NUMERO: 2225A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Trabace Maria

MATERIA: Analisi 2 (Teoria +Esercizi) - Prof. Lancelotti

RICHIAMI DI TOPOLOGIA di $\mathbb{R}^n$

LEZIONE _ 1

Premessa fondamentale

- A, B insiemi non vuoti;
- Con la scrittura " $f: A \mapsto B$ " intendiamo una funzione di nome f che associa ad ogni elemento di A uno e un solo elemento di B.

  A : " DOMINIO di f "

  B : " CODOMINIO di f "
- Talvolta il Dominio è indicato con dom(f). In tal caso $dom(f) = A$

ES: $f: [a;b] \longmapsto \mathbb{R}$ significa che $dom(f) = [a;b]$ e che f è continua in $[a;b]$

n n-uple!

- - - - - -

Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$; $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots x_n)}_{n\text{-uple ordinate}}, \ x_1 x_2, x_{\ldots} x_n \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^{n \times n}$

Se $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è detto N-UPLA oppure VETTORE oppure PUNTO di $\mathbb{R}^n$

COMPONENTI del VETTORE

caso particolare: $0_{\mathbb{R}^n} = 0 = (0, 0, \ldots, 0)$ "ZERO di $\mathbb{R}^n$"

- In $\mathbb{R}^n$ è definita una Somma tra vettori nel seguente modo:

  Se: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$;

  $x + y = (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$
- In $\mathbb{R}^n$ è anche definito un PRODOTTO come segue:

  Se: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$;

  $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$

Ricordiamo che: $x - y = x + (-1)y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$

Quindi $\mathbb{R}^n$ è uno SPAZIO VETTORIALE di $\mathbb{R}$ di dimensione n.

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ e_i = (0, 0, \underset{i-1}{}\ \underset{i}{1}, \ldots, 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, \ldots, 1) \end{array}\right\}$$

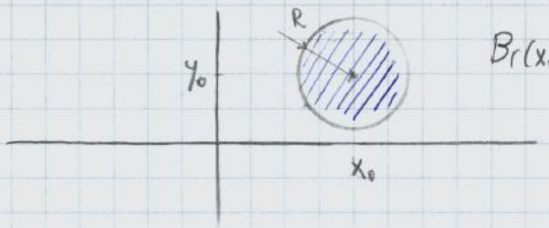
L'insieme $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ è la BASE CANONICA di $\mathbb{R}^n$

Ogni n-upla si ottiene per combinazione lineare con la base canonica

Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, allora:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1, 0, 0, \ldots 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n) = x_1 \underbrace{(1, 0, 0, \ldots 0)}_{e_1} + x_2 \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)}_{e_2} + \ldots + x_n \underbrace{(0, 0, \ldots, 1)}_{e_n} =$$

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

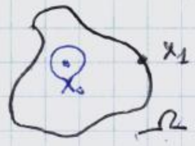


$B_r(x_0, y_0)$ (aperto → solo punti interni
chiuso → tutto il cerchio)

Def: Sia $\Omega \in \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$;
Diciamo che x_0 è un punto interno a Ω se

$$\boxed{\exists r > 0 \text{ tale che } B_r(x_0) \subseteq \Omega}$$

Chiaramente ciò implica che $x_0 \in \Omega$
L'insieme dei punti interni di Ω è detta parte interna di Ω
e si denota con $\text{int}(\Omega)$.
Risulta che $\text{int}(\Omega) \subseteq \Omega$

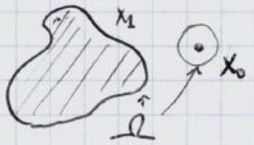


- x_0 è interno ad Ω;
- x_1 non è interno ad Ω;

Def. Diciamo che x_0 è ISOLATO per Ω se

$$\boxed{\exists r > 0 \text{ tale che } \Omega \cap B_r(x_0) = \{x_0\}}$$ (ad es, l'insieme $\mathbb{N}$)

Chiaramente ciò implica che $x_0 \in \Omega$



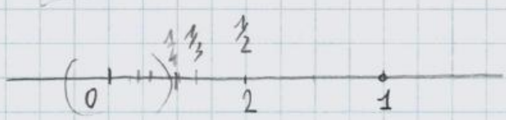
- x_0 è isolato per Ω;
- x_1 non lo è.

Def Diciamo che x_0 è un punto di ACCUMULAZIONE per Ω se ogni palla di centro x_0 contiene punti di Ω diversi da x_0:

$$\boxed{\forall r > 0 : \quad [\Omega \cap B_r(x_0)] \setminus \{x_0\} \neq \emptyset}$$

In questo caso non è detto che x_0 appartenga ad Ω

ESEMPIO: $\Omega = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$



- 0 è di accumulazione per Ω
$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$

Def Diciamo che x_0 è un punto di FRONTIERA per Ω se:

$$\forall r > 0 : \quad \Omega \cap B_r(x_0) \neq \emptyset \quad e \quad C\Omega \cap B_r(x_0) \neq 0$$

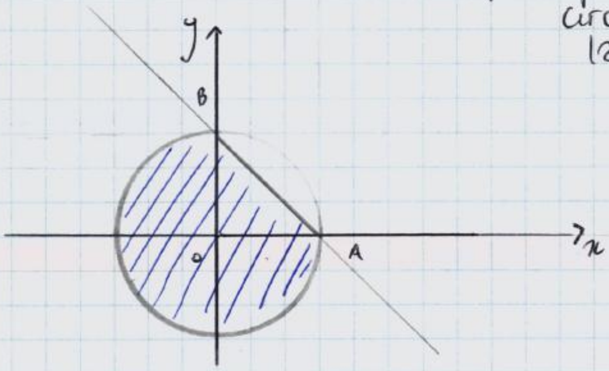
L'insieme dei punti di frontiera di Ω è detto "FRONTIERA" o "BORDO" di Ω e si denota con $\text{Fr}(\Omega)$ (o $\partial\Omega$)
Essenzialmente, ogni palla interseca sia l'insieme che il suo complementare

- $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 9 \ , \ y \leq 3-x\}$

$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 9, \ y \leq 3-x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 3-x, \ x^2+y^2 \leq 9\}$

i punti della circonf. sotto la retta

cioè i punti della retta interni al cerchio



LEZIONE _ 3

Def. • Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Ω è "aperto" se ogni punto di Ω è interno a Ω, cioè:

$$\boxed{\Omega = \mathrm{int}(\Omega)}$$

- Diciamo che Ω è chiuso se $C\Omega$ è aperto
- Diciamo che Ω è limitato se:

$$\boxed{\exists r > 0 : \ \Omega \subseteq B_r(0)}$$

- Diciamo che Ω è compatto se Ω è chiuso e limitato

OSS.
- Esistono insiemi né aperti né chiusi (esempio: $[a;b)$)
- $\emptyset$ e $\mathbb{R}^n$ sono contemporaneamente aperti e chiusi.
- Ω è chiuso $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega \subseteq \Omega$
- Ω è aperto $\Leftrightarrow$ $\partial\Omega \cap \Omega = \emptyset$
- Ω chiuso $\Rightarrow$ $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega = \Omega$

$\uparrow$ chiusura di Ω

ESEMPI: $B_r(x_0)$ è aperto ; $\overline{B}_r(x_0)$ è chiuso.

PROPRIETA'. Valgono i seguenti fatti:

1) $\cup$ qualunque di aperti è un aperto
2) $\cap$ finita di aperti è un aperto
3) $\cup$ finita di chiusi è un chiuso.
4) $\cap$ finita tra chiusi è un chiuso.

Def $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $x_0 \in \Omega$, $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione. Diciamo che f è differenziabile in x_0 se esiste una applicazione lineare (e continua) $L: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)}{\| x - x_0 \|_n} = 0_{\mathbb{R}^m}}$$

limite in $\mathbb{R}^n$

In tal caso L è detta "DIFFERENZIALE" di f in x_0 e si denota con $L = df(x_0)$.
Quindi $df(x_0): \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ è lineare:

$$\begin{cases} df(x_0)(x+y) = df(x_0)(x) + df(x_0)(y) \\ df(x_0)(\lambda x) = \lambda df(x_0)(x) \end{cases}$$

PROPRIETA': $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione. Si ha che:

1) f differenziabile in $x_0 \implies f$ continua in x_0;
2) f differenziabile in $x_0 \implies \forall v \in \mathbb{R}^n \; \exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ e si ha che $df(x_0)(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

In particolare, se $v = e_i$ allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$:

Quindi: $\boxed{df(x_0)(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)}$

Se $v = (v_1, \dots, v_n)$ allora:

$$df(x_0)(v) = df(x_0)(v_1 e_1 + \dots v_n e_n) =$$

applico le proprietà delle applicazioni lineari

$$= v_1 \underbrace{df(x_0)(e_1)}_{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)} + v_2 \underbrace{df(x_0)(e_2)}_{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)} + \dots v_n \underbrace{df(x_0)(e_n)}_{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}.$$

Conclusione: $\boxed{df(x_0)(v) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) + \dots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}$

↳ se il differenziale esiste, è unico e ha proprio l'espressione

$m = 1$ (f funzione reale):

$$df(x_0)(v) = v_1 \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)}_{\in \mathbb{R}} + \dots v_n \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)}_{\in \mathbb{R}}$$

Introduco $\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$ "vettore GRADIENTE":

↳ $\boxed{df(x_0) = \nabla f(x_0) \cdot v}$

MATRICIALE $\quad J_{g\circ f}(x_0) = \underbrace{J_g(f(x_0))}_{k\times m} \cdot \underbrace{J_f(x_0)}_{m\times n} \in \mathbb{R}^{kn}$

PROPRIETÀ (Regola della catena). $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$
$\quad x_1, \dots x_n \qquad y_1, \dots y_m$

Hp: $\begin{cases} f \text{ diff. in } x_0 \\ g \text{ diff. in } f(x_0) \end{cases} \Rightarrow$ Th: $\forall i = 1, \dots, n \ \exists \frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0)$ e si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x_0) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0))\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x_0) \dots + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x_0)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g\circ f)(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0))\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

CASO PARTICOLARE : $n = 1 \Rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$$\frac{d}{}(g\circ f)(x_0) = (g\circ f)'(x_0) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(f(x_0))\, f_j'(x_0)$$

$f'(x_0) = (f_1'(x_0), f_2'(x_0), \dots, f_m'(x_0))$;

$\nabla g(f(x_0)) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x_0)), \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x_0)), \dots \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x_0))\right)$

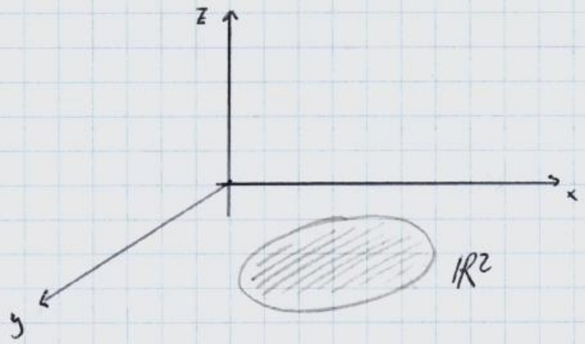
Quindi : $(g\circ f)'(x_0) = \nabla g(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto, $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$ una funzione.
Diciamo che f è di classe C^0 in Ω se è continua in Ω
" " f è di classe C^1 in Ω se è differenziabile in Ω
" " f è di classe C^2 in Ω se esistono e sono continue tutte le derivate parziali seconde
⋮
" " f è di classe C^k in Ω se esistono e sono continue tutte le derivate k-esime.
" " f è di classe C^∞ in Ω se è di classe C^k in Ω $\forall k \in \mathbb{N}$

OSS $f = (f_1, \dots, f_m)$ è di classe C^h in Ω se $f_1, \dots, f_m$ sono di classe C^h in Ω

Chiaramente $m(\Omega) \geq 0$.
Poniamo, per def, $m(\emptyset) = 0$.

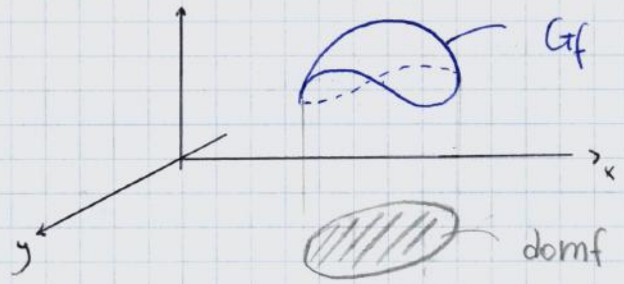
Oss. 1) Se $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ è misurabile, $(1 \leq k < n)$, allora $m_n(\Omega) = 0$.



Ad esempio, una superficie ha dimensione in $\mathbb{R}^2$ (= AREA) ma non in $\mathbb{R}^3$ (= volume nullo)

2) Se Ω è una linea limitata in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, allora $m_n(\Omega) = 0$

3) Se Ω è il grafico di una funzione continua e limitata di 2 variabili, allora $m_n(\Omega) = 0$



4) Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto misurabile, allora $m_n(\partial\Omega) = 0$

5) Se $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sono misurabili, allora:

$$\boxed{m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)}$$

In particolare, se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto misurabile, allora:

$$\bar{\Omega} = \Omega + \partial\Omega$$

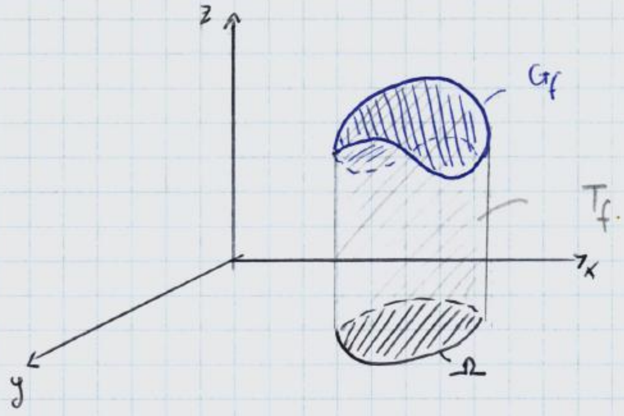
$$\Downarrow$$

$$m(\bar{\Omega}) = m(\Omega) + \cancel{m(\partial\Omega)} - \cancel{m(\Omega \cap \partial\Omega)}$$

Prop. 4 $\qquad \emptyset$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m(\bar{\Omega}) = m(\Omega)}$$

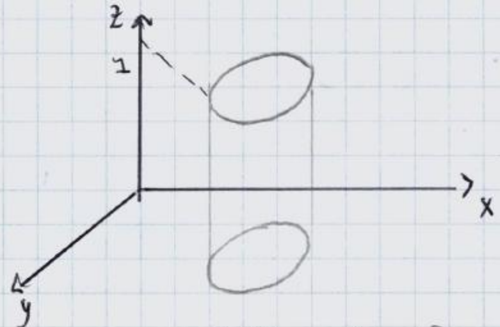


$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = m_3(T_f)$$

Oss Se $f(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$, allora:

$$\boxed{\int_\Omega f(x)\,dx = \int_\Omega 1\,dx = m_n(\Omega) \quad (\text{" } n\text{-dimensionale"})}$$

$n=2 \Rightarrow$



$$\int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_\Omega 1\,dx\,dy = m_3(T_f)$$

↳ CILINDRO

$$\Rightarrow m_2(\Omega)\cdot 1 = m_2(\Omega) = m_3(T_f)$$

PROPRIETA': $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile, $f, g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ continue e limitate:

$$\left.\begin{array}{l} ① \int_\Omega (f+g) = \int_\Omega f + \int_\Omega g \,; \\ ② \int_\Omega \lambda f = \lambda \int_\Omega f \,; \end{array}\right\} \underline{\text{linearità}}$$

③ $f \le g$ su $\Omega \Rightarrow \int_\Omega f \le \int_\Omega g$ (<u>MONOTONIA</u>)

④ $\left|\int_\Omega f\right| \le \int_\Omega f$

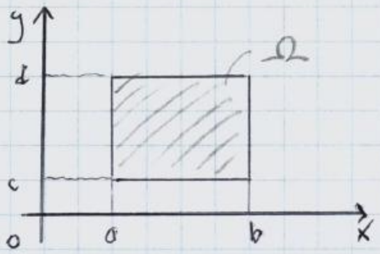
- - - - - -

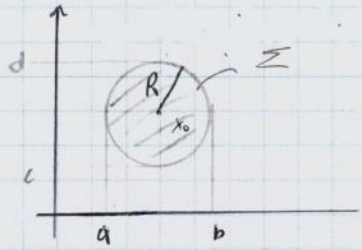
- Se Ω è trascurabile $\Rightarrow \int_\Omega f = 0$
- Se $\Omega = A \cup B$, con A, B misurabili e $A \cap B$ trascurabile, allora $\int_\Omega f = \int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$
- Se $A \subseteq \Omega$ è misurabile e $f \ge 0$ su Ω, allora $\int_A f \le \int_\Omega f$
- Se Ω è un aperto misurabile, allora
$$\int_{\bar\Omega} f = \int_{\Omega\cup\partial\Omega} f = \int_\Omega f + \cancel{\int_{\partial\Omega} f} = \int_\Omega f$$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 9 \,,\ y \le x\}$$
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 < x^2+y^2 < 9 \,,\ y < x\}$$

$$\int_\Omega f\,dx\,dy = \int_A f(x,y)\,dx\,dy \qquad \text{anche se } \Omega \ne A$$

ESEMPIO di insiemi sia x-semplice che y-semplice:



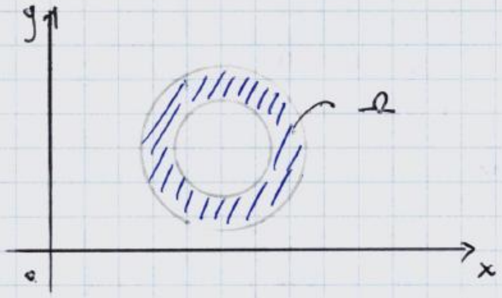


$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$; $\Sigma \overset{(*)}{=} \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leq R^2\}$

$*$ Riscrivo Σ : $(y-y_0)^2 \leq R^2 - (x-x_0)^2 \Rightarrow |y-y_0| \leq \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ OK.

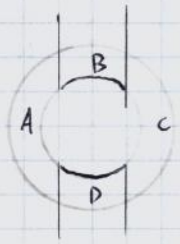
$\Rightarrow y_0 + \sqrt{\ } < y < y_0 + \sqrt{\ }$

Altro esempio:



Ω non è né x semplice, né y semplice, poiché il buco non vi appartiene

$\Downarrow$ lavoro su Ω trattandolo come unione



$\Omega = A \cup B \cup C \cup D$

$\downarrow$

le intersezioni sono trascurabili

Teorema (di integrazione sugli insiemi x-semplici e y-semplici)

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ l'insieme y-semplice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ con α, β continue e tali che $\alpha(x) \leq \beta(x)$ e f una funzione continua $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$. Allora

$$\boxed{\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x;y)\,dy \right] dx}$$

L'unica variabile è y, x va trattata come costante $\Rightarrow F(X)$

Se Ω è l'insieme x-semplice $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d;\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ con γ, δ continue e tali che $\gamma(y) \leq \delta(y)$ e se f è una funzione continua $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, allora:

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$\rightarrow G(y)$

ESEMPIO: Calcolare $\int_\Omega (x+y)\,dx\,dy$ dove

$$\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y \le x \le \sqrt{1-y^2} \right\}$$

1) Ω è x-semplice o y-semplice?
2) Ω è unione finita di x-semplici o y-semplici?
3) Ω è differenza di due insiemi x-semplici o y-semplici?
4) Si può fare un cambio di variabile?

Ω sembra x-semplice $\Longrightarrow$ $y \le \sqrt{1-y^2} \quad \forall y \in \left[0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

devo verificare che

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 \le 1-y^2 \\ y \ge 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y^2 \le 1/2 \\ y \ge 0 \end{cases} ; \begin{cases} -\sqrt{2}/2 \le y \le \sqrt{2}/2 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \Omega \text{ è } x\text{-semplice.}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega (x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\int_y^{\sqrt{1-y^2}} (x+y)\,dx \right] dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + xy \right) \Big|_y^{\sqrt{1-y^2}} \right] dy$$

$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \left(\frac{1}{2}(1-y^2) + y\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{2}y^2 - y^2 \right) dy = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{2} - 2y^2 + y\sqrt{1-y^2} \right) dy$$

$$\frac{1}{(-2)} \int_0^{\sqrt{2}/2} (-2)\left(y\sqrt{1-y^2} \right) dy + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\cancel{2}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\cancel{8}_2} =$$

$$\left[-\frac{1}{\cancel{2}} (1-y^2)^{3/2} \cdot \frac{\cancel{2}}{3} \right]_0^{\sqrt{2}/2} + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} = -\frac{1}{3}\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} - 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) + \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \cancel{-\frac{\sqrt{2}}{12}} + \frac{1}{3} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{4}} \cancel{-\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

— — — — — — — — —

9

Risolvo trattandolo come x-semplice:

$$\int_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_y^1 (x^2+y^2)\,dx\right] dy = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{3}x^3 + y^2 x\right)_y^1 \right] dy$$

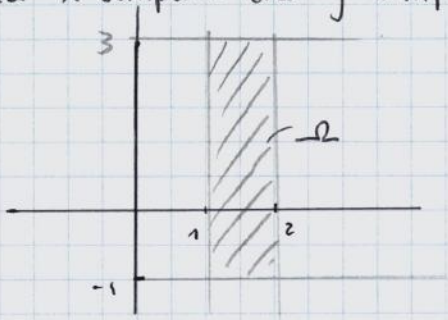
$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y^2 - \frac{1}{3}y^3 - y^3 \right] dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 - \frac{4}{3}y^3 \right) dy =$$

$$\left[\frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$$

ESEMPIO 2

$$\int_\Omega (x^2 - xe^y)\,dx\,dy \,, \quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,,\ 1\le x\le 2 \,,\ -1\le y\le 3\}$$

Ω è sia x-semplice che y-semplice $\Rightarrow$ Ω è un rettangolo



rettangolo con i lati // agli assi coordinati

(applico la proprietà)

$$f(x,y) = x^2 - xe^y = x(x-e^y) = 1\cdot x^2 - x\cdot e^y$$

$$\int_\Omega (x^2 - xe^y)\,dx\,dy = \int_\Omega x^2\,dx\,dy - \int_\Omega xe^y\,dx\,dy$$

$x^2 = x^2\cdot 1 \,,\quad 1 = f(y)$

Per la proprietà: $= \left(\int_1^2 x^2 dx\right)\left(\int_{-1}^3 dy\right) - \left(\int_1^2 x\,dx\right)\left(\int_{-1}^3 e^y dy\right)$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 \cdot \left[y\right]_{-1}^3 - \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 \cdot \left[e^y\right]_{-1}^3 = \frac{7}{3}\cdot 4 - \frac{1}{2}\cdot 3\,(e^3 - e^{-1})$$

$$= \left[\frac{28}{3} - \frac{3}{2}\left(e^3 - \frac{1}{e}\right)\right]$$

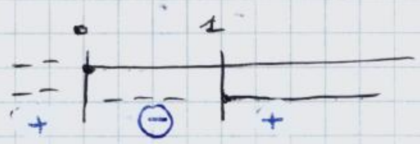
ESEMPIO 3

$$\int_\Omega xy\,dx\,dy \,, \quad \Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ x^2 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Ω sempre y-semplice: $\quad x^2 \le \sqrt{x} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^4 \le x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ x(x^3-1)\le 0 \end{cases}$

$\boxed{Sx \le Dx}$

- $x \ge 0$
- $x^3 \ge 1 \Rightarrow x \ge 1$



$$\Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 0\le x\le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le x \le 1$$

$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0\le x\le 1 \,,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\} \Rightarrow \Omega$ y-semplice

TEOREMA (del cambiamento di variabile negli integrali doppi)

Hp.
$$\begin{cases} \Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ misurabili} \\ f: \Omega \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continua e limitata} \\ \phi: \Omega' \mapsto \Omega \text{ tale che} \\ \quad \circ\ \Phi \text{ biiettiva} \\ \quad \circ\ \Phi \text{ di classe } C_1 \text{ su } \Omega' \text{ e } \forall u,v \in \Omega' : \\ \qquad \det J_\phi (u,v) \neq 0 \end{cases}$$

Th.
$$\boxed{\int_\Omega f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v))\, |\det J_\phi (u,v)|\, du\, dv}$$

FORMULA del CAMBIAMENTO di VARIABILE

OSS Dall' analisi 1 :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \quad , \quad a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$$

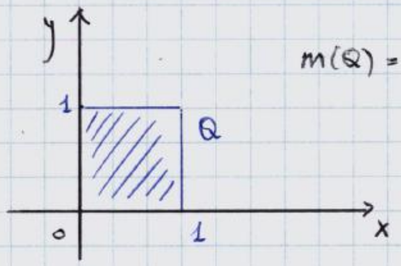
$x = \varphi(t)$

$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)\,dt$

$$\Rightarrow \int_\Omega f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\Omega'} f(\Phi(u,v))\, \overline{|\det J_\phi (u,v)|}\, du\,dv$$

$(x,y) = \phi(u,v)$

[per suriettività : $\Phi(\Omega') = \Omega$]

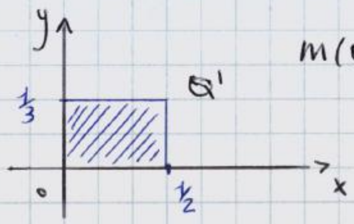


$m(Q) = 1$; $\Phi = \begin{cases} x = 2u \\ y = 3v \end{cases}$

$0 < x < 1 \Rightarrow 0 < 2u < 1 \Rightarrow 0 < u < \frac{1}{2}$

$0 < y < 1 \Rightarrow 0 < 3v < 1 \Rightarrow 0 < v < \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$



$m(Q') = \frac{1}{6}$

Il termine con il $\det J_\phi(u,v)$ è necessario! Infatti:

$$\int_\Omega 1\,dx\,dy = \int_{\Omega'} 1 \circledast\, du\,dv = 6 \cdot m(Q') = 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 1 \quad \text{(FALSO) (CORRETTO)}$$

$(x,y) = \phi(u,v)$ $\qquad |\det J_\phi (u,v)|$

$$\Phi(u,v) = (x,y) = (\underbrace{2u}_{\varphi_1}, \underbrace{3v}_{\varphi_2})$$

$$J_\phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} ; \quad |\det J_\phi (u,v)| = 6$$

② Coordinate ellittiche

$a, b \geq 0 \quad : \quad (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \phi : [0; +\infty) \times [0, 2\pi] \longmapsto \mathbb{R}^2$

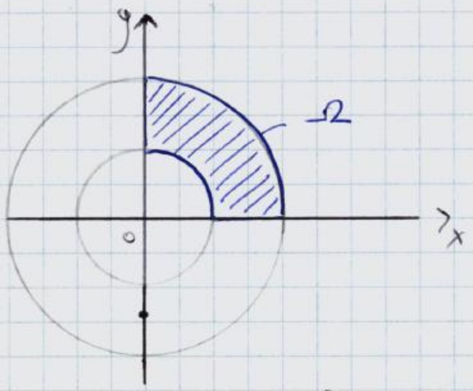
$$\Longrightarrow \boxed{\phi(\rho, \theta) = (x_0 + a\rho\cos\theta \, ; \, y_0 + b\rho \operatorname{sen}\theta)}$$

$$J_\phi(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} a\cos\theta & -a\rho\operatorname{sen}\theta \\ b\operatorname{sen}\theta & b\rho\cos\theta \end{pmatrix} ;$$

$$\Longrightarrow \det J_\phi(\rho, \theta) = ab\rho\cos^2\theta + ab\rho\operatorname{sen}^2\theta = ab\rho(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta)$$

$$\Longrightarrow \boxed{|\det J_\phi(\rho, \theta)| = ab\rho}$$

ESEMPIO — $\displaystyle\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy \quad , \quad \Omega = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, , \, 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \, , \, \begin{matrix} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{matrix}\right\}$



Suggerimento : " x^2+y^2 " consiglia implicitamente il cambio di variabili in coordinate polari :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases} ; \quad \det J_\phi(\rho, \theta) = \rho$$
$$(\rho \geq 0, \quad \theta \in [0; 2\pi])$$

$$\int_\Omega \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_{\Omega'} \frac{\rho\cos\theta\cancel{\rho}\operatorname{sen}\theta}{\cancel{\rho^2}} \cdot \cancel{\rho}\,d\rho\,d\theta = \int_{\Omega'} \rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta$$

OSS. su Ω'? $\quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \overset{\rho^2}{x^2+y^2} \leq 4 \, , \, x \geq 0, y \geq 0\}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho^2 \leq 4 \\ \rho \geq 0 \\ \left[\begin{matrix} \rho\cos\theta \geq 0 \\ \rho\operatorname{sen}\theta \geq 0 \end{matrix}\right. \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2 \leq \rho \leq 2 \\ \boxed{0 \leq \theta \leq \pi/2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \rho \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 1 \leq \rho \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

1° quadr.

$$\Longrightarrow \Omega' = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq \rho \leq 2, \ 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$$

↳ è un rettangolo con lati // agli assi

$$\int_{\Omega'} \rho\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right) = \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_1^2 \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - 0\right) = \boxed{\frac{3}{4}}$$

CALCOLO degli INTEGRALI TRIPLI

- Integrazione per fili paralleli all'asse z. → una variabile è compresa tra 2 funzioni delle altre 2, e queste sono legate tra loro da altre relazioni

Sia $\Omega : \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x,y) \in D \ , \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$, con

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ COMPATTO ;

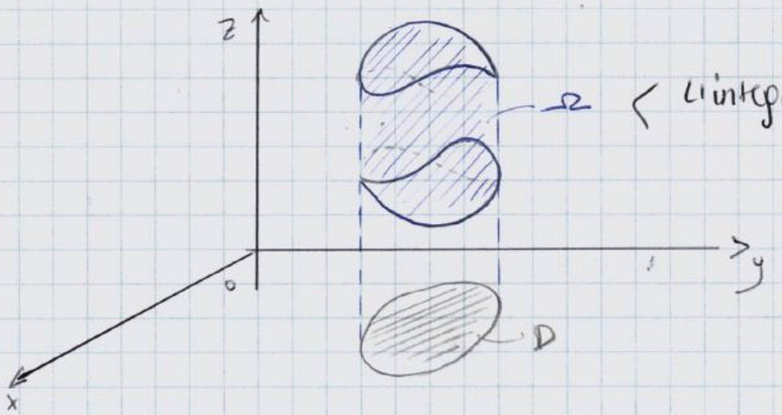
$\begin{matrix}\alpha \\ \beta\end{matrix} : D \longmapsto \mathbb{R}^2$ continue $\Longrightarrow$ $\alpha(x,y) \le \beta(x,y) \ \ \forall (x,y) \in D$;

Ω insieme "zeta semplice"

Se $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ continua allora

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right]}$$

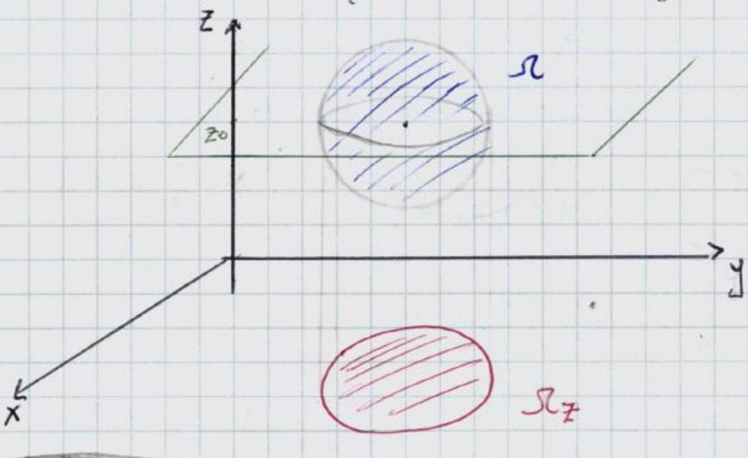
↑ prima l'integrale semplice, poi doppio



< L'integrale vive in $\mathbb{R}^4$ e non si può rappresentare >

- Integrazione per strati paralleli ad un piano

Siano $\Omega \in \mathbb{R}^3$ limitato e $z_0 \in \mathbb{R}$; poniamo
$\Omega_{z_0} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x,y,z_0) \in \Omega$



PIANO XY

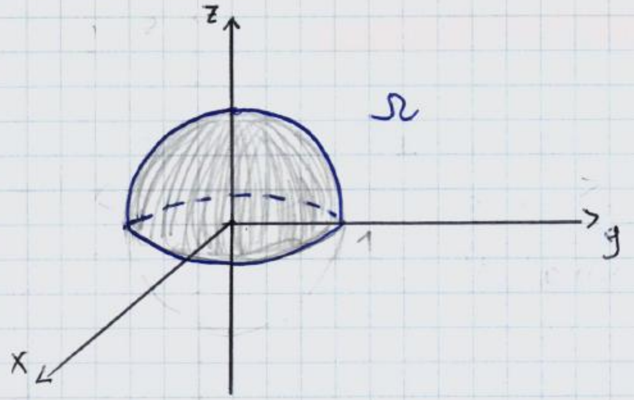
$\Omega = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \le z \le b \ , \ (x,y) \in \Omega_z \}$, dove

$\Omega_z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y,z) \in \Omega \}$, $\forall z \in [a;b]$. Supponiamo Ω_z misurabile $\forall z \in [a;b]$ e $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata.
Allora:

prima doppio, poi semplice

$$\boxed{\int_{\Omega} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\iint_{\Omega_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right] dz}$$

FORMULA di INTEGRAZIONE per Strati //



$\longrightarrow$ Per trovare D proietto Ω su piano xy
$\downarrow$
$x^2+y^2=1$

Cerco di "isolare" una $f(z)$ per avere informazioni su z

Altra risoluzione: $\Omega: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \le 1 \\ z \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2 \le 1-z^2 \\ 1-z^2 \ge 0 \\ z \ge 0 \end{cases} \quad 0 \le z \le 1$

$\begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ \boxed{x^2+y^2 \le 1-z^2} \end{cases} \longrightarrow$ mi definisce Ω_z

$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 1, \ (x,y) \in \Omega_z\}$, dove
$\Omega_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1-z^2\} \quad \forall z \in [0,1]$

$\Rightarrow$ Ora Ω ha la forma giusta per integrare per strati:

$$\int_\Omega (x^2+y^2) z \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_{\Omega_z} (x^2+y^2) z \, dx\,dy \right] dz = \int_0^1 z \left[\int (x^2+y^2) dx\,dy \right] dz = (*)$$

(*) $\int_{\Omega_z} (x^2+y^2)\,dx\,dy \Longrightarrow$ cambio variabili

$\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

$$\int_{\Omega'} \rho^2 \cdot \rho \, d\rho\, d\theta = \int_{\Omega'} \rho^3 \, d\rho\, d\theta$$

Ω'? $\quad x^2+y^2 \le 1-z^2 \Longrightarrow \begin{cases} \rho^2 \le 1-z^2 \\ \rho \ge 0 \\ \theta \in [0;2\pi] \end{cases}; \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \sqrt{1-z^2} \\ \theta \in [0;2\pi] \end{cases}$

definisce comunque un rettangolo

$$\Rightarrow \int_{\Omega'} \rho^3 \, d\rho\, d\theta = \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho^3 d\rho \right) \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) =$$

$$= \left[\frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^{\sqrt{1-z^2}} \cdot 2\pi = \frac{1}{4}(1-z^2)^2 \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}(1-z^2)^2$$

$$(*) \int_0^1 z \cdot \frac{\pi}{2}(1-z^2)^2 = \frac{\pi}{2(-2)} \int_0^1 -2z(1-z^2)^2 = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3}(1-z^2)^3 \Big|_0^1 =$$

$$-\frac{\pi}{12}(1-z^2) \Big|_0^1 = 0 - \left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12}$$

$$J_\Phi(\rho,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi & -\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad |\det J_\Phi(\rho,\theta,\varphi)| = \ldots \; |\rho^2\operatorname{sen}\theta| = \rho^2\operatorname{sen}\theta$$

ESERCITAZIONE 2

• **ES. 1** Calcolare $\int_\Omega 8xy\,dx\,dy$, $\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ 0<x<y+2\}$

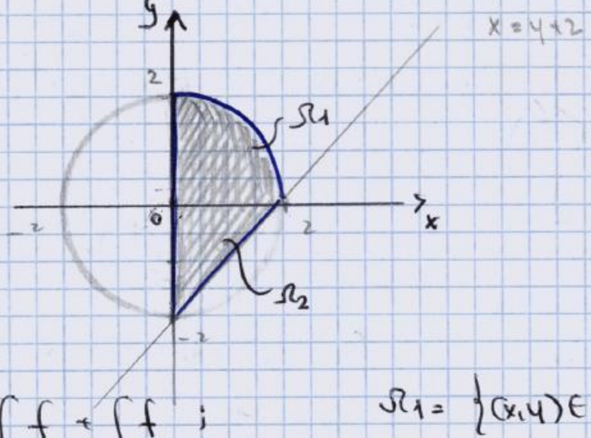
$\Rightarrow$ Sembra x semplice $\Rightarrow$ $0<y+2 \iff y>-2$

$\Rightarrow$ $x^2+y^2\le 4 \Rightarrow y^2\le 4-x^2 \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{4-x^2}\le y\le\sqrt{4-x^2} \\ -2\le x\le 2, \end{cases}$

$0<x<y+2$

$\begin{cases} x>0 \\ x<y+2 \end{cases}$;

$\begin{cases} x>0 \\ y>x-2 \end{cases}$



$\int_\Omega f = \int_{\Omega_1} f + \int_{\Omega_2} f$;

$\Omega_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 4,\ \begin{pmatrix} 0\le x\le 2 \\ 0\le y\le 2 \end{pmatrix}\}$

$\Omega_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y+2,\ \begin{matrix} 0<x<2 \\ -2<y<0 \end{matrix}\}$

$\int_{\Omega_1} f = \int_{\Omega_1} 8xy\,dx\,dy$; Cambio coordinate : $\Phi = \begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\operatorname{sen}\theta \\ \rho\ge 0,\ 0\le\theta\le \end{cases}$

$\Omega_1' = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\le\rho\le 2,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\}$

$\hookrightarrow \int_{\Omega_1} f = 8\int_{\Omega_1'} \rho\cos\theta\,\rho\operatorname{sen}\theta\cdot\rho\,d\rho\,d\theta =$

$= 8\left(\int_0^2 \rho^3 d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,d\theta\right) =$

$= 8\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$

$= 8[4-0]\left[\frac{1}{2}\cdot 1\right] = 16$;

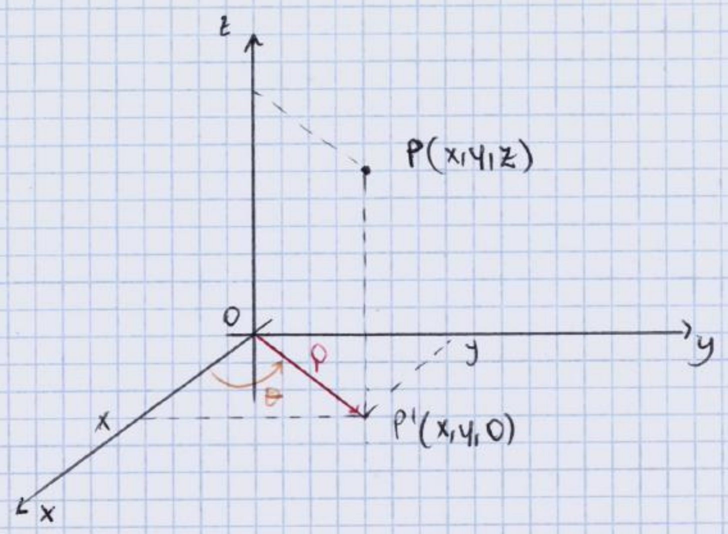
$\int_{\Omega_2} f = \int_{\Omega_2} 8xy\,dx\,dy \xrightarrow[\Omega_2 \text{ x-semplice}]{} \int_{-2}^{0}\left[8\int_0^{y+2} xy\,dx\right]dy =$

$\int_{-2}^{0} 8\left[\frac{1}{2}y\,x^2\right]_0^{y+2} dy = \int_{-2}^{0} 4y(y+2)^2 dy = 4\int_{-2}^{0}(y^3+4y^2+4y)\,dy$

$= 4\left[\frac{1}{4}y^4+\frac{4}{3}y^3+2y^2\right]_{-2}^{0} = -4\left(4-\frac{32}{3}+8\right)$

$\int_\Omega f = \cancel{16} - \cancel{16} + \frac{128}{3} - 32 = \frac{32}{3}$

2) Coordinate cilindriche (asse // asse z)



- $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
- $\theta \in [0, 2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}}$$

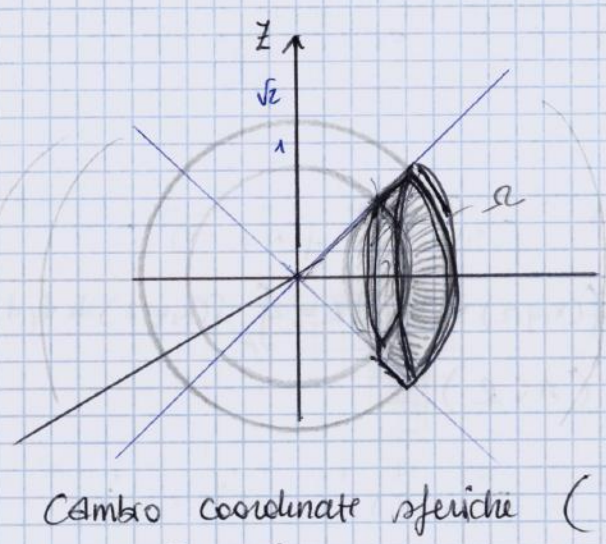
Se $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, allora $\phi : [0; +\infty] \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$

$$\Rightarrow \quad \Phi = (x_0 + \rho\cos\theta,\ y_0 + \rho\,\text{sen}\,\theta,\ z)$$

$$J_\phi(\rho, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\,\text{sen}\,\theta & 0 \\ \text{sen}\,\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\det J_\phi(\rho, \theta, z)| = |\rho\cos^2\theta + \rho\,\text{sen}^2\theta| = |\rho| = \rho.$$

ESEMPIO: $\displaystyle\int_\Omega \frac{x^2}{x^2+z^2}\, dx\,dy\,dz$, $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 1 \le x^2+y^2+z^2 \le 2 \\ x^2+y^2+z^2 \ge 0 \end{matrix}\right.$



OSS Simmetria rispetto ad un asse

⇓

θ COLATITUDINE misurata rispetto a quell'asse

→ Cambio coordinate sferiche (θ rispetto a y)

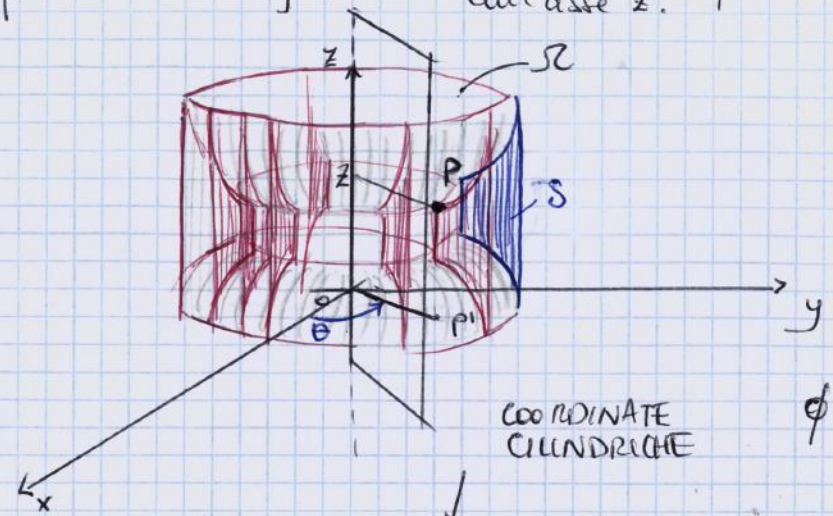
$$\phi = \begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = \rho\cos\theta \\ z = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \end{cases} ; \quad |\det J_\phi(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2\,\text{sen}\,\theta$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega'} \frac{\rho^2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi}{\rho^2\,\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi + \rho^2\,\text{sen}^2\theta\,\text{sen}^2\varphi} \cdot \rho^2\,\text{sen}\,\theta \; d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_{\Omega'} \frac{\text{sen}^2\theta\cos^2\varphi}{\text{sen}^2\theta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi)}_{1}} \cdot \rho^2\,\text{sen}\,\theta \; d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE

$S: \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0 \} \Longrightarrow \Omega$ è ottenuto per rotazione di S attorno all'asse z.



COORDINATE CILINDRICHE

$$\phi = \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$V = m(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\,dy\,dz = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho\, d\theta\, dz$$

$\Omega' = \{ (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 :$ $\cancel{\rho \geq 0}$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$: $\rho, z \in$ sezione ottenuta intersecando Ω con un piano $\perp$ all'asse xy e contenente l'asse z.

Tra tutte le sezioni c'è anche $S \Rightarrow$

$$\Omega' = \{ (\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \ \rho, z \in S \}$$

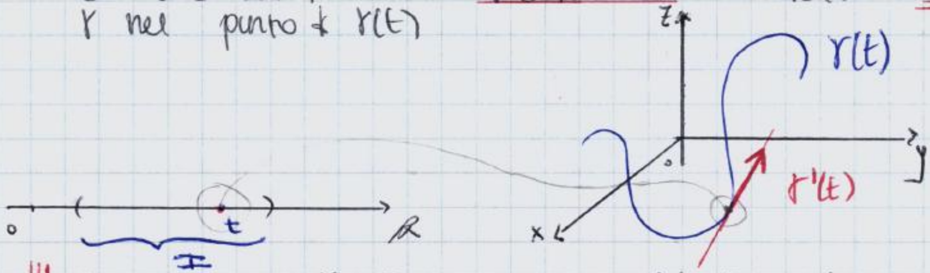
$$m(\Omega) = \int_{\Omega'} \rho \, d\rho\, dz = \int_S \left[\int_0^{2\pi} \rho \, d\theta \right] d\rho\, dz =$$

$$= \int_S \rho \cdot 2\pi \, d\rho\, dz = 2\pi \int_S \rho \, d\rho\, dz \Rightarrow \rho = y$$

$$= 2\pi \int_S y \, dy\, dz = m(\Omega) \quad \text{c.v.d.}$$

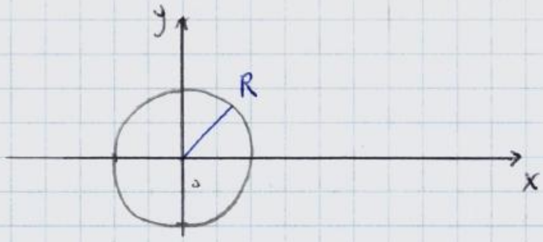
Def Sia $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ curva parametrica.
γ è chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$

Def Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $\gamma : I \mapsto \mathbb{R}^n$ curva parametrica derivabile se $t \in I$, allora $\gamma'(t) \in \mathbb{R}^n$ è detto vettore tangente a γ nel punto $\gamma(t)$



Diciamo che γ è regolare se γ' è continua, $\gamma'(t) \neq 0$ $\forall t$ interno a I.

ESEMPIO: $\gamma : [0;2\pi] \longmapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$



- $\gamma'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$
- $\gamma'(t) \neq (0,0) \rightarrow$ perché $\sin t = \cos t = \emptyset \Rightarrow \nexists t$

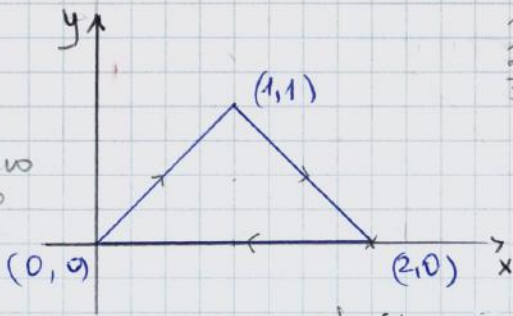
$\Rightarrow$ γ è regolare

Def Sia $\gamma : [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ curva parametrica.
Diciamo che γ è regolare a tratti se:
1) γ è derivabile, con derivata continua in $[a,b]$ tranne che in un numero finito di punti;
2) Nei punti in cui γ è derivabile, allora $\gamma' \neq 0$ tranne che per un numero finito di punti;
3) Nei punti in cui γ non è derivabile, $\exists$ le derivate laterali di γ.

In alternativa, γ è regolare a tratti se $\exists a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ tali che $\gamma_{|[t_{i-1};t_i]}$ è regolare $\forall i = 1, \dots, k$.

ESEMPIO:

OSS: Per scrivere la parametrizzazione, devo introdurre il parametro t nell'espressione $f(x,y)$



1° tratto : $y = x \rightarrow (t,t)$
2° tratto : $y = -x+2 \Rightarrow (t, 2-t)$
3° tratto : $y = 0 \Rightarrow (6-2t, 0)$
?

$$\gamma : [0,3] \mapsto \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \gamma(t) = \begin{cases} (t,t) & (0 \leq t \leq 1) \\ (t, 2-t) & (1 < t \leq 2) \\ (6-2t, 0) & (2 < t \leq 3) \end{cases}$$

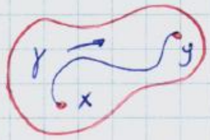
γ è regolare a tratti :

$$\gamma'(t) = \begin{cases} (1,1) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1,-1) & 1 < t < 2 \\ (-2,0) & 2 < t \leq 3 \end{cases}$$

$\hookrightarrow$ se ci sono punti di non derivabilità

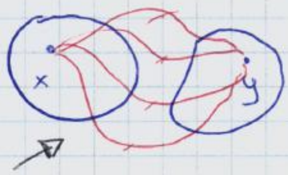
Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto.
Diciamo che Ω è <u>connesso per archi</u> se $\forall x,y \in \Omega$ esiste una curva parametrica

$$\boxed{\gamma : [a;b] \mapsto \Omega \quad \text{tale che} \quad \gamma(a) = x \ \text{ e } \ \gamma(b) = y}$$



Ω connesso per archi

Ω non è connesso per archi

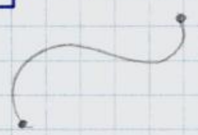


INTEGRALI CURVILINEI (di 1ª Specie)

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, <u>$f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ funzione (reale) continua</u> e γ una curva parametrica <u>$\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$</u> <u>semplice</u> e <u>regolare</u>.
Si chiama "<u>integrale curvilineo di 1ª specie</u>" di f lungo Γ il numero reale:

$$\boxed{\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\| \, dt}, \quad \text{dove } \|\gamma'(t)\| \text{ è la}$$

<u>norma</u> del vettore tangente $\gamma'(t)$.



INTEGRALE CURVILINEO (di 2ª SPECIE)

Def Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto, <u>$F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale continuo</u> e <u>$\gamma : [a,b] \to \Omega$</u> una curva parametrica <u>semplice</u> e <u>regolare</u>.
Si chiama "<u>integrale curvilineo di 2ª specie di F lungo γ</u>" il numero reale:

$$\boxed{\int_\gamma F \cdot dp = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt}$$

/Prodotto Scalare/

È il LAVORO del campo di forze F nel trasferire una grandezza fisica lungo γ da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$

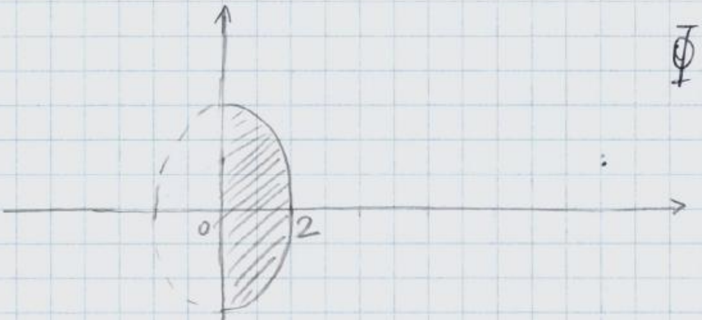
<u>ESEMPIO</u> Calcolare l'i.d.l. di $F(x,y) = (y, x^2+y^2)$ lungo $\gamma : [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$$\int_\gamma F \cdot dp = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t, \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t + \cos t) \, dt$$

$$= \left[-\frac{1}{2}(t - \operatorname{sen} t \cos t) \right]_0^{2\pi} + \left[\operatorname{sen} t \right]_0^{2\pi} = \boxed{-\pi}$$

- $\int_\Omega y^2 x \, dx\, dy \quad , \quad \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 9x^2 + 4y^2 \le 36 \; , \; x \ge 0\}$



$$\Phi = \begin{cases} x = 2\rho\cos\theta \\ y = 3\rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases}$$

$\downarrow$

$\rho \ge 0$

$\theta \in [-\pi; \pi]$

$$|\det J_\Phi(\rho,\theta)| = 6\rho$$

$$= \int_{\Omega'} 9\rho^2 \mathrm{sen}^2\theta \cdot 2\rho\cos\theta \cdot 6\rho \, d\rho d\theta = 108 \int_{\Omega'} \rho^4 \mathrm{sen}^2\theta \cos\theta \, d\rho d\theta$$

Ω' ?

$$\begin{cases} \cancel{36}\rho^2\cos^2\theta + \cancel{36}\rho^2 \mathrm{sen}^2\theta \le \cancel{36} \\ 2\rho\cos\theta \ge 0 \\ \rho \ge 0 \\ \theta \in [-\pi, \pi] \end{cases} \to \begin{cases} \rho^2 \le 1 \\ \cos\theta \ge 0 \\ \theta \in [-\pi; \pi] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 \le \rho \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \Omega' = \{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \le \rho \le 1 \; , -\tfrac{\pi}{2} \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

$$\Rightarrow 108 \left(\int_0^1 \rho^4 d\rho \right) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{sen}^2\theta \cos\theta \, d\theta \right) =$$

$$= 108 \left[\frac{1}{5}\rho^5 \right]_0^1 \left[\frac{1}{3} \mathrm{sen}^3\theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{108}{5} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-1) \right] = \frac{\overset{36}{\cancel{108}}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{72}{5}$$

INTEGRALI TRIPLI

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \quad , \quad \int_\Omega f(x,y,z) \, dx\, dy\, dz$

Guardiamo Ω

1) Si può integrare per fili paralleli ad un asse o per strati // ad un piano?

2) Ω è unione di un numero finito di insiemi come in 1) tali che a 2 a 2 hanno in comune insiemi di misura nulla?
Ad esempio: $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, con $m(A_i \cap A_j) = 0 \quad \forall i \ne j$?

$\to$ SI $\quad \int_\Omega f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f + \dots \int_{A_n} f$

$\to$ NO

3) Ω è differenza di 2 insiemi come in 1) cioè tali che: $\Omega = A - B$? con $B \subseteq A$?

$\to$ SI $\quad \int_\Omega f = \int_A f - \int_B f$

4) C. var

Esempio: $\int_\Omega z\,dx\,dy\,dz \quad , \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2+z^2 \leq 2 \quad , \quad z \geq \sqrt{x^2+y^2}\}$

$$x^2+y^2+z^2 \leq 2 \implies \begin{cases} z^2 \leq 2-x^2-y^2 \\ 2-x^2-y^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \leq 2 \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} -\sqrt{2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ \sqrt{x^2+y^2} \leq z \\ x^2+y^2 \leq 2 \end{cases} \implies \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2 \leq 2 \end{cases}$$

Impongo: $\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$

$$x^2+y^2 \leq 2-x^2-y^2 \implies x^2+y^2 \leq 1$$

$$\boxed{x^2+y^2 \leq 1}$$

EQUIVALENTI
↳ STESSO VERSO

ANTIEQUIVALENTI
↳ VERSO OPPOSTO

$\gamma(u) = \sigma(u, v_0)$, $\gamma : I_{v_0} \mapsto \mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$ γ continue $\Rightarrow$ Sono 2 curve parametriche!
$\eta(v) = \sigma(u_0, v)$, $\eta : I_{v_0} \mapsto \mathbb{R}^3$ η

OSS: $\gamma(u_0) = \sigma(u_0, v_0) = \eta(v_0)$;

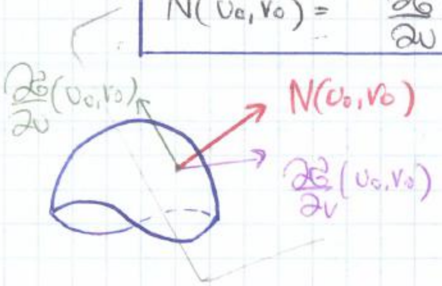
$$\gamma'(u) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u, v_0) \qquad \gamma'(u_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$$
$$\Rightarrow \qquad \Big\} \text{ linearm. INDIPENDENTI}$$
$$\eta'(v) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v) \qquad \eta'(v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$$

individuiamo un piano passante per $\sigma(u_0, v_0)$ $\longleftarrow$ $\gamma'(u_0)$ e $\eta'(v_0)$ sono i vettori tangenti $\longleftarrow$ sicuramente NON sono il vettore nullo

$\hookrightarrow$ È il piano tangente alla superficie Σ nel punto $\sigma(u_0, v_0)$

Def Si chiama "vettore normale" al piano tangente a Σ in $\sigma(u_0, v_0)$ (o vettore normale a Σ) il vettore:

$$\boxed{N(u_0, v_0) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}$$



Def Si chiama "versore normale" Σ in $\sigma(u_0, v_0)$ il vettore

$$\boxed{\hat{n}(u_0, v_0) = \frac{N(u_0, v_0)}{\| N(u_0, v_0) \|}}$$

Si dice che se σ è regolare individua sul suo sostegno un orientamento detto "verso di attraversamento" e quello indicato dal vettore $\hat{N}$.

Def Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti connessi per archi,
$\sigma : A \mapsto \mathbb{R}^3$ due superfici parametriche semplici e
$\tau : B \mapsto \mathbb{R}^3$ regolari.
Diciamo che σ e τ sono equivalenti se $\exists\, \alpha : B \mapsto A$ biiettiva, classe C^1 con $\det J_\alpha(x, y) > 0 \;\; \forall x y \in B$ tale che

$$\boxed{\tau = \sigma \circ \alpha}$$

Proprietà. Se σ e τ sono equivalenti allora hanno lo stesso sostegno e inducono su di esso lo stesso verso di attraversamento.

2 SFERA $R>0$

$\vec{G}: (0,\pi) \times (0,2\pi) \longmapsto \mathbb{R}^3$, $\boxed{\vec{G}(u,v) = (R \operatorname{sen} u \cos v, R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, R \cos u) \text{ (di classe } C^1)}$

$$J_{\vec{G}}(u,v) = \begin{pmatrix} R\cos u \cos v & -R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ R \cos u \operatorname{sen} v & R \operatorname{sen} u \cos v \\ -R \operatorname{sen} u & 0 \end{pmatrix}$$

Colonne non nulle (solo perchè sen e cos non possono annullarsi contemporaneamente)

$rk = 2$
$\vec{G}$ regolare!

$\Sigma = \vec{G}((0,\pi),(0,2\pi))$; $(x,y,z) = \vec{G}(u,v)$

$$\begin{cases} x = R \operatorname{sen} u \cos v \\ y = R \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = R \cos u \end{cases}$$

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 (\operatorname{sen}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sen}^2 u \operatorname{sen}^2 v + \cos^2 u)$$
$$x^2+y^2+z^2 = R^2 [\operatorname{sen}^2 u \underbrace{[\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v]}_{=1} + \cos^2 u)$$
$$x^2+y^2+z^2 = R^2 [\underbrace{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u}_{1}] \Rightarrow \boxed{x^2+y^2+z^2 = R^2}$$

OSS : Se $0<u<\pi \Rightarrow (x,y,z) \neq (0,0,\pm R)$
$0<v<2\pi \Rightarrow (x,y,z) \neq (R \operatorname{sen} u, 0, R\cos u)$

$x^2+z^2 = R^2$

3 GRAFICO DI UNA FUNZIONE DI DUE VARIABILI

$$\begin{cases} A \subset \mathbb{R}^2 \text{ connesso per archi;} \\ f: A \mapsto \mathbb{R} \text{ di classe } C^1 \\ \Sigma \text{ grafico di } f \end{cases} \Rightarrow \Sigma : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, z = f(x,y)\}$$

$\hookrightarrow \Sigma = \{(x,y,f(x,y)) : (x,y) \in A\}$

Se $\vec{G}: A \mapsto \mathbb{R}^3$; $\vec{G}(x,y) = (x,y,f(x,y))$ allora $\Sigma = \vec{G}(A)$
Risulta che $\vec{G}$ è di classe C^1 su A

$$J_{\vec{G}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$

$rk(J_{\vec{G}}(x,y)) = 2$
$\Rightarrow \vec{G}$ regolare

Sono linearmente indipendenti

$y = f(x,z) \Rightarrow \vec{G}(x,z) = (x, f(x,z), z)$
$x = f(y,z) \Rightarrow \vec{G}(y,z) = (f(y,z), y, z)$

$y = g(x,z) \rightarrow \quad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K \text{ e } y = g(x,z)\}$

$\Sigma = \sigma(K), \quad \sigma : K \mapsto \mathbb{R}^3$ e $\sigma(x,y) = (x, g(x,z), z)$

$N(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,z) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial z}(x,z)$ (da calcolare come prima)

< Calcolo dell'area del Grafico di una funzione di 2 variabili >

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in K, \quad z = g(x,y)\}$

$A_\Sigma = \int_\Sigma 1 \, d\sigma, \quad \Sigma = \sigma(K), \quad \sigma : K \mapsto \mathbb{R}^3$ e $\sigma(x,y) = (x, y, g(x,y))$

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1\right)$

$\hookrightarrow A_\Sigma = \int_K \|N(x,y)\| \, dx\, dy \underset{(*)}{=}$

$\|N(x,y)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}$

$\Rightarrow A_\Sigma = \int_K \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right)^2 + 1}$.

ESEMPIO $\quad \Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{2}(x^2+y^2), \quad x^2+y^2 \le 8\}$

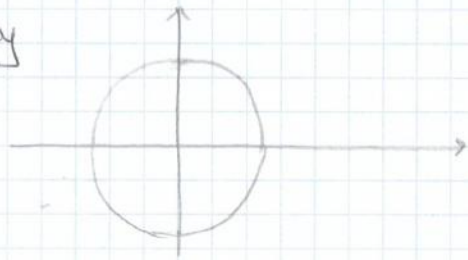
$g(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) \Rightarrow \quad K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 8\}$

$\Sigma = \sigma(K), \quad \sigma(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right)$

$N(x,y) = (-x, -y, 1) \Rightarrow \|N(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$

$A_\Sigma = \int_\Sigma 1\, d\sigma = \int_K \sqrt{x^2+y^2+1}\, dx\, dy$

$\underset{\text{polari}}{=} \int_{K'} \sqrt{\rho^2+1} \cdot \rho \, d\rho\, d\theta$;



K'? $\quad \rho^2 \le 8 \rightarrow 0 \le \rho \le 2\sqrt{2}$
$\rho \ge 0 \quad\quad 0 \le \theta \le 2\pi$

$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\frac{1}{2}\int_0^{2\sqrt{2}} 2\rho \sqrt{\rho^2+1}\, d\rho\right) = 2\pi \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left[(\rho^2+1)^{3/2}\right]_0^{2\sqrt{2}}\right)$

$= \frac{2}{3}\pi\left(\sqrt{9^3}\right) = \frac{2}{3}\pi\, 9\sqrt{9} = \frac{2}{\cancel{3}}\pi \cdot 9 \cdot \cancel{3} = 18\pi.$

FLUSSO di un CAMPO VETTORIALE ATTRAVERSO UNA SUPERFICIE

Def $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ aperto non vuoto.
$F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ campo vettoriale continuo
$A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto connesso per archi, $K \subseteq A$ compatto / ∂K è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti; $\sigma: K \mapsto \Omega$ calotta regolare,
$\Sigma = \sigma(K)$ sostegno di σ

Si chiama "FLUSSO" del campo F attraverso Σ o σ il numero reale

$$\boxed{\int_\Sigma F \cdot n \int_K F(\sigma(u,v)) \cdot N(u,v)\, du\, dv}, \text{ con}$$

$$N(u,v) = \frac{\partial \sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v)$$

OSS <Tipi di problemi>

1) DATI $\begin{cases} F \\ \sigma \end{cases}$ $\Rightarrow$ calcoliamo N $\Rightarrow$ applichiamo la formula

2) DATI $\begin{cases} F \\ \Sigma \\ \text{orientamento di } \Sigma \end{cases}$ $\Rightarrow$ Trovare σ, calcolare N e controllare che il verso di N corrisponda a F
- Si: Calcoliamo.
- NO: Prendiamo $-N$ al posto di N

CASO Particolare di 2):

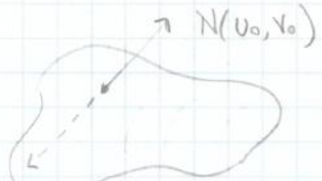
DATI $\begin{cases} F \\ \Sigma = \partial D, \; D \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ compatto non vuoto.} \\ \text{flusso uscente / entrante} \end{cases}$ $\Rightarrow$ Troviamo σ, calcoliamo N e controlliamo il verso rispetto a D.
- c'è corrispondenza? OK calcoliamo
- No: Calcoliamo $-N$.

Come si fa a capire se N è entrante o uscente?

OSS: σ è di classe $C^1 \Rightarrow N$ è continuo.
- Scegliere un qualunque punto $(u_0, v_0) \in \text{int} K$ $\left((u_0,v_0) \notin \partial K\right)$
- Calcolare $\sigma(u_0,v_0)$ e $N(u_0,v_0)$.

ci sono 3 modi:

① METODO GRAFICO
$\sigma(u_0,v_0) \in \Sigma = \partial D$



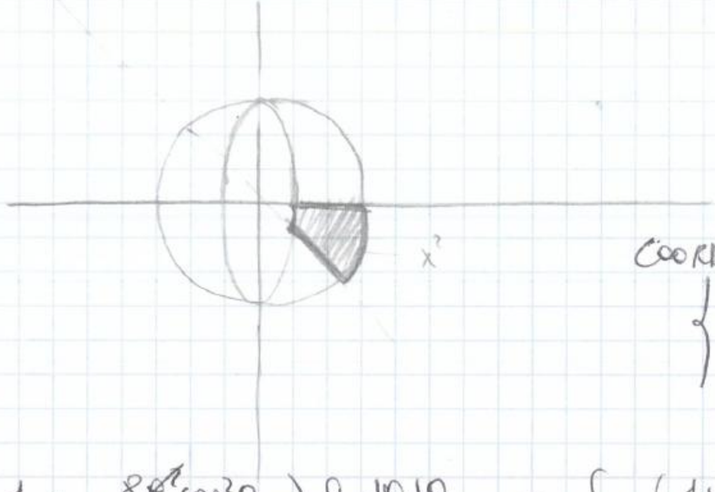
$$\left[\frac{3}{2}\operatorname{sen}\theta - \frac{4}{3}\operatorname{sen}^3\theta\right]_{-\pi/3}^{\pi/3} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\boxed{2}$ Calcolare il volume di $\Omega: \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+y^2 \le 9,\ 9x^2+y^2 \ge 9,\ -x \le y \le 0,\ 0 \le z \le 1 + \frac{8x^2}{x^2+y^2}\right\}$

$$m(\Omega) = \int_\Omega 1\, dx\,dy\,dz \ ; \ \overset{\text{fili // asse } z}{=} \int_D \left[\int_0^{1+\frac{8x^2}{x^2+y^2}} 1\, dz\right] dx\,dy$$

$$= \int_D \left(1 + \frac{8x^2}{x^2+y^2}\right) dx\,dy \ \underset{(*)}{=}$$

$D: \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \le 9,\ 9x^2+y^2 \ge 9,\ -x \le y \le 0\right\}$

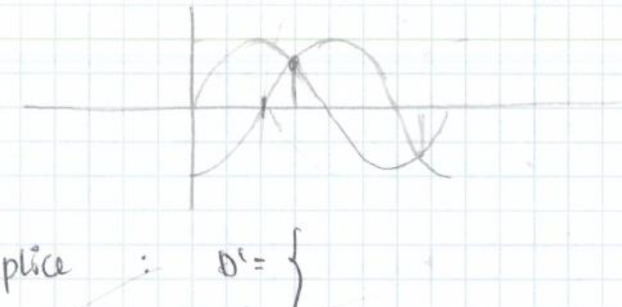


COORDINATE POLARI:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \\ 0 \le \theta \le 2\pi, \quad \rho \ge 0 \end{cases}$$

$$(*) = \int_{D'} \left(1 + \frac{8\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2}\right) \rho\, d\rho\, d\theta = \int_{D'} (1 + 8\cos^2\theta)\, \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$D: \begin{cases} \rho^2 \le 9 \\ 9\rho^2\cos^2\theta + \rho^2\operatorname{sen}^2\theta \ge 9 \\ -\rho\cos\theta \le \rho\operatorname{sen}\theta \le 0 \\ \rho \ge 0, \quad 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le 3 \\ \rho \ge \dfrac{3}{\sqrt{\underbrace{9\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{8\cos^2\theta+1}}} \\ \dfrac{3}{\sqrt{8\cos^2\theta+1}} \le \rho \le 3 \end{cases}$$



D' è ρ semplice : $D' = \{$

$$\Rightarrow \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \left[\int_{\frac{3}{\sqrt{11}}}^{3} \rho\cos\theta\, d\rho\right] d\theta = \int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \cos\theta \left[\frac{1}{2}\rho^2\right]_{\frac{3}{\sqrt{11}}}^{3} d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{7}{4}\pi}^{2\pi} \cos\theta \left[9 - \frac{9}{8\cos^2\theta+1}\right]$$

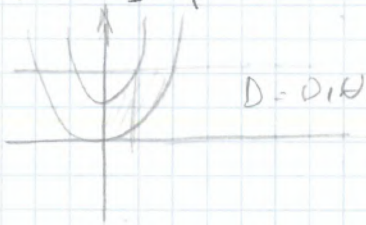
4] Calcolare $\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz$, $\Omega = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2+z^2 \le y \le 1+x^2+z^2 \\ y \le 2 \end{array} \right\}$

COORDINATE CILINDRICHE (asse // asse y) : $\Phi : \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = y \\ z = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$, $\rho \ge 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \int_{\Omega'} y\rho\, d\rho\, d\theta\, dy$; $\Omega' = \begin{cases} \rho^2 \le y \le 1+\rho^2 \\ y \le 2 \\ \rho \ge 0,\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$;

(!) $1+\rho^2 \le 2 \Rightarrow \rho^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le \rho \le 1$

$\Rightarrow \begin{array}{l} 0 \le \rho \le 1 \\ \rho^2 \le y \le 1+\rho^2 \end{array}$



$D = D_1 \cup D_2$

⋮

QUIZ SUGLI INTEGRALI MULTIPLI

QUIZ 3. $\int_\Omega (y-1)x \, dx\,dy \quad , \quad \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \le y \le 1, \ 1-y \le x \le \sqrt{1-y^2} \}$

Controllo: $1-y \le \sqrt{1-y^2} \iff \begin{cases} 1-y^2 \ge 0 \\ 1-y \ge 0 \\ (1-y)^2 \le 1-y^2 \end{cases} \vee \begin{cases} 1-y<0 \\ 1-y^2 \ge 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \le 1 \\ \cancel{1} - 2y + y^2 \le \cancel{1} - y^2 \end{cases} \vee \cancel{\begin{cases} y > 1 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases}} \Rightarrow \begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \le 1 \\ y(y-1) \le 0 \end{cases}$

$\begin{cases} -1 \le y \le 1 \\ y \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 \le y \le 1 \quad$ Ok.

Ω è x-semplice: $\int_\Omega (y-1)x\,dx\,dy = \int_0^1 \left[\int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} (y-1)x\,dx \right] dy$

$= \int_0^1 (y-1) \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (y-1)\left[\cancel{1} - y^2 - \cancel{1} + 2y - y^2 \right] dy$

$= \frac{1}{\cancel{2}}\int_0^1 (y-1)\,\cancel{2}(y-y^2)\,dy = \int_0^1 (y^2 - y^3 - y + y^2)\,dy$

$= \int_0^1 (2y^2 - y^3 - y)\,dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{8-3-6}{12} = \boxed{-\frac{1}{12}}$

QUIZ 4: $\int_\Omega \cos x \,\mathrm{sen}(y-\pi)\,dx\,dy \quad , \quad \Omega = \{ 0 \le x \le \pi \ , \ 0 \le y \le \pi - x \}$

OSS $\mathrm{sen}(y-\pi) = -\mathrm{sen}(\pi - y) = -\mathrm{sen}\,y$

$\Rightarrow \int_\Omega -\cos x \,\mathrm{sen}\,y\,dx\,dy \underset{\text{y-semplice}}{=} -\int_0^\pi \left[\int_0^{\pi-x} \cos x\,\mathrm{sen}\,y\,dy \right] dx$

$= \int_0^\pi \cos x \left[\cos y \right]_0^{\pi-x} dx = \int_0^\pi \cos x \left[\cos(\pi - x) - 1 \right] dx$

$= \int_0^\pi \cos x \left[-\cos x - 1 \right] dx = -\int_0^\pi (\cos^2 x + \cos x)\,dx$

$= -\left[\frac{1}{2}(x + \mathrm{sen}x\cos x) + \mathrm{sen}x \right]_0^\pi = -\left[\frac{1}{2}(\pi) - \cancel{\frac{1}{2}(0)} \right]$

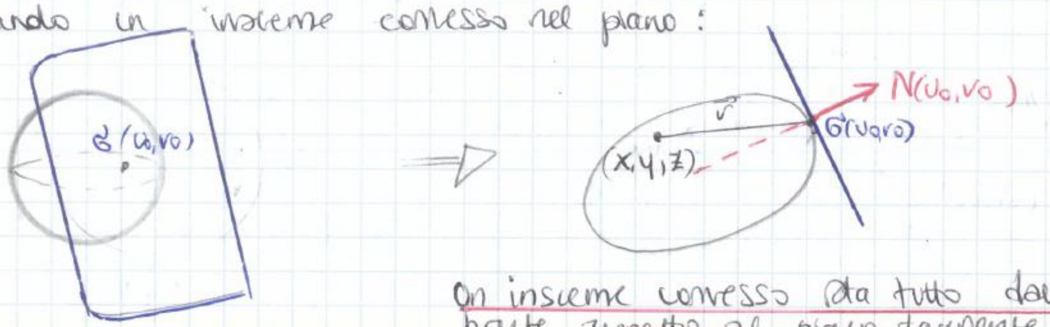
$= \boxed{-\frac{\pi}{2}}$

2) METODO VETTORIALE (solo se l'insieme D è convesso)

convesso

non convesso

Proiettando un insieme convesso nel piano:



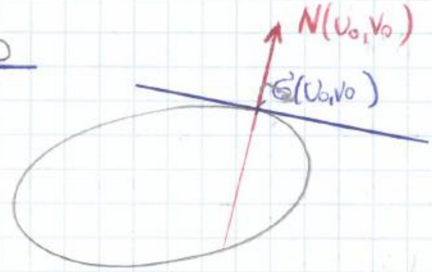
Un insieme convesso sta tutto dalla stessa parte rispetto al piano tangente

OSS. $(x,y,z) \in D \implies \vec{V} = (x,y,z) - \vec{G}(u_0,v_0)$

Calcolo $V \cdot \vec{N}(u_0,v_0)$

- (<0) ANGOLO OTTUSO $\downarrow$ N uscente
- (>0) ANGOLO ACUTO $\downarrow$ N entrante

3) ANALITICO



$\boxed{\varepsilon > 0}$ "piccolo" (mi muovo nella direzione ortogonale all'insieme)

$\vec{G}(u_0,v_0) + \varepsilon N(u_0,v_0) \in D$? $\begin{cases} \text{SI} & \vec{N} \text{ è entrante} \\ \text{NO} & N \text{ è uscente} \end{cases}$

$\implies$ se $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che $\forall \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ ...

ESEMPIO: $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$

$\Sigma = \partial D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\Sigma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z > 0\}$

$\Sigma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 = R^2,\ z < 0\}$

Ricavo z da Σ_1: $0 \le z \le \sqrt{R^2-x^2-y^2} \implies$, $x^2+y^2 \le R^2$

$\hookrightarrow$ Grafico della funzione $g(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$, $g: K \mapsto K$

$\Sigma_1 = g_1(K)$, $g_1 : K \mapsto \mathbb{R}^3$

$g_1(x,y) = (x,y,\sqrt{R^2-x^2-y^2})$

ESEMPIO: Il flusso del campo vettoriale:

$$F(x,y,z) = \left(-\frac{7}{6} x e^{-xy}, \; -\frac{7}{6} y e^{-xy}, \; \frac{7}{6} xy (9-z) e^{-xy} \right)$$ attraverso

la superficie $\Sigma : \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 9 - e^{xy}, \; -2 \le x \le 0, \; 0 \le y \le -3x \}$

orientata in modo che il vettore normale a Σ formi un angolo acuto con il versore fondamentale asse z; $\longmapsto (0,0,1)$

$$\sigma : (x,y) \longmapsto (x, y, 9 - e^{xy}) \quad ; \quad K : \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -2 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le -3x \end{array} \right\}$$

$$N_f(x,y) = \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x,y) \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = \left(+y e^{xy}, \; x e^{xy}, \; 1 \right)$$

N_f forma un angolo acuto con $(0,0,1)$?
$\mapsto$ la terza componente deve essere positiva $\Rightarrow 1 > 0 \Rightarrow$ ok. $N_f = N$

$$\int_\Sigma F \cdot n \, d\sigma = \int_K F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) \, dx \, dy \underset{(*)}{=}$$

$$F(\sigma(x,y)) \cdot N(x,y) = F(x,y,9-e^{xy}) \cdot (y e^{xy}, x e^{xy}, 1) =$$

$$= \left(-\frac{7}{6} x e^{-xy}, \; -\frac{7}{6} y e^{-xy}, \; \frac{7}{6} xy (\cancel{9} - \cancel{9} + e^{xy})(e^{-xy}) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(y e^{xy}, \; x e^{xy}, 1 \right) =$$

$$= \left(-\frac{7}{6} xy \right) + \cancel{\left(-\frac{7}{6} xy \right)} + \cancel{\frac{7}{6} xy} = -\frac{7}{6} xy$$

$$\overset{(*)}{=} \int_K -\frac{7}{6} xy \, dx \, dy, \quad K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -2 \le x \le 0 \\ 0 \le y \le -3x \end{array} \right\}$$

$0 \le -3x \Rightarrow x \le 0$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0} \left[\int_0^{-3x} -\frac{7}{6} xy \, dy \right] dx = \int_{-2}^{0} -\frac{7}{12} x \left[y^2 \right]_0^{-3x} dx$$

$$= \int_{-2}^{0} -\frac{7}{\cancel{12}_4} x \, \cancel{9}^{3} x^2 \, dx = \int_{-2}^{0} -\frac{21}{4} x^3 \, dx$$

$$= \left[-\frac{21 x^4}{16} \right]_{-2}^{0} = \boxed{21}$$

TEOREMA di GREEN

Def $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto limitato : ∂A è il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti γ.
Diciamo che ∂A è orientato positivamente se γ induce su di esso un verso di percorrenza antiorario.
In altri termini ∂A è orientato ⊕ se percorrendo idealmente ∂A si vedono i punti di A alla propria sinistra

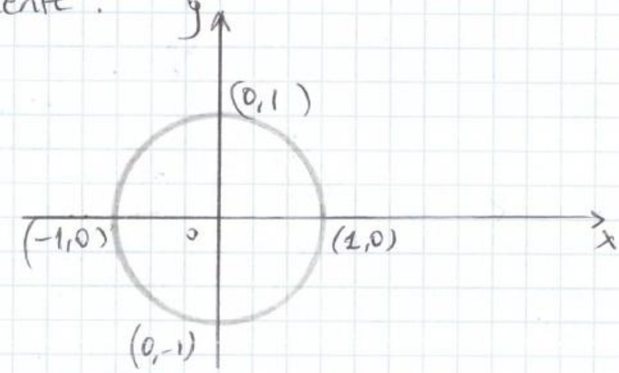
Teorema :

Hp = $\begin{cases} \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto non vuoto} \\ F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ di classe } C^1, \; F = (f_1, f_2) \\ A \subset \Omega \text{ aperto limitato : } \partial A \subseteq \Omega \text{ è il sostegno di una curva parametrica (chiusa, semplice e regolare a tratti)} \\ \partial A \text{ orientato } \oplus \end{cases}$

$$\boxed{\text{Th}: \quad \oint_{\partial A} F\,dp = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy}$$

ESEMPIO di APPLICAZIONE. Calcolare la circuitazione di $F(x,y) = (y^2, x)$ lungo il bordo di $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 < 1\}$ orientato positivamente.

- Come si fa?



① Def : $\oint_{\partial A} F\,dp = (\text{devo trovare } \gamma)$
$= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

② OSS : F è di classe $C^1 \mapsto$ USO TEOR. GREEN

$$\oint_{\partial A} F\,dp = \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\,dy = \int_A (1 - 2y)\,dx\,dy$$

$$\int_A 1\,dx\,dy - \underbrace{\int_A 2y\,dx\,dy}_{=0} = m(A) = \pi$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 65 di 148

Corollario:

Hp: $\begin{cases} A \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto} : \partial A \text{ è sostegno di una } \gamma \text{ chiusa semplice e regolare a tratti;} \\ \partial A \text{ orientato } \oplus, \quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ di classe } C^1, \; F = (f_1, f_2) \\ : \forall x,y \in \mathbb{R}^2 \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 1 \qquad (*) \end{cases}$

Th: $m(A) = \oint_{\partial A} F dp$ Conseguenza immediata del th. di Green

DIM: $m(A) \underset{def}{=} \int_A 1 \, dx\, dy \underset{(*)}{=} \int_A \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right) dx\, dy =$

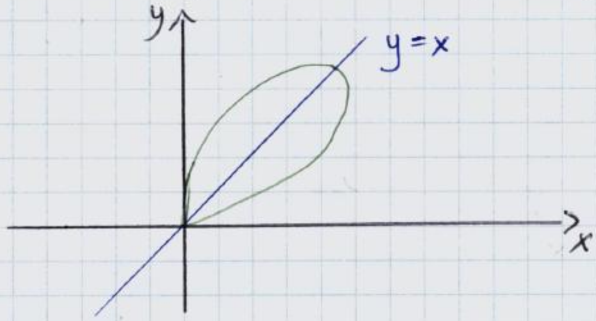
$\underset{\text{TH. GREEN}}{=} \oint_{\partial A} F dp .$

CAMPI vettoriali che verificano (*) sono:

$F(x,y) = (0, x), \quad F(x,y) = (-y, 0), \quad F(x,y) = (ky, (k+1)x), \; k \in \mathbb{R}.$

ESEMPIO: $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t, \; t - t^3)$.
Calcolare l'area della regione di piano delimitata dal sostegno di γ.

OSS: γ è chiusa $\left(\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0) \right)$



$(x,y) = \gamma(t)$

$\begin{cases} x = t^3 - 3t^2 + 2t \\ y = t - t^3 \end{cases}$

$\underset{\text{corollario}}{\Rightarrow} \quad m(A) = \oint_{\partial A} F \cdot dp = \oint_{\gamma} F dp$, F verifica (*)

$F(x,y) = (-y, 0)$; $\int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt =$ $\gamma'(t) = (3t^2 - 6t + 2, 1-3t$

$\Rightarrow (t - t^3, 0) \cdot (3t^2 - 6t + 2, 1 - 3t^2) = 3t^3 - 6t^2 + 2t - 3t^5 + 6t^4 - 2t^3$
$= t^3 - 3t^5 + 6t^4 + 2t$

$\Rightarrow \int_0^1 (t^3 - 3t^5 + 6t^4 + 2t) dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - \frac{3}{6} t^6 + \frac{6}{5} t^5 + t^2 \right]_0^1$

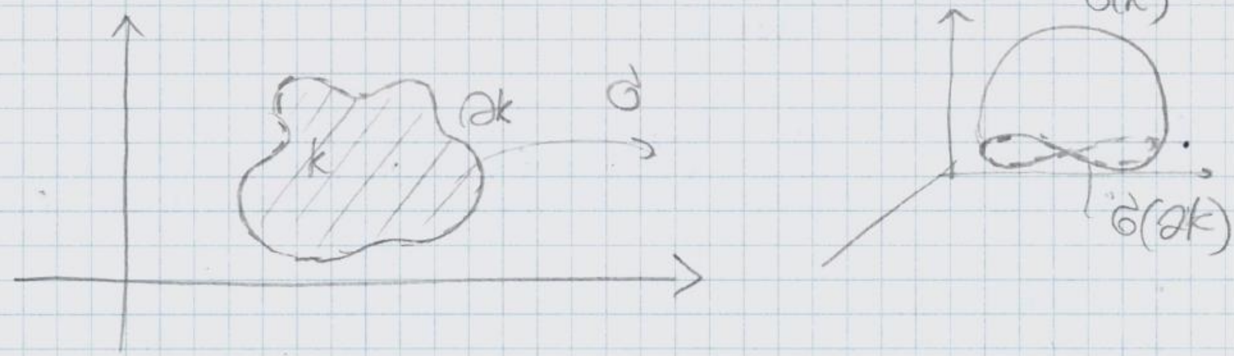
$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{6}{5} + 1 = \frac{5 - 10 + 24 + 20}{20}$

$$-3\left[\frac{1}{6}\rho^6\right]_1^2 \cdot \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{2}(2\theta - \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta)\right]_0^{2\pi} =$$

$$-\frac{1}{2}(64-1)\cdot\frac{1}{16}(4\pi) = -\frac{63\pi}{8}.$$

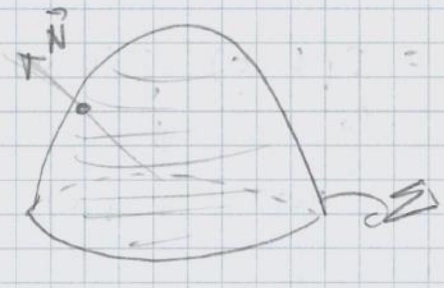
TEOREMA di STOKES

Def: $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto limitato connesso per archi tale che ∂A sia il sostegno di una curva parametrica chiusa, semplice e regolare a tratti. $K = \bar{A} = A \cup \partial A$ (cioè K compatto e $\partial K \equiv \partial A$).
$\sigma : K \mapsto \mathbb{R}^3$ calotta regolare.
Si chiama "bordo" di σ la restrizione di σ al bordo di K. Si denota con $\partial\sigma$.
Quindi $\partial\sigma = \sigma|_{\partial K} : \partial K \to \mathbb{R}^3$



Poniamo $\Sigma = \sigma(K)$ e $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$.
Diciamo che $\partial\sigma$ è orientato $\oplus$ se $\sigma(\partial K)$ è percorsa in senso antiorario ~~posto come il vettore normale~~ rispetto ad N

In altri termini $\partial\sigma$ è orientato $\oplus$ se percorrendo $\sigma(\partial K)$ appoggiati alla faccia di Σ da cui parte il vettore N si vedono i punti di Σ alla propria sinistra (talvolta si parla di $\partial\Sigma$)

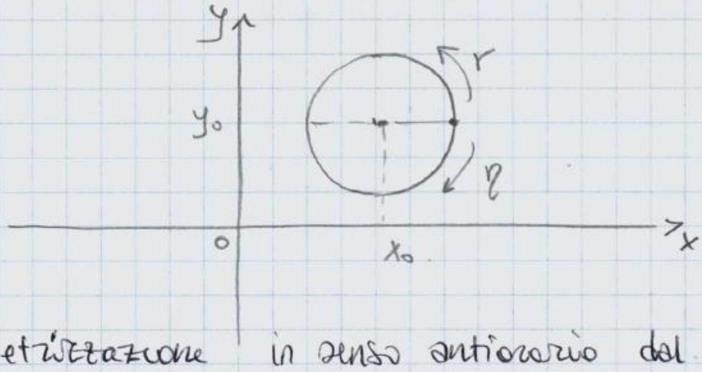


OSS

$$\partial\Sigma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

PARAMETRIZZAZIONE di linee nel piano e nello spazio

1) CIRCONFERENZA : $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $R \geq 0$



- Una parametrizzazione in senso antiorario dal punto $(x_0 + R, y_0)$:

$$\gamma(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 + R\sin t)$$

posto $(x, y) = \gamma(t)$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} x = x_0 + R\cos t \\ y = y_0 + R\sin t \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R$ eq. circonferenza

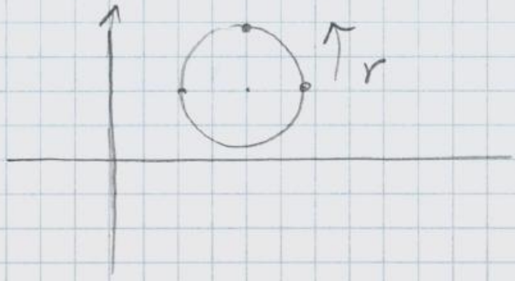
$(t \in \mathbb{R}$, $t \in [0, 2\pi]$

$\gamma(0) = (x_0 + R, y_0)$
$\gamma(\pi/2) = (x_0, y_0 + R)$ $\Rightarrow$ movimento in senso antiorario.

- Una parametrizzazione in senso orario dal punto $(x_0 + R, y_0)$

$$\eta(t) = (x_0 + R\cos t,\ y_0 - R\sin t)$$

$\eta(0) = (x_0 + R, y_0)$
$\eta(\pi/2) = (x_0, y_0 - R)$ $\Rightarrow$ movimento in senso orario.



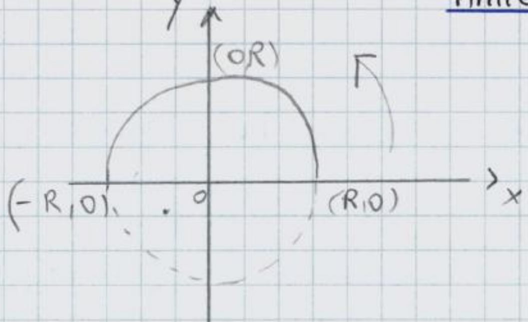
$\Rightarrow$ 2 GIRI in senso antiorario

$\downarrow$

$\gamma : [0; 4\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$
(come prima)

2) ARCHI di CIRCONFERENZA

Antiorario: $(x_0, y_0) \equiv (0, 0)$



$\gamma : [0, 2\pi] \longmapsto \mathbb{R}^2$
$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$
parametrizza tutta la circonferenza

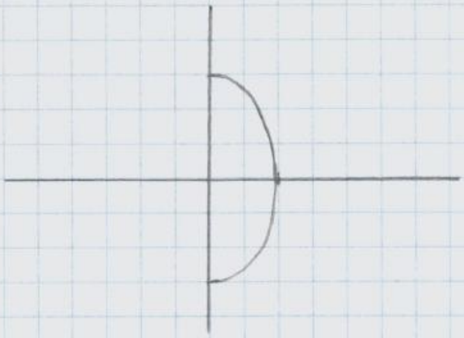
$\gamma_{|[0,\pi]} : [0, \pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$\hookrightarrow$ restrizione dell'intervallo.

3

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 71 di 148

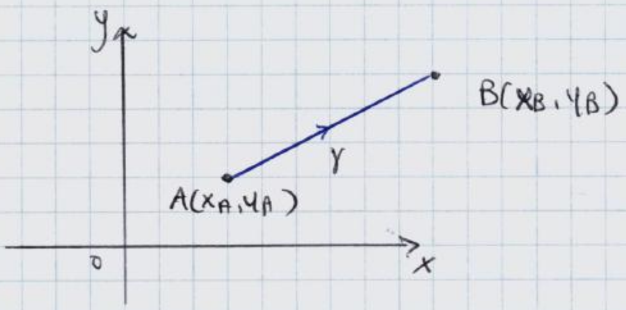
ESEMPIO:



NB: Devo definire una curva parametrica su un unico intervallo, e non su unioni di intervalli

↳ $\gamma_{|[-\pi/2;\pi/2]} : [-\pi/2;\pi/2] \mapsto \mathbb{R}^2$

4) SEGMENTI nel piano (da A a B, partendo da A)



$\gamma : [0;1] \longmapsto \mathbb{R}^2 \quad \gamma(t) = \left(x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A)\right)$

$\gamma(0) = (x_A, y_A) \equiv A$

$\gamma(1) = (x_B, y_B) \equiv B$

Posto $(x,y) = \gamma(t) \Rightarrow \begin{cases} x = x_A + t(x_B - x_A) \\ y = y_A + t(y_B - y_A) \end{cases}$

Ipotesi: $x_A < x_B$, $y_A < y_B$

$x(t)$ e $y(t)$ sono continue e derivabili:

$$\left.\begin{array}{l} x'(t) = x_B - x_A > 0 \\ y'(t) = y_B - y_A > 0 \end{array}\right\} \rightarrow x(t),\ y(t) \text{ crescenti}$$

$[0,1] \longmapsto [x_A, x_B]$

$[0,1] \longmapsto [y_A, y_B]$ $\Longrightarrow$ Ricavando il parametro t: $\left\langle \dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A} \right\rangle$.

|| Per $t<0$ e $t>1$, otteniamo i punti delle 2 semirette (di origini rispettivamente A e B).

ESERCITAZIONE 5 (06/11/2015)

1 $F(x,y) = (xy,\ x-y)$. $\gamma : [0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t - t^2)$

Calcolare l'integrale di linea.

$$\int_\gamma F(x,y) = \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt =$$

$(*)$ $\gamma'(t) \to (1,-2t)$

$(*)$ $F(t,t^2) \cdot (1,-2t) = (t^3,\ t-t^2) \cdot (1,-2t) = t^3 - 2t(t-t^2) = t^3 + 2t^2 + t^3$

2 $F(x,y) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{y}{x^2+y^2} \right)$,

$\gamma : [0,2\pi] \longmapsto (\cos t,\ \text{sen}\, t)$ Calcolare i.d.L.

$$\int_\gamma F(xy) = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot (-\text{sen}\,t, \cos t)\, dt$$

$$(*) = \left(\frac{\cos t}{1},\ \frac{\text{sen}\,t}{1} \right) \cdot (-\text{sen}\,t, \cos t) = -\text{sen}\,t\cos t + \text{sen}\,t \cos t = 0.$$

$$\Longrightarrow \int_0^{2\pi} 0\, dt = 0.$$

3 $F(x,y,z) = (y,\ xz,\ xy)$; $\gamma : [0,\pi] \longmapsto (\cos t, \text{sen}\,t, \text{sen}\,t)$.

Calcolare $\int_\gamma F\, dp$

$$\int_\gamma F\,dp = \int_0^{\pi} F(\cos t, \text{sen}\,t, \text{sen}\,t) \cdot (-\text{sen}\,t, \cos t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (\text{sen}\,t,\ \text{sen}\,t\cos t,\ \text{sen}\,t \cos t) \cdot (-\text{sen}\,t, \cos t, \cos t)\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\text{sen}^2 t + \cos^2 t\ \text{sen}\,t + \text{sen}\,t \cos^2 t \right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} -\text{sen}^2 t + 2\,\text{sen}\,t \cos^2 t\ dt =$$

$$\left[-\frac{1}{2}\left[t + \text{sen}\,t\cos t \right] + \frac{2}{3}\cos^3 t \right]_0^{\pi}$$

$=$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 75 di 148

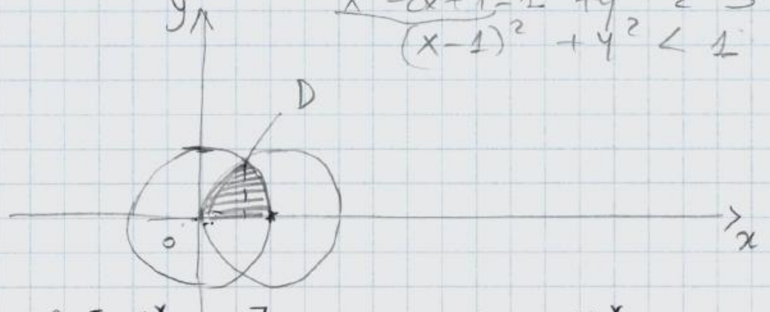
INTEGRALI TRIPLI

h) $\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz \quad ; \quad \Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x^2+y^2-2x<0}, \; 0<z<x, \; \underline{x^2+y^2<1, \; y>0}\}$

$D: \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-2x<0, \; x^2+y^2<1, \; y>0\}$

$x^2-2x+1-1+y^2<0$

$(x-1)^2+y^2<1$



$$\int_\Omega y\,dx\,dy\,dz = \int_D \left[\int_0^x y\,dz\right] dx\,dy = \int_D [yz]_0^x \,dx\,dy = \int_D xy\,dx\,dy$$

Cambio coordinate polari $\Phi: \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}, \quad \begin{array}{l} \rho \geq 0 \\ \theta \in [0;2\pi] \end{array}$

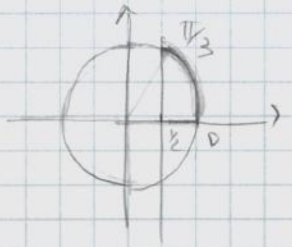
$$\int_D xy\,dx\,dy = \int_{D'} \rho\cos\theta \cdot \rho\,\text{sen}\,\theta \cdot \rho\,d\rho\,d\theta \quad (*) = \int_{D'} \rho^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta$$

$D': \begin{cases} \rho^2-2\rho\cos\theta<0 \\ \rho^2<1 \\ \rho\,\text{sen}\,\theta>0 \\ \rho>0, \quad \theta\in[0,2\pi] \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ \text{sen}\,\theta > 0 \\ \rho-2\cos\theta<0 \\ \theta\in[0,2\pi] \end{cases} ; \quad \begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ \text{sen}\,\theta>0 \\ \cos\theta>\rho/2 \end{cases}$

$\begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ \rho<2\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta>0 \Rightarrow 0\leq\theta\leq\pi/2 \end{cases}$

$1\leq 2\cos\theta$

$\cos\theta \geq 1/2$



$\Rightarrow 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}$

$*$ Tra $\pi/3$ e $\pi/2$ è verificata l'altra relazione.

$D' = \Omega_1 + \Omega_2 \quad ; \quad \Omega_1 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq\rho\leq 1, \; 0\leq\theta\leq\pi/3\}$

$\Omega_2 = \{(\rho,\theta)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq\rho\leq 2\cos\theta, \; \frac{\pi}{3}\leq\theta\leq\pi/2\}$

$$\int_{\Omega_1} \rho^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \left(\int_0^1 \rho^3\,d\rho\right)\left(\int_0^{\pi/3}\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta\right) = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\right]_0^{\pi/3}$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{32}.$$

$$\int_{\Omega_2} \rho^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\rho\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi/2}\left[\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\rho\right]d\theta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{2\cos\theta}\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^4\theta\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\,d\theta = \left[-\frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{3}\cdot\frac{1}{\cancel{6}}\cos^6\theta\right]_{\pi/3}^{\pi/2} = (-)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\cancel{64}_{32}}\right) = \frac{1}{96}+\frac{3}{32} = \frac{10}{96} = \frac{5}{48}$$

(continua)

$$= (\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi,\ \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi,\ \cos\theta\operatorname{sen}\theta) = N.$$

È un vettore che punta verso l'alto $\iff$ $\cos\theta\operatorname{sen}\theta > 0$ nell'intervallo $[0, \pi/2]$

$\implies N_f$ è uscente.

$$\int_{\Sigma} F\cdot dp \overset{S}{=} \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F \cdot n\, d\sigma = \int_{\Sigma} \operatorname{rot} F(\sigma(\theta,\varphi))\cdot N(\theta,\varphi)\, d\theta\, d\varphi$$

$$\operatorname{rot} F(\sigma(\theta,\varphi))\cdot N(\theta,\varphi) = (1,0,0)\cdot(\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi,\ \operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi,\ \operatorname{sen}\theta\cos\theta) = \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi.$$

$$\implies \int_K \operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi\, d\theta\, d\varphi, \quad \text{con } K = [0,\pi/2]\times[-\pi/2,\pi/2]$$

$$= \left(\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\, d\varphi\right) = \left[\frac{1}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta\cos\theta)\right]_0^{\pi/2}\left[\operatorname{sen}\varphi\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot 2 = \frac{\pi}{2}.$$

TEOREMA di GAUSS

Def Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ un aperto limitato non vuoto. Diciamo che D è un aperto con bordo se ∂D è unione di numero finito di sostegni di calotte regolari orientati secondo il verso uscente da D e aventi al più in comune 2 ≥ a 2 sostegni di curve parametriche che S e r.a.t.

Teorema Hp = $\begin{cases} \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ aperto non vuoto},\ F:\Omega \to \mathbb{R}^3 \text{ di classe } C^1,\ F = (f_1, f_2, f_3) \\ D \subseteq \Omega \text{ aperto con bordo tale che } \partial D \subseteq \Omega \end{cases}$

Th: (FLUSSO USCENTE di F)
$$\int_{\partial D} F\cdot n\, d\sigma = \int_D \operatorname{div} F(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

con $\operatorname{div} F(x,y,z) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,y,z).$

CAMPI CONSERVATIVI

$x = (x_1; x_2, \dots, x_n)$

Def. Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
Siano $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto, $F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ campo vettoriale
F conservativo se $\exists$ una funzione differenziabile $f: \Omega \mapsto \mathbb{R}$
tale che $\forall x \in \Omega$: $\nabla f(x) = F(x)$.
In tal caso f è detto "POTENZIALE" di F su Ω.

se $F = (f_1, \dots, f_n)$ allora f è un potenziale se $\nabla f(x) = F(x)$, cioè
$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, ovvero
se $\boxed{\forall x \in \Omega : \forall i \in 1 \dots n . \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = f_i(x)}$

OSS. Poiché $\nabla(f+c) = \nabla f$ $\forall c \in \mathbb{R}$ se F è conservativo ammette ∞ potenziali

ESEMPI:
$F(x,y) = (0,0)$ è conservativo. Infatti $f(x,y) = k \Rightarrow$
$\nabla f(x,y) = (0,0) = F(x,y)$.

$F(x,y) = (x,y)$ è conservativo. Infatti $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$
$\Rightarrow \nabla f(x,y) = (x,y) = F(x,y)$.

In generale ($\mathbb{R}^2$) $F(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$
F conservativo $\Longleftrightarrow$ $\nabla f(x,y) = F(x,y) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_1(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f_2(x,y) \end{cases}$.

Def. Siano $0 \leq a \leq b \leq +\infty$ e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : a \leq \|x\| \leq b\}$
Diciamo che un campo vettoriale $F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ è
RADIALE se $\exists \varphi: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

funzione reale

$\boxed{\forall x \in \Omega : F(x) = \varphi(\|x\|)x.}$

Esempio. Il campo gravitazionale generato da una massa puntiforme posta in $(0,0)$ è:
$$F(x,y,z) = -\frac{1}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}(x,y,z).$$
$$\varphi(t) = -\frac{1}{t^3}. \quad (\|(x,y,z)\| = t)$$

OSS. Se $F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^3$ è un campo radiale e continuo, allora è conservativo.

39

Def . → RICHIAMO
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto non vuoto si dice "connesso per archi" se $\exists\, \gamma$ curva parametrica $\gamma: [a,b] \mapsto \Omega$ tale che $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.

oss. Se Ω connesso per archi allora $\forall x,y \in \Omega$ $\exists \gamma: [a,b] \mapsto \Omega$ curva parametrica semplice e regolare a tratti tale che $\gamma(a) = x$ e $\gamma(b) = y$.

PROPRIETA' dei POTENZIALI :

Hp $\begin{cases} \cdot\ \Omega \text{ aperto connesso per archi} \\ \cdot\ F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n \text{ campo vettoriale conservativo} \\ \cdot\ f,g : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ due potenziale} \end{cases}$

Tesi: $\boxed{\exists c \in \mathbb{R} \text{ tale che } f(x) - g(x) = c, \quad \forall x \in \Omega}$ (i potenziali differiscono per una costante)

Dim f,g potenziali di F su $\Omega \Rightarrow f,g$ differenziabili in Ω:
$\nabla f(x) = \nabla g(x) = F(x)$.

$f-g : \Omega \mapsto \mathbb{R}$; E' a sua volta differenziabile in Ω:
$$\nabla(f-g)(x) = \nabla f(x) - \nabla g(x) = F(x) - F(x) = 0.$$

Poichè Ω è connesso per archi ne segue che $f-g$ è costante in Ω:

↳ dim
Se $x,y \in \Omega$, allora $(f-g)(x) = (f-g)(y)$.
Poichè Ω è connesso per archi, per l'oss. precedente:
$\exists\, \gamma: [a,b] \mapsto \Omega$: $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$,
regolare a tratti e semplici.

Conformemente alla def. di curva regolare a tratti esistono $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_m = b$ tali che $\gamma_{|[t_{i-1};t_i]}$ è regolare.

In particolare γ è derivabile con derivata continua in $\forall t \neq t_i$, $\forall i = 0,\dots,m$. (e diversa da zero)

(funzione ausiliaria) Sia $\varphi: [a,b] \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi(t) = [(f-g) \circ \gamma](t) = (f-g)(\gamma(t))$.

$f-g$ differenziabile $\Rightarrow$ continua
γ curva parametrica $\Rightarrow$ continua $\Longrightarrow \varphi$ è continua in tutto $[a,b]$

φ è derivabile $\forall t \neq t_i$, $\forall i = 0,\dots,m$, con $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}[(f-g)\circ\gamma](t)$

$$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{f-g} \mathbb{R}$$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla(f-g)(\gamma(t))}_{=0} \cdot \gamma'(t) = \emptyset.$$

$\Longrightarrow$ conseguenza teorema di Lagrange

φ costante in ogni intervallo $[t_{i-1}, t_i]$.
Essendo φ continua, allora è costante in tutto $[a,b]$
$\Rightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$

$$(f-g)(x) = (f-g)(\gamma(a)) = \varphi(a) = \varphi(b) = (f-g)(\gamma(b)) = (f-g)(y)$$

40

Per def di integrale di linea $\int_\gamma F\,dp = \sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = (*)$

(funzione ausiliaria)

Sia ψ da $[a,b] \mapsto \mathbb{R}$: $\psi(t) = f(\gamma(t)) = (f \circ \gamma)(t)$.

- f potenziale di F $\Rightarrow$ f differenziabile $\Rightarrow$ (è sicuramente continua) $\nabla f(x) = F(x)$.
- F continuo $\Rightarrow$ ∇f continuo in Ω.
- ψ derivabile in $\forall t \neq t_i$, $\forall i = 0, \dots, m$:

$$\psi'(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t),$$

$[a,b] \xrightarrow{\gamma} \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ proprietà Lezione 3

$$F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

$(*)$ ψ' continua

$$\hookrightarrow \sum_{i=1}^{m} \int_{i-1}^{i} \psi'(t)\,dt = \sum_{i=1}^{m} \Big[\psi(t)\Big]_{i-1}^{i} = \sum_{i=1}^{m} \big[\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})\big]$$

$i=1 \dots$, $i=2 \dots$, $i=3 \dots$ $\Rightarrow$ $\cancel{\psi(t_1)} - \psi(t_0) + \cancel{\psi(t_2)} - \cancel{\psi(t_1)} + \cancel{\psi(t_3)} - \cancel{\psi(t_2)} + \dots \psi(t_m) - \psi(t_{m-1}) = $

$$\Rightarrow = -\psi(t_0) + \psi(t_m) = \psi(b) - \psi(a). \blacksquare$$

Ma $\psi(t) = (f \circ \gamma)(t) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Se γ chiusa $\Rightarrow$ $\gamma(a) = \gamma(b)$ $\Rightarrow$ $\oint_\gamma F \cdot dp = 0$. $\blacksquare$

TEOREMA di EQUIVALENZA (Per i campi conservativi)

(Hp) Ω aperto connesso per archi $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$; $F : \Omega \mapsto \mathbb{R}^n$ campo continuo.

(Tesi): Sono fatti equivalenti:

1) F conservativo
2) Per ogni coppia di curve parametriche semplici e r.a.t $\gamma_1 : [a,b] \mapsto \Omega$ e $\gamma_2 : [c,d] \mapsto \Omega$: $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$ si ha che

$$\int_{\gamma_1} F\,dp = \int_{\gamma_2} F \cdot dp$$

3) Per ogni curva parametrica chiusa, semplice e r.a.t $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$, allora

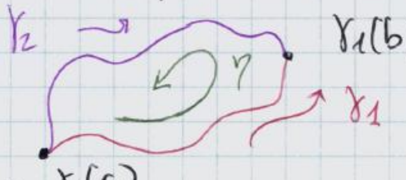
$$\oint_\gamma F \cdot dp = 0$$

Dim 1) $\Leftrightarrow$ 2), 2) $\leftrightarrow$ 3), 1) $\leftrightarrow$ 3)

1) $\Rightarrow$ 3) Per il teorema precedente.

3) $\Rightarrow$ 2)

$\Delta t_2 = d - c$



$\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$

$\Delta t_1 = b - a$

$\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$

ESERCIZI INT. SUPERFICIE

- $\int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma$, $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad 1 \le z \le 2\right\}$

Come si fa?

- Parametrizzare Σ, cioè determinare σ : $\Sigma = \sigma(k)$;
- Calcolare il vettore normale a Σ, $N(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$
- Calcolare $\|N(u,v)\|$.
- $\int_\Sigma f\, d\sigma = \int_k f(\sigma(u,v))\, \|N(u,v)\|\, du\, dv$.

Σ è il grafico di $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g : k \mapsto \mathbb{R}$,

$k = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 2 \Rightarrow \frac{1}{4} \le x^2+y^2 \le 1\right\}$

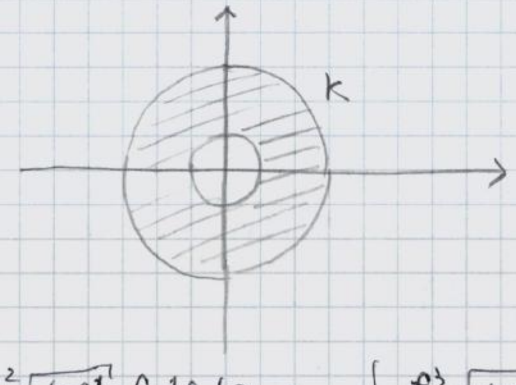
$\Sigma = \sigma(k)$, dove $\sigma(x,y) = \left(x, y, \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.

$N(x,y) = \left(-\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), -\frac{\partial g}{\partial y}(x,y), 1\right) = \left(\frac{x}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

$\Rightarrow \|N(x,y)\| = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3} + 1} = \sqrt{\frac{1+(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2}} = \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+1}}{(x^2+y^2)}$

$\Rightarrow \int_\Sigma \frac{1}{z^4}\, d\sigma = \int_k f(\sigma(x,y))\, \|N(x,y)\|\, dx\, dy = \int_k (x^2+y^2)^{\cancel{2}} \frac{\sqrt{(x^2+y^2)^2+1}}{\cancel{(x^2+y^2)}}\, dx\, dy$

$= \int_k (x^2+y^2)\sqrt{(x^2+y^2)^2+1}\, dx\, dy$;



Coordinate polari

$= \int_{k'} \rho^2\sqrt{1+\rho^4}\cdot\rho\, d\rho\, d\theta = \int_{k'} \rho^3\sqrt{1+\rho^4}\, d\rho\, d\theta$, $k' = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times [0, 2\pi]$

$= 2\pi \left[\frac{(1+\rho^4)^{\frac{3}{2}}}{6}\right]_{1/2}^{1} = \left(-\frac{17}{64}\sqrt{17} + 2\sqrt{2}\right)\frac{\pi}{3}$.

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 87 di 148

• Calcolare l'area di $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \; z = xy, \; x^2+y^2\le 1, \; x\ge 0, \; y\ge 0\}$

$A_\Sigma = \int_\Sigma d\sigma$; $\quad \sigma(x,y) = (x, y, \underbrace{xy}_{g(x,y)})$, $\quad K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2\le 1, \; x\ge 0, \; y\ge 0\}$

$\Rightarrow \quad N(x,y) = (-y, -x, 1) \quad \Rightarrow \quad \|N(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2+1}$

$\Rightarrow \quad \int_\Sigma d\sigma = \int_K \sqrt{x^2+y^2+1}\,dx\,dy \underset{polar}{=} \frac{1}{2}\int_{K'} 2\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho\,d\theta$,

$K' = [0,1]\times[0,\pi/2] \quad \Rightarrow \quad = \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\int_0^1 2\rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\rho =$

$= \frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}(1+\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(2\sqrt{2}-1)$.

ESERCIZI SUL FLUSSO DI CAMPO VETTORIALE attraverso una SUPERFICIE.

• Calcolare il flusso del campo $F(x,y,z) = (-3x, -3y, 2\sqrt{x^2+y^2}-z)$ attraverso $\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \; z = 2\sqrt{x^2+y^2}, \; x^2+y^2\le 9\}$ orientata in modo che il versore normale a Σ formi un angolo ottuso con il versore fondamentale dell'asse z.

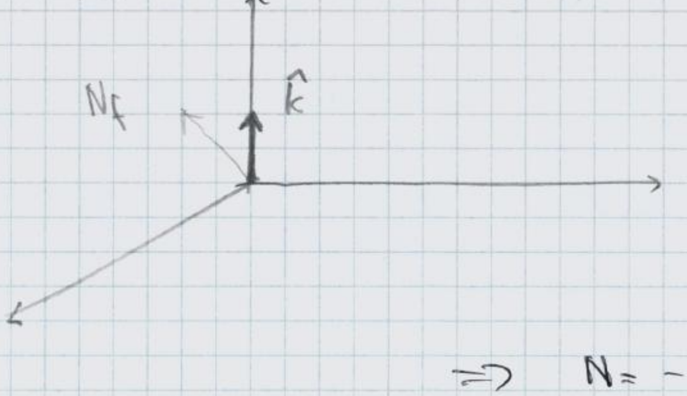
Come si fa?

- Parametrizzare Σ, cioè trovare $\sigma: K\to\mathbb{R}^3$: $\sigma(K) = \Sigma$
- Calcolare $N_f(u,v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)$
- Controllare se N_f corrisponde all'orientamento di Σ, in questo caso N_f formerebbe un angolo ∟ con $\hat{k} = (0,0,1)$
  - N_f va bene $\Rightarrow N = N_f$
  - N_f non va bene $\Rightarrow N = -N_f$
- $\int_\Sigma F\cdot n = \int_K F(\sigma(u,v))\cdot N(u,v)\,du\,dv$

$\Sigma = \sigma(K)$, $\quad \sigma(x,y) = (x, y, 2\sqrt{x^2+y^2})$, $\quad K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2\le 9\}$

$N_f = \frac{\partial\sigma}{\partial x}(x,y)\wedge\frac{\partial\sigma}{\partial y}(x,y) = \left(-2\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$

N_f forma un angolo ottuso con $\hat{k} = (0,0,1)$?



La terza componente è $\oplus$, quindi punta verso l'alto

$\Downarrow$

N_f forma angolo <

$\Rightarrow \quad N = -N_f$.

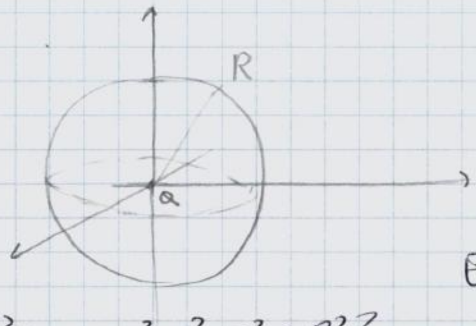
Σ_2 : $g_2(x,y) = 1$; $\sigma_2 = (x, y, 1)$, $K_2 : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$

$N_{2f}(x,y) = (0,0,1)$ è uscente da D, quindi coincide con N_2

$$\int_{\Sigma_2} F \cdot n = \int_{K_2} (x^2, y^2, 1) \cdot (0,0,1)\, dx\,dy = \int_{K_2} dx\,dy = \text{Area di } K_2 = \pi.$$

Conclusione : $\int_{\partial D} F \cdot n\, d\sigma = -\frac{\pi}{2} + \pi = \frac{\pi}{2}$.

- Calcolare il flusso del campo elettrico generato da Q posta nell'origine attraverso la sfera di centro O e raggio R.



$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Qr}{\|r\|^3}$$

$r = (x,y,z)$

$\Downarrow$

$$E(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$.

$\sigma(\theta,\varphi) = (R\,\text{sen}\theta\cos\varphi,\ R\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi,\ R\cos\theta)$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$N_f(\theta,\varphi) = \frac{\partial\sigma}{\partial\theta}(\theta,\varphi) \wedge \frac{\partial\sigma(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}$$

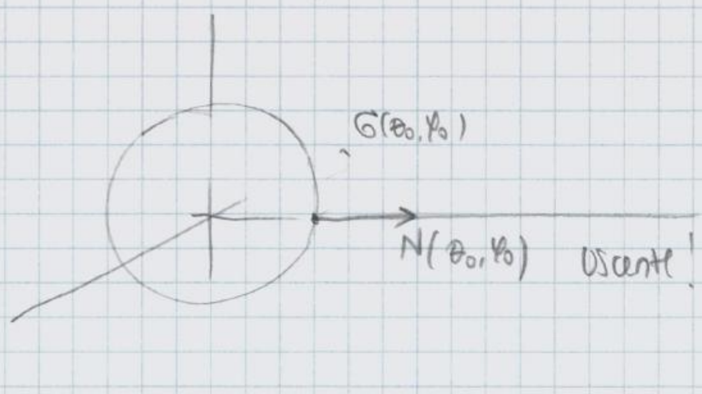
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ R\cos\theta\cos\varphi & R\cos\theta\,\text{sen}\varphi & -R\,\text{sen}\varphi \\ -R\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi & R\,\text{sen}\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = (R^2\text{sen}^2\theta\cos\varphi,\ R^2\text{sen}^2\theta\,\text{sen}\varphi,\ R^2\text{sen}\theta\cos\theta)$$

N_f è uscente dalla sfera?

$(\theta_0, \varphi_0) \in \text{int } K$, $(\theta_0, \varphi_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$\sigma(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, R, 0)$

$N_f(\theta_0,\varphi_0) = N_f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = (0, R^2, 0)$



$N(\theta,\varphi) \equiv N_f(\theta,\varphi)$.

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}) = \int_\Sigma \vec{E} \cdot n\, d\sigma = \int_K \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(R\,\text{sen}\theta\cos\varphi,\ R\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\varphi,\ R\cos\theta)}{(R^2)^{3/2}} \cdot N(\theta,\varphi)$$

⋮

- η è chiaramente semplice e r.a.t

$$\lim_{t\to b^+} \eta(t) = \lim_{t\to b^+} (x_1+t-b, x_2, \dots x_n) = (x_1, \dots, x_n) = x$$
$\hookrightarrow$ η è continua.

$$\Rightarrow \frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} = \frac{f(\bar{x})-f(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\left(\int_\eta F\cdot dp\right) - \int_\gamma F\cdot dp\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_\gamma F(\eta(t))\cdot\eta(t)\,dt + \int F(\eta(t))\cdot\eta'(t)\,dt - \int_\gamma F\cdot dp\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\underbrace{\cancel{\int_a^b F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt}}_{\int_\gamma F\cdot dp} + \int_b^{b+h} F(x_1+t-b, x_2 \dots x_n)\cdot(1,0,\dots 0)\,dt - \cancel{\int_\gamma F dp}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_b^{b+h} (f_1(\dots), f_2(\dots), \dots, f_n(\dots))\cdot(1,0,0,\dots 0)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_b^{b+h} f_1(x_1+t-b, x_2, \dots x_n)\,dt\right]$$

Cambio di variabile : $s = t-b$, $ds = dt$

$t = b \Rightarrow s = 0$

$t = b+h \Rightarrow s = h$

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\int_0^h f_1(x_1+s, x_2, \dots, x_n)\,ds.$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+he_1)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_0^h f_1(x_1+s, x_2 \dots x_n)\,ds}{h} =$$

Per ipotesi F continuo $\Rightarrow$ anche f_1 è continua

$\xRightarrow{T.F.C.I}$ $\int_0^h f_1(x_1+s, x_2, \dots, x_n)\,ds$ è derivabile $\Rightarrow$ è continua.

$\Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \to \left[\frac{0}{0}\right] \Rightarrow \lim_{h\to 0^+} \frac{f_1(x_1+h, x_2, \dots x_n)}{1} = f_1(x_1, \dots x_n) = f_1(x).$

th. di De L'hopital

=

Analogamente , $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_1+he_1)-f(x)}{h} = f_1(x)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0^-} \equiv \lim_{h\to 0^+} = f_1(x) \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = f_1(x).$

Analogamente , per $\forall j = 1, \dots n$ $\exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = f_j(x)$

F continuo $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}$ continue $\Rightarrow f$ è differenziabile in Ω.

$\nabla f(x) = F(x) \Rightarrow f$ potenziale di F

$\Rightarrow F$ conservativo $\Rightarrow$ 1) ∎

ESEMPIO: $F(x,y) = \left(\underbrace{-\frac{y}{x^2+y^2}}_{f_1} , \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{f_2} \right)$

F verifica la condizione ★

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = -\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad // \quad \text{ok.}$$

F non è conservativo su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\gamma : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ Curva chiusa (parametrizz. di circonferenza)

$$\int_\gamma F \cdot dp = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$$

$$\int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen} t, \cos t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1\,dt = \text{Area} = 2\pi \neq 0$$

$\downarrow$ F non conservativo.

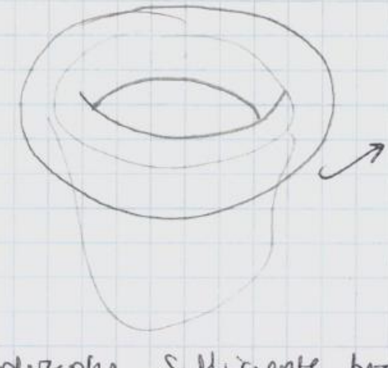
OSS. Se $n=3$ $F=(f_1,f_2,f_3)$. La condizione ★ :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\operatorname{rot} F = (0,0,0)} \Leftrightarrow \text{F irrotazionale}$$

Quindi se F è conservativo $\Rightarrow$ F irrotazionale
F irrotazionale $\not\Rightarrow$ F conservativo.

Dimostrare che $F(x,y,z) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 1 z\right)$

TORO



$\notin$ appartiene al toro.

$\Downarrow$

Teorema (condizione sufficiente per i campi di classe C^1).

$$\text{Hp}: \begin{cases} \Omega \text{ semplicemente connesso } (\Omega \subseteq \mathbb{R}^n) \\ F: \Omega \mapsto \mathbb{R}^n \text{ campo vettoriale di classe } C^1 \\ F = (f_1, \dots, f_n) : \forall x \in \Omega, \ \forall i,j = 1, \dots, n \\ \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right] \bigstar \end{cases}$$

Th : F è conservativo.

DIM (Solo per $n=2$, $n=3$).

Per dimostrare che F è conservativo, ricorriamo al teorema di equivalenza, più precisamente dimostriamo che se $\gamma : [a,b] \mapsto \Omega$ è una qualunque curva parametrica chiusa, semplice e r.a.t. allora $\oint_\gamma F \cdot dp = 0$!

$\langle n=2 \rangle$

Ipotesi : $F = (f_1, f_2)$ verifica $\bigstar$, cioè $\forall x,y \in \Omega$: $\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)$

Ω è semplicemente connesso

$\exists A \subseteq \mathbb{R}^2 : \partial A = \text{im}\,\gamma, \ A \subseteq \Omega$.

Se γ induce su A un verso di percorrenza antiorario, allora si può applicare il teorema di Green:

$$\oint_\gamma F \cdot dp = \oint_{\partial A} F \cdot dp = \iint \underbrace{\left[\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) \right]}_{=0.} dx\,dy$$

$$\Rightarrow \oint_\gamma F \cdot dp = \emptyset.$$

Se γ inducesse un senso di percorrenza orario:

$$\oint_\gamma F \cdot dp = \oint_{\partial A^-} F \cdot dp = -\int_{\partial A^+} F \cdot dp \underset{\text{Th. green}}{=} \emptyset.$$

© Proprietà riservata dell'autore - Digitalizzazione e distribuzione a cura del CENTRO APPUNTI - Corso Luigi Einaudi, 55 - Torino / Pagina 97 di 148