



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2223A**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Trabace Maria**

**MATERIA: Aerodinamica (Teoria + Esercizi) - Prof. Arina - Scarsoglio**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

# AERODINAMICA

## Notizie introduttive:

- Si occupa dello studio di correnti fluide che interagiscono con un corpo solido;
- Ipotesi del CONTINUO: corrente costituita da particelle fluide di volume, abbastanza grande da contenere un numero molto elevato di molecole ma anche abbastanza piccolo rispetto alla lunghezza del problema in esame.



### NUMERO DI KNUDSEN

$$Kn = \frac{l}{L}$$

lunghezza caratteristica

percorso medio particelle

\* se  $Kn \ll 1$ , allora vale la teoria del continuo \*

- FORZA AGENTE su particella fluida

fluido in quiete ⇒

forze tangenziali  
 (se ci fossero, indurrebbero una distorsione/rotazione della particella fluida)

COMPONENTE NORMALE

COMPONENTE TANGENZIALE

PRESSIONE ha direzione  $\perp$  superficie

LEGGE di PASCAL

uguale in tutte le direzioni



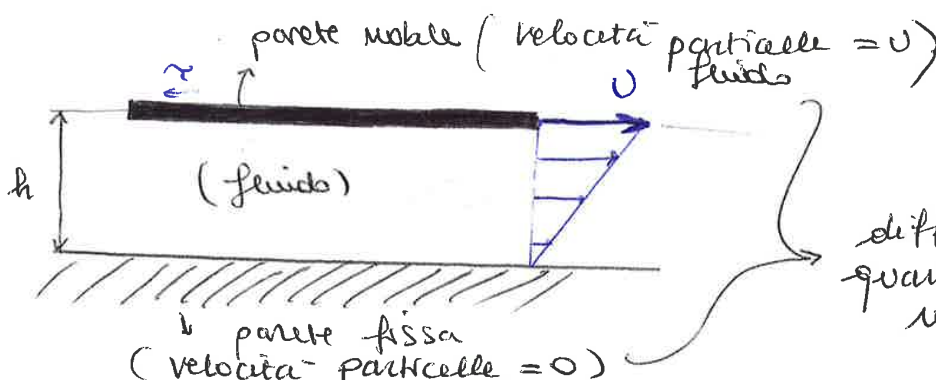
- SFORZI VISCOSI ⇒

si manifestano ogni qualvolta un corpo è in movimento in un fluido e rappresentano una resistenza al moto.

COMPIONO solo in presenza di GRADIENTI di VELOCITA'

se fluido in quiete, moto uniforme o equilibrio statico ⇒  $\tau = 0$

### LEGGE di NEWTON



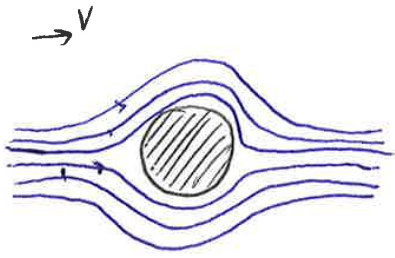
$$\tau = \mu \frac{dU}{dy}$$

gradient velocità

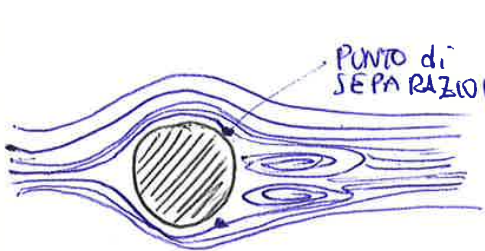
coefficiente viscosità  $[kg/m \cdot s]$

diffusione quantità di moto

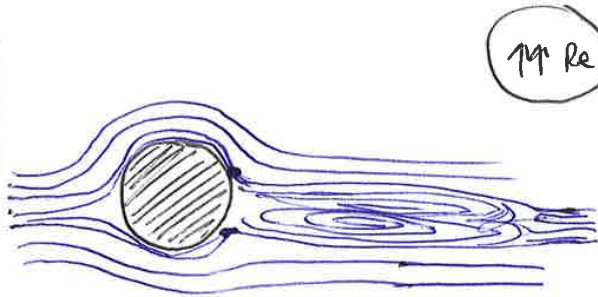
# REYNOLDS : EFFETTI SU CORRENTE CHE INVESTE UN CILINDRO



$Re < 4$  Le linee di corrente circondano perfettamente il cilindro. Il flusso è rallentato a monte, dove subisce un aumento di pressione, poi viene accelerato sulla parte superiore ( $\downarrow p$ ) e infine rallentato nuovamente a valle ( $\uparrow p$ )

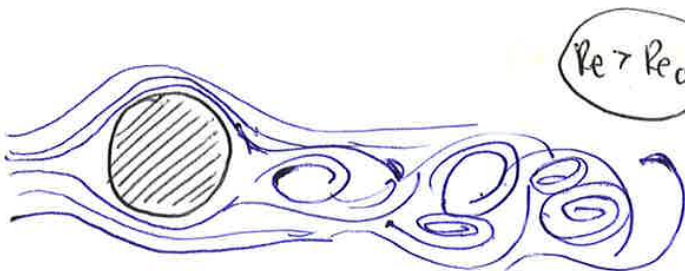


$\approx 11 Re$  Non riusciamo ad avere un recupero di pressione a valle perché parte dell'energia cinetica viene dissipata in calore al momento dell'accelerazione. Le linee di corrente si staccano e formano una Zona di separazione, al cui interno troviamo due vortici opposti.



$\approx 40 Re$  La zona di separazione si allunga e i punti di separazione si spostano in avanti. finché  $Re < 40 \Rightarrow$  coppia di moto simmetrica

oltre 40 si instaurano delle turbolenze  $\rightarrow$  formazione Scia di Van Karman



$Re > Re_c$  Passiamo da Regime laminare a TURBOLENTO.

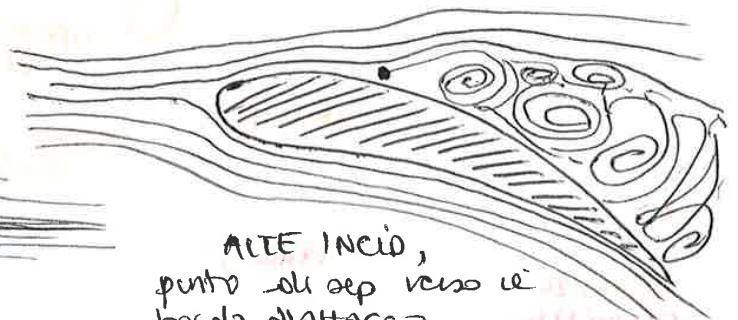
IN GENERALE  $\rightarrow$  Per corpi tozzi il punto di separazione è collocato molto a monte rispetto all'estremità terminale, la scia che si forma è molto lunga e la RESISTENZA DI FORMA è notevole.

$\rightarrow$  Per i corpi affusolati, il punto di separazione è collocato nella zona terminale e le scie che si formano sono sottili.

Ad alti  $Re$ :

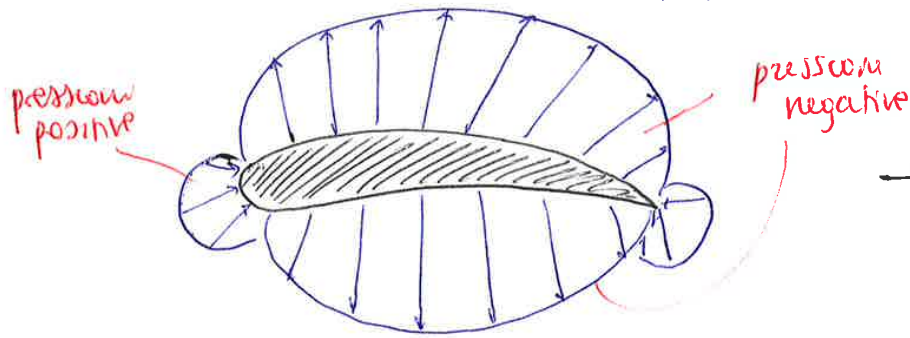


BASSE INCIDENZE, punto di separazione a valle



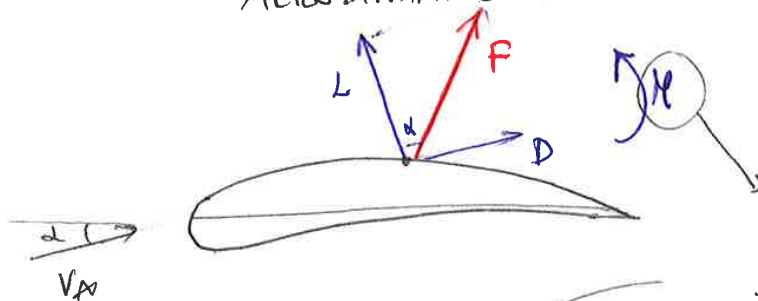
ALTE INCID., punto di sep verso il bordo d'attacco  $\rightarrow$  STALLO

## DISTRIBUZIONE DI PRESSIONI RELATIVE "p-p<sub>∞</sub>"



→ il flusso è sempre più accelerato sul dorso che sul ventre.

⇓  
SCAMBIO DI FORZE  
fra corrente e  
corpo ⊕ MOMENTO  
AERODINAMICO:



Per piccole incidenze  
 $L \gg D$

$$L = \int_0^L [(p^- - p_\infty^-) - (p^+ - p_\infty^+)] dx$$

Rientrano  
Momento di Beccheggio,  
di Imbardata, e  
di rollio

$$M = \int_0^L [(p^- - p_\infty^-) - (p^+ - p_\infty^+)] x dx$$

Oss: • Spostando L in un punto qualsiasi sul dorso, devo aggiungere un momento di spostamento

• Centro di pressione: punto rispetto al quale si ha

$$M_A + Lx_p = 0$$

- Variando  $\alpha$  varia il centro di pressione;
- Per flussi subsonici al quarto anteriore del profilo è definito il fuoco, rispetto al quale il momento (= momento focale) non varia con l'incidenza

DESCRIZIONE DEL MOTO DI UN FLUIDO → Analisi del campo di velocità

$$\vec{v} = (u, v, w) = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

$$d\vec{s} = ds \vec{e}$$

derivata direzionale:  
 $\frac{dV}{ds} = e \cdot \nabla$

variazione del campo di velocità in una certa direzione

può essere scritto come

$$\nabla V = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x & v_y & v_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

$$\nabla V = \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla V + \nabla V^T)}_D + \underbrace{\frac{1}{2}(\nabla V - \nabla V^T)}_B$$

$$D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2v_x & v_y + v_x & v_z + w_x \\ v_x + v_y & 2v_y & v_z + w_y \\ w_x + v_z & v_z + w_y & 2w_z \end{pmatrix}$$

deformazioni di taglio → cambia la forma dell'elemento fluido

Σ termini =  $\nabla \cdot \vec{v} = \Delta v$

velocità di variazione del volume

"Tensor delle velocità di deformazione" (SIMMETRICO)

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v_y - v_x & v_z - w_x \\ v_x - v_y & 0 & v_z - w_y \\ w_x - v_z & w_y - v_z & 0 \end{pmatrix}$$

Introduco il vettore  $\vec{b}$  tale che

$$\vec{\omega} = \vec{b} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})$$

velocità angolare dell'elemento fluido

rotore, quindi "vorticità" =  $\vec{\omega}$

"Tensor delle velocità di rotazione" (ANTISIMMETRICO)

$$\vec{\omega} = 2\vec{b}$$

## DESCRIZIONE LAGRANGIANA e EULERIANA.

↳  
Mi concentro sul  
moto della particella:

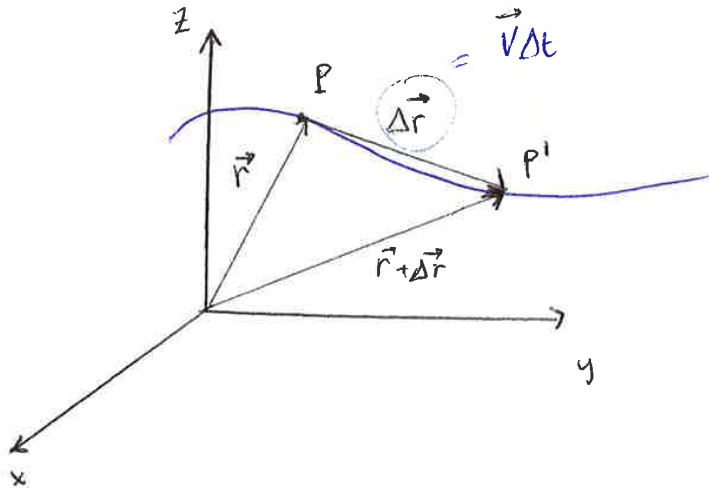
$$\vec{r} = (\vec{r}_p, t)$$

$$Q = Q(\vec{r}(\vec{r}_p, t), t)$$

↳  
Mi concentro su un  
volume di controllo (e studio  
le grandezze in ogni  
suo punto)

$$Q = Q(\vec{r}, t)$$

STUDIO DELLA VARIAZIONE DI Q NEL TEMPO



Posizione iniziale (P)

$$Q = Q(\vec{r}, t)$$

Posizione finale (P')

$$Q = Q(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t + \Delta t)$$

Sviluppando Q come polinomio di Taylor  
- limite del rapporto incrementale  
per  $\Delta t \rightarrow 0$ , si ottiene:

, calcolando  $\frac{DQ}{Dt}$  come

$$\frac{Q(\vec{r} + \vec{v}\Delta t, t) - Q(\vec{r}, t)}{\Delta t}$$

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial s} v$$

DERIVATA  
TOTALE  
LAGRANGIANA

DERIVATA  
LOCALE  
(EULERIANA)

DERIVATA  
CONVETTIVA  
(relativa al  
campo di velocità)

Pos- essere scritta anche come

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{\partial Q}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) Q$$

• Fluidi non in quiete  $\rightarrow \exists$  sforzi tangenziali e gli sforzi normali dipendono dalla superficie scelta.

Il tensore degli sforzi si può scrivere come somma di una parte ISOTROPA e una non isotropa:

$$\Pi = -pI + \tau, \quad \text{con } p = \frac{\sum \sigma_{ii}}{3} = -\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\Pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (\text{anche } \tau \text{ è simmetrica})$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{12} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{se } i \neq j & : \sigma_{ij} = \tau_{ij} \\ \text{se } i = j & : \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \end{aligned}$$

$$\sum \tau_{ii} = 0$$

Il tensore  $\tau$  ha traccia nulla

### RELAZIONI SFORZO - DEFORMAZIONE

$$\nabla V = D + B$$

$\uparrow$                        $\uparrow$   
 tensore velocità di deformazione      tensore velocità di rotazione

Gli sforzi viscosi sono determinati dalle componenti di D e vale la relazione

$$\tau = f(D)$$

$$\tau = 2\mu D + \lambda (\nabla \cdot V) I = \text{tr} D = \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = D_{kk}$$

$$\tau_{ij} = 2\mu D_{ij} + \lambda D_{kk} \delta_{ij}$$

coefficienti di viscosità

So che  $\sum \tau_{ii} = 0 \Rightarrow (2\mu + 3\lambda) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \Rightarrow$

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu$$

Vale se assumiamo che la pressione del fluido in movimento sia quella termodinamica

"CONDIZIONE DI STOKES"



• **CONSERVAZIONE DELLA MASSA**

↳ sorgenti di massa volumiche o superficiali

[ massa per  $udv = \rho$   
 flusso di massa =  $\rho \vec{v}$

$$1) \quad \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad , \quad \boxed{\frac{D\rho}{Dt} = -\rho(\nabla \cdot \vec{v})}$$

• **CONSERVAZIONE QDM**

↳ sorgenti superficiali : tensore  $\pi = \tau - pI$   
 ↳ sorgenti volumiche :  $\rho f$  ( forze di campo per  $udv$  )

[ QDM per  $udv = \rho \vec{v}$   
 flusso di QDM =  $\rho \vec{v} \vec{v}$

$$2) \quad \boxed{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho f}$$

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\nabla \cdot \tau}{\rho} + f}$$

• CONSERVAZIONE

• **CONSERVAZIONE ENERGIA**

↳ sorgenti superficiali : tensore  $\rightarrow \tau \cdot \vec{v}$ ,  $\frac{\text{flusso calore}}{\rho} = \vec{q} \cdot \vec{n}$   
 ↳ sorgenti volumiche : campo di forze  $\rho f \cdot \vec{v}$  e flusso  $Q_v$

[ energia per  $udv$  :  $\rho E$   
 flusso per  $udv$  :  $\rho E \vec{v}$

$$3) \quad \boxed{\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla E = \nabla \cdot (\tau \cdot \vec{v}) - \nabla \cdot (\vec{q} \cdot \vec{n}) + \rho f \cdot \vec{v} + Q_v - \nabla \cdot (\rho \vec{v} E)}$$

- Sono valide per tutti i fluidi viscosi;
- Contengono troppe incognite per det. il campo di moto.





Considerando

fluido inviscido (trascurando effetti viscosi, ad esempio ad alti Re) e le sorgenti di calore otteniamo le FORMULE DI EULERO trascurabili

- 1)  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$
- 2)  $\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \rho \vec{f}$
- 3)  $\rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \nabla E = -\nabla \cdot (p \vec{V}) + \rho \vec{f} \cdot \vec{V}$

EQUAZIONI  
di  
EULERO

EQUAZIONE DELLA VORTICITA'

$$\rho \frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) = \omega \cdot \nabla V - \frac{\nabla p \times \nabla p}{\rho^2} + \nabla \times \left( \frac{\nabla \cdot \tau}{\rho} \right) + \nabla \times f$$

**VORTEX STRETCHING**  
 È solo se la vorticità è inizialmente non nulla.

$\nabla p \times \nabla p = 0$  se flusso barotropico

**VORTICITA'**  
 Per effetto campo di forze  
 (= 0 se conservativo)

Se la corrente è irrotazionale  $\rightarrow \nabla \times \vec{V} = \vec{\omega} = 0$   
 posso introdurre una funzione scalare che mi permette di semplificare la determinazione del campo di moto di una corrente fluida

" $\phi$ " POTENZIALE  
 $\vec{V} = (u, v, w)$

$$\vec{V} = \nabla \phi : \begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

COORD. POLARI :  
 $(\vec{V} = (v_r, v_\theta, v_z))$

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

Dalla condizione di incompressibilità deriva

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \right) = \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{- EQUAZIONE di LAPLACE}$$

La soluzione dell'eq. dipende solo dalle condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0 & \text{(CONDIZIONE di TANGENZA)} \\ \nabla \phi = \vec{v}_p \text{ a valle} \end{cases}$$

**PROBLEMA DI NEUMANN**  
 (Dipende dal dominio)

Determinazione di  $\phi$  e delle sue derivate spaziali, cioè del campo di velocità.

• DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO :

traiettorie "RICONDUCEBILI"

traiettorie "chiusse RIDUCIBILI"

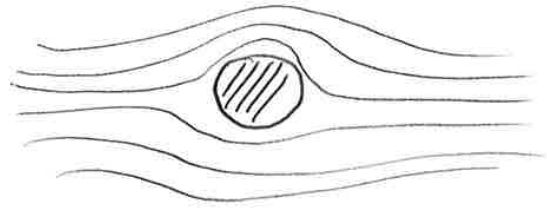
mediante trasformazione continua  
 (non esco mai dall'insieme)

Soluzione UNICA dell'eq. di Laplace a meno di una costante:

- OSS :
- sul contorno ho valore massimo di  $\phi$ , valore massimo delle velocità (e quindi anche il minimo di pressione)
  - La corrente irrotazionale è caratterizzata da circolazione nulla.
  - $\phi$  è a valore singolo e non dipende dal percorso  
 l'integrale  $\phi_p - \phi_q = \int_p^q \vec{V} \cdot d\vec{s}$

# CORRENTE STAZIONARIA, POTENZIALE, 2-D

ESEMPLO : Cilindro di raggio investito da una corrente



$\psi$  costante rappresenta una linea di corrente



Introduco " $\psi$ " FUNZIONE DI CORRENTE (2-D) ; se  $\vec{V} = (u, v)$  [oppure  $\vec{V} = (v_x, v_y)$ ]

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

COORDINATE CARTESIANE

$$\begin{cases} u = +\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

COORDINATE POLARI

- Vale la condizione di incompressibilità :  $\nabla \cdot \vec{V} = 0$
  - Vorticità  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \psi$
- ↳ se la corrente è irrotazionale,  $\psi$  è soluzione dell'eq. di Laplace:

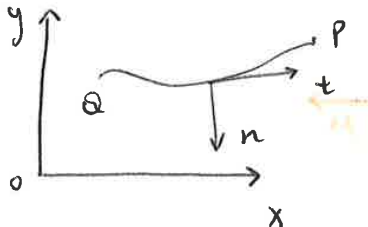
$$\nabla^2 \psi = 0$$

• "RELAZIONI di CAUCHY-RIEMANN":

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Geometricamente, le linee a  $\psi$  costante sono mutuamente ortogonali a quelle a  $\phi$  costante

• Passando da una l.c. a un'altra ho una certa portata volumica, quindi in base a (\*):



$$\vec{t} = (dx, dy)$$

$$\vec{n} = (-dy, -dx)$$

$$\vec{V} = (u, v)$$

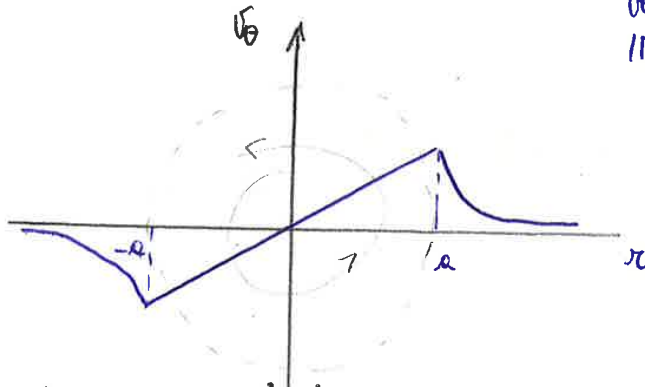
$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy$$

↳ La variazione di  $\psi$  è uguale alla portata in volume attraverso la superficie di profondità unitaria, inclinata dalla linea QP

$$d\psi = v \cdot n \, ds$$

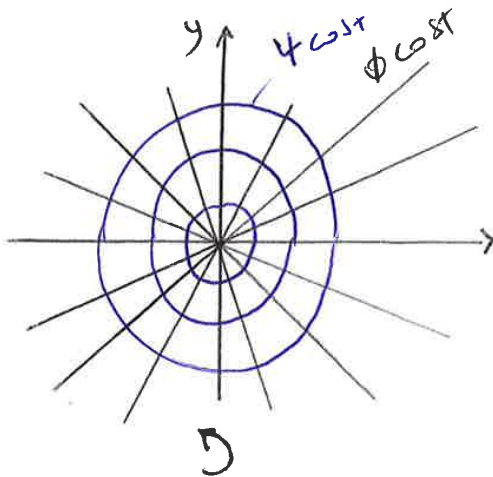
VORTICE DI RANKINE di raggio  $a$  e vorticità  $\omega$  (circolato da corrente irrotazionale)

Se  $a \rightarrow 0$



velocità  
INDICATA dal Vortice  
Circolare

VORTICE  
IRROTAZIONALE  $\rightarrow$  corrente irrotazionale ovunque:



$$\phi = \int \theta$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

NB Doppetta  $\vec{u} = u\vec{i} +$  corrente uniforme  $\vec{v} = -v\infty\vec{i} +$   
vortice irrotazionale  $\vec{\omega} =$   
CILINDRO CON ROTAZIONE ( $\psi = 0$ )  $\left\{ \begin{array}{l} D = 0 \\ L = \rho v \infty \Gamma \end{array} \right.$

CONCLUSIONI. La resistenza nulla in entrambi i casi porta al paradosso di D'Alembert. La portanza non nulla è imputabile unicamente alla presenza di circuitazione. Il fenomeno di generazione di portanza su un corpo torto si chiama "Effetto Magnus".



**TEOREMA DI KUTTA - JOUKOWSKY.** Su ogni corpo cilindrico di sezione qualsiasi, immerso in una corrente uniforme, si genera portanza solo se esiste una circuitazione  $\Gamma$  attorno ad esso diversa da zero:

$$\vec{L} = \rho v \infty \times \Gamma \vec{k}$$

• POTENZIALE COMPLESSO (funzione analitica)

$$\vec{V} = (u, v)$$

$$W(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

può essere vista come somma di una parte reale e una immaginaria

Si può definire tenendo conto delle relazioni di Cauchy - Riemann e alle 2 condizioni:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

INCOMPRESSIBILITÀ

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

IRROTAZIONALITÀ:

$$\nabla \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\phi(x, y), \psi(x, y), u(x, y), v(x, y)$$

"funzioni armoniche"

Soluzioni eq. Laplace

Def

La derivata del potenziale complesso mi dà la velocità complessa

$$\frac{dW}{dz} = u - iv$$

COORD. CARTESIANE

Per il passaggio in coordinate polari basta moltiplicare per  $e^{i\theta}$ :

$$\sqrt{x} - i\sqrt{y} = \frac{dW}{dz} e^{i\theta}$$

Integrando la velocità complessa su un circuito chiuso si ha:

$$\oint_C \frac{dW}{dz} = \Gamma + i\alpha$$

Somma algebrica delle sorgenti/pozzi

Somma algebrica delle intensità dei vortici

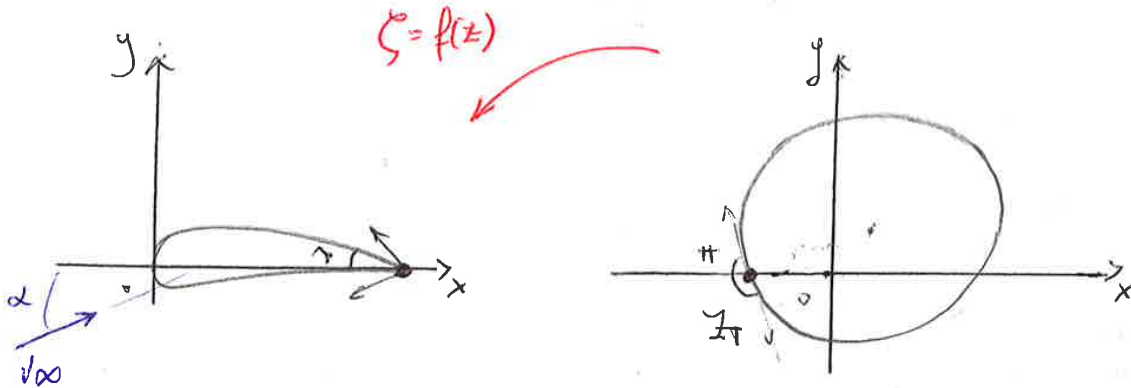
PUNTI SINGOLARI per W

NB →

$$V^* = \frac{V}{|f'(z)|}$$

Nei punti critici la velocità diventa infinita.

ESEMPLO: Trasformazione dal profilo al cerchio:



RICHIESTE

- La corrente mantiene la sua intensità e la sua direzione nella trasformazione:

$$\Rightarrow V_{\infty} = \frac{V_{\infty}}{|f'(z)|} \Rightarrow f'(z) = 1 \Rightarrow \boxed{\zeta = f(z) = z}$$

funzione identità

- CONDIZIONE di KUTTA: Deve rendere regolare la corrente al bordo di fuga.

oss:

Il bordo di fuga è trasformato nel punto del cerchio che rappresenta l'intersezione con l'asse negativo delle ascisse ( $z_c$ ). Qui i 2 archi di cerchio sono tali che 2 elementi tangenti formano un angolo  $\beta = \pi$

Ma gli altri 2 elementi formano un angolo  $\beta^* > \pi$

$$\beta^* = m\pi$$

$$\tau = 2\pi - m\pi = \pi(2-m)$$

angolo amplificato

PUNTO CRITICO:  $f'(z_c) = 0$   
(zero di ordine  $m-1$ )

velocità  $\infty$  al bordo di fuga  
 $z_c$  punto d'arresto.

Per la condizione di Kutta la  $\boxed{V(z_c) = 0}$

NB: SVILUPPO di LAURENT:

$$\zeta(z) = z + \frac{b_1}{z} + \dots + \frac{b_n}{z^n} = z + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{b_h}{z^h}$$

Se ho  $k$  punti critici:

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{b_1}{z^2} = 1 + \sum_{h=1}^{\infty} h \frac{b_h}{z^{h+1}}$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = \left(1 - \frac{z_1}{z}\right) \left(1 - \frac{z_2}{z}\right) \dots \left(1 - \frac{z_k}{z}\right)$$

• Se il cerchio è investito da una corrente  $V_\infty$  uniforme con incidenza  $\alpha$ , allora in assenza di curvatura, i punti di arresto si trovano all'intersezione della circonferenza con la retta passante per il centro e inclinata di  $\alpha$ ;



• La condizione di Kutta (= corrente regolare al bordo di fuga) implica uno spostamento di questi 2 punti, in modo che uno di essi vada a finire sull'asse delle ascisse



Introducendo una CIRCVITAZIONE  $\Gamma$

→ Teorema di Kutta-Joukowski

Calcolo la portanza sul profilo:

$$L = \rho V_\infty \Gamma$$

② TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI - Veduto il campo di moto che sto studiando come "somma" di una corrente uniforme  $\vec{V}_\infty$  e una perturbazione  $\vec{v}'$ .  $\vec{V} = \vec{V}_\infty + \vec{v}'$  è soluzione del problema di Neumann esterno con le seguenti condizioni al contorno:

- $\nabla^2 \phi = 0$  Eq. Laplace, con  $\phi = V_\infty x + \phi'$  potenziale di  $v'$
- $\nabla \phi = V_\infty$  all'infinito non ho perturbazione
- $\nabla \phi \cdot n = 0$  condizione di tangenza
- ⊕ Condizione di Kutta

$$\vec{v}' = u' \hat{i} + v' \hat{j}$$

Per piccole perturbazioni si intende  $v' \ll V_\infty$  e si ottengono per profili sottili e poco incurvati,  $\rho$  con piccole incidenze

• COND. TANGENZA LINEARIZZATA:

definita lungo le linee di parete, ma vale anche lo stesso e ventre  $(\frac{dy}{dx})$  e sulla corda

$$v'(x, f(x)) = V_\infty \left( \frac{dy}{dx} - d \right)$$

Non è più valida ai punti di arresto dove la  $v'$  ha lo stesso ordine di grandezza di  $V$

SOVRAPPOSIZIONE 3 EFFETTI :

- 1) LAMINA PIANA investita da corrente con incidenza  $\alpha \neq 0$  [la perturbazione è data da  $d$ ]
- 2) PROFILO SIMMETRICO senza incidenza [la perturbazione è data dallo spessore]
- 3) LINEA MEDIA SENZA INCIDENZA [la perturbazione è data dal  $\frac{dy}{dx}$  (incurvamento)]



# ALLA AD ALLUNGAMENTO FINITO

non si estendono indefinitamente nello spazio 3D

La portanza è predominante rispetto alla resistenza

si studiano con la dinamica delle vortici

## • RICHIAMI SULLA VORTICITÀ :

VORTICITÀ:  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V} = 2\vec{\Omega}$ , con  $\vec{\Omega}$  velocità angolare particelle

CIRCUITAZIONE:  $\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_G \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dG$  (Stokes)

Flusso di VORTICITÀ

Quando  $d \rightarrow 0$  si ottiene un filamento a vorticità concentrata  $\vec{\omega} = \omega \hat{n}$

Solenoidale, in quanto  $\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0$ .

La vorticità è quindi un campo vettoriale e in quanto tale è descritto da linee di campo (= linee vorticosi). Analogamente al campo di velocità si definiscono superfici vorticosi e tubi vorticosi.

- Il flusso netto <sup>di  $\omega$</sup>  attraverso un tubo vorticoso è nullo, perché il flusso di vorticità (= quindi la circuitazione) è costante attraverso ogni sezione  $G$ .

Intensità del tubo vorticoso

## • TEOREMI DI HELMHOLTZ per il moto vorticoso (fluidi ideali o barotropici)

1°) Un tubo vorticoso o una linea vorticosi non possono iniziare e interrompersi improvvisamente nel fluido, devono chiudersi su sé stessi oppure terminare all'infinito

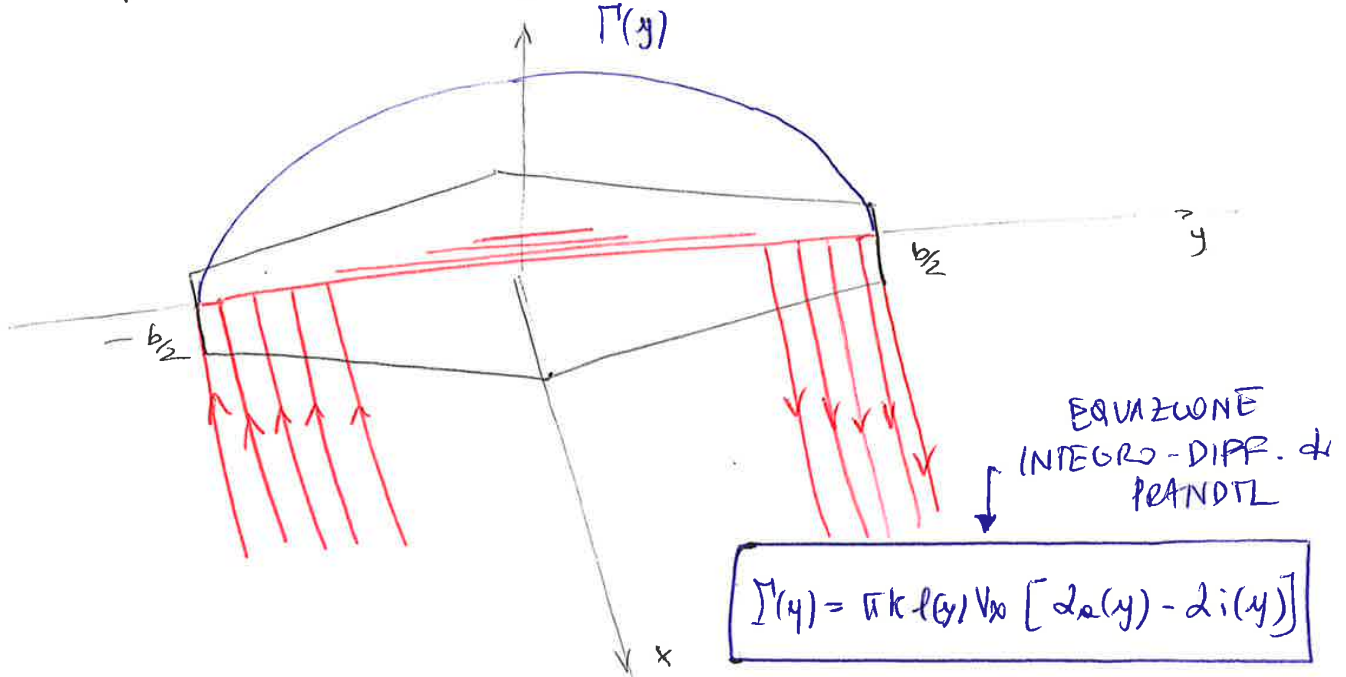
2°) Una superficie che è vorticosi a un certo istante, lo sarà anche in tutti gli istanti successivi  $\rightarrow$  La vorticità è trasportata con la corrente

3°) Un tubo vorticoso mantiene intensità costante nel tempo

- NB:
- La velocità indotta in un punto posto in prossimità di un filamento rettilineo è dovuta in gran parte al tratto di filamento posto nelle immediate vicinanze
  - La velocità indotta in un punto posto in prossimità di una staffa è la somma dei contributi dovuti ai tratti rettilinei.

## TEORIA DELLA LINEA PORTANTE (di PRANDTL)

La distribuzione dei vortici prevede un unico filamento vorticoso aderente all'ala di intensità  $\Gamma(y)$  e, al solito, le due superfici vorticoso fluido che costituiscono la scia. Il modello si applica ad ali con angoli di freccia  $\alpha < 5^\circ$  e grandi allungamenti  $\lambda \geq 10$



Dalla teoria si deduce che:

- ▶ I profili alari si comportano come se fossero bidimensionali.
- ▶ Ogni profilo alare si comporta come se fosse investito da una corrente con incidenza  $\alpha_{eff} = \alpha_{geom} - \alpha_{ind}$ , cioè deviata di un angolo pari all'incidenza indotta.

$$\alpha_i(y) = \frac{1}{4\pi V_\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{dy'}{y-y'}$$

$$C_L(y) = 2\pi k (\alpha_a(y) - \alpha_i(y))$$

incidenza geometrica

$$\alpha_a = \alpha - \alpha_0$$

incidenza aerodinamica

DISTRIBUZIONE ELICITICA → è la distribuzione OTTIMALE di portanza perché a parità di  $C_L$  e  $\lambda$  fornisce la minima resistenza indotta (obvata alla presenza della scia) e in più  $\alpha_i$  COSTANTE.

$$\frac{\Gamma(y)^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{2})^2} = 1$$

formule utili →

$$\left\{ \begin{array}{l} C_L = \pi \lambda \alpha_i \rightarrow L = \rho V_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy = \frac{\pi}{4} \rho V_\infty \Gamma_0 b \\ C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} \rightarrow D = \alpha_i L \\ C_L = C_L' (\alpha - \alpha_0) \rightarrow C_L' = \frac{2\pi k}{1 + \frac{2k}{\lambda}} = \frac{c_l'}{1 + \frac{2k}{\lambda}} \end{array} \right.$$

# CORRENTE INCOMPRESSIBILE DI UN FLUIDO A PROPRIETÀ COSTANTI

Fluido incompressibile

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

ogni particella fluido mantiene volume costante nel tempo. Un fluido può essere incompressibile pur variando la sua densità.

to principio:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \Rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = -\rho \underbrace{(\nabla \cdot \vec{v})}_{=0} \\ \frac{D\rho}{Dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \rho \end{aligned} \right.$$

$\rho$  costante,  
FLUIDO OMOGENEO

$\rho$  costante sia dal pt di vista spaziale che temporale:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Per una particella dobbiamo considerare gli effetti di compressione ed espansione termica: per garantire l'incompressibilità tali effetti devono essere simultaneamente trascurabili:

LIQUIDO INCOMPRESSIBILE $\Leftrightarrow$	$\Delta T$ molto piccole
GAS INCOMPRESSIBILE $\Leftrightarrow$	$\Delta T$ molto piccole $M \ll 1$ (velocità $\ll c$ )

- ③ fluido a proprietà costante  $\rightarrow$  in condizioni standard di  $p$  e  $T$  anche  $\mu$  e  $k$  si possono considerare costanti

- "Equazione di Poisson": 
$$\nabla^2 p = -\rho \nabla \cdot [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]$$

una perturbazione di pressione in un punto del fluido si propaga istantaneamente in tutto il volume

- Il campo di velocità è indipendente dal campo di temperatura, mentre il campo di temperatura è dipendente dal campo di velocità  $\rightarrow T$  è uno scalare passivo.

- Si parla di "Problema ben Posto" se la soluzione delle equazioni di Stokes (per incompressibile) + le condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{v}|_{\partial \Omega} &= \vec{v} \text{ (2 parte)} \\ \int_{\partial \Omega} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{v}) \, d\Omega = 0 \end{aligned} \right.$$

esiste ed è unica.

# CORRENTI AD ALTO REYNOLDS - TEORIA STRATO LIMITE

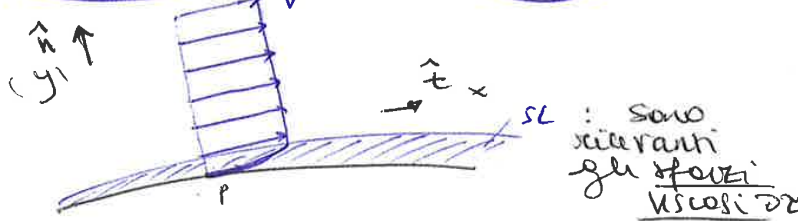
Se posso trascurare gli effetti viscosi e/o la velocità è molto elevata

Il flusso attorno al corpo è caratterizzato da

Inviscido + incompressibile

Linee di corrente simili a quelle del flusso potenziale IDEALE

Una regione in cui il flusso non scivola sul corpo ma si stacca



STRATO LIMITE  
è presente un gradiente di velocità  $\frac{\partial v}{\partial n}$

Il problema che riguarda la soluzione delle equazioni di Navier Stokes per fluidi incompressibili quindi si divide:

• PROBLEMA ESTERNO: Hp fluido inviscido  
↳ eq. di Eulero

(★)

• PROBLEMA INTERNO: eq. dello strato limite (ottenute con una trasformazione di variabili (Metodo diretto) o col metodo di derivazione di Prandtl.

colme distribuzione di  $p$  per  $p$

Le soluzioni devono ricordarsi nelle zone di transizione in virtù dell'equazione di continuità.

Lo SL ha spessore  $\delta$ ; mentre nella regione esterna le variazioni di velocità si hanno su una scala  $L$ , nello SL tutte le variazioni avvengono sulla scala  $\delta$  → necessariamente il tempo diffusivo (lungo  $y$ ) deve essere uguale al tempo convettivo (lungo  $x$ ):

$$\frac{\delta^2}{\nu} = \frac{L}{V_0} \rightarrow \boxed{\delta = \frac{L}{\sqrt{Re}}}$$

(★)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

→

La pressione nel campo di moto varia solo lungo  $x$ , quindi la componente normale non varia ("si conserva", nel passare da una regione all'altra)

CONDIZIONI AL CONTOURNO  
 $v(x,0) = 0$  tangenza a parete

$D_f$

$$D_f = \int_0^l \tau_w \cos \phi \cdot ds = \mu \int_0^l \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{y=0} dx$$

"Resistenza d'attrito"

$$\delta^* = \int_0^\infty \left( 1 - \frac{v}{U_\infty} \right) dy$$

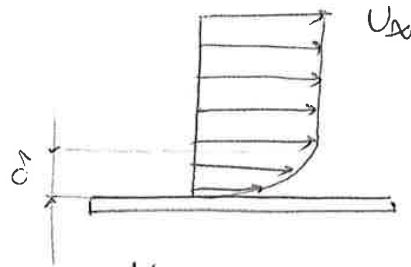
"Displacement thickness"

La distanza dalla parete di cui si è spostata la corrente esterna in seguito alla diminuzione della velocità nella S.L.

La prima soluzione dell'eq. dello S.L. viene data da Blasius (LAMINA PIANA)

CONDIZ. AL CONTOURNO:

$$\begin{cases} y=0 : v=w=0 \\ y=\delta : u=U_\infty \end{cases}$$



Esprimendo la eq. con le funzioni di corrente  $\psi$ , nei compare più una lunghezza di riferimento legata alle geometrie

Profili di velocità al variare di  $x$   
Sono in similitudine

Blasius dimostra che:

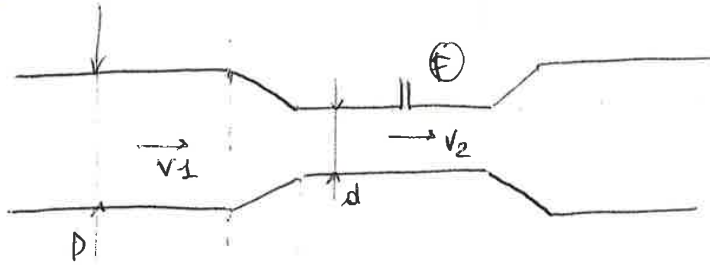
- La componente  $v$  della velocità tende alla velocità di spostamento
- Coefficiente d'attrito :  $C_f = \frac{0.064}{\sqrt{Re_x}}$
- Legge di Resistenza di Blasius :  $C_D = \frac{D_f}{\left( \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 (L \times L) \right)} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_L}}$   
quello che si sviluppa sia sul dorso che sul ventre
- La soluzione dell'eq. in prossimità del b.s. non è valida

$D_f$

Spessore strato limite : distanza alla quale  $u = 0.99 U_\infty$

$$\delta = \frac{5x}{\sqrt{Re_x}}$$

## 2) TUBO VENTURIMETRICO.



Sez. Circolare

$$d = 0.5D$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$v_1 = 3 \text{ m/s}$$

$$P_1 = 1.2 \text{ bar} = 1.2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

(Tubo immerso in aria)  
standard

CONS. PORTATA :  $Q_1 = Q_2 \Rightarrow A_1 v_1 = A_2 v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \Rightarrow v_2 = \frac{\pi \frac{D^2}{4}}{\pi \frac{d^2}{4}} \cdot v_1$

$$\Rightarrow v_2 = \left(\frac{D}{d}\right)^2 v_1 \Rightarrow v_2 = 4v_1 = 12 \text{ m/s}$$

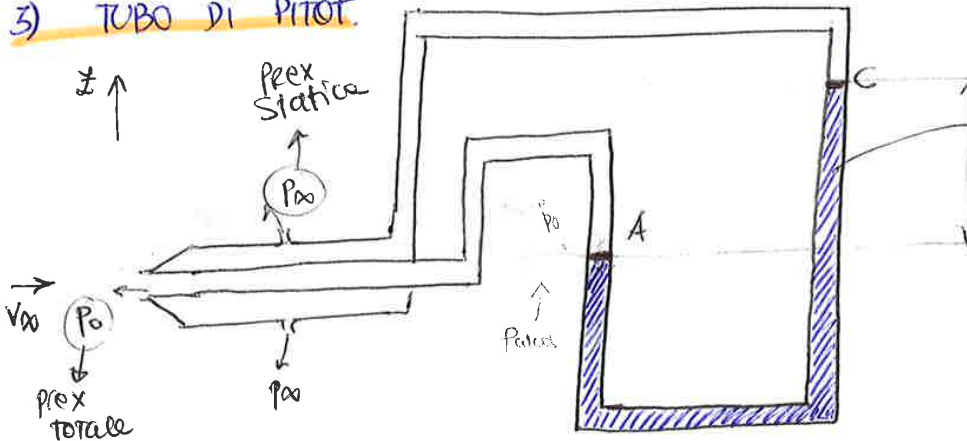
EQ. BERNOULLI :  $P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$

$$\Rightarrow P_2 = 120000 \text{ Pa} - 67500 \text{ Pa} = 52500 \text{ Pa}$$

Questa pressione al "diffondere" in tutti i punti fluid. anche in corrispondenza del foro :  $P_{atm} = 101325 \text{ Pa} > P_2 = 52500 \text{ Pa}$

Siccome non è l'acqua che fuoriesce dal foro ma l'aria che viene aspirata.

## 3) TUBO DI PITOT.



Tubo inserito in corrente standard

$$\rho_s = 1.225 \text{ kg/m}^3$$

$$\rho_{\text{alcol}} = 800 \text{ kg/m}^3$$

$$h = 120 \text{ mm} = 0.12 \text{ m}$$

$v_{\infty} ?$

$$P_0 = P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho_s v_{\infty}^2 \quad \text{prez. dinamica}$$

$$\Delta P_{AC} = \rho g h \quad (\text{su' per' liquidi' gascoso le stesse pressioni + il liquido})$$

$$\Rightarrow \Delta P_{AC} = 941.76 \text{ Pa}$$

$\Rightarrow$   $\left\{ \begin{array}{l} A \text{ riceve la prez } P_0 \\ C \text{ riceve la prez } P_{\infty} \end{array} \right. \Rightarrow$

$$P_0 - P_{\infty} = P_0 - P_{\infty} + \Delta P_{AC}$$

$$P_0 - P_{\infty} = \Delta P_{AC} = \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 \Rightarrow v_{\infty} = \sqrt{\frac{2 \Delta P_{AC}}{\rho_s}} = \boxed{39.2 \text{ m/s}}$$

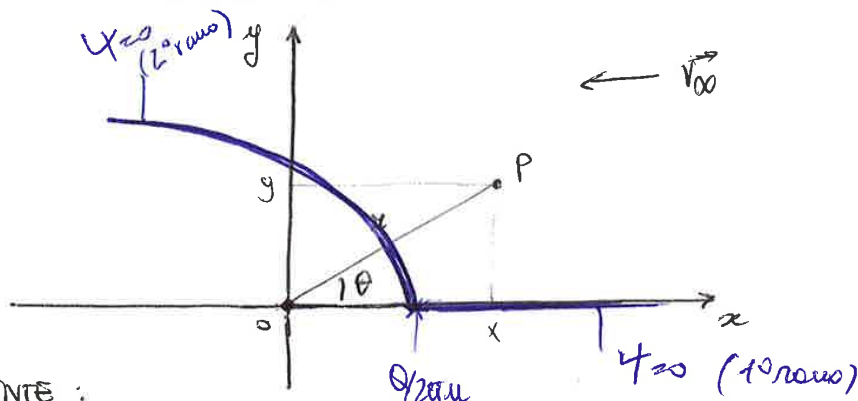
L'esercizio al par. 1° anche applicando B. prima al per' liberi dell'alcol e poi alle altre pressioni di pressione

# ESERCITAZIONE ②

## MOTO DI CAMPI COMPOSTI

### 1) PROVA DI FUHRMANN.

Sorgente ( $Q > 0$ ) posta nell'origine  $\oplus$  corrente uniforme // e discorde con l'asse  $x$   $\vec{v}_{\infty} = -U\hat{i}$ .



SORGENTE :

$$\textcircled{1} \quad \psi_p = \frac{Q}{2\pi} \theta, \quad \phi_p = \frac{Q}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

CORRENTE UNIFORME :

$$\textcircled{2} \quad \psi_p = u y - v x = -U y, \quad \phi_p = u x + v y = -U x$$

$$\Rightarrow \psi_{tot} = \textcircled{1} + \textcircled{2} = \frac{Q}{2\pi} \theta - U y = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} - U y$$

SEMIPIANO  $y=0$  . LINEA DI CORRENTE  $\psi=0$  :

$$\frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x} - U y = \frac{Q}{2\pi} \theta - U y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{se } y=0 \Rightarrow \theta=0 \quad (1^o \text{ ramo}) \\ \dots \end{array} \right.$$

Il punto di stazionazione è un punto d'arresto appartenente all'asse x.

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} - U = \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} - U \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{Q}{2\pi} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) y = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \end{cases}$$

PUNTO DI ARRESTO  $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} u=0 \\ v=0 \end{cases} \quad \text{sicuramente } \boxed{y=0}$$

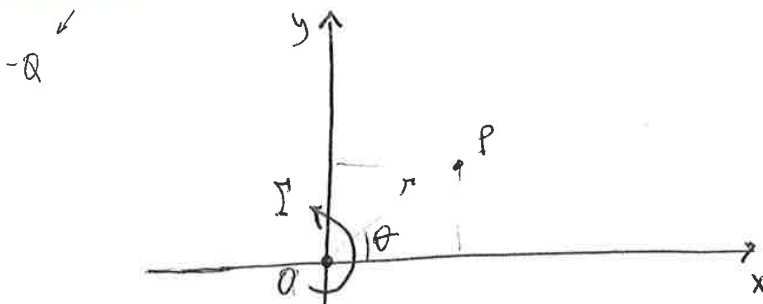
$$u=0 \Rightarrow \frac{Q}{2\pi} \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2} - U = 0 \Rightarrow \frac{Q}{2\pi} \frac{x_0}{x_0^2} - U = 0$$

$$\frac{Q}{2\pi} - U x_0 = 0 \rightarrow \boxed{x_0 = \frac{Q}{2\pi U}}$$

Altezza  $b$  dell'ovale:  $x=0, y=b$  (dall'equazione  $\psi=0$ )

$$\frac{Q}{2\pi} \arctan\left(\frac{2cb}{b^2-c^2}\right) = Ub \rightarrow \boxed{b = \frac{Q}{2\pi U} \arctan \frac{2cb}{b^2-c^2}}$$

3) POZZO E VORTICE



Vortice antiorario e pozzo posti nell'origine

$$\begin{cases} \psi_p = -\frac{Q}{2\pi} \theta \\ \psi_v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \end{cases}$$

$\downarrow$  ( $r_0=1$ )

$$\boxed{\psi_{tot} = -\frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r}$$

andamento logaritmico senso orario

è  $\psi_{const}$   $\Rightarrow \ln r = -\frac{2\psi}{\Gamma} - \frac{Q}{\Gamma} \theta$

$$\begin{cases} \phi_p = -\frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \\ \phi_v = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \end{cases} \Rightarrow \phi_{tot} = -\frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$\downarrow$  è  $\phi_{const}$

$$\boxed{\ln r = -\frac{2\pi\phi}{Q} + \frac{\Gamma}{Q} \theta}$$

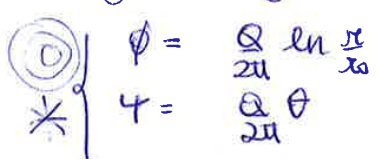
andamento logaritmico senso orario

$\psi$  hanno discontinuità nell'origine ( $r=0$ )

$$\begin{cases} V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{Q}{2\pi r} \\ V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases}$$

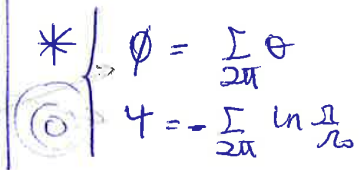
NB. All'esercitazione 2

SORGENTE / POZZO



$$\begin{cases} \phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \\ \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \end{cases}$$

VORTICE



$$\begin{cases} \phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \end{cases}$$

CORRENTE UNIFORME

$$\begin{cases} \phi = ux + vy \\ \psi = vy - vx \end{cases}$$

DOPPIA (coincide asse x)

$$\begin{cases} \phi = -\frac{M}{2\pi r} \cos \theta \\ \psi = \frac{M}{2\pi r} \sin \theta \end{cases}$$

Condurre lo studio a  $\psi$  costante e valutare i punti di arresto.



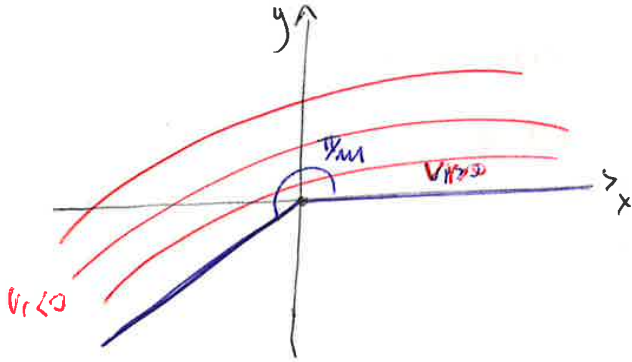
CASO  $\frac{1}{2} < m < 1$

$$v_r = \pm mk \frac{1}{r^{1-m}}$$

(velocità decresce con  $r$ )

$$v_r = 0 \Leftrightarrow r \rightarrow \infty$$

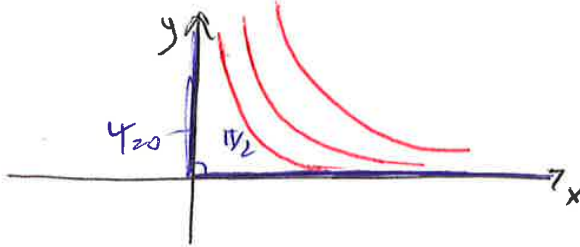
(Corrente all'esterno della Spigolo)



CASO  $m=2$

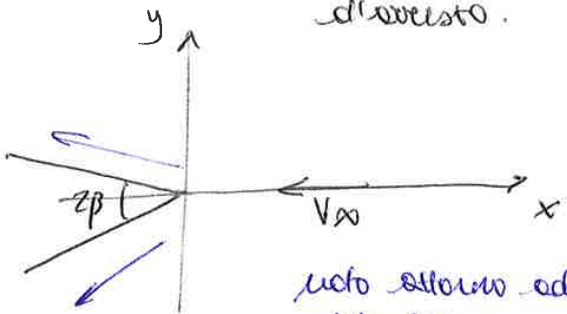
$$v_r = \pm mkr$$

mentre come caso particolare a  $m > 1$ .



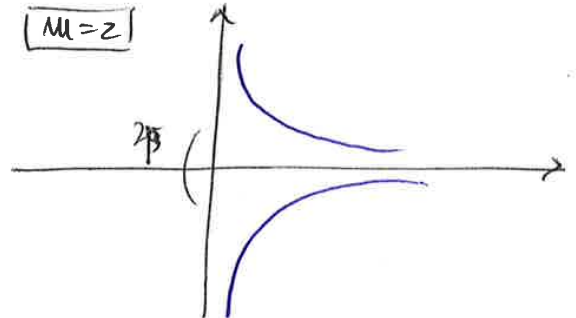
CASO  $1 < m < 2$

Introduciamo  $\beta = \pi - \theta = \pi - \frac{\pi}{m} = \pi \frac{m-1}{m}$ . Prendiamo un diedro di semiapertura  $\beta$  e lo facciamo investire da una corrente uniforme all'esterno lungo la bisettrice del diedro. La punta del diedro è in punto d'arresto.



moto attorno ad un cono

$m=2$



Per avere un profilo da marcatore che spesso sposta l'origine nel punto  $O' = (s_x, s_y)$ , e traccia la circonferenza trasformata facendola passare per  $B(R, 0)$ .  $\rightarrow s = s_x + is_y$

Eq. K-J :

$$f(z) = z + \frac{R^2}{z}$$

$$f'(z) = 1 - \frac{R^2}{z^2}$$

Studio del campo di velocità :

$$V = \frac{dW(z)}{dz}$$

$$V^* = \frac{V}{|f'(z)|}$$

NB: Traslando l'origine il potenziale è cambiato :

$$W(z) = V_{\infty} \left( (z-s) e^{-i\alpha} + \frac{(\lambda+R)^2 + s_y^2}{z-s} e^{i\alpha} \right) - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z-s)$$

$$\Rightarrow V = V_{\infty} e^{-i\alpha} - \frac{V_{\infty} [(\lambda+R)^2 + s_y^2] e^{i\alpha}}{(z-s)^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi(z-s)}$$

$$V_{\infty} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{[(\lambda+R)^2 + s_y^2] e^{i\alpha}}{(z+\lambda - is_y)^2} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda - is_y)}$$

$$V^* = \frac{V_{\infty} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{[(\lambda+R)^2 + s_y^2] e^{i\alpha}}{(z+\lambda - is_y)^2} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi(z+\lambda - is_y)}}{1 - \frac{R^2}{z^2}}$$

$$1 - \frac{R^2}{z^2}$$

Bordo di fuga

Se trovassimo  $z = R$  saremmo nel punto B, e la velocità  $V^*$  sarebbe  $\infty$ .  
Dobbiamo rendere regolare il bdf secondo la condizione di Kutta e calcolare una  $\Gamma$ .

$$\Rightarrow V_{\infty} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{[(\lambda+R)^2 + s_y^2] e^{i\alpha}}{(R+\lambda - is_y)^2} \right] - \frac{i\Gamma}{2\pi(R+\lambda - is_y)} = 0$$

$$\frac{i\Gamma}{2\pi(R+\lambda - is_y)} = V_{\infty} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(R+\lambda - is_y)^2} \right]$$

$$\Gamma = \frac{2\pi V_{\infty} (R+\lambda - is_y)}{i} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{(R+\lambda - is_y)^2} \right]$$

$$\Gamma = \frac{2\pi V_{\infty} a e^{-i\beta}}{i} \left[ e^{-i\alpha} - \frac{a^2 e^{i\alpha}}{a^2 e^{-2i\beta}} \right] = \frac{2\pi V_{\infty} a e^{-i\beta}}{i} \left[ e^{-i\alpha} - e^{i(2\beta+\alpha)} \right]$$

$$= \frac{2\pi V_{\infty} a}{i} \left[ e^{-i(\alpha+\beta)} - e^{i(\alpha+\beta)} \right] = \frac{2\pi V_{\infty} a}{i} \left[ \cos(\alpha+\beta) - i \sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta) - i \sin(\alpha+\beta) \right]$$

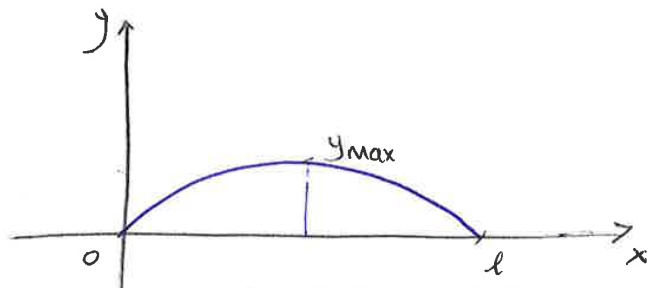
$$= \frac{2\pi V_{\infty} a}{i} (-2i) \sin(\alpha+\beta) \Rightarrow \Gamma = -4\pi V_{\infty} a \sin(\alpha+\beta) \Rightarrow \vec{\Gamma} = \Gamma \hat{k}$$

TEOREMA K-J :  $\vec{L} = \rho \vec{V}_{\infty} \times \vec{\Gamma} \Rightarrow \vec{V}_{\infty} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ V_{\infty} \cos \alpha & V_{\infty} \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$   
 $V_{\infty} \sin \alpha \hat{i} - V_{\infty} \cos \alpha \hat{j} \Rightarrow \vec{L} = L_x \hat{i} + L_y \hat{j}$

# Esercitazione (5)

## TEORIA DELLE PICCOLE PERTURBAZIONI

① PROFILO AD ARCO DI PARABOLA



$$h = \frac{y_{max}}{l} = 3.75\%$$

$d_{id}$ ?  $d_0$ ?

$C_{id}$ ?  $C_{m0}$ ?

$C_p$  per incidenza  $\alpha = d_{id}$

$$d_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) d\theta$$

derivata della  
lente media:

$$y = ax^2 + bx + c = 0$$

$$V(l/2, y_{max}) \rightarrow V(l/2, hl)$$

$$\begin{cases} hl = al^2/4 + b \cdot l/2 \\ -b/2a = l/2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} b = -2a \cdot l/2 \\ \Rightarrow h = al/4 - a \cdot l/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} al/4 = -h \\ \Rightarrow a = -4h/l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4h \\ a = -4h/l \end{cases}$$

$$y = -\frac{4h}{l}x^2 + 4hx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8hx}{l} + 4h$$

CAMBIO DI VARIABILI:

$$\begin{cases} x = l/2(1 - \cos\theta) \\ x' = l/2(1 + \cos\theta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy(\theta)}{dx} = y'(\theta) = -\frac{8h}{l} \left(\frac{l}{2}\right)(1 - \cos\theta) + 4h = -4h(1 - \cos\theta) + 4h$$

$$\Rightarrow y'(\theta) = 4h \cos\theta$$

$$\Rightarrow d_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 4h \cos\theta d\theta = \frac{4h}{\pi} [\sin\theta]_0^\pi = 0 \text{ rad}$$

$$\alpha_0 = \frac{d_{id} - A_1}{2} = -\frac{A_1}{2}$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi y'(\theta) \cos(n\theta) d\theta =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi 4h \cos^2\theta d\theta = \frac{4h}{\pi} \int_0^\pi 2 \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{4h}{\pi} \left[ \int_0^\pi d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi 2 \cos 2\theta d\theta \right] =$$

$$= \frac{4h}{\pi} \left[ \pi + \frac{1}{2} [\sin 2\theta]_0^\pi \right] = 4h = 0.15$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ \Rightarrow 2\cos^2\theta &= 1 + \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\alpha_0 = -\frac{A_1}{2} = -0.075 \text{ rad} = -4.3^\circ$$

$$C_{id} = 2\pi (d_{id} - d_0) = 0.471$$

$$C_{m0} = -\frac{\pi}{4} (A_1 - A_2) = -\frac{\pi}{4} A_1 = -0.11$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y'(\theta) \cos\theta = \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \text{tg}\delta \cos\theta d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} (-\text{tg}\delta) \cos\theta d\theta \right]$$

$$= \frac{2 \text{tg}\delta}{\pi} \left[ [\sin\theta]_0^{\pi/2} - [\sin\theta]_{\pi/2}^{\pi} \right] = \frac{2 \text{tg}\delta}{\pi} [1 - (0 - 1)] = \frac{4 \text{tg}\delta}{\pi}$$

oss:  $A_{1/2} = l_{1/2} \text{tg}\delta \Rightarrow \text{tg}\delta = h/e$   
 $h = l_{1/2} \text{tg}8^\circ \Rightarrow \text{tg}\delta = \frac{1}{2} \text{tg}8^\circ = (\text{tg}8^\circ)^{1/2} = 0.07$

$\Rightarrow A_1 = 0.089$

$\Rightarrow \alpha_0 = -\frac{A_1}{2} = -0.0445 \quad (-2.55^\circ)$

$\alpha = 2\pi(\alpha - \alpha_0) = 0.606$

### ③ PROFILO A DOPPIA CURVATURA

LAMINA CURVA senza spessore:

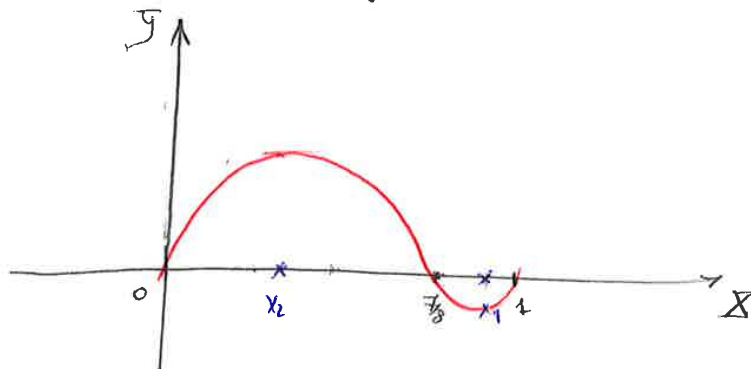
$\left. \begin{matrix} X = x/e \\ Y = y/e \end{matrix} \right\}$  coordinate dimensionali

$$y = \frac{1}{4} x(x-1)(x-\frac{7}{8}) = \frac{1}{4} (x^3 - \frac{15}{8}x^2 + \frac{7}{8}x)$$

- Diagrammare il profilo (sketch di funzione)
- Calcolare:  $h = \frac{y_{max}}{e}$ ,  $\alpha_{id}$ ,  $\alpha_0$ ,  $C_{id}$ ,  $C_{mo}$ .

Piano XOY:

$y=0 \Rightarrow x=0, x=1, x=\frac{7}{8}$  (intersezioni con gli assi)



$y(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{8}); \quad y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{8} = 0$

$\Rightarrow 24x^2 - 30x + 7 = 0$

$\sqrt{\frac{\Delta}{4}} = 7.5498 (= \sqrt{57}); \quad x_{1/2} = \frac{15 \pm \sqrt{57}}{24} \begin{cases} x_1 = 0.9396 \\ x_2 = 0.3104 \end{cases}$

$y(x_1) = -9.16 \cdot 10^{-4}$

$y(x_2) = 0.032 = y_{max} \Rightarrow h = \frac{y_{max}}{e} = \frac{0.032}{e} = 3.02\%$

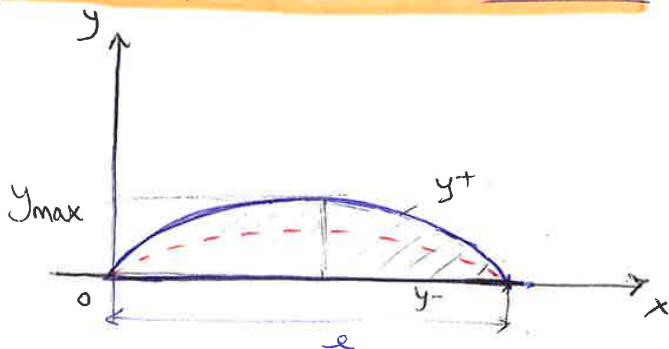
$\begin{cases} x = \frac{l_2}{2} (1 - \cos\theta) \\ x' = \frac{l_2}{2} (1 + \cos\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, \pi]$

$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y'(\theta) d\theta$

$y'(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - \frac{15}{4}x + \frac{7}{8});$

$y'(\theta) = \frac{1}{4} \left[ 3 \left( \frac{l_2}{2} (1 - \cos\theta) \right)^2 - \frac{15}{4} \frac{l_2}{2} (1 - \cos\theta) + \frac{7}{8} \right] = \frac{1}{16} \left[ 3 l_2^2 (1 - \cos\theta)^2 - \frac{15}{2} l_2 (1 - \cos\theta) + \frac{7}{2} \right]$

④ PROFILO PARABOLICO CON SPESSORE



$h = \frac{y_{max}}{e} = 0.05$   
 did? do? Cuid?  
 Cmo?

$\alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} y'_m(\theta) d\theta$        $y_m(x) = \frac{y_+(x) + y_-(x)}{2}$        $\begin{cases} y_+(x) = ax^2 + bx \\ y_-(x) = 0 \end{cases}$

$y = ax^2 + bx$   
 $V(\frac{e}{2}, y_{max}) = V(\frac{e}{2}, he)$

$\begin{cases} h e = a \frac{e^2}{4} + b \frac{e}{2} \\ -\frac{b}{2a} = \frac{e}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = a \frac{e}{4} - \frac{b}{2} \\ b = -2a e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = -\frac{ae}{4} \\ b = 4h \end{cases}$   
 $\Rightarrow y_+(x) = -\frac{4h}{e}x^2 + 4hx$

$y_m(x) = 2h(x - \frac{x^2}{e}) \rightarrow y'_m(x) = 2h(1 - \frac{2}{e}x)$

Cambio coordinate:  $x = \frac{e}{2}(1 - \cos\theta)$ ,  $\theta \in [0, \pi]$

$\Rightarrow y'_m(\theta) = 2h(1 - \frac{2}{e} \cdot \frac{e}{2}(1 - \cos\theta)) = 2h(1 - 1 + \cos\theta) = 2h \cos\theta$

$\Rightarrow \alpha_{id} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 2h \cos\theta d\theta = \frac{2h}{\pi} [\sin\theta]_0^{\pi} = 0$

$\alpha_0 = \alpha_{id} - \frac{A_1}{2} = -\frac{A_1}{2}$

$A_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2h \cos\theta d\theta = \frac{4h}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta + 1}{2} d\theta = \frac{2h}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos 2\theta d\theta + \int_0^{\pi} d\theta \right]$   
 $A_1 = 2h = 0.10$

$\Rightarrow \alpha_0 = -0.05 \text{ rad } (\approx -2.86^\circ)$

$C_{id} = 2\pi(\alpha_{id} - \alpha_0) = -2\pi\alpha_0 = 0.314$

$C_{mo} = -\frac{\pi}{4}(A_1 - A_2)$  ;  $A_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2h(\cos\theta) \cos 2\theta d\theta = \frac{4h}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos\theta(1 - 2\sin^2\theta)] d\theta$   
 $= \frac{4h}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos\theta - 2\sin^2\theta \cos\theta] d\theta = \frac{4h}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} \cos\theta d\theta - 2 \int_0^{\pi} \sin^2\theta \cos\theta d\theta \right]$   
 $= -\frac{8h}{\pi} \left[ \frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^{\pi} = 0$

$\Rightarrow C_{mo} = -\frac{\pi}{4}A_1 = -0.0785$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos^2 \theta} \left( \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \right) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[ \int_0^\pi d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{4} \pi = \mathbf{0.785}
 \end{aligned}$$

$$d = \frac{a}{2\pi} + d_0 = 0.125 - 0.125 = 0$$

$y_m(x)$ ? la lamina  $e^{-}$  rappresentabile con una distribuzione di vortici:

$$\begin{cases} u'(x, 0^\pm) = \mp \frac{\gamma(x)}{2} \\ C_p(x) = -\frac{2u'(x, 0^+)}{V_\infty} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{V_\infty}{2\pi} C_p(x) = \frac{\gamma(x)}{2} \\ C_p(x) = -\frac{\gamma(x)}{V_\infty} \end{cases}$$

EQ. TANGENZA:

$$\begin{aligned}
 v'(x, 0) &= V_\infty \left[ \frac{dy_m(x)}{dx} - d \right] \Rightarrow \frac{v'(x, 0)}{V_\infty} = \frac{dy_m(x)}{dx} - d \\
 \Rightarrow \frac{dy_m(x)}{dx} &= \frac{v'(x, 0)}{V_\infty} + d \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} v'(x, 0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(x') dx'}{x-x'} \\ \frac{dy_m(x)}{dx} &= d + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\Delta C_p/2 dx'}{x'-x} \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{dy_m}{dx} &= \frac{1}{V_\infty} \int_0^l \frac{\gamma(x')}{x'-x} dx' + d = d + \int_0^l \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{C_p(x')}{x'-x} dx' = d + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta C_p/2 dx'}{x'-x} \\
 &= d + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \theta' - \frac{1}{2} (1 - \cos^2 \theta')}{\frac{1}{2} (1 - \cos \theta') - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)} d\theta' = \\
 &= d + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} \sin^2 \theta'}{\frac{1}{2} (1 - \cos \theta') - \frac{1}{2} (1 - \cos \theta)} d\theta' = d + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} d\theta' \\
 &= d - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta' \cdot \sin \theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' \xrightarrow{\text{INTEGRALE DI GLAUERT (n=1)}} = d + \frac{1}{4} \cos \theta \\
 &= d - \frac{1}{4\pi} (-\pi \cos \theta) = d + \frac{1}{4} \cos \theta.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dy_m}{dx} = \left( d + \frac{1}{4} \cos \theta \right) \Rightarrow dy_m = \left( d + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{2x}{l} \right) \right) dx$$

$$\Rightarrow dy_m(x) = \left( \frac{d}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{l} \right) dx \Rightarrow dy_m(x) = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \frac{x}{l} \right) dx$$

$$y_m(x) = \int \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{2l} x \right) dx = \frac{1}{4} x - \frac{1}{4l} x^2 + c$$

$$\Rightarrow \boxed{y_m(x) = \frac{1}{4} x \left( 1 - \frac{x}{l} \right)}$$

# Esercitazione (7)

ALA AD ALLUNGAMENTO FINITO  
(applicata a prof. sottili)

## ① ALA ELLITTICA IN PANTA.

ALA ellittica in panta  $l_0 = 1.5 \text{ m}$

$b = 10.4 \text{ m}$  ;

ALA non svergolata e a profilo costante

$$d_0 = -2.98^\circ = -0.052 \text{ rad}$$

$$c_e' = 6.12 \quad c_L? \quad c_{Di}?$$

$$d = 6^\circ = 0.1047 \text{ rad} \quad d_i?$$

da incidenza aerodinamica

$$c_L = c_L' (d - d_0) \quad ; \quad c_L' = \frac{2\pi k}{1 + \frac{2k}{\lambda}} = \frac{c_e'}{1 + \frac{2k}{\lambda}}$$

$$c_e' = 2\pi k \Rightarrow k = \frac{c_e'}{2\pi} = 0.975$$

$$\lambda = \frac{b^2}{S} \quad ; \quad S = \pi b \frac{l_0}{2} = \frac{\pi}{4} b l_0 \Rightarrow \lambda = \frac{b^2}{\frac{\pi}{4} b l_0} = \frac{4b}{\pi l_0} = 8.83$$

$$\Rightarrow c_L' = \frac{6.12}{1 + \frac{2 \cdot 0.975}{8.83}} = 5.01$$

$$c_L = 5.01 (0.105 \text{ rad} + 0.05 \text{ rad}) = 0.78$$

$$c_L = \pi \lambda d_i \Rightarrow d_i = \frac{c_L}{\pi \lambda} = 0.028 \text{ rad} = 1.61^\circ$$

$$c_{Di} = c_L d_i = 0.022$$

## ② INFLUENZA DELL'ALLUNGAMENTO SU $c_L$ e $c_{Di}$

ALA ellittica in panta a profilo cost ( $d_0 = \text{cost}$ );

$$k = 0.92$$

Non svergolata ( $d_a = \alpha - d_0 \text{ cost}$ )

$$\lambda_1 = 8 \quad \lambda_2 = 10 \quad c_{L2}? \quad c_{Di2}?$$

$$c_{L1} = 0.6$$

[a parità degli altri parametri]

$$c_L = c_L' d_a \quad ; \quad c_L' = \frac{c_e'}{1 + \frac{2k}{\lambda}} = \frac{2\pi k}{1 + \frac{2k}{\lambda}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{L1} = \frac{2\pi k}{1 + \frac{2k}{\lambda_1}} d_a \\ c_{L2} = \frac{2\pi k}{1 + \frac{2k}{\lambda_2}} d_a \end{array} \right. \Rightarrow \frac{c_{L1}}{c_{L2}} = \frac{1 + \frac{2k}{\lambda_2}}{1 + \frac{2k}{\lambda_1}} \Rightarrow \frac{c_{L1}}{c_{L2}} = \frac{\lambda_2 + 2k}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + 2k}$$

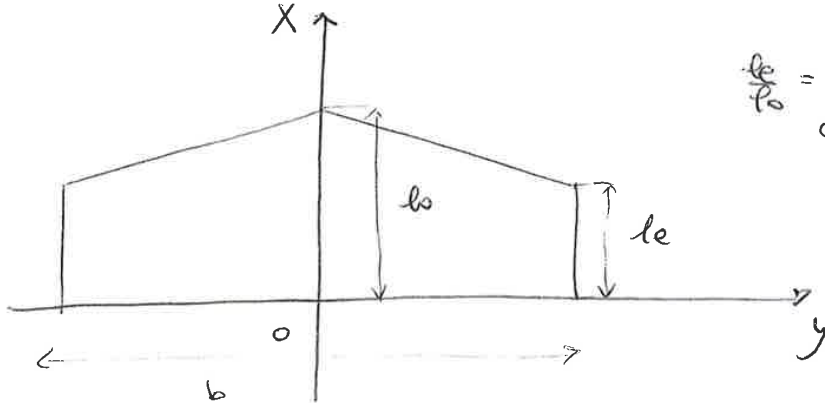
$$\Rightarrow \frac{c_{L1}}{c_{L2}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2 + 2k}{\lambda_1 + 2k} \Rightarrow c_{L2} = c_{L1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2 + 2k} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0.623$$

$$G_1 = 0.4 \quad y = 0.6 \frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha(y) = \frac{0.4}{3.14 \cdot 9.5} \left[ \frac{2 \cdot 9.5}{3.14 \cdot 0.95} \sqrt{1 - 0.6^2} + 1 \right] \cdot 0.0253 = 3.23^\circ$$

Analogamente per  $G_2 = 0.6$  si ottiene  $\alpha(y) = 5.56^\circ$

④ ALA TRAPEZIA CON DISTRIBUZIONE ELLITTICA DI PORTANZA



$\lambda = 9.5$

$\frac{l_e}{l_0} = \text{rappr. rastremazione} = \frac{2}{3}$

$\alpha_0 \text{ costante} = -1.45^\circ = -0.0253 \text{ rad}$

$k = 0.95$

$\alpha(y) ? / \text{distr. portanza ellittica}$

$\alpha(y = 0.6 \frac{b}{2}) \text{ per } \begin{cases} G_1 = 0.4 \\ G_2 = 0.6 \end{cases}$

ISTR. ELLITTICA:  $\frac{l(y)^2}{l_0^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1 \Rightarrow l(y) = l_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}}$

EQ. PRANDTL:  $l(y) = V_\infty k \pi l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i]$

$$\Rightarrow l_0 \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}} = V_\infty k \pi l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i]$$

ipotizziamo lineare

$l(y) = Ay + B$

$y \in [0, b/2]$

$(l_e = \frac{2}{3} l_0)$

$$\begin{cases} l_0 = B \\ l_e = A \cdot b/2 + B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_e = A \cdot b/2 + l_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} l_0 = A \cdot b/2 + l_0 \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3} l_0 = A \frac{b}{2} \Rightarrow A = -\frac{2}{3} \frac{l_0}{b}$$

$$\Rightarrow l(y) = -\frac{2}{3} \frac{l_0}{b} y + l_0 = l_0 \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{b} y + 1 \right)$$

$$\Rightarrow l(y) = l_0 \left( 1 - \frac{2}{3b} y \right)$$

$$\alpha_a(y) - \alpha_i = \frac{l_0}{V_\infty k \pi l(y)} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}} \Rightarrow \left. \begin{matrix} G_2 = \frac{\pi \lambda l_0}{2b V_\infty} \Rightarrow \frac{l_0}{V_\infty} = \frac{2b G_2}{\pi \lambda} \end{matrix} \right\}$$

$$\alpha(y) = \alpha_i + \alpha_0 + \frac{2b G_2}{k \pi l_0 \cdot \pi \lambda} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}} = \frac{G_2}{\pi \lambda} + \alpha_0 + \frac{G_2}{\pi \lambda} \frac{2b}{\pi l(y)} \sqrt{\quad}$$

$$\Rightarrow \alpha(y) = \alpha_0 + \frac{G_2}{\pi \lambda} \left[ 1 + \frac{2b}{k \pi l_0 \left( 1 - \frac{2}{3b} y \right)} \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2/4}} \right]$$

$$\left. \begin{matrix} S = 2 \cdot \frac{1}{2} (l_0 + l_e) \frac{b}{2} = \frac{5}{3} l_0 \cdot \frac{b}{2} = \frac{5}{6} l_0 b \\ \lambda = \frac{b^2}{S} (= 9.5) \Rightarrow b^2 = \lambda \cdot \frac{5 l_0 b}{6} \Rightarrow \frac{b}{l_0} = \frac{5}{6} \lambda \end{matrix} \right\}$$



$$\alpha_a = \sum_{n=1,3,5}^{\infty} A_n \sin n\theta \left( \frac{4\lambda}{c_e'} + \frac{n}{\sin\theta} \right) =$$

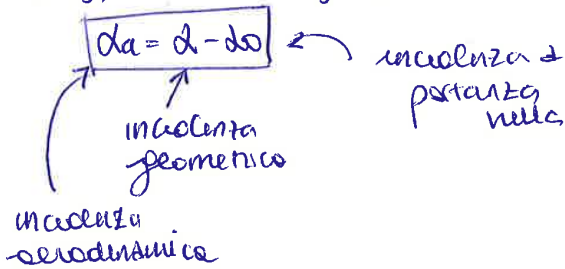
$$C_L = \pi \lambda A_1, \quad C_{Di} = \pi \lambda$$

↑  
 risolvere il sistema lineare  
 $AX + B$  in Matlab.

NB dell'esercitazione (7)

$$\Gamma(y) = k \pi v_{\infty} l(y) [\alpha_a(y) - \alpha_i(y)]$$

EQUAZIONE INTEGRALE-DIFF. PRANDTL.



DISTRIBUZIONE ELLITTICA DI PORTANZA  $\Rightarrow$

$$\frac{\Gamma(y)^2}{\Gamma_0^2} + \frac{y^2}{(b/2)^2} = 1$$

$$d_i = \frac{C_L}{\pi \lambda} \quad \text{costante lungo } y$$

$$C_{Di} = \frac{C_L^2}{\pi \lambda} = C_L d_i, \quad C_L = \frac{\pi \lambda \Gamma_0}{2b v_{\infty}} \quad \text{Circulatorio in metallo.}$$

↳ PIANTA ELLITTICA :

$$C_L = C_L' (\alpha - \alpha_0), \quad C_L' = \frac{c_e'}{1 + \frac{2k}{\lambda}}, \quad c_e' = 2\pi k$$

DISTRIBUZIONE GENERALE di PORTANZA

$$\Gamma(\theta) = 2b v_{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin n\theta$$

$$\alpha_i(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin\theta}$$

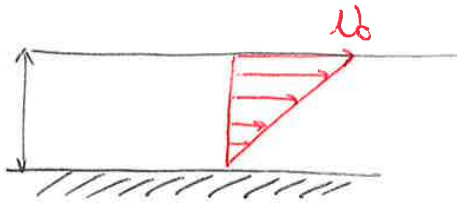
$$C_L = \pi \lambda A_1$$

$$C_{Di} = \pi \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2$$

ESPR. ELLITTICA di  $L$   $\alpha$  ottiene:

- ↳  $\alpha_0$  in pianta ellittica non sregolata ( $\alpha$  opm incidenza)
- ↳  $\alpha_0$  in pianta qualsiasi sregolata (ma solo per un det.  $C_L$ )

**ESERCIZIO ③**



Andamento lineare:

$$u(y) = \frac{U_0}{h}y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

flusso di Couette piano.

$h = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}$   
 $\mu = 0.0134 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$ ,  $U_0 = 0.1 \text{ m/s}$

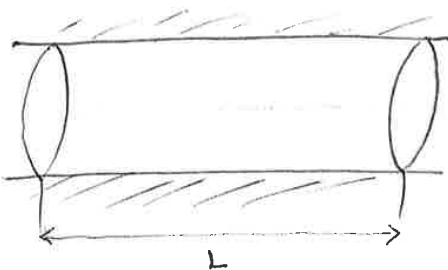
$\tau = \mu \frac{du}{dy}$  } ①  $\frac{dp}{dx} = 0$   
 } ②  $\frac{dp}{dx} = -2680 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$   
 } ③  $\frac{dp}{dx} = 2680 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$

CASO ①  $\frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow u(y) = \frac{U_0 y}{h} \Rightarrow \frac{du(y)}{dy} = \frac{U_0}{h} \Rightarrow$  (Couette semplice)  
 $\tau = \frac{U_0}{h} \mu = 1.34 \text{ Pa}$

CASO ②  $\frac{dp}{dx} = A_1 = -2680 \text{ Pa}$ ;  $y=h$   
 $\frac{du(y)}{dy} = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h + \frac{U_0}{h} + \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dx} h = 1.34 \text{ Pa}$   
 $\Rightarrow \tau_2 = \mu \left( -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h \right) + \mu \frac{U_0}{h} + \frac{dp}{dx} h = 1.34 \text{ Pa} + 1.34 \text{ Pa} - 2.68 \text{ Pa} = 0$

CASO ③  $\frac{dp}{dx} = 2680 \text{ Pa}$ ;  
 $\frac{du(y)}{dy} = \frac{U_0}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (2y - h) = \frac{U_0}{h} + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h$   
 $\Rightarrow \tau_2 = \frac{U_0 \mu}{h} + \mu \cdot \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} h = 1.34 \text{ Pa} - 2.68 \text{ Pa} = -1.34 \text{ Pa}$

**ESERCIZIO ④**



caso ①  
 $\mu = 0.008 \frac{\text{kg}}{\text{ms}}$   
 $\rho = 860 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$   
 $d = 0.06 \text{ m}$   
 $L = 500 \text{ m}$   
 $P_2 = 34000 \text{ Pa}$   
 $P_1 ?$

$Q_{\text{max}}!$   
 mantenendo il  
 flusso laminare

flusso laminare:  $Re < 2300$

$Re = \frac{\bar{U} d}{\nu} = \frac{\rho \bar{U} d}{\mu}$ ; (Aumentando  $Re$  aumenta la  $\bar{U}$ )

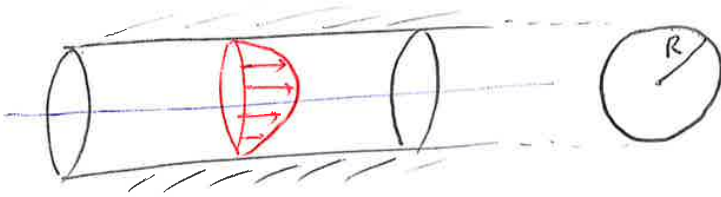
$Q = \frac{\bar{U} d^2 \pi}{4}$  (Aumentando  $\bar{U}$  aumenta la portata)

Mi metto a  $Re = 2000$ :

$\bar{u} = 0.3101 \text{ m/s} \Rightarrow Q = 8.76 \cdot 10^{-4} \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$

**ESERCIZIO 6**

$5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$   
 $Q = 500 \text{ cm}^3/\text{s}$ ,  $R = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$   
 $L = 10 \text{ m}$   
 $\Delta P = 1274 \text{ Pa}$   
 di che fluido si tratta?  
 $\frac{dp}{dx} = -127.4 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$



$$u(y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2)$$

$$Q = \bar{u} \pi R^2 \Rightarrow \bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = 1.59 \text{ m/s}$$

$$u_{\text{max}} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} R^2 = 2\bar{u} \Rightarrow \mu = -\frac{1}{4} \frac{dp}{dx} \frac{R^2}{2\bar{u}} = 1 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kg}}{\text{m s}} \rightarrow \text{ACQUA}$$

**NB ESERCITAZIONE 8**

u generale  
 $\bar{u} = \frac{\int_A u(y) dA}{A}$

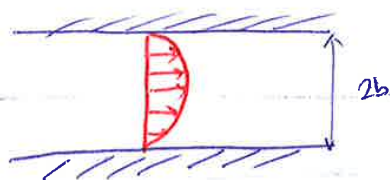
**FLUSSI PARALLELI** (in una sola direzione)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{dp}{dx} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$Q = \bar{u} \cdot A$$

$$Re = \frac{\bar{u} d}{\nu}$$

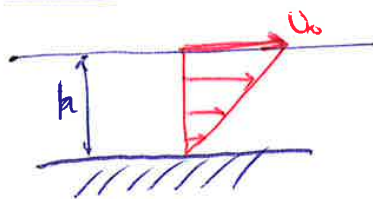
**FLUSSO DI POISEUILLE** (nel piano)



$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ u = 0 \text{ per } y = \pm b \end{cases}$$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (b^2 - y^2)$$

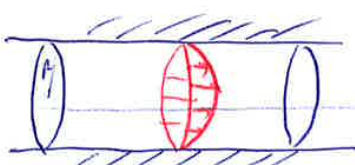
**FLUSSO di COUETTE** (parete mobile)



$$\begin{cases} \frac{dp}{dx} = \mu \frac{d^2 u}{dy^2} \\ u = 0 \rightarrow y = 0 \\ u = U_0 \rightarrow y = h \end{cases}$$

$$u(y) = \frac{U_0}{h} y + \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

**TUBO CIRCOLARE** → **HAGEN-POISEUILLE**



$$\begin{cases} \mu \left( \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du}{dy} \right) = \frac{dp}{dx} \\ u = 0 \rightarrow y = R \\ u \text{ finito } y = 0 \end{cases}$$

→  $u_{\text{max}} \rightarrow y = 0$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx} (R^2 - y^2)$$

$\lambda = \frac{64}{Re}$ ,  $\bar{u} = \frac{u_{\text{max}}}{2}$  (solo in questo caso)

ES. QUANTITÀ DI MOTO:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}(U^2 \theta) + \delta^* U_{\infty} \frac{dU_{\infty}}{dx} \Rightarrow \frac{d(U_{\infty}^2 \theta)}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}$$

$$\Rightarrow U_{\infty}^2 \frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_w}{2\rho} \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\tau_w}{\rho U_{\infty}^2} = \varphi \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{2} \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{4-\pi}{2\pi} \delta(x) \right) = \frac{1}{2} \varphi \Rightarrow \frac{4-\pi}{2\pi} \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{1}{2} \varphi \Rightarrow$$

$$\frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{\varphi \cdot \pi}{4-\pi} \Rightarrow \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{\pi}{\rho U_{\infty}} \cdot \frac{1}{4-\pi} \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \int \delta d\delta(x) = \int \frac{\pi^2 \nu}{U_{\infty} (4-\pi)} dx$$

$$\frac{1}{2} \delta^2 = \frac{\pi^2 \nu}{U_{\infty} (4-\pi)} x + C$$

C=0

$$\Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{x \cdot 2\pi^2 \nu}{x U_{\infty} (4-\pi)}} = \sqrt{\frac{x^2 2\pi^2}{(4-\pi) Re}} = 4.78 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi \nu}{U_{\infty}} \frac{\sqrt{Re}}{4.78 x} = \frac{\pi Re}{Re} \cdot \frac{\sqrt{Re}}{4.78} = \frac{0.65}{\sqrt{Re}}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{4-\pi}{2\pi} \cdot 4.78 \frac{x}{\sqrt{Re}} = 0.65 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin \eta) d\eta \cdot \frac{2\delta}{\pi} = \frac{2\delta}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 d\eta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin \eta) d\eta \right]$$

$$\Rightarrow \frac{2\delta}{\pi} [\pi/2 - 1] \Rightarrow \delta^* = 1.73 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1.73 \frac{x}{\sqrt{Re}}}{0.65 \frac{x}{\sqrt{Re}}} = 2.66$$

BLASIUS

$$\rightarrow = 5.0 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

$$\rightarrow = \frac{0.664}{\sqrt{Re}}$$

$$\rightarrow = 0.664 \frac{x}{\sqrt{Re}}$$

ESERCIZIO ③

(STRATO LIMITE LAN. PIANA unghetta e e) profondità b

$$D = 2b \rho U_{\infty}^3 \theta(L)$$

$$D = 2b \int_0^L \tau_w(x) dx;$$

Blasius:  $\tau_w(x) = 0.332 \mu U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{x}} = 0.332 \sqrt{\rho \mu U_{\infty}^3} \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\Rightarrow D = 2b \int_0^L 0.332 \frac{\sqrt{\rho \mu U_{\infty}^3}}{\sqrt{x}} dx = 2b \cdot 0.332 \sqrt{\rho \mu U_{\infty}^3} \cdot 2 \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= 4b \cdot 0.332 \sqrt{\rho \mu U_{\infty}^3} \cdot \sqrt{L} = 1.328 \sqrt{\rho \mu U_{\infty}^3 L}$$

Portata  $Q_{un} = \rho \int_0^{\delta} u \, dy$  ;  $\bar{\eta} = y/\delta(L)$  ,  $\delta(L) = 5.0 \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}}$   
 $y = \bar{\eta} \delta(L) \Rightarrow dy = \delta(L) d\bar{\eta}$

$\Rightarrow Q_{un} = \rho U_{\infty} \delta(L) \int_0^1 (2\bar{\eta} - \bar{\eta}^2) d\bar{\eta} = \rho U_{\infty} 5 \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}} \int_0^1 (2\bar{\eta} - \bar{\eta}^2) d\bar{\eta} =$   
 $\rho U_{\infty} \left( 5 \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}} \right) \left( \bar{\eta}^2 - \frac{\bar{\eta}^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \rho U_{\infty} \left( 5 \sqrt{\frac{\nu L}{U_{\infty}}} \right) = 0.0439 \frac{kg}{s}$

$D = b \int_0^L \tau_w(x) \, dx = b \int_0^L (0.332 \rho U_{\infty} \sqrt{\nu U_{\infty} x}) \, dx = 0.332 b \rho U_{\infty} \sqrt{\nu U_{\infty}} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{x}}$   
 $= 0.0350 N$

NB ESERCITAZIONE ②

$Re_{cr} \text{ cilindro} = 2300$

STRATO LIMITE:  $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$

BLASIUS: LAMINA PIANA, flusso bidimensionale e stazionario.

• COMPONENTI VELOCITÀ:

$$\begin{cases} u = U_{\infty} f'(\eta) = \sqrt{2\nu x U_{\infty}} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ v = \frac{y}{2} \sqrt{\frac{2\nu U_{\infty}}{x}} (f'' - \eta f') \end{cases}$$

•  $\tau_w = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{y=0} = 0.332 \mu U_{\infty} \sqrt{\frac{U_{\infty}}{\nu x}}$  Sotto lamina  
si suppone 2Df

•  $C_f = \frac{\tau_w(x)}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} = \frac{0.664}{\sqrt{Re_x}} \Rightarrow$  •  $D_f = 0.664 \sqrt{\mu \rho L U_{\infty}^3}$

•  $C_D = 1.328 \frac{1}{\sqrt{Re_L}}$  (relativo ad un lato della lamina)

•  $\delta = 5 \frac{x}{\sqrt{Re_x}}$  ;  $\delta^* \left( = \int_0^{\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy \right) \Big|_B \Rightarrow 1.7208 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$

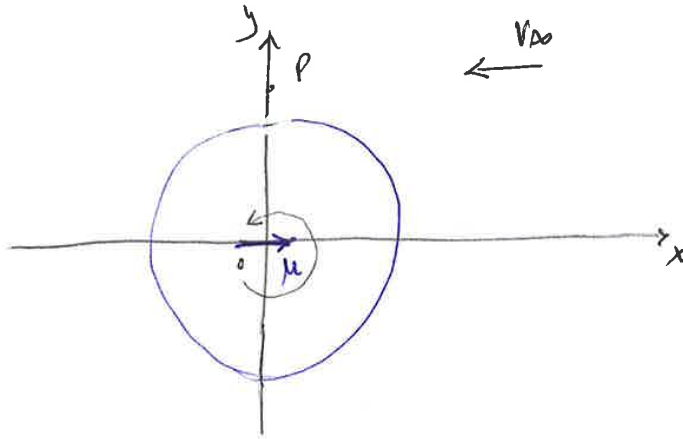
•  $\theta \left( = \int_0^{\infty} \frac{u}{U_{\infty}} \left( 1 - \frac{u}{U_{\infty}} \right) dy \right) \Big|_B \Rightarrow 0.064 \sqrt{\frac{\nu x}{U_{\infty}}}$

•  $H = \frac{\delta^*}{\theta} = 2.59$

$\nu = \frac{\mu}{\rho} \rightarrow \mu = \rho \nu$

**ESERCIZI**

3) Nell'origine degli assi vengono posti una doppia elica  $\mu = 20 \text{ m}^2/\text{s}$  // e con cor-  
de con asse x, e un vortice antiorario positivo,  $\Gamma = 8 \text{ m}^2/\text{s}$ , insieme  
da corrente uniforme  $\vec{V}_\infty = -V_\infty \hat{i}$ ,  $V_\infty = +3 \text{ m/s}$ . Trovare il  
Cp nel punto P(0, 0.4m)



Il campo di moto  
è equivalente a quello  
attorno ad un cilindro  
circolare con rotazione

$$\psi_c = \psi_y - \psi_x = -V_\infty y = -V_\infty r \sin\theta$$

$$\psi_d = \frac{\mu}{2\pi r} \sin\theta$$

$$\psi_v = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$$

$\Rightarrow \psi(r, \theta) = -V_\infty r \sin\theta + \frac{\mu}{2\pi r} \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0} \quad (r_0 = 1)$

$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi V_\infty}} = 0.326$   
 È fuori dal  
cerchio  $\psi = 0$

velocità:

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{1}{r} (-V_\infty r \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi r} \cos\theta) \\ v_\theta = -(-V_\infty \sin\theta - \frac{1}{r^2} \frac{\mu}{2\pi} \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}) \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{cases} v_x = -V_\infty \cos\theta + \frac{\mu}{2\pi r^2} \cos\theta \\ v_\theta = V_\infty \sin\theta + \frac{\mu}{2\pi r^2} \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad P(0.4\text{m}, \pi/2)$

$v_P \begin{cases} v_x(P) = 0 \\ v_\theta(P) = V_\infty + \frac{\mu}{2\pi r_p^2} + \frac{\Gamma}{2\pi r_p} = 53.089 \text{ m/s} \end{cases}$

$C_p = 1 - \left(\frac{v_P}{V_\infty}\right)^2 = -2.13$

## Esercizi flussi turbolenti

### Esercizio 1 (condotto turbolento)

Una corrente di acqua in condizioni ambiente ( $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ) scorre in un tubo di diametro  $D = 2R = 0.1 \text{ m}$ , con portata in volume  $Q = 0.07854 \text{ m}^3/\text{s}$ . Nel caso di pareti idraulicamente lisce, calcolare:

- 1) La velocità media  $\bar{U}$  e il numero di Reynolds,  $Re = \bar{U}D/\nu$ . Verificare se il flusso è laminare o turbolento.
- 2) Il coefficiente di resistenza,  $\lambda$ , la velocità d'attrito  $u_\tau$ , la velocità massima  $U_0$  (nel centro del condotto), e stimare lo spessore del sottostrato viscoso.
- 3) Lo sforzo di taglio a parete,  $\tau_w$ , e il gradiente di pressione,  $dP/dx$ .
- 4) Il valore dello stress turbolento a parete ( $r = R$ ) e sull'asse del tubo ( $r = 0$ ).

#### Punto 1.

La velocità media è:

$$\bar{U} = \frac{Q}{\pi R^2} = 10 \text{ m/s.} \quad (1)$$

Di conseguenza, il numero di Reynolds risulta:

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} = 10^6. \quad (2)$$

Essendo  $Re = 10^6 \gg 10^3$  ( $Re_{cr} \approx 2300$ ), il flusso è turbolento.

#### Punto 2.

Usiamo la legge di Prandtl per l'attrito (*Prandtl's friction law*) che è una legge universale verificata sperimentalmente fino a  $Re = 4 \cdot 10^6$ :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log_{10}(Re\sqrt{\lambda}) - 0.8. \quad (3)$$

Quest'equazione non permette un'espressione esplicita per  $\lambda$ , dobbiamo usare una procedura iterativa. Come valore di partenza ( $\lambda^0$ ), utilizziamo le formule di Blasius per la resistenza nei tubi lisce:

$$\lambda = 0.3164 \frac{1}{Re^{1/4}}, \quad (4)$$

dove  $k = 0.41$  è la costante di Von Karman. La stima 3.66 è corretta da misure sperimentali in 4.07, quindi:

$$\frac{U_0 - \bar{U}}{u_\tau} \approx 4.07 \Rightarrow U_0 = 4.07 \cdot u_\tau + \bar{U} = 11.5531 \text{ m/s.} \quad (10)$$

Per il calcolo del sottostrato viscoso, ricordiamo il cambiamento di coordinate  $y = R - r$  ( $r$  direzione radiale). Sappiamo che la scala di lunghezza viscosa è definita come:

$$\delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} = 0.0026 \text{ mm,} \quad (11)$$

e il sottostrato viscoso si estende fino a 5 scale viscosi:

$$y^+ = \frac{y}{\delta_v} = \frac{u_\tau y}{\nu} = 5 \Rightarrow y = 5\delta_v = 0.013 \text{ mm.} \quad (12)$$

**Punto 3.**

Lo sforzo di taglio a parete,  $\tau_w$ , e il gradiente di pressione,  $dP/dx$ , si ricavano come segue:

$$\tau_w = u_\tau^2 \rho = 145.6186 \text{ N/m}^2, \quad (13)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP_w}{dx} = -2 \frac{\tau_w}{R} = -5824.7 \text{ N/m}^3, \quad (14)$$

dove ricordiamo che per il condotto si ha  $\tau(r) = \frac{1}{2} r \frac{dP_w}{dx}$  e  $\tau_w = -\tau(R)$ .

**Punto 4.**

Ricordando che  $y = R - r$ , lo stress totale si può esprimere come:

$$\tau_{tot} = \tau_{visc} + \tau_{turb} = \mu \frac{dU}{dr} - \rho \overline{u'v'} = \tau_w \left(1 - \frac{y}{R}\right) = \tau_w \left(1 - \frac{R-r}{R}\right) = \tau_w \frac{r}{R}. \quad (15)$$

In  $r = 0$ :

$$\tau_{tot} = 0, \quad \tau_{visc} = \mu \frac{dU}{dr} \Big|_{r=0} = 0 \Rightarrow \tau_{turb} = 0, \quad (16)$$



Per quanto riguarda il rapporto  $u_\tau/\bar{U}$ , sappiamo che:

$$u_\tau^2 = \frac{1}{2}\bar{U}^2 C_f \Rightarrow \frac{u_\tau}{\bar{U}} = \sqrt{\frac{1}{2}C_f} = 0.0469. \quad (19)$$

La velocità d'attrito è  $u_\tau = 0.1337$  m/s, quindi il numero di Reynolds d'attrito è:

$$Re_\tau = \frac{u_\tau \delta}{\nu} = 2345.6. \quad (20)$$

Per il rapporto  $\delta_v/\delta$ , si ha:

$$\frac{\delta_v}{\delta} = \frac{\nu}{u_\tau \delta} = \frac{1}{Re_\tau} = 4.2633 \cdot 10^{-4}. \quad (21)$$

La scala di lunghezza viscosa è definita come:

$$\delta_v = \frac{\nu}{u_\tau} = 8.5266 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 0.0085 \text{ mm}, \quad (22)$$

da cui si ottiene lo spessore della regione viscosa di parete:

$$y = 50\delta_v = 0.4263 \text{ mm}, \quad (23)$$

e lo spessore di sottostrato viscoso:

$$y = 5\delta_v = 0.0426 \text{ mm}. \quad (24)$$

#### Osservazione

Per i flussi di parete (canale piano e condotto) turbolenti, si riporta una tabella sintetica con le regioni e gli strati in prossimità della parete.

Regione	Posizione	Caratteristiche
sottostrato viscoso	$y < 5\delta_v$	$\tau_{turb}$ è trascurabile rispetto a $\tau_{visc}$
buffer layer	$5\delta_v < y < 30\delta_v$	regione tra il sottostrato viscoso e la regione di legge logaritmica
regione di legge logaritmica	$y > 30\delta_v$ e $y < 0.3\delta$	vale la legge logaritmica
regione viscosa di parete	$y < 50\delta_v$	$\tau_{visc}$ è significativo rispetto a $\tau_{tot}$ (effetto diretto della viscosità)
strato esterno	$y > 50\delta_v$	effetto diretto della viscosità su $\tau_{tot}$ è trascurabile

### Esercizio 4 (condotto laminare e turbolento)

In un tubo liscio a sezione circolare di diametro  $D = 1$  cm e infinitamente esteso scorre:

1. acqua in condizioni standard ( $\nu = 10^{-6}$  m<sup>2</sup>/s,  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>) con velocità media  $\bar{U} = 4$  m/s;
2. un olio ( $\nu = 0.9 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s,  $\rho = 925$  kg/m<sup>3</sup>) con velocità media  $\bar{U} = 10$  m/s.

Calcolare il coefficiente di resistenza,  $\lambda$ , e la velocità massima,  $U_0$ , nei due casi.

**Punto 1.** Calcoliamo il numero di Reynolds nel primo caso:

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} = 40000, \quad (30)$$

quindi  $Re_{cr} \ll Re < 10^5$ . Il flusso risulta turbolento ( $Re \gg Re_{cr} \approx 2300$ ), ma all'interno del range di validità per le formule di Blasius per la resistenza  $\lambda$ . Da quest'ultima quindi si ottiene:

$$\lambda = 0.3164 \frac{1}{Re^{1/4}} = 0.0224. \quad (31)$$

La velocità d'attrito vale:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\lambda}{8}} \bar{U} = 0.2117 \text{ m/s}. \quad (32)$$

Per ottenere la velocità massima,  $U_0$ , utilizziamo la stima:

$$\frac{U_0 - \bar{U}}{u_\tau} \approx 4.07 \quad \Rightarrow \quad U_0 = 4.07 \cdot u_\tau + \bar{U} = 4.8616 \text{ m/s}. \quad (33)$$

**Punto 2.** Nel secondo caso il numero di Reynolds vale:

$$Re = \frac{\bar{U}D}{\nu} = 1.11 \cdot 10^3 < Re_{cr}, \quad (34)$$

quindi il flusso risulta laminare e possiamo usare le relazioni di Hagen-Poiseuille:

$$\lambda = \frac{64}{Re} = 0.0576. \quad (35)$$

$$\begin{aligned}
 \theta(x) &= \int_0^\infty \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}}\right) dy = \\
 &= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} dy - \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{n}} dy = \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \int_0^\delta y^{\frac{1}{n}} dy - \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{n}} \int_0^\delta y^{\frac{2}{n}} dy = \\
 &= \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{y^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1} \Big|_0^\delta - \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{2}{n}} \cdot \frac{y^{\frac{2}{n}+1}}{\frac{2}{n}+1} \Big|_0^\delta = \frac{\delta^{-\frac{1}{n}} \cdot \delta^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{n+1}{n}} - \frac{\delta^{-\frac{2}{n}} \cdot \delta^{\frac{2}{n}+1}}{\frac{n+2}{n}}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Il rapporto  $\theta/\delta$  è:

$$\frac{\theta}{\delta} = \frac{1}{\frac{n+1}{n}} - \frac{1}{\frac{n+2}{n}} = \frac{n}{n+1} - \frac{n}{n+2} = \frac{n}{(n+1)(n+2)}. \quad (41)$$

Di conseguenza, per il fattore di forma si ottiene:

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{1}{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{n} = 1 + \frac{2}{n}. \quad (42)$$

Nel caso  $n = 7$ , utilizzando la relazione (legge empirica):

$$c_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.045 \frac{1}{\left(\frac{U_\infty \delta}{\nu}\right)^{1/4}}, \quad (43)$$

calcolare la resistenza di una lamina di lunghezza  $L$  e profondità unitaria sulla quale si ha uno strato limite turbolento per la sua intera lunghezza.

Nel caso  $n = 7$ ,  $\theta = \frac{7}{72}\delta$ .

Dall'equazione di quantità di moto in forma integrale:

$$\frac{d}{dx}(U_\infty^2 \theta) + \delta^* U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad (44)$$

possiamo ottenere l'equazione di Von Karman:

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{\theta}{U_\infty} (2 + H) \frac{dU_\infty}{dx} = \frac{c_f}{2}, \quad (45)$$

e considerando che in questo caso  $dU_\infty/dx = 0$ , ricaviamo l'espressione:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{c_f}{2} \Rightarrow \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx} = 0.0225 \left(\frac{\nu}{U_\infty \delta}\right)^{1/4}. \quad (46)$$

Osservazione. La legge di potenza  $1/7$  per il profilo di velocità e le relazioni ottenute sono valide nel range di numeri di Reynolds,  $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$ , e assumendo che lo strato limite sia completamente turbolento a partire dal bordo d'attacco.

### Esercizio 6 (strato limite turbolento su lamina piana)

Una corrente d'aria ( $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ) investe una lamina piana di lunghezza  $L = 6 \text{ m}$  e profondità  $b = 1 \text{ m}$  con una velocità di  $20 \text{ km/h}$ . Assumendo che lo strato limite sia completamente turbolento dal bordo d'attacco, calcolare la resistenza che agisce su un lato della lamina. Stimare lo spessore di strato limite al bordo di fuga e ricavare infine l'espressione dello sforzo di taglio a parete adimensionale,  $c_f$ , in funzione di  $Re_x$ .

Suggerimento. Utilizzare la legge di potenza  $1/7$  per il profilo di velocità motivandone la scelta.

Calcoliamo il numero di Reynolds per vedere se questa configurazione rientra nel range di validità della legge di potenza  $1/7$ :

$$U_\infty = \frac{20 \cdot 1000}{3600} = 5.5556 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad Re_L = \frac{U_\infty L}{\nu} = 2.22 \cdot 10^6. \quad (52)$$

Il numero di Reynolds,  $Re_L$ , cade nel range  $5 \cdot 10^5 < Re_x < 10^7$ , è dunque possibile approssimare il profilo di velocità con la legge di potenza  $1/7$ . Il coefficiente di resistenza vale:

$$C_D = \frac{0.074}{Re_L^{1/5}} = 0.0040, \quad (53)$$

e quindi:

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho(L \cdot b)U_\infty^2} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2}C_D\rho(L \cdot b)U_\infty^2 = 0.4445 \text{ N}. \quad (54)$$

Per lo spessore di strato limite al bordo di fuga, usiamo la relazione:

$$\delta(x) = 0.37xRe_x^{-1/5}, \quad (55)$$

in  $x = L$ , ottenendo:

$$\delta(L) = 0.37 \cdot L \cdot Re_L^{-1/5} = 0.1194 \text{ m}. \quad (56)$$

(i) Per lo strato limite laminare abbiamo come numero di Reynolds critico,  $Re_{cr} = 5 \cdot 10^5$ , da cui si ricava l'estensione dello strato limite laminare,  $x_{cr}$ :

$$Re_{cr} = \frac{x_{cr} U_{\infty}}{\nu} \Rightarrow x_{cr} = \frac{Re_{cr} \nu}{U_{\infty}} = 0.25 \text{m.} \quad (59)$$

Per ricavare lo spessore di strato limite in  $x = x_{cr}$ , usiamo le soluzioni di Blasius perchè in  $x = x_{cr}$  lo strato limite è laminare:

$$\delta_{cr} = 5 \frac{x_{cr}}{\sqrt{Re_{cr}}} = 0.0018 \text{m.} \quad (60)$$

(ii) Calcoliamo il numero di Reynolds relativo alla lunghezza della lamina:

$$Re_L = \frac{L U_{\infty}}{\nu} = 4 \cdot 10^6, \quad (61)$$

quindi  $5 \cdot 10^5 < Re_L < 10^7$ . Lo strato limite è approssimabile con la legge di potenza 1/7. Per lo spessore di strato limite,  $\delta$ , e lo sforzo di taglio a parete,  $\tau_w$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\delta(x = L) = 0.37 L (Re_L)^{-1/5} = 0.0354 \text{m,} \quad (62)$$

$$\tau_w(x = L) = \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 c_f(x = L), \quad (63)$$

dove

$$c_f(x = L) = 0.0576 Re_L^{-1/5} = 0.0028, \quad (64)$$

ricavando dunque  $\tau_w(x = L) = 5.4976 \text{ N/m}^2$ .

### Esercizio 9 (turb BL diff fin. m)

In uno strato limite turbolento su una lamina piana ( $L=5 \text{ m}$ ) investita da una corrente uniforme d'aria ( $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ) con velocità  $U_{\infty} = 3 \text{ m/s}$ , si ha un profilo di velocità con legge di potenza 1/7. La legge di spessore dello strato limite in questo caso è  $\delta(x) = 0.16 x Re_x^{-1/7}$ . Utilizzando l'equazione di Von Karman  $\left(\frac{c_f}{2} = \frac{d\theta}{dx}\right)$ , calcolare (tramite integrazione e derivazione numerica) e graficare in Matlab l'andamento di  $c_f(x)$ . Confrontarlo infine con la legge empirica valida in questo caso,  $c_f(x) = 0.02 Re_x^{-1/6}$ .