \frac{3+\sqrt{3}}{2}\frac{k_T}{I}\cdot I & -k_T \\ // & // \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_{12}\\ \psi_{22}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \Rightarrow$$



$$I_p = \int_A r^2 \, dA \quad \text{definiz.}$$

$$I_p = \int_0^{2\pi} \int_{r_I}^{r_E} r^2 \, r d\theta \, dr = 2\pi \frac{R_E^4 - R_I^4}{4} \Rightarrow$$

$$I_p = \frac{\pi}{2} \left(R_E^4 - R_I^4 \right) = \frac{\pi}{32} \left(D_E^4 - D_I^4 \right)$$

NEL NOSTRO CASO: $I_p = \frac{\pi}{32} d^4 = 9{,}82 \cdot 10^{-10} \, m^4$

PERTANTO:

$$K_T = \frac{G I_p}{L} = 87{,}27 \frac{N \cdot m}{rad}$$

SI CALCOLA QUINDI CHE:

$\boxed{W_1 = 1{,}17 \ rad/s}$ $\boxed{W_2 = 2{,}26 \ rad/s}$

SUPPONENDO CHE SUL DISCO 1 SIA APPLICATA UNA FORZANTE CHE AGISCE COME COPPIA ARMONICA CALCOLO LA FREQ. DI ANTIRISONANZA:

$$\left([K] - \Omega^2 [m]\right) = \begin{bmatrix} 2k_T - \Omega^2 I & -k_T \\ -k_T & 2k_T - 2\Omega^2 I \end{bmatrix}$$

L'ANTIRISONANZA E' ASSOCIATA AD UN'AMPIEZZA DI OSCILLAZ. NULLA DELLO STESSO DOF A CUI E' APPLICATA LA FORZANTE (IN CASO DI SMORZAM. NULLO).

$$\begin{bmatrix} 2k_T - \Omega^2 I & -k_T \\ -k_T & 2k_T - 2\Omega^2 I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{10} \\ \theta_{20} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_{10} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

SI PUÒ RISOLVERE PER:

1) PER SOSTITUZIONE
2) CON CRAMER, OVVERO:

$$\theta_{10} = \frac{\det \begin{bmatrix} C_{10} & -k_T \\ 0 & 2k_T - 2\Omega^2 I \end{bmatrix}}{\det [K_{DIN}]}$$

$$\theta_{20} = \frac{\det \begin{bmatrix} 2k_T - \Omega^2 I & C_{10} \\ -k_T & 0 \end{bmatrix}}{\det [K_{DIN}]}$$

$$\theta_{10} = \frac{2 C_{10} (k_T - I \Omega^2)}{\det [K_{DIN}]} \qquad \theta_{20} = \frac{C_{10}\, k_T}{\det [K_{DIN}]}$$

DETERMINO ORA LE 2 CONDIZ. INIZ. :

$$\{\theta(0)\} = \{\theta_0\} = \begin{Bmatrix}0\\0\end{Bmatrix} \longrightarrow$$ LO POSSO IMPORRE IO PER SEMPLICITA'

$$\{\dot{\theta}(0)\} = \{\dot{\theta}_0\} = \begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix}\dot{\theta}_0$$

IN COORD. MODALI :

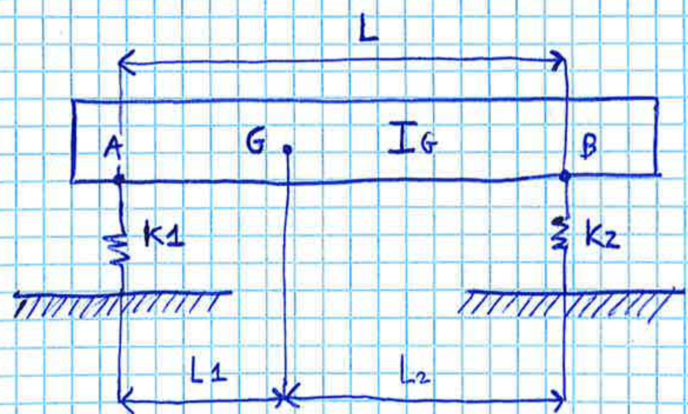
$$\eta_r(t) = (A_r \cos \omega_r t + B_r \sin \omega_r t) \qquad (\xi_r = 0)$$

$$A_r = \{\psi_r\}^T [m] \{\theta_0\} / m_r \qquad r = 1,2$$

$$B_r = \frac{\{\psi_r\}^T [m] \{\dot{\theta}_0\}}{m_r \omega_r}$$

...

VEN 11 NOV



- EQUAZ. DI EQUIL. < y_A, θ / y_G, θ
- DATI NUMERICI ⇒ ω_N
- RISPOSTA LIBERA
- ξ_1, ξ_2 ⇒ SMORZAM. PROPORZ.

SE AVESSI SCELTO COME POLO IL PUNTO G:

$$G \circlearrowright \quad I_G\ddot{\theta} + k_2(y_A + L\theta)L_2 - k_1 y_A L_1 = 0$$

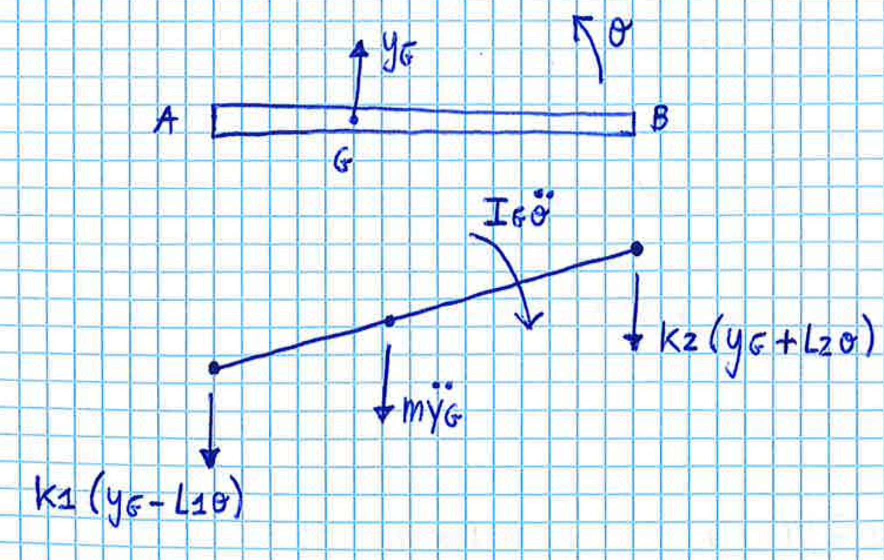
LA MATRICE DI MASSE E RIGIDEZZE SAREBBERO STATE:

$$\begin{bmatrix} m & mL_1 \\ 0 & I_G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_A \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 L \\ k_2 L_2 - k_1 L_1 & k_2 L L_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_A \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

NON ABBIAMO OTTENUTO [m] e [k] SIMMETRICHE!

PER FAR SÍ CHE [m] e [k] SIANO SIMMETRICHE, CON 2 DOF DOVRÓ SCRIVERE L'EQUAZ. DI EQUIL. AI MOMENTI NEL PUNTO DOVE HO DEFINITO LO SPOSTAMENTO!

NELLA SECONDA CONFIGURAZ. DI COORDINATE:



DUNQUE:

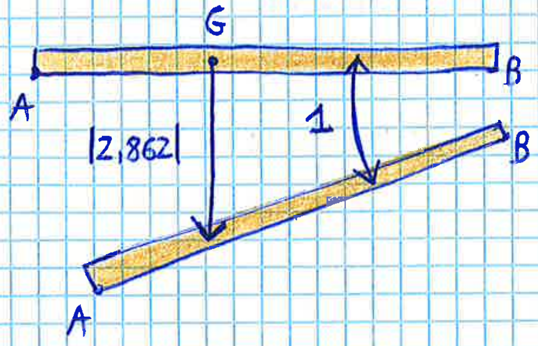
$$\downarrow \quad m\ddot{y}_G + (k_1 + k_2)y_G + (k_2 L_2 - k_1 L_1)\theta = 0$$

$$G \circlearrowright \quad I_G\ddot{\theta} + k_2 L_2 (y_G + L_2\theta) - k_1 L_1 (y_G - L_1\theta) = 0$$

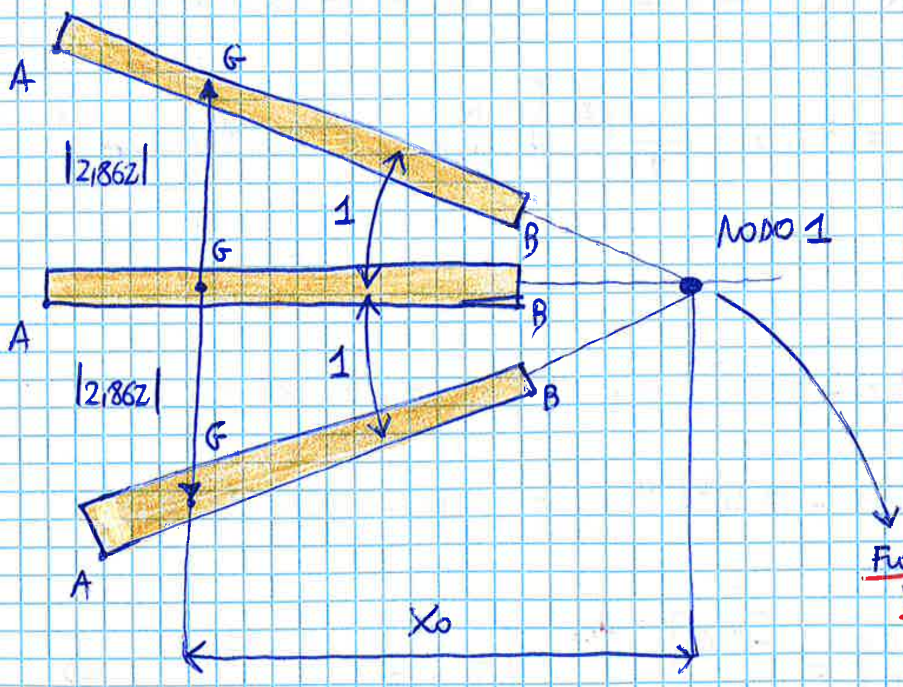
NEL MOTO DELL'AUTOMOBILE C'É UNA ROTOTRASLAZIONE ⇒
LA TRASLAZ. NON E' INDIPENDENTE DALLA ROTAZIONE!

PER QUANTO RIGUARDA I PUNTI NODALI, QUINDI:

$\{\Psi_1\}$



POICHÉ: $\{\Psi_1\} = \begin{Bmatrix} -2{,}862 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2{,}862 \\ -1 \end{Bmatrix}$



FUORI DALLA VETTURA!

$x_0 \tan\theta = y_G$ ESSENDO $\theta \ll 1 \Rightarrow x_0 = \dfrac{y_G}{\theta} = \boxed{2{,}862\ m}$

NODO 1