



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2221A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Nicola Enrico

**MATERIA: Strutture Aeronautiche - Teoria + Esercitazioni +
Temi di esame - Prof. Di Sciuva**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

Prof. Di Sanna

6/3/2017

CLASSIFICAZIONE AEROMOBILI

- AEROMOBILE → mezzo che si muove da un punto all'altro della Terra muovendosi nell'atmosfera
- AEROSTATO → non c'è moto relativo tra aria e mezzo per avere sustentazione
- AERODINE → c'è moto relativo aria/mezzo per avere sustentazione
- VELATURA → parte dell'aeromobile che genera sustentazione (superficie alare)

domanda esame!

cos'è un aeroplano? è un aeromobile, aerodine, a velatura fissa, con propulsore (motore/elivolo)

PROGETTO STRUTTURALE

sviluppare struttura A BASSO PESO, ad ALTA SICUREZZA e con il MINIMO COSTO (capace ovviamente di svolgere il compito assegnato)

REQUISITO DI SPECIFICA → documentazione in cui sono richieste le caratteristiche che deve soddisfare il progetto

INCOGNITE DEL PROGETTO → Variabili che possono cambiare all'interno del progetto e che noi dobbiamo ottimizzare:

- PESI

- GRAD. GEOMETRICHE

...

il progetto di un aeromobile è un problema interdisciplinare !!!

PROOF LOADS → il carico applicato per verificare l'integrità (carico di prova)

FATTORE DI RISERVA → rapporto fra i carichi di rottura e di robustezza

MARGINE DI SICUREZZA → differenza tra SF e 1
(SF - 1)

I VARI CRITERI DI SICUREZZA

CRITERIO DI ROBUSTEZZA

capacità di sopportare i carichi
se una struttura si deforma ma sopporta ugualmente i carichi, il criterio di robustezza è ok!

σ_L → tensione prodotta dai carichi a contingenza

K_L → fattore di sicurezza ($\approx 1,0$)

K_R → fattore di sicurezza a rottura ($\approx 1,5$)

(A)

$$\frac{\sigma_S}{K_L \cdot \sigma_L} \geq 1$$

(B)

$$\frac{\sigma_R}{K_R \cdot \sigma_L} \geq 1$$

con σ_S → tensione minima che produce snervamento
 σ_R → tensione minima che porta a rottura

se $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} = \frac{K_R}{K_L} \Rightarrow$ (A) ~ (B)

se $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} > \frac{K_R}{K_L} \Rightarrow$ (A) è più stringente di (B)

se $\frac{\sigma_R}{\sigma_S} < \frac{K_R}{K_L} \Rightarrow$ (B) è più stringente di (A)

In pratica la robustezza mi dice se un materiale sopporta o no un carico senza rompersi! Non dice nulla sulla deformazione!

Finisce al giorno d'oggi si considerano le strutture con la presenza di difetti iniziali \Rightarrow CRITERIO DAMAGE-TOLERANCE

DAMAGE - TOLERANCE

assume la presenza di cricche iniziali nel progetto. Il difetto iniziale non deve crescere abbastanza in fretta da portare a rottura catastrofica nella vita operativa del pezzo. Si valuta più la velocità di propagazione della cricca che non la sua presenza (data per scontata).

dati per certi i difetti iniziali si hanno due approcci:

FAIL-SAFE
ipotesi a più percorsi di carico

SLOW CRACK GROWTH

sotto i carichi operativi previsti il difetto iniziale può crescere senza arrivare alle condit. critiche

NEL TEMPO CHE INTERCORRE TRA UN'ISPEZIONE E LA SUCCESSIVA IL DIFETTO NON PUO' CRESCERE FINO AD ARRIVARE A ROTTURA.

ALL'ISPEZIONE SUCCESSIVA, QUANDO SARÁ CRESCIUTO E LO POSSO VEDERE, LO ELIMINO.

SLOW CRACK GROWTH LIFE

rafforzare la velocità di crescita della cricca

- ridurre i fattori di concentrazione di tensione (geometrie a curvatura costante)
- ridurre tensioni residue
- verificare compatibilità del progetto con il tipo di produtt. utilizzato
- richiedere ispezioni speciali
- identificare elementi da definire FRACTURE CRITICAL

AFFIDABILITÀ

definisce

concetto di tipo statistico, che la probabilità di corretto funzionamento di un componente in un dato periodo di tempo.

Non si possono trascurare gli effetti termici su un aeromobile, e i relativi CARICHI TERMICI.

FATTORE DI CONTINGENZA

$$n = \frac{\text{FORZA normale alla traiettoria (Portanza)}}{\text{Peso}} = \frac{L}{W}$$

i limiti per n sono dati dalla normativa a seconda della categoria di aeromobile

ALTRI CARICHI:

- PRESSURIZZAZIONE (carico distribuito)
- CARICHI TERMICI (dovuti alle alte velocità e agli scandali dei motori)
si usa il Titano
- PROPULSIONE (dovuti alle forze tralati dei motori sulla ali o ai momenti giroscopici dell'elica)
- ATTERRAGGIO (carico concentrato e impulsivo)

i CARICHI possono essere:

STATICI costanti applicati per tutta la vita

QUASI-STATICI originati da fenomeni dinamici ma di intensità costante e quindi assimilabili a carichi statici. e.g: SOLLECITAZIONI CENTRIFUGHE nei motori

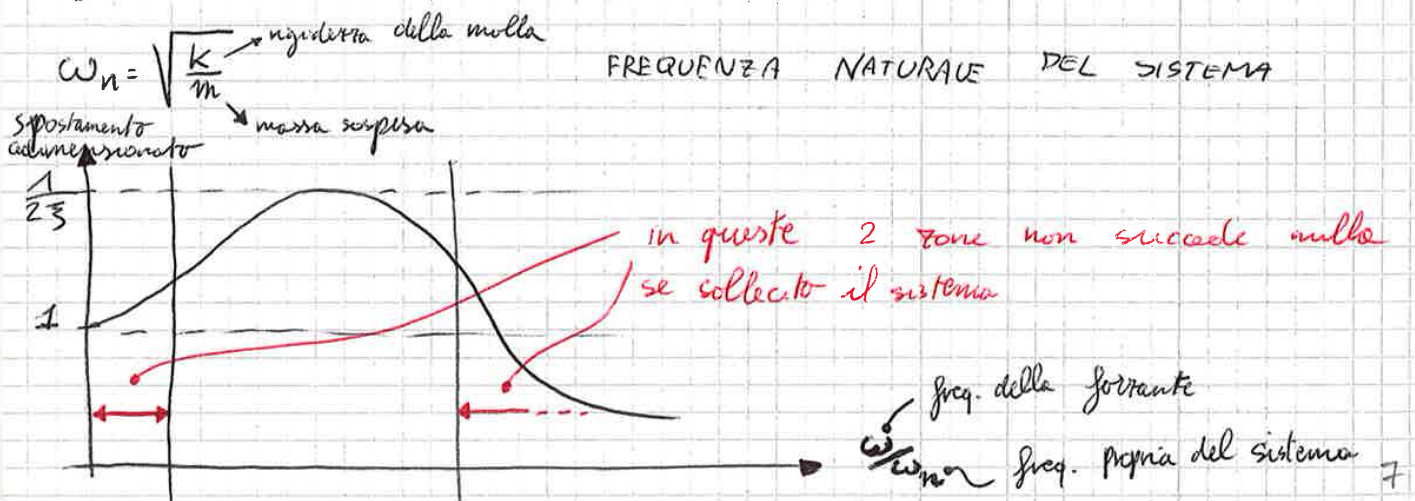
un carico dinamico è quasi statico se applicato per un tempo maggiore del T della freq. propria

DINAMICI

variabili rapidamente nel tempo, possono provocare vibrazioni.
e.g: motori non equilibrati, vibrazioni...

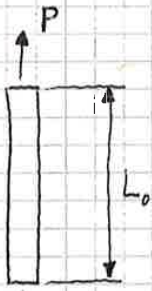
Per i carichi dinamici serve per forza un'analisi dinamica, un'analisi statica sarebbe inutile!

Usiamo un sistema MASSA-MOLLA-SMORZATORE.



MATERIALI AEROSPAZIALI

diagramma la legge di Hooke



↑ modulo di Young

$$\sigma = E(\sigma) \cdot \epsilon$$

tensione $\sigma = \frac{N}{A}$ deformazione ϵ
 $A_0 \rightarrow$ sezione del piano scarico

l'area della sezione si restringe durante la prova a trazione

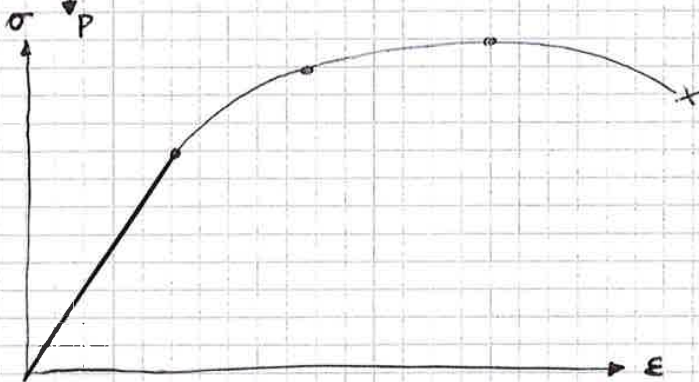
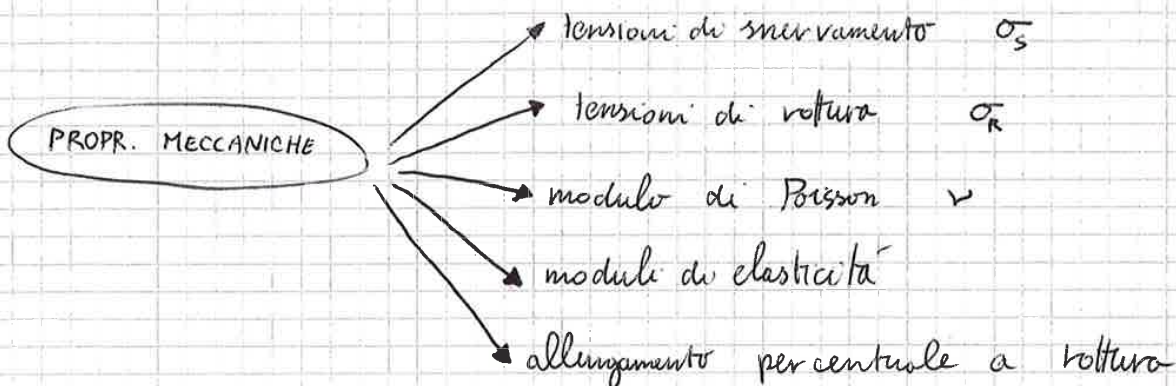
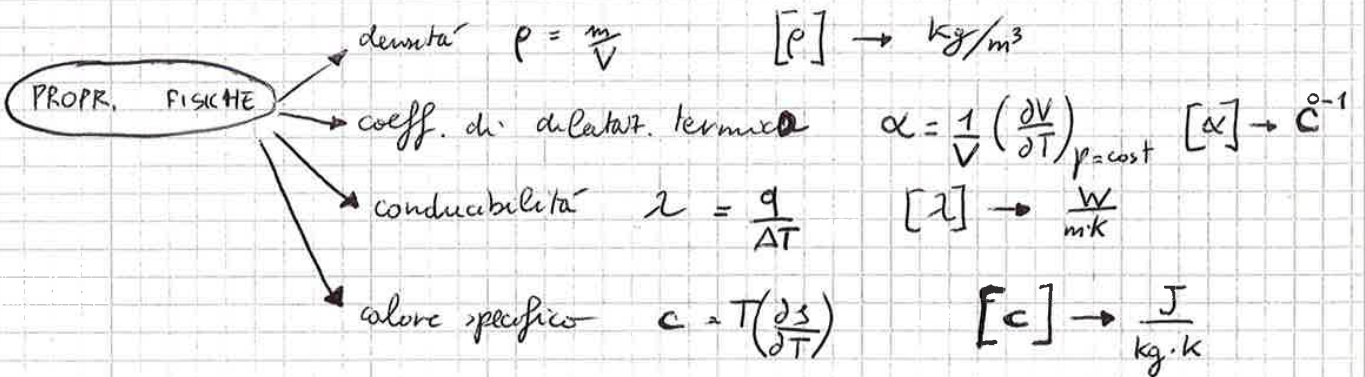


diagramma dello σ in funzione di ϵ

- 1 MATERIALI sono caratterizzati da:
- PROPRIETA' FISICHE
 - PROPRIETA' MECCANICHE
 - MECCANISMI DI ROTTURA

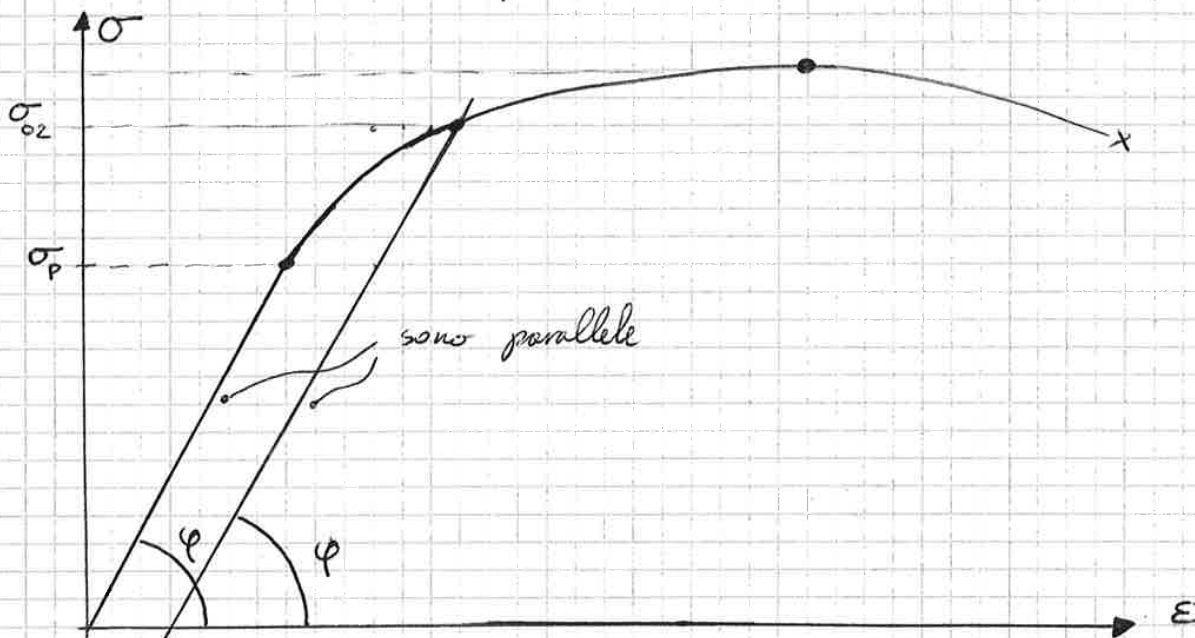


per valutare le variazioni di lunghezza del provino si usano degli estensimetri (strain gauge), piccole membrane adesive con una serpentina di filo conduttore all'interno.

Variano la lunghezza, varia la resistenza del filo conduttore, e quindi si può valutare l'estensione del provino.

Le normative prescrivono di utilizzare 3 estensimetri in parallelo (ridondanza per vedere se si ha la medesima deformazione in tutti i punti), su ognuna delle facce del provino. Questi estensimetri devono misurare la stessa tensione, senno' vuol dire che c'è stata flessione-torsione!!

Vediamo ora la tipica curva $\sigma - \epsilon$:



$\sigma_p \rightarrow$ tensione di proporzionalità, oltre la quale si perde la legge lineare tra σ ed ϵ

$\sigma_{0.2} \rightarrow$ tensione di snervamento, tensione alla quale si deve una deformazione plastica residua dello 0,2% ($\epsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} = 0,002$) una volta scaricato il provino

$$E = \operatorname{tg}(\varphi)$$

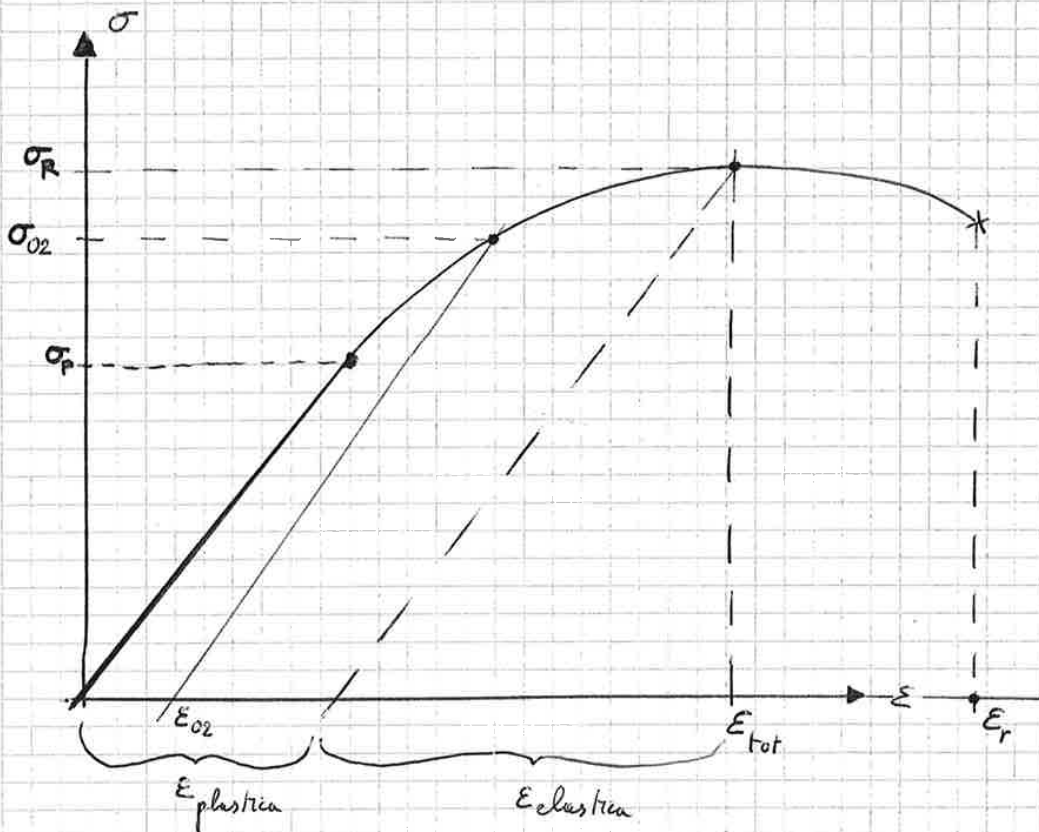
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \text{nel tratto lineare}$$

$$E = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \quad \text{in generale}$$

ϵ non è la deformazione a CREEP (deformazione sotto carichi costanti inferiori a σ_s , ma protratti per lungo periodo di tempo)

IMPORTANTE!!

Per i materiali aerospaziali si rappresentano σ_R ed E al peso specifico del materiale (caratteristiche meccaniche specifiche)



E_{tot} → deformazione totale sotto quel valore di σ , somma di $E_{elastica}$ ed $E_{plastica}$

$$E_{tot} = E_{plastica} + E_{elastica}$$

E_R → deformazione a rottura

quanto più è a sinistra la E_R , tanto più è ampia l'area dell'energia di deformazione plastica ⇒ è meglio!!! ☺

MATERIALI PER L'AEROSPAZIO

$$\text{RESISTENZA SPECIFICA} = \frac{\text{RESISTENZA } (\sigma_R)}{\text{PESO SPECIFICO}}$$

si usa per valutare i materiali aeromeccanici

(nei grandi velivoli ci sono dei motori elettrici che mettono in rotazione le ruote prima dell'atterraggio).

• LEGHE LEGGERE (leghe di Al)

Al (>80%) + altri componenti

Al + Cu → DURAL (Al 2024)

Al + Zn → ERGAL (Al 7075)

} molto importanti in aeronautica

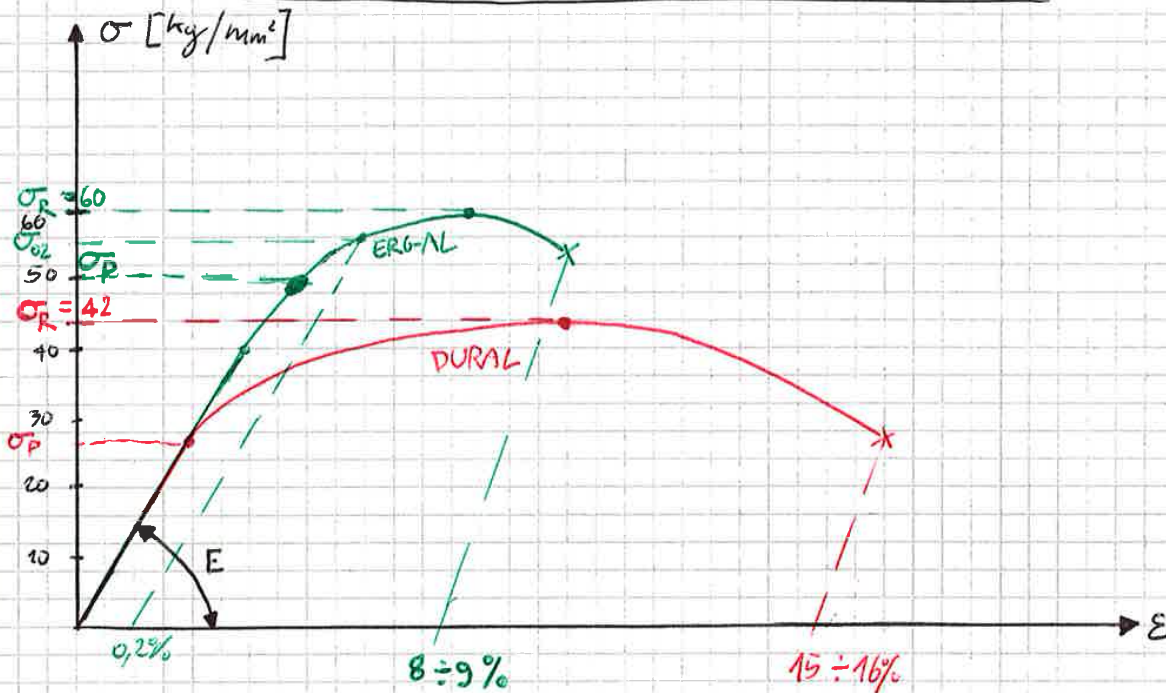
Il Al puro è soffice (basse proprietà meccaniche), ma mettendo altri soluti le cose cambiano.

DURAL: dal 3% al 5% di Cu nell'Al, + altre robe come il Mg.

$\gamma \approx 2,8 \text{ kg/dm}^3$

$E \approx 7000 \div 7300 \text{ MPa}$

CONFRONTO SUL PIANO σ - ϵ TRA L'ERGAL E IL DURAL;



DURAL ed ERGAL hanno lo stesso E (tg $\varphi = E$). Il tratto lineare è coincidente.

DURAL

$\sigma_p = 20 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_s = 30 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_R = 42 \text{ kg/mm}^2$

allung. perc. a rottura $\approx 15\%$

ERGAL

$\sigma_p = 30 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_s = 40 \div 45 \text{ kg/mm}^2$

$\sigma_R = 60 \div 65 \text{ kg/mm}^2$

allung. perc. a rottura $\approx 8\%$

• ACCIAI (LEGHE Fe-C)

usati nei collegamenti o in punti soggetti a forti carichi concentrati, bullonerie, nei comandi reversibili le aste sono in acciaio, anche nelle strutture reticolari.

ACCIAI DA BONIFICI → ad alta resistenza vengono temprati e poi rinvenuti (bonifica) alto-resistenziali. Non vanno bene per essere saldati.

L'acciaio più famoso è il 35NCD4

• ACCIAI SALDABILI → c'è tanto molibdeno all'interno, si usano in punti dove bisogna fare giunzioni.

studiare bene l'ERGAL e il SURAL per l'esame!!!

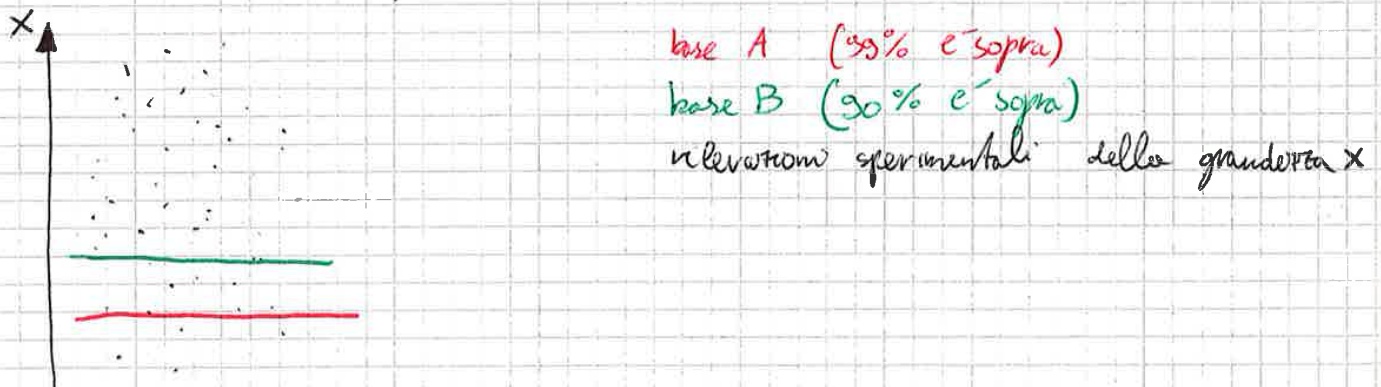
NOMENCLATURA

valore x su base S, A, B:

S → numero fissato da qualche agenzia, non c'è sufficiente correlazione statistica del materiale (ancora pochi dati)

A → il 95% dei dati trovati sperimentalmente è sopra il valore x , mentre l'1% è sotto

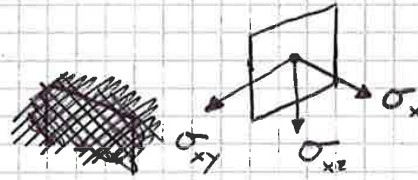
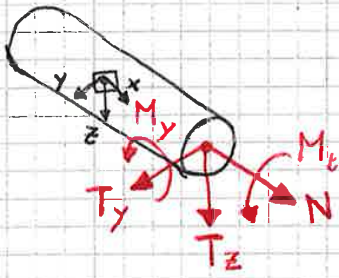
B → il 90% sta sopra, il 10% sta sotto il valore x .



la base B è molto più cautelativa della A!
queste 3 lettere caratterizzano i valori statistici:

FONDAMENTI DI TEORIA DELL'ELASTICITÀ

RICHIAMI DI TEORIA DELLE TRAVI



G sta per baricentro
sistema cartesiano x-y-z
in ogni punto della trave

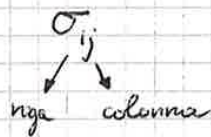
SFORZO NORMALE avvicina o allontana
 SFORZO DI TAGLIO trasla
 MOMENTO fa ruotare le sezioni

TEORIA DELLE TRAVI

Posso rappresentare tutto lo stato tensionale di una trave attraverso una forza e un momento, che possono essere poi scomposti nelle 3 direzioni. Questo a prescindere dall'effettiva distribuzione ^{di forze} che causano lo stato tensionale, se mi pongo ad una certa distanza dalle giunzioni cariche.

σ è un TENSORE DEL SECONDO ORDINE, rappresentato come una matrice 3x3.

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$



essendo però un tensore simmetrico a bastano 6 componenti (le altre 3 sono uguali alle 3 speculari).

NOMENCLATURA:

σ_{ij}

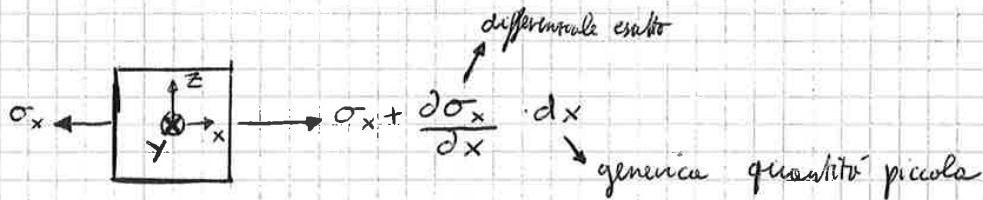
$i \rightarrow$ asse normale alla sezione
 $j \rightarrow$ asse lungo la quale proietta lo sforzo

gli sforzi normali alla faccia di sezione (quindi con 2 pedici uguali) possono essere indicati con un unico pedice)

$\sigma_{xx} \rightarrow \sigma_x$

$\sigma_{yy} \rightarrow \sigma_y$

$\sigma_{zz} \rightarrow \sigma_z$



Vista della faccia x-z

facciamo l'equilibrio nelle 3 direzioni \vec{x} , \vec{y} e \vec{z} :

$$\vec{x} \rightarrow \left) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy dx dz + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} dz dx dy + X_v \underbrace{dx dy dz}_{\text{volume } dV} = 0$$

↑ forza d'inerzia per unità di vol.
↓ è statica

simplifichiamo il volume infinitesimo $dx dy dz \Rightarrow$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X_v = 0$$

$\vec{R} = \vec{0}$ (La risultante delle forze deve essere nulla per l'equilibrio)

EQUILIBRIO ALLA ROTAZIONE.

Perché ci sia equilibrio deve inoltre essere nullo il momento rispetto ad un generico punto del corpo, attorno a ciascuno dei 3 assi!!!

$$\vec{y} \rightarrow \left) \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{ey}}{\partial z} + Y_v = \rho \frac{d^2 W}{dt^2}$$

$$\vec{z} \rightarrow \left) \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_v = \rho \frac{d^2 W}{dt^2}$$

CONDIZIONI DI RECIPROCIITÀ DI CAUCHY.

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$$

per avere equilibrio alla rotazione devono essere soddisfatte queste 3.

\Rightarrow il tensore σ degli sforzi è simmetrico, da 9 valori di σ_{ij} si passa a 6

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3 \quad \sigma_4 \quad \sigma_5 \quad \sigma_6\}$$

$\{\sigma\}$ e $\{\epsilon_x\}$ sono in realtà vettori colonna

$$\{\epsilon_x\}^T = \{\epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \epsilon_3 \quad \epsilon_4 \quad \epsilon_5 \quad \epsilon_6\}$$

$$[C]^{-1} = [S]$$

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon_x\} \iff \{\epsilon_x\} = [S] \{\sigma\}$$

LEGGE DI HOOKE IN FORMA MATRICIALE

$[C] \rightarrow$ matrice dei coefficienti di rigidità elastica \cong RIGIDITÀ

$[S] \rightarrow$ matrice dei coefficienti di cedevolezza elastica \cong CEDevolezza (inverso della rigidità)

MATRICE $[C]$ PER DIFFERENTI MATERIALI

la matrice $[C]$ è sempre simmetrica!

$$[C] \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$$

• MATERIALI ANISOTROPI

le caratteristiche in un punto variano a seconda della direzione in cui le si misura.
(e.g. : legno)

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}$$

le componenti non scritte nella matrice sono uguali a quelle a loro simmetriche rispetto alla diagonale principale

COSTANTI INGEGNERISTICHE DEL MATERIALE,

MODULO DI YOUNG $E \rightarrow \frac{N}{mm^2}, MPa \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon}$

MODULO DI TAGLIO $G \rightarrow \frac{N}{mm^2}, MPa \quad G = \frac{\tau}{\gamma}$

MODULO DI POISSON $\nu \rightarrow \text{adimensionale} \quad \nu = -\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x}$

ENERGIA DI DEFORMAZIONE,

$dL = \int \{ \sigma \}^T \{ \epsilon_r \} dV$ lavoro infinitesimo

$d\varphi = dL$ per i materiali linearmente elastici, quindi in cui non intervengono forze dissipative, l'energia accumulata nella deformazione elastica è uguale al lavoro compiuto per operare questa deformazione.

$d\varphi = dL = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon_r \} dV$

DENSITA' DI ENERGIA DI DEFORMAZIONE,

$\varphi = \frac{1}{2} \{ \epsilon_r \}^T [C] \{ \epsilon_r \}$

$\varphi = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T [S] \{ \sigma \}$

$\frac{d\varphi}{d\{ \epsilon_r \}} = [C] \{ \epsilon_r \} = \{ \sigma \}$

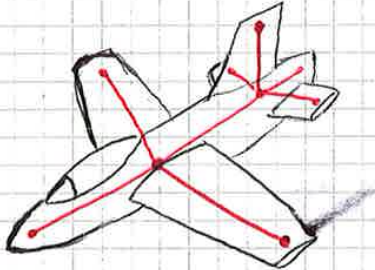
$\frac{d\varphi}{d\{ \sigma \}} = [S] \{ \sigma \} = \{ \epsilon_r \}$

$\frac{d\varphi}{dV} = \phi = \frac{1}{2} \{ \sigma \}^T \{ \epsilon_r \}$

DENSITA' VOLUMICA DI ENERGIA DI DEFORMAZIONE

RICHIAMI DI TEORIA DELLE TRAVI A GUSCIO RINFORZATO

un arco può essere schematizzato come una serie di travi per i calcoli strutturali.



$$N = \int_A \sigma_x dA$$

$$T_y = \int_A \sigma_{xy} dA$$

$$T_z = \int_A \sigma_{xz} dA$$

$$M_y = \int_A z \sigma_x dA$$

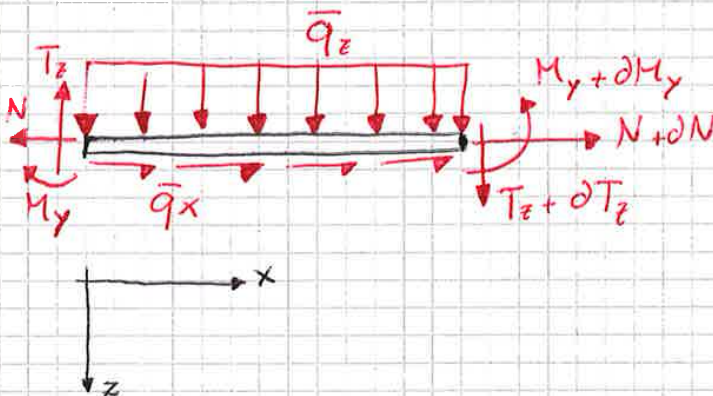
$$M_z = \int_A y \sigma_z dA$$

$$M_t = \int_A (y \sigma_{xz} - z \sigma_{xy}) dA$$

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z J_y - M_y J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} y + \frac{M_y J_z - M_z J_{yz}}{J_y J_z - J_{yz}^2} z \quad \text{sist. non inerziale}$$

$\beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 J_{yz}}{J_z - J_y}$ angolo di cui ruota il sistema di ref. generico ~~y-z~~ per diventare inerziale ~~y-z~~

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z \quad \text{sist. inerziale}$$



$$\frac{dT_z}{dx} = -q_z$$

$$\frac{dM_y}{dx} = T_z$$

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

retta d'azione, pendenza = $\frac{Ly}{Lx}$ = corda \overline{AB}

calcolare la posizione della retta d'azione risultante

$$\delta M = -2q \delta \Omega \vec{k}$$

$$\vec{M} = -2q \Omega \vec{k}$$

$$\vec{M} = -qLb \vec{k}$$

momento dovuto al flusso q rispetto ad un polo O

momento dovuto alla risultante qL rispetto ad un polo O

li eguaglio $\Rightarrow -2q \Omega \vec{k} = -qLb \vec{k}$

$$\Rightarrow 2 \Omega = Lb$$

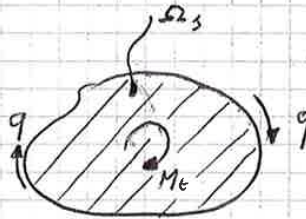
$$\Rightarrow b = \frac{2\Omega}{L}$$

distanza della risultante qL dal polo O

FORMULE DI BREDT,

- 1° FORMULA DI BREDT

$$M_t = 2q \Omega_3$$



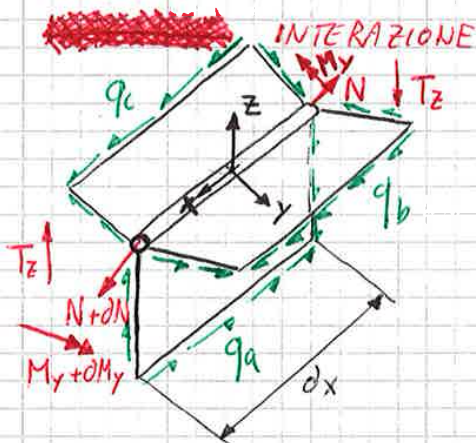
sezione in parete sottile

- 2° FORMULA DI BREDT

$$\theta = \frac{q}{2G\Omega} \int_C \frac{ds}{s} = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \int_C \frac{ds}{s} = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \frac{C}{s}$$

GRADIENTE DI TORSIONE

↳ modulo di taglio



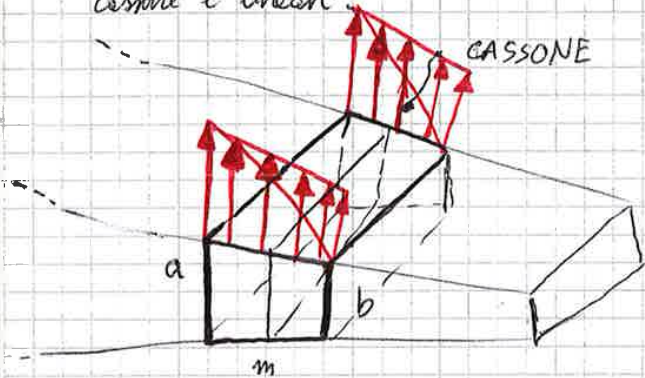
CORRENTE + PANNELLI

$$\frac{dN}{dx} = -q_x$$

$$q_x = -q_a + q_b + q_c$$

$$q_x = \sum_i q_i$$

3) si calcolano le CDS (N, T, M) e (M_t) in un punto dell'ala. Nel caso più realistico di ala a cassone si calcolano le CDS in 2 punti corrispondenti alle estremità di un cassone e si fa la media delle CDS, tenendo conto che il loro andamento nel cassone è lineare.



calcolo in (a) e in (b) e faccio la media e trovo le CDS in (m)

4) ora utilizzo la sezione in (m) per studiare il comportamento dei correnti e dei pannelli.

5) calcolo le caratteristiche geometriche della sezione considerata, tenendo conto che i pannelli collaborano per la loro intera larghezza se trazione, mentre collaborano solo per una STRISCIA COLLABORANTE se compressi. (normalmente i pannelli superiori sono compressi, mentre quelli inferiori sono trazione)

- calcolo le aree dei BOOMS (corrente + pannello collaborante)
- calcolo il baricentro della sezione ed i momenti d'inerzia baricentrici:

$$Y_G = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

$$Z_G = \frac{\sum A_i z_i}{\sum A_i}$$

$$J_{xx} = \sum A_i (y_i - Y_G)^2$$

$$J_{yy} = \sum A_i (z_i - Z_G)^2$$

$$J_t = \frac{4 \Omega^2 s}{\text{perimetro}}$$

$$A_{tot} = \sum A_i$$

6) Calcolo le tensioni nei correnti utilizzando i valori di N, T, M ed M_t trovati nella sezione mediana del cassone

Analizzeremo i diversi casi di sezione monocella, pluri-cella, a sezione chiusa e aperta.
 Vale la seguente relazione:

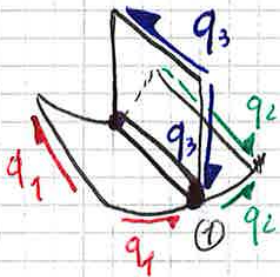
$$NT = NC + NN - 1$$

NT = num. di pannelli

NC = num. di celle chiuse

NN = num. di nodi / correnti

Ci saranno dunque NT incognite (ogni pannello è sede di un solo flusso di taglio), e noi abbiamo a disposizione $(NN-1)$ equazioni di equilibrio assiale ai nodi.



In un pannello c'è un solo flusso di taglio q , costante. Per convenzione per rappresentarli è riportata qui a fianco.

Vale l'equilibrio dei flussi entranti/uscenti in un corrente:

$$q_1 + q_3 - q_2 = 0$$

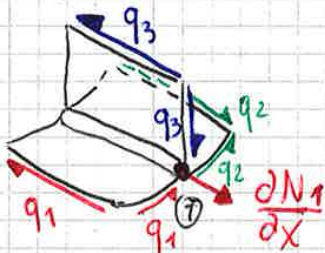
rispetto al corrente (1)

Le correnti sono sede anche dell'incremento di sforzo normale $\frac{\partial N}{\partial x}$, calcolato come:

$$\frac{\partial N^{(i)}}{\partial x} = A_i \frac{\partial \sigma_i}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \gamma_i \frac{A_i}{J} = \frac{T}{J} \gamma_i A_i$$

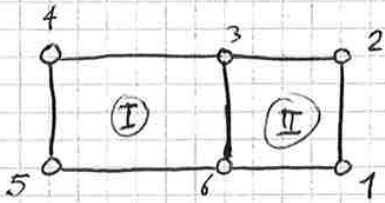
FORMULA PER IL $\frac{\partial N}{\partial x}$ NEI CORRENTI

Questo sforzo va ad aggiungersi ai flussi di taglio q quando si fa l'equilibrio ai correnti:

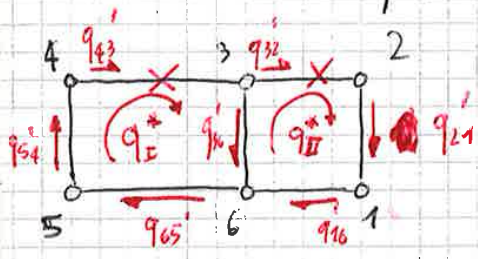


$$\textcircled{1}: q_1 + q_3 - q_2 - \frac{\partial N_1}{\partial x} = 0$$

3) SEZIONE CHIUSA BICELLA



$NT = 17$ ho $(6-1)$ eq. b.i.
 $NN = 6$ in 17 incognite
 $NC = 2$ \Rightarrow mi servono altre
 2 equazioni



- si calcolano le aree collaboranti, i momenti d'inerzia e, se necessario, si ruota il sistema baricentrico per farlo diventare principale d'inerzia
- si "elimina" un pannello per ogni cella, rendendo così entrambe le celle aperte
- si calcolano i flussi nelle celle aperte q_{ij} facendo l'equilibrio ai correnti
- i flussi reali q_{ij} si trovano sommando i flussi q_{ij}' ai flussi correttivi q^* (tenendo conto del verso)
- l'ultima equazione che ci serve è l'EQUAZ. DI CONGRUENZA, ovvero eguagliando i gradienti di rotazione tra le due celle:

$$\theta'_I = \theta'_II$$

con $\theta' = \frac{1}{2G\Omega} \sum q_{ij} \frac{C_{ij}}{t_{ij}}$

(Annotations: θ' is the rotation gradient; Ω is the area of the cell; q_{ij} is the shear flow in the panel; C_{ij} is the length of the panel; t_{ij} is the thickness of the panel; G is the shear modulus.)

ora ho 5 equazioni di equilibrio ai nodi, 1 equazione di equivalenza dei momenti e 1 equazione di congruenza!

- $M_t = 2q\Omega$

1° FORMULA DI BREDT

- $\dot{\theta} = \frac{q}{2G\Omega} \int_C \frac{dc}{s} = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \int_C \frac{dc}{s} = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \cdot \frac{C}{s}$

$\int_C \frac{dc}{s}$ annotations:
 - \int_C : momento torcente
 - dc : perimetro
 - s : spessore
 - G : shear modulus

2° FORMULA DI BREDT

- $\frac{\partial N^{(i)}}{\partial x} = \frac{T_z}{J_y} A^{(i)} z_1^{(i)} = \frac{T_z}{J_y} s_y^{(i)} = \frac{T}{J} y_i A_i$

INCREMENTO DI SFORZO
NORMALE NEI CORRENTI

stato tensionale piano $\rightarrow \epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$

SFORZO INGEGNERISTICO $\{\epsilon_\gamma\} = \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} - z \{K_\gamma\}$

lo sforzo osservato è somma di uno SFORZO MEMBRANACE e di una CURVATURA

$$\{\epsilon_\gamma\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon_\gamma^{(0)}\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{(0)} \\ \epsilon_y^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad \{K_\gamma\} = \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ \frac{1}{2}(u_{,y} + v_{,x}) \end{Bmatrix} \Rightarrow \{\epsilon_\gamma\} = [T] \{\epsilon\} \quad \text{con } [T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ASSUNZIONI:

- gli sforzi di taglio trasversali τ_{xz} e τ_{yz} sono trascurabili;
- lo sforzo normale σ_z è trascurabile

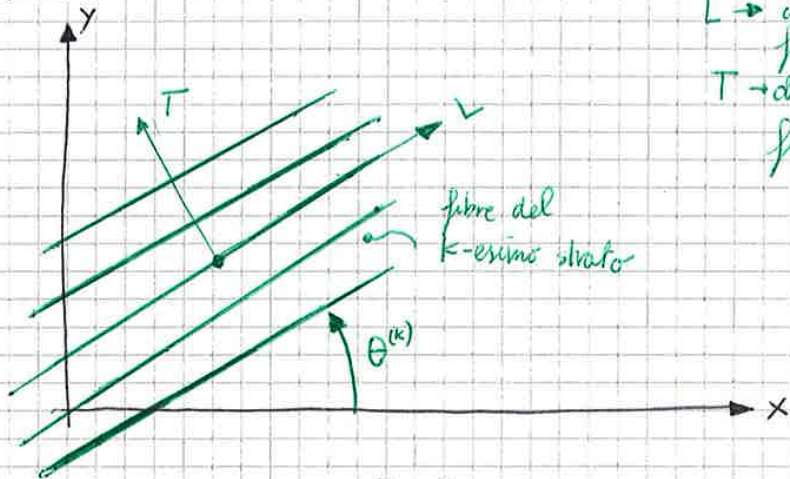
$$\{\sigma\} = [Q] \{\epsilon_\gamma\} \quad \text{con } [Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{66} & Q_{36} & Q_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \text{MATRICE DI RIGIDEZZA RIDOTTA}$$

COEFFICIENTI DI RIGIDEZZA Q_{ij}

ricordiamo l'espressione della matrice di rigidità per materiali ortotropi:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}$$

Utilizzando la seguente notazione per la rappresentazione delle fibre del k-esimo strato:



L → direzione longitudinale rispetto alle fibre
 T → direzione trasversale rispetto alle fibre

definiamo la matrice $[\Lambda]$ come:

$$[\Lambda^{(k)}] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix}$$

$$c = l = \cos \theta^{(k)}$$

$$s = m = \sin \theta^{(k)}$$

valgono le seguenti relazioni:

$$\{\sigma_p\} = [\Lambda^{(k)}] \{\sigma\}$$

$$\{\epsilon_p\} = [\Lambda^{(k)}] \{\epsilon\}$$

$$\{\epsilon_{\gamma p}\} = [T][\Lambda][T]^{-1} \{\epsilon_{\gamma}\}$$

$$[Q] = [\Lambda]^{-1} [Q_p] [\Lambda^{-1}]^T$$

$$\nu_{TL} = \nu_{LT} \frac{E_T}{E_L}$$

il CORE della piastra assorbe solo gli sforzi di taglio trasversali ⇒ avremo solo deformazioni a taglio qui

con:

E_L → modulo di Young in direzione L

E_T → modulo di Young in direzione T

ν_{LT} → modulo di Poisson sul piano LT

G_{LT} → modulo di taglio sul piano LT

$$E_{\varphi} = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T \{\epsilon_{\gamma}\} = \frac{1}{2} \{\epsilon_{\gamma}\}^T [Q] \{\epsilon_{\gamma}\} \quad \blacksquare$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{2} \{\sigma_p\}^T \{\epsilon_{\gamma p}\} = \frac{1}{2} \{\epsilon_{\gamma p}\}^T [Q_p] \{\epsilon_{\gamma p}\}$$

- $[B]$ e $[D]$ dipendono dal numero, dalla posizione e dal materiale degli strati, in particolare $[B] = [0]$ per laminati simmetrici;

$$\begin{cases} \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} = [A^*] \{N\} + [B^*] \{M\} \\ \{k_\gamma\} = [B^*]^T \{N\} + [D^*] \{M\} \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} [D^*] = ([D] - [B][A]^{-1}[B])^{-1} \\ [B^*] = -[A]^{-1}[B][D^*] \\ [A^*] = [A]^{-1} - [B^*][B][A]^{-1} \end{cases}$$

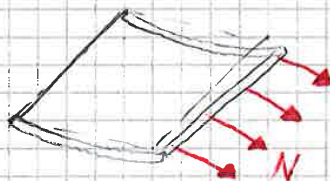
$\{N\}$ induce anche una curvatura e $\{M\}$ induce anche sforzi di membrana

Per piastre simmetriche (strati simmetrici in ordine, spessore e materiale rispetto alla mezzina della piastra):

$$\begin{cases} \{N\} = [A] \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} \\ \{M\} = [D] \{k_\gamma\} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \{\varepsilon_\gamma^{(0)}\} = [A]^{-1} \{N\} \\ \{k_\gamma\} = [D]^{-1} \{M\} \end{cases}$$

nel caso di piastre simmetriche $\{N\}$ provoca solo sforzi di membrana e $\{M\}$ provoca solo curvatura.

La risposta ad una trazione (sforzo $\{N\}$) può essere controintuitiva nel caso di piastre asimmetriche:



si vede che una trazione provoca, oltre all'allungamento, anche una curvatura!

EQUAZIONI D'EQUILIBRIO

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO

e

EQUAZIONI AL CONFINO

governano il nostro fenomeno !!!

si applicano le equazioni di equilibrio in termini di spostamento, per piastre simmetriche e asimmetriche.

non usiamo l'approccio delle forze per definire la condizione di una piastra.

Utilizziamo l'approccio degli spostamenti (MOTO DI CORPO RIGIDO → posiz. relative dei punti non cambia durante il moto)

ci servono 3 numeri per definire la deformazione volumetrica (DILATAZIONI) e 3 numeri per definire le rotazioni relative dei lati del volume infinitesimo (SCORRIMENTI)

↓ cambia la forma

DILATAZIONI

$$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$$

SCORRIMENTI

$$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$$

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

GENERICA ESPRESSIONE DELLA DEFORMAZIONE

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

DEFINIZIONE INGEGNERISTICA DELLA DEFORMAZIONE

$$\gamma_{xy} = 2 \epsilon_{xy}$$

$$\epsilon_y = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}$$

ETTORE COLONNA DELLA DEFORMAZIONE

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon_y\}$$

↓
MATRICE DI RIGIDEZZA ELASTICA

$$\{\epsilon_y\} = [S] \{\sigma\}$$

↓
MATRICE DEI COEFFICIENTI DI DEFORMABILITÀ

IMPORTANTE!!!

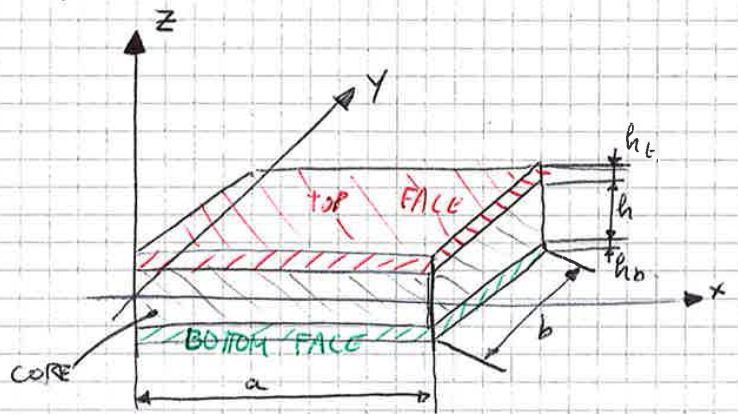
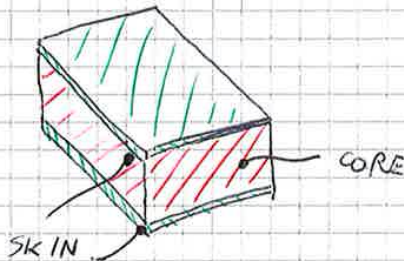
Rigidità del materiale ≠ rigidità della struttura !!!

PIASTRE SANDWICH

GEOMETRIA E DEFINIZIONI

sono piastre costituite da due strati esterni, di solito di spessore esiguo, intervallati da uno strato di maggior spessore posto tra di loro. Gli strati esterni sono detti PELLI (SKINS) mentre quello interno è detto CUORE (CORE). In genere le pelli sono di materiale resistente, mentre il core deve essere di bassa peso e deve intervallare le 2 pelli.

Se il core è composto da una struttura con celle esagonali viste in sezione parallela al piano della piastra il core si dice HONEY-COMB (NIDO D'APE).



IPOTESI:

- il CORE e le SKIN hanno spessore costante;
- le facce sono costituite da un numero arbitrario di strati di materiale ortotropo perfettamente saldati tra di loro. Tuttavia gli assi di ortotropia L e T non devono necessariamente coincidere con gli assi x e y della piastra;
- il CORE e ogni strato delle pelli obbedisce alla legge di Hooke;
- il materiale del CORE è trasversalmente isotropo e di spessore molto maggiore di quello delle facce ($h_i \gg h_b, h_t$);
- lo spostamento trasversale w è indipendente dalla coordinata z (ϵ_z è trascurabile);
- gli spostamenti sul piano u e v sono uniformi lungo lo spessore degli strati;
- gli spostamenti sul piano del CORE $u^{(c)}$ e $v^{(c)}$ sono funzioni lineari della coordinata z ;
- gli sforzi sul piano σ_x, σ_y e τ_{xy} del core sono trascurabili;
- lo sforzo di taglio τ_{xz} e τ_{yz} sono trascurabili sulle pelli;
- gli spostamenti della piastra sono piccoli se paragonati allo spessore;

CAMPO DELLE TENSIONI

CORE

TOP FACE

BOTTOM FACE

$$\{\tau^{(c)}\} = [Q_T] \{\gamma^{(c)}\}$$

$$\{\sigma^{(t)}\} = [Q^{(t)}] \{\epsilon^{(t)}\}$$

$$\{\sigma^{(b)}\} = [Q^{(b)}] \{\epsilon^{(b)}\}$$

o o o

...

...

IPOTESI:

- 1) assumiamo che gli sforzi di taglio τ_{xz} e τ_{yz} sono trascurabili sulle facce degli strati;
- 2) le tensioni sul piano σ_x, σ_y e τ_{xy} del CORE sono trascurabili;
- 3) la tensione normale σ_z è trascurabile sulle facce degli strati e nel CORE.

NOTA:

la matrice $[Q]$ è la stessa delle lastre isotropiche!!!

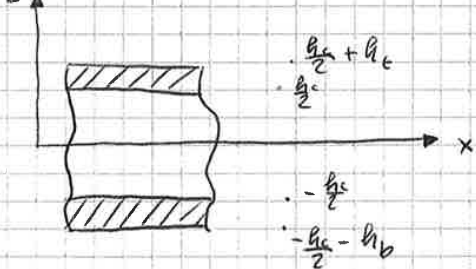
EQUAZIONI COSTITUTIVE

$$\{N\} = \int_{-h/2-h_b}^{h/2+h_t} \{\sigma\} dz$$

$$\{T\} = \int_{-h/2-h_b}^{h/2+h_t} z \{\tau\} dz$$

$$\{M\} = \int_{-h/2-h_b}^{h/2+h_t} z^2 \{\sigma\} dz$$

infatti:



il piano x-y è il piano medio del CORE

il CORE non assorbe $\{\sigma\}$!!!

le forze e i momenti definiti sopra si intendono per unità di lunghezza

EQUAZ. DI EQUILIBRIO

TRASLAZIONE: $x)$
 $y)$
 $z)$

ROTAZIONE: attorno a $x)$
 attorno a $y)$

CONDIZIONI AL CONTOURNO

Conta il lavoro!

$x=0, a:$ $u^{(0)} \sigma N_x$
 $v^{(0)} \sigma N_{xy}$
 $w^{(0)} \sigma T_x$
 $\psi_x \sigma M_x$
 $\psi_y \sigma M_{xy}$

$y=0, b:$ $u^{(0)} \sigma N_{xy}$
 $v^{(0)} \sigma N_y$
 $w^{(0)} \sigma T_y$
 $\psi_x \sigma M_{xy}$
 $\psi_y \sigma M_y$

queste sono tutte "0" ok oppure!

(8 vincoli) (5 GDL)
 abbiamo 8 incognite ma solo 5 equazioni l.i.
 \Rightarrow è iperstatico (3 volte)

avremmo utilizzato il PLV, invece utilizziamo gli spostamenti (CINEMATICA)

$$w''_{,xx} = \frac{\bar{q}_0}{2D_{11}} \left[x(x-a) - \frac{2D_{11}}{G_{13} \cdot h} \right]$$

Integrando 2 volte quest'espressione della $w''_{,xx}$ ~~utilizzando~~ utilizzando come condizioni al contorno in $x=0$ e $x=a$: $w^{(0)} = 0$ risulta:

$$w^{(0)} = \frac{\bar{q}_0}{24D_{11}} \left[x(x^3 - 2ax^2 + a^3) - \frac{12D_{11}}{G_{13} \cdot h} \cdot x(x-a) \right]$$

spostamento verticale dal punto (x, y)

Integrando invece la (***) con la condizione al contorno $\psi_x = 0$ in $x = \frac{a}{2}$, si trova che:

$$\psi_x = -\frac{\bar{q}_0}{24D_{11}} (4x^3 - 6ax^2 + a^3)$$

rotazione (torsione) attorno a x

Si possono utilizzare le COORDINATE ADIMENSIONALI nelle 2 espressioni di sopra come:

$$\xi = \frac{x}{a}$$

Quindi si hanno:

$$w^{(0)}(\xi) = \frac{\bar{q}_0 a^4}{24D_{11}} \left[\xi(\xi^3 - 2\xi^2 + 1) + \frac{12D_{11}}{G_{13} h a^2} \xi(1-\xi) \right]$$

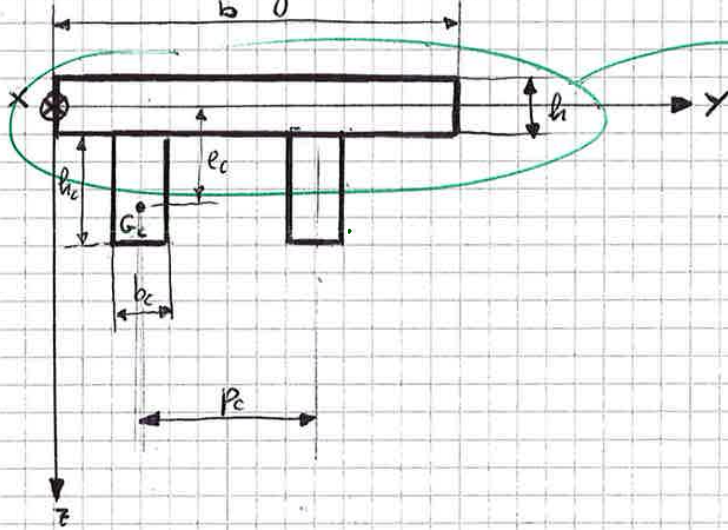
FLESSIONE

TAGLIO TRASVERSALE (è trascurabile se $G_{13} \gg D_{11}$)

$$\psi_x(\xi) = -\frac{\bar{q}_0 a^3}{24D_{11}} (4\xi^3 - 6\xi^2 + 1)$$

Ammetteremo che la t. delle piastre di Kirchhoff sia valida anche in questo caso:

Utilizziamo la seguente notazione:



il rivestimento viene trattato come una piastra di Kirchhoff

Per il generico i-esimo corrente, posto

$$N_{x,i}^c = \int_{A_c} \sigma_{x,i}^c dA$$

$$M_{x,i}^c = \int_{A_c} z \cdot \sigma_{x,i}^c dA$$

si ha:

$$N_{x,i}^c = E_c A_c \cdot \epsilon_x^{(0)} + E_c A_c e_c k_x$$

$$M_{x,i}^c = E_c A_c e_c \epsilon_x^{(0)} + E_c (I_{Gc} + e_c^2 A_c) k_x$$

con $I_{Gc} = \frac{b_c h_c^3}{12}$

MOMENTO D'INERZIA GEOMETRICO DEL CORRENTE

dove $e_c A_c = S_{yc}$

MOMENTO STATICO DEL CORRENTE RISPETTO A Y

$$I_{Gc} + e_c^2 A_c = I_{yc}$$

MOM. D'INERZIA DEL CORRENTE RISPETTO A Y

scriviamo le normali eq. costitutive della piastra irrigidita:

$$\{N\} = [A] \{ \epsilon_y^{(0)} \} + [B] \{ k_y \}$$

$$\{M\} = [B] \{ \epsilon_y^{(0)} \} + [D] \{ k_y \}$$

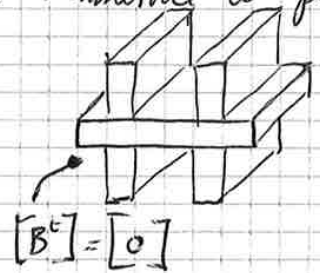
ponendo poi $\frac{N_{x,i}^c}{b} = \tilde{N}_{x,i}^c$ e $\frac{M_{x,i}^c}{b} = \tilde{M}_{x,i}^c$

adimensionalizzando tutto con b, lunghezza della piastra. ss

Per il solo vincolo si ha che $[B] = [0]$
 Inoltre per irrigidimenti simmetrici rispetto al piano x-y si ha che
 $[B_x^c]_i = [0]$ e $[B_y^c]_j = [0]$.

Quindi, nel caso di piastra con irrigidimenti simmetrici al piano x-y si ha che

$$[B^c] = [B] + \sum_{i=1}^I [B_x^c]_i + \sum_{j=1}^J [B_y^c]_j = [0]$$



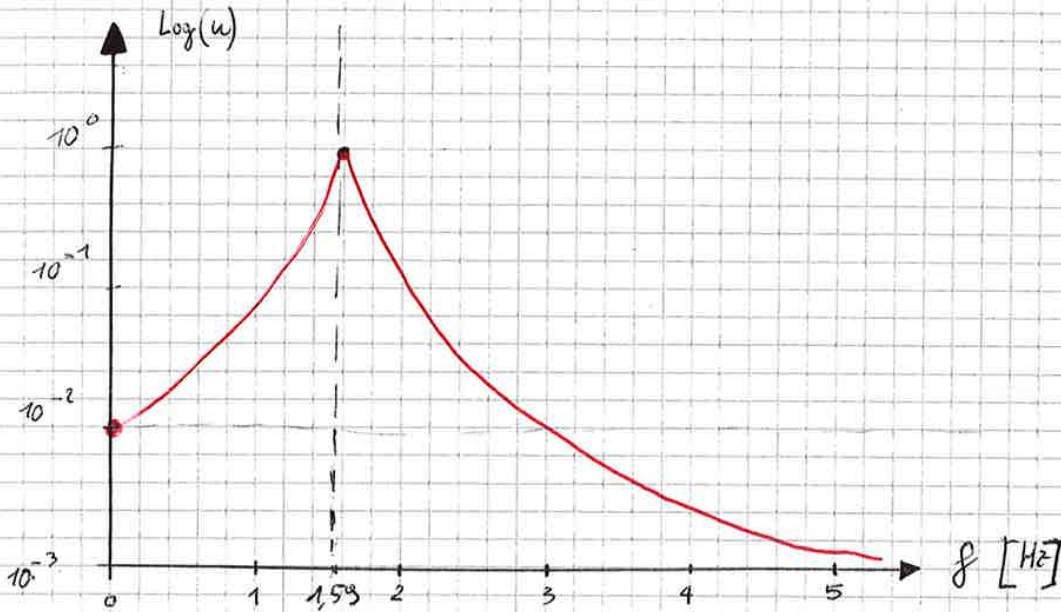
ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA

$$\begin{aligned} \Phi^c &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left(\{N^c\}^T \{ \epsilon_y^{(0)} \} + \{M^c\}^T \{k_y\} \right) dx dy = \\ &= \underbrace{\Phi^0}_{\text{piastra}} + \underbrace{\sum_{i=1}^I \Phi_i^c}_{\text{correnti lungo x}} + \underbrace{\sum_{j=1}^J \Phi_j^c}_{\text{correnti lungo y}} \end{aligned}$$

con ~~...~~:

$$\begin{aligned} \Phi_i^c &= \frac{1}{2} \int_0^a \left(N_{x,i}^c \epsilon_x^{(0)} + M_{x,i}^c k_x \right) dx \longrightarrow \text{energia potenziale lungo x dell' } i\text{-esimo corrente} \\ \Phi_j^c &= \frac{1}{2} \int_0^b \left(N_{y,j}^c \epsilon_y^{(0)} + M_{y,j}^c k_y \right) dy \longrightarrow \text{energia potenziale lungo y del j-esimo corrente} \end{aligned}$$

RISPOSTE IN FREQUENZA DI ORDINE BASSO



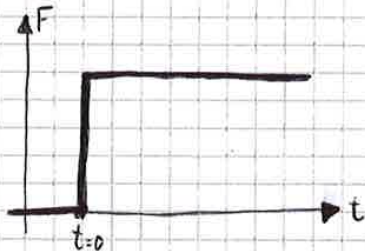
L'abscissa di una scala logaritmica permette di rilevare le risposte in termini di spostamento al variare della frequenza f della forzante.

RISPOSTA STATICA = $\frac{F_0}{k} = 0,01 = 10^{-2}$
 ($f=0\text{Hz}$)

RISPOSTA DI PICCO = 0,5 a 1,59 Hz

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE = $\frac{1}{2\zeta} = Q = 50$

UTILIZZO DI UNA FUNZIONE A GRADINO PER LA RISPOSTA



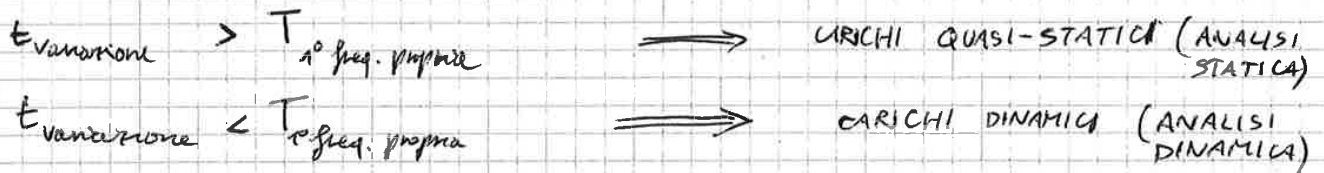
$u(0) = U_0 = 0$

$\dot{u}(0) = \dot{U}_0 = 0$

$$D(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right) & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Il movimento ζ gioca un ruolo fondamentale nel determinare il tipo di risposta del sistema. Infatti per determinati valori di ζ si possono avere forme smorzate, amplificate, oscillanti o aperiodiche.

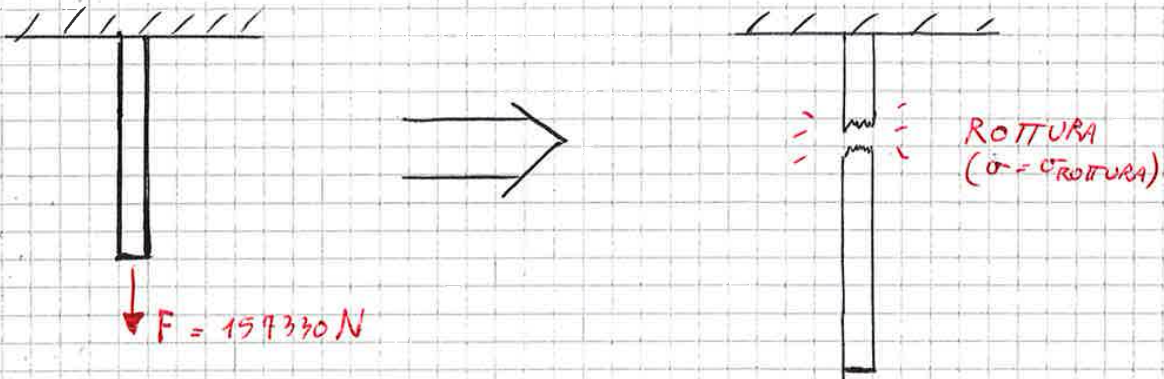
$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ costante di viscosità elastica
 massa del sistema
 costante elastica della molla (rigidezza)



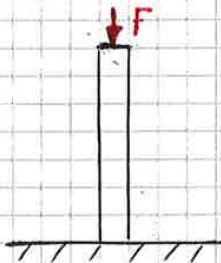
Carichi dinamici inducono forti effetti d'accelerazione ed effetti inertiali sulla struttura.

Carichi dinamici hanno un effetto molto più pericoloso sulle strutture rispetto ai carichi statici, a parità di grandezza, il pericolo più grande è dato dalla possibilità di vibrazioni e di risonanza con la prima frequenza propria di vibrazione della struttura.

Per arrivare a rottura ($\sigma = \sigma_{\text{ROTTURA}}$) dobbiamo applicare una F di: 157330 N .



2) PROVINO CIRCATO A COMPRESSIONE



$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

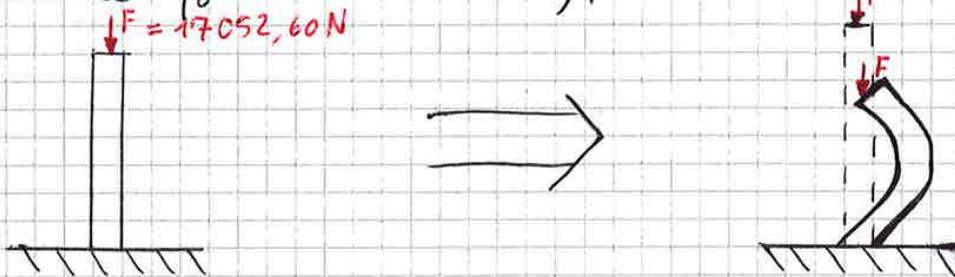
TENSIONE A CUI INSORGE INSTABILITÀ ELASTICA

nel nostro caso si ha che:

$$\sigma_{cr} = \text{~~17052,60~~} 54,28 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Quindi al massimo il provino potrebbe sopportare $F = 17052,60 \text{ N}$, molto minore di $F = 157330 \text{ N}$ che ne causerebbe la rottura.

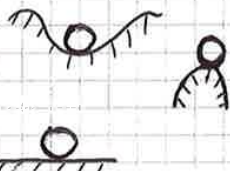
(Si noti che comunque questo valore è nella realtà ancora inferiore, perché la snellità λ va calcolata con il raggio del cerchio d'inerzia ρ_0 a denominatore).



Fatto questo breve esempio che ~~ci~~ chiarifica il differente comportamento delle strutture a rottura e ad instabilità possiamo fare ulteriori dichiarazioni sullo stato d'equilibrio a cui è giunta la struttura.

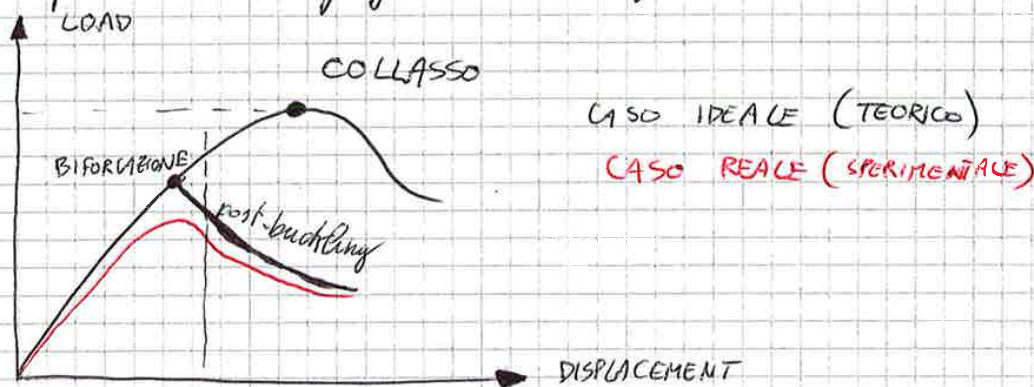
Infatti, per instabilità, la struttura si porta ad una nuova configurazione d'equilibrio sotto il carico F , e questa può essere:

- STABILE
- INSTABILE
- INDIFFERENTE



ad un certo punto il carico raggiunge il valore massimo (CARICO DI BUCKLING) e la struttura collassa (BUCKLING)

Invece per la BIFORCAZIONE ci sono 2 configurazioni che ~~sono~~ possono coesistere nella struttura a quel dato livello di carico, entrambe d'equilibrio. La configurazione effettivamente assunta dipende da imperfezioni microscopiche nella struttura



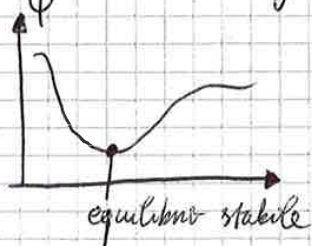
la biforcazione avviene prima del collasso!

CRITERI DI STABILITÀ ELASTICA

Concettualmente sono simili ai criteri di rottura, in entrambi i casi si ha la perdita della capacità portante del componente.

1°) CRITERIO DELL'ENERGIA (DI LAGRANGE)

Si valuta la derivata seconda dell'energia potenziale totale ϕ del sistema, se questa è maggiore di zero ($\phi'' > 0$) si ha un minimo dell'energia potenziale ϕ , e quindi l'equilibrio è STABILE



L'equilibrio svanisce (STATO CRITICO), quando ~~le~~ le variazioni infinitesime di ϕ'' diventano pari a zero, ovvero quando la curva assume un andamento costante

- $\phi'' > 0$ STABILE
- $\phi'' = 0$ INDIFFERENTE
- $\phi'' < 0$ INSTABILE

IPOTESI: in configurazione scarna le aste sono perfettamente coassiali.

Si valuta l'energia di deformazione elastica ϕ , in quanto l'unica cosa che si può deformare è la molla (le aste sono rigide).

$$\phi = \frac{1}{2} k_t (2\alpha)^2 = 2k_t \alpha^2 \quad \text{ENERGIA DI DEFORMAZIONE ELASTICA}$$

Utilizziamo il PLV

$$\delta\phi = \delta\mathcal{L}^{(e)}$$

!
Variaz.
infinitesime
di ϕ

!
Lavoro infinitesimo
delle f. esterne

$$\delta u = L \cdot \cos\alpha \, d\alpha$$

$$\delta v = L \cdot \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\delta\phi = 4k_t \alpha \, d\alpha$$

$$\delta\mathcal{L}^{(e)} = 2PL \cdot \sin\alpha \, d\alpha$$

$$\Rightarrow \delta\phi = \delta\mathcal{L}^{(e)}$$

~~$$4k_t \alpha \cdot \delta\alpha = 2PL \cdot \sin\alpha \cdot \delta\alpha$$~~

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2PL}{4k_t} = \frac{PL}{2k_t} \quad (*)$$

ora linearizziamo la relazione (*):

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\delta\phi = \delta\mathcal{L}^{(e)}$$

$$4k_t \alpha \, d\alpha = 2PL \cdot \sin\alpha \, d\alpha$$

$$(4k_t \alpha - 2PL \sin\alpha) \, d\alpha = 0$$

linearizzando ~~sin~~ $\sin\alpha \approx \alpha$:

$$(2PL - 4k_t) \alpha \, d\alpha = 0$$

questa relazione è soddisfatta per $\alpha = 0$ e $\frac{PL}{2k_t} = 1$.

Valutiamo ora la STABILITÀ del sistema:

$$E_t = \phi + V = \underbrace{\frac{1}{2} k_t (2\alpha)^2}_{\text{ENERGIA ELASTICA}} - \underbrace{2PL(1 - \cos\alpha)}_{\text{LAVORO ESTERNO}} \quad \text{ENERGIA POTENZIALE TOTALE}$$

valutiamo ora la $\frac{\delta^2 E_t}{\delta\alpha^2}$ come previsto dal CRITERIO DI LAGRANGE:

~~$$\frac{\delta E_t}{\delta\alpha} = 4k_t \alpha - 2PL \sin\alpha$$~~

$$\frac{\delta^2 E_t}{\delta\alpha^2} = 4k_t - 2PL \cos\alpha$$

~~Sono~~ infatti (a) e (b) le caratteristiche che deve avere il punto critico (punto di biforcazione).

Con la teoria linearizzata si ha:

$$\frac{d^2 E_t}{d\alpha^2} = 4k_t - 2PL \quad \text{indipendente dalla variabile } \alpha$$

questo equilibrio sarà ~~...~~:

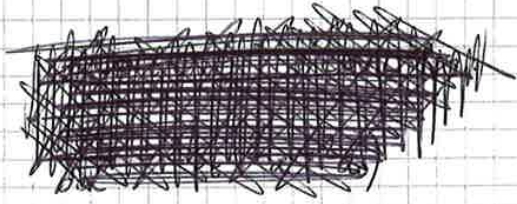
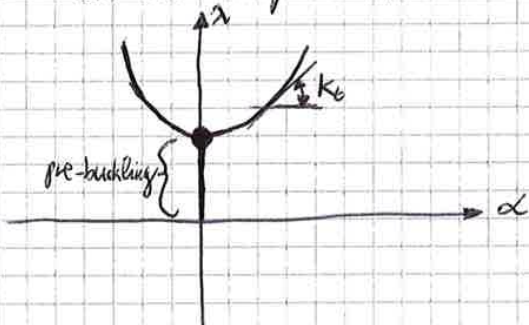
$$\frac{d^2 E_t}{d\alpha^2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{PL}{2k_t} < 1 \quad (\text{STABILE})$$

$$\frac{d^2 E_t}{d\alpha^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{PL}{2k_t} = 1 \quad (\text{INDIFFERENTE})$$

$$\frac{d^2 E_t}{d\alpha^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{PL}{2k_t} > 1 \quad (\text{INSTABILE})$$

Queste condizioni sono esattamente le stesse della teoria esatta, quindi per piccoli valori di α la t. linearizzata approssima bene i risultati della t. esatta.

Si noti che la pendenza della tangente alla curva $\lambda(\alpha)$ è la rigidità k_t .



EFFETTO DELLE IMPERFEZIONI INIZIALI

Si considerano gli effetti di un' ~~...~~ imperfezione iniziale nella struttura. Per fare ciò si considera $\alpha = \alpha_0$ all'equilibrio iniziale, e non più $\alpha = 0$, e ciò rappresenta un'inflessione iniziale pre-carico.

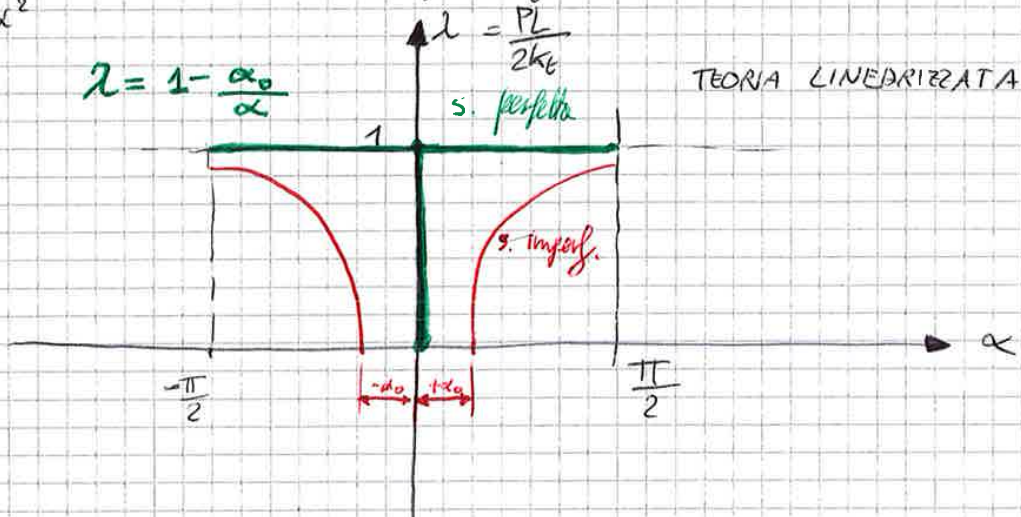
$\alpha_0 \rightarrow$ IMPERFEZIONE INIZIALE

$$u_0 = L \cdot \sin \alpha_0$$

$$\eta_0 = L (1 - \cos \alpha_0)$$

STABILITÀ

$$\frac{\partial^2 E_t}{\partial \alpha^2} = 4k_t - 2PL > 0 \quad \text{sempre verificata}$$



Le curve di equilibrio della strutt. imperfetta non hanno punti di biforcazione sia nella $t.$ esatta sia in quella linearizzata.

ANALISI DELLA STABILITÀ

MODELLI MECCANICI ELEMENTARI

Usiamo il metodo di Lagrange per valutare la stabilità del sistema ad un solo GDL (costo).

$$\Phi_{\text{tot}} = \Phi_K + \Phi_{\text{POTENZIALE}} = \underbrace{\Phi_K}_{\text{energia pot. elastica}} - \underbrace{q(\alpha)}_{\text{lavoro delle forze esterne}}$$

con $q(\alpha) = 2P \cdot \delta y$ lavoro esterno aggiuntivo

$$E_{\text{tot}, \alpha \alpha} = \frac{\partial^2 E_{\text{tot}}}{\partial \alpha^2} = 4k_t - 2PL \cdot \cos \alpha = 4k_t (1 - \lambda \cos \alpha)$$

$\sim \Phi_{\text{tot}}$

se $E_{\text{tot}, \alpha \alpha} > 0 \Rightarrow$ EQ. STABILE

se $E_{\text{tot}, \alpha \alpha} = 0 \Rightarrow$ EQ. INDIFFERENTE

se $E_{\text{tot}, \alpha \alpha} < 0 \Rightarrow$ EQ. INSTABILE

A.2) ANALISI LINEARIZZATA

equazione d'equilibrio: $(1-\lambda)\alpha = 0 \Rightarrow \alpha_{eq} = 0$ per ogni λ

sostituendo come in A.1) $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}$ si ha:

$$(1-\lambda)\alpha_{eq} + \varepsilon(1-\lambda)\alpha^{(1)} = 0$$

equazione di stabilità: $(1-\lambda)\alpha^{(1)} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

B) SISTEMA CON IMPERFEZIONI

B.1) ANALISI NON LINEARE

equazione d'equilibrio: $(\alpha - \alpha_0) - \lambda \sin \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}}$

sostituendo come al solito $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}$ risulta

$1 - \lambda \cos \alpha_{eq} = 0$, che è l'equazione di stabilità

sostituendo $\lambda = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}} \Rightarrow 1 = \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha_{eq}}$

~~che non è mai verificata~~ che non è mai verificata

in quanto $\frac{\alpha_{eq} - \alpha_0}{\sin \alpha_{eq}} < 1 \quad \forall \alpha_{eq} \geq \alpha_0$

B.2) ANALISI LINEARIZZATA

equazione d'equilibrio: $(\alpha - \alpha_0) - \lambda \alpha = 0 \Rightarrow \lambda = 1 - \frac{\alpha_0}{\alpha_{eq}}$

sostituendo $\alpha = \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}$ si ha che:

$$(1-\lambda)\alpha^{(1)} = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

infatti:

$$(\alpha - \alpha_0) - \lambda \alpha = 0 \Rightarrow (\alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)} - \alpha_0) - \lambda(\alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)} - \alpha_0 - \lambda \alpha_{eq} - \lambda \varepsilon \alpha^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{eq} - \alpha_0 + \varepsilon \alpha^{(1)}}{-(\alpha_{eq} + \varepsilon \alpha^{(1)})} + \lambda \frac{(-\alpha_{eq} - \varepsilon \alpha^{(1)})}{(-\alpha_{eq} - \varepsilon \alpha^{(1)})} = 0 \Rightarrow$$

Imponendo	le	BOUNDARY CONDITIONS	PARAMETRO DI CARICO
$x=0$	$w=0$	$H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0$	$\lambda = \frac{PL}{2kE}$
$x=0$	$M=0$	$H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0$	
$x=L$	$w=0$	$H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0$	
$x=L$	$M=0$	$H = -\bar{P} = -\lambda \bar{P}_0$	

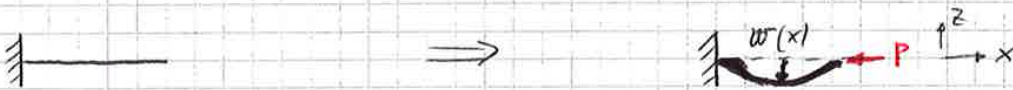
si ottiene l'equazione di equilibrio completa:

$$\frac{\partial M}{\partial x^2} - \lambda \bar{P}_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \implies -EJ \cdot w_{xxxx} + \lambda \bar{P}_0 \cdot w_{xx} = 0$$

$w_{eq} = 0 \implies EJ \cdot w_{xxxx} + \lambda \bar{P}_0 \cdot w_{xx} = 0$

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO PER L'ASTA COMPRESSA
differenziale omogenea a coeff. costanti:

Questa equat. ha come unica incognita lo spostamento w lungo l'asse Z rispetto alla posizione d'equilibrio.



ricordiamo che:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \end{Bmatrix}$$

METODO DEGLI STATI D'EQUILIBRIO ADIACENTI (Euler)

Immaginiamo che l'equilibrio dell'asta sia perturbato da una disturbo infinitesimo:

$$w = \underbrace{w_{eq}}_{\text{posit. d'equilibrio}} + \epsilon \underbrace{w^{(1)}}_{\text{perturbazione}}$$

posizione lungo Z perturbata

l'apice ⁽¹⁾ rappresenta ~~la~~ i contributi dovuti alla perturbazione!

$$M = M_{eq} + \epsilon M^{(1)}$$

reat. di momento perturbato

$$H = H_{eq} + \epsilon H^{(1)}$$

reazione in orizzontali perturbata

= 0 (perché \bar{P} rimane invariato)

Introduciamo $\rho =$ raggio del cerchio d'inerzia,

$$\rho = \frac{S_x}{S} \quad \begin{array}{l} \text{momento statico} \\ \text{area della sezione} \end{array} \quad \text{RAGGIO DEL CERCHIO D'INERZIA}$$

$$\Rightarrow J = \rho^2 \cdot S \quad \text{MOMENTO D'INERZIA}$$

$$A = \frac{L}{\rho} \quad \text{SNELLEZZA DELL'ASTA}$$

Si ha allora che:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{SL^2} = \frac{\pi^2 E \rho^2 \cdot S}{S A^2 \cdot A^2} = \frac{\pi^2 E}{A^2}$$

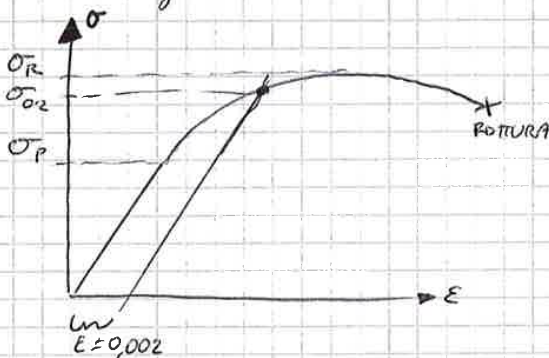
$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{A^2} \quad \text{TENSIONE CRITICA EULERIANA}$$

La SNELLEZZA A è un parametro adimensionale che permette di fare distinzione tra aste snelle e aste tozze
 cedimento in campo elastico (BUCKLING) cedimento in campo plastico

Per trovare la A_{lim} che separa queste 2 categorie basta ricavare A dalla formula della σ_{cr} e imporre $\sigma_{cr} \equiv \sigma_p$, ovvero dire che la massima tensione registrata nello snellimento è quella di snervamento, quindi si ha deformazione plastica.

$$A = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} \quad \Rightarrow \quad A_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$$

N.B: la σ_s è diversa dalla σ_{02} e corrisponde alla σ_p nel caso delle leghe d'Al.



Al 2020

$$\sigma_s \equiv \sigma_{02}$$

Per calcolare la P_{cr} e la σ_{cr} si usa sempre il momento d'inerzia minore tra quelli della sezione: $J = J_{min}$, e il corrispondente raggio d'inerzia ρ .

INSTABILITÀ LOCALE



indolcimento localizzato

In questo caso la tensione critica si trova come:

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_s}{1 + k\beta \frac{\sigma_s}{E}}$$

TENSIONE CRITICA A INSTABILITÀ LOCALE
(FORMULA DI VALLAT)

dove:

σ_s → TENSIONE DI SNERVAMENTO (si usa lo σ_p nelle leghe di Alluminio)

k → PARAMETRO $\begin{cases} k = 8,5 & \text{SEZ. APERTE} \\ k = 3 & \text{SEZ. CHIUSE} \end{cases}$

$\beta = \frac{d}{s}$ → INDICE DI SPESSORE dove d è la lunghezza del lembo libero della sezione della trave e s è lo spessore della parete sottile

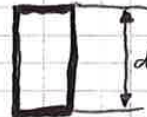
TRAVE A C



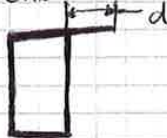
C ASIMMETRICA



CHIUSA



CHIUSA CON LEMBO SPORGENTE



SEZ. CIRCOLARE



E → MODULO DI YOUNG

Si noti che vanno sempre fatti i calcoli più conservativi possibile, quindi ad esempio, se si è indecisi su quale lembo utilizzare come d (per esempio in una sezione chiusa rettangolare) va sempre usato quello più grande.

Inoltre il k più grande si ha nelle sezioni aperte, con che, essendo a denominatore, risulterà in una σ_{cr} più bassa e ciò risulterà in una maggiore facilità dell'asta ad andare in instabilità locale, come ci si aspetta logicamente da una trave in sezione aperta.

→ si ottiene quindi

$$\sigma \dot{\theta} J_{PCT} = G J_t \dot{\theta}$$

da cui si ricava che la tensione critica per l'instabilità torsionale nelle travi è:

$$\sigma_{cr} = G \frac{J_t}{J_p} \rightarrow \text{shear modulus} \quad \text{fattore di rigidezza torsionale} \quad J_t = \sum \frac{d_i^3 \beta_i}{3}$$

TENSIONE CRITICA DI INSTABILITÀ TORSIONALE

$$J_p = J_{PG} + S \cdot (d_G - d)^2$$

mom. d'inerzia polare

Quando all'interno della trave si raggiunge $\sigma = \sigma_{cr} = G \frac{J_t}{J_p}$ si iniziano ad instaurare fenomeni di instabilità torsionale.

Questo problema è particolarmente importante nelle aste con bassa rigidità torsionale, ad esempio aste con sezione aperta in parete sottile. Poiché normalmente $(\sigma_{cr})_{tors} < (\sigma_{cr})_{globale}$ si incrina nell'instabilità torsionale molto prima di quella globale nelle travi con geometrie che risentono di questo problema. Questo fa sì che il problema dell'instabilità torsionale sia particolarmente sentito e vada per tanto accuratamente studiato.

Il fenomeno è caratterizzato da una rotazione relativa delle sezioni dell'asta attorno all'asse longitudinale.

b-b') $V_x = M_{x,x} + M_{xy,y} + H_x \cdot w_{,x} + H_{xy} \cdot w_{,y}$ *****

Abbiamo così ottenuto 5 equazioni di equilibrio per la piastra, 3 equazioni di equilibrio alla traslazione e 2 di equilibrio alla rotazione attorno agli assi nel piano x-y

EQUAZIONI DI EQUILIBRIO PER LA PIASTRA,

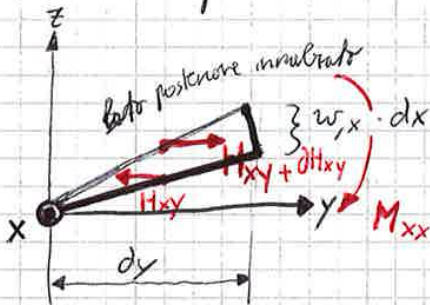
- $H_{x,x} + H_{xy,y} = 0$
- $H_{xy,x} + H_{y,y} = 0$
- $V_{x,x} + V_{y,y} = 0$
- $M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (H_{x,x} + H_{xy,y}) w_{,x} + (H_{xy,x} + H_{y,y}) w_{,y} + H_x \cdot w_{,xx} + 2H_{xy} \cdot w_{,xy} + H_y \cdot w_{,yy} = 0$

TRASLAZIONE

ROTAZIONE

non serve l'equilibrio alla rotazione attorno a z per la reciprocità di τ_{xy} .

considerando l'eccentricità delle forze agenti sui lati opposti della piastra, dovuta alla deformazione lungo l'asse perpendicolare ai 2 lati, che fa sì che un lato si trovi innalzato rispetto all'altro e viceversa, si ha dunque un momento:



$$M_{xx} = \underbrace{(H_{xy} + dH_{xy} - H_{xy})}_{\text{forza}} \cdot \underbrace{(w_x \cdot dx)}_{\text{braccio}} = dH_{xy} \cdot w_x \cdot dx$$

La procedura per ricavare le equazioni di equilibrio per la piastra è la seguente:

- 1) dall'equazione ***** ricavo $V_{y,y}$ derivando rispetto ad y;
- 2) dall'equazione ***** ricavo $V_{x,x}$ derivando rispetto ad x;
- 3) sostituisco le 2 espressioni trovate per $V_{y,y}$ e $V_{x,x}$ nella ***;
- 4) a questo punto mi ricavo l'equazione $M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} + (H_{x,x} + H_{xy,y}) \cdot w_{,x} + (H_{xy,x} + H_{y,y}) \cdot w_{,y} + H_x \cdot w_{,xx} + 2 \cdot H_{xy} \cdot w_{,xy} + H_y \cdot w_{,yy} = 0$
- 5) le 2 parentesi nell'equazione di sopra corrispondono a * e ** e

$$-\bar{P}_y \cdot w_{,yy} = 0$$

- Ma la piastra perfettamente piana, caricata sui lati e in campo pre-buckling è una configurazione d'equilibrio?

Sì, se rispetta le BOUNDARY CONDITIONS.

- È anche stabile?

Per valori del carico inferiori al carico di buckling la configurazione deformata è quella data dalla legge di Poisson (accorciamento in direzione longitudinale e allungamento in direzione trasversale), per cui hanno valori discreti del carico (CARICHI CRITICI EULERIANI) ottenuti moltiplicando il carico \bar{P} per i fattori k , moltiplicazioni del carico critico. Ad ogni valore di k ($k \in \mathbb{N}$) corrisponde un diverso CARICO EULERIANO ed una diversa configurazione deformata, con numero di semionde crescenti. (e.g. per il 1° valore di k si avrà una sola semionda n , per il 2° k si avranno 2 semionde e così via...).

La stabilità di ciascuna di queste configurazioni dipende dal segno della derivata seconda dell'energia potenziale totale.

EQUAZIONE DI STABILITÀ LINEARIZZATA

Immaginiamo di introdurre una perturbazione infinitesima che modifica l'equilibrio della nostra piastra. Lo spostamento w lungo z del generico punto della piastra rispetto alla configurazione d'equilibrio sarà:

$$w = w_{eq} + \epsilon w^{(1)}$$

\downarrow \downarrow
 posiz. d' perturbazione
 equilibrio

poiché w_{eq} è zero per definizione $\Rightarrow w = \cancel{w_{eq}} + \epsilon w^{(1)} \equiv \epsilon w^{(1)}$

$$M = M_{eq} + \epsilon M^{(1)}$$

Si ottiene così

$$M_{x,xx}^{(1)} + 2M_{xy,xy}^{(1)} + M_{y,yy}^{(1)} - \bar{P}_x \cdot w_{,xx}^{(1)} - \bar{P}_y \cdot w_{,yy}^{(1)} = 0$$

sostituendo M nell'equat. d'equilibrio.

Le B.C. sono:

$$x=0, a \quad \Rightarrow \quad w^{(1)} = M_x^{(1)} = 0$$

$$y=0, b \quad \Rightarrow \quad w^{(1)} = M_y^{(1)} = 0$$

$$w^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin(\lambda_m \cdot x) \cdot \sin(\lambda_n \cdot y)$$

SPOSTAMENTO w IN FUNZIONE DI x, y

con $\lambda_m = \frac{m \cdot \pi}{a}$; $\lambda_n = \frac{n \cdot \pi}{b}$

dove $m \rightarrow$ n° di semionde in direzione x

$n \rightarrow$ n° di semionde in direzione y

I fattori A_{mn} sono definiti come:

$$A_{mn} = \left(\lambda_m^4 \cdot D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 D_{22} - \lambda_m^2 \cdot \bar{P}_x - \lambda_n^2 \cdot \bar{P}_y \right) \cdot \sin(\lambda_m \cdot x) \cdot \sin(\lambda_n \cdot y)$$

Posto $R = \frac{\bar{P}_y}{\bar{P}_x}$, rapporto tra i carichi, la parentesi dell'

ponendo uguale a 0 l'equazione del valore A_{mn} si ottiene:

$$\left(\lambda_m^4 \cdot D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 D_{22} - \lambda_m^2 \cdot \bar{P}_x - \lambda_n^2 \cdot \bar{P}_y \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_m^4 \cdot D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 D_{22} = (\lambda_m^2 + \lambda_n^2 \cdot R) \cdot \bar{P}_x$$

$$\Rightarrow \bar{P}_{x,cr} = \frac{\lambda_m^4 \cdot D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_m^2 \lambda_n^2 + \lambda_n^4 D_{22}}{\lambda_m^2 + \lambda_n^2 \cdot R}$$

in corrispondenza di questi valori del carico si ha buckling

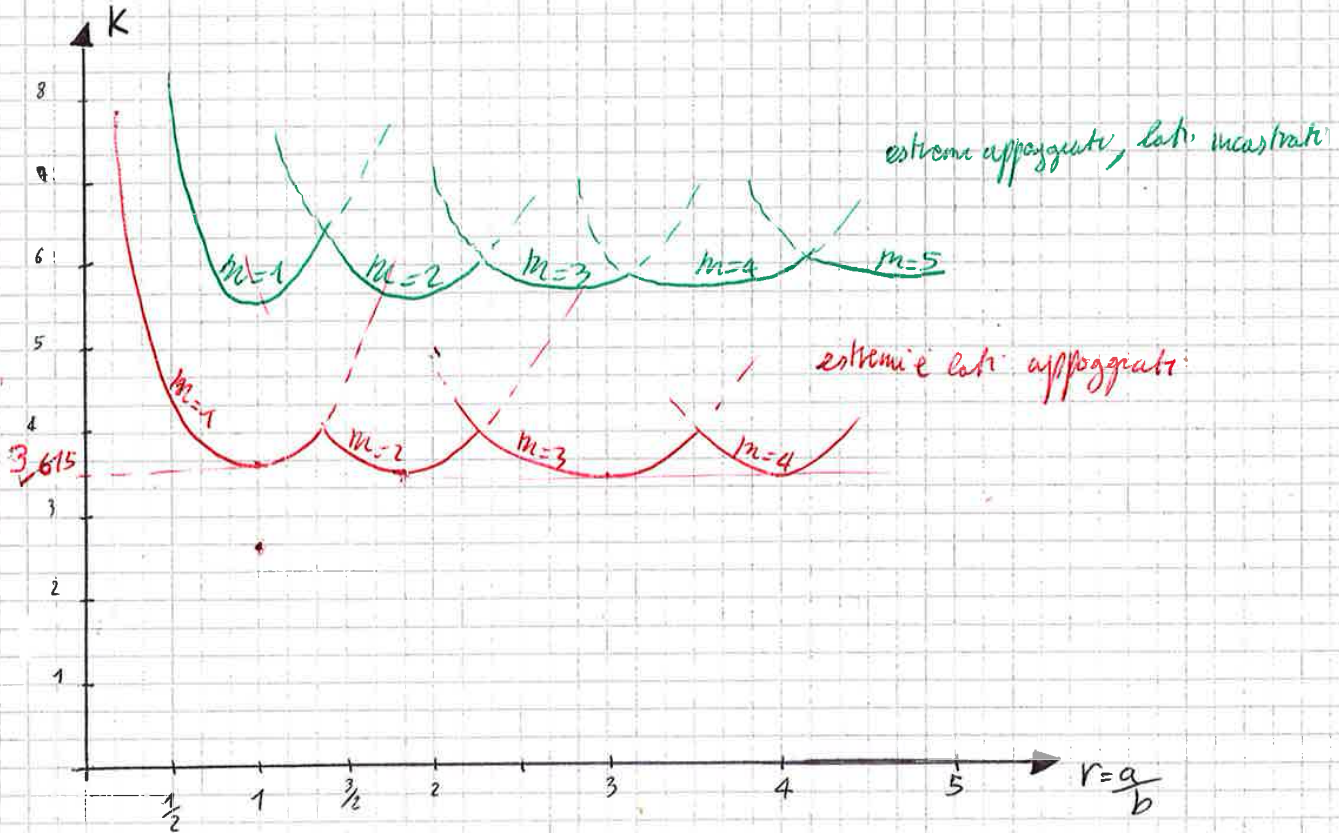
PANNELLO ISOTROPO IN COMPRESSIONE SOLO LUNGO X

$R = 0$ ($\bar{P}_y = 0$) carico assiale lungo x

$D_{11} = D_{22} = D_{12} + 2D_{66} = D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ materiale isotropo

$$\Rightarrow \bar{P}_{x,cr} = \frac{\lambda_m^4 \cdot D + 2D \cdot \lambda_m^2 \lambda_n^2 + D \lambda_n^4}{\lambda_m^2}$$

Graficando il valore di K in funzione del rapporto di forma in piastra si ottiene:



Il valore dell'ascissa delle intersezioni di 2 curve adiacenti si trovano con la formula:

$$r = m \cdot \sqrt{m+1}$$

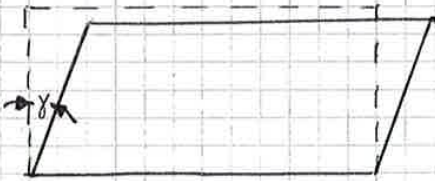
La piastra con estremi e lati appoggiati è uno dei pochi casi che ammette una soluzione analitica.

Passando da un semplice appoggio ad un incastro la rigidità della piastra aumenta \Rightarrow cambia il valore del K_{cr} e la configurazione deformata (curva a diverso valore di m).

Quando si vuole il K_{cr} di una piastra si usa il vero e proprio valore $r = \frac{a}{b}$ della piastra, non il valore asintotico!!!

Lo stato di deformazione è tale da far passare il pannello da forma rettangolare a parallelogramma. Ricavato lo stato di deformazione si può conoscere lo stato di tensione.

Immaginando di tenere fermo il lato inferiore della piastra si avrebbe:



La diagonale sollecitata si allunga mentre l'altra si accorcia, i 2 lati orizzontali rimangono paralleli mentre i 2 lati verticali ruotano di un angolo γ , detto **SCORRIMENTO ANGOLARE**. In questa situazione il campo di tensione all'interno del pannello risulta uniforme ovvero la tensione è la medesima in qualsiasi punto la si valuti. Si dice che il pannello è in uno **STATO DI TENSIONE TANGENZIALE PURO**.

B. C.:

$$x=0, a \Rightarrow N_x=0; \quad N_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0 = h \cdot \tau_{soll}$$

$$y=0, b \Rightarrow N_y=0; \quad N_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0 = h \cdot \tau_{soll}$$

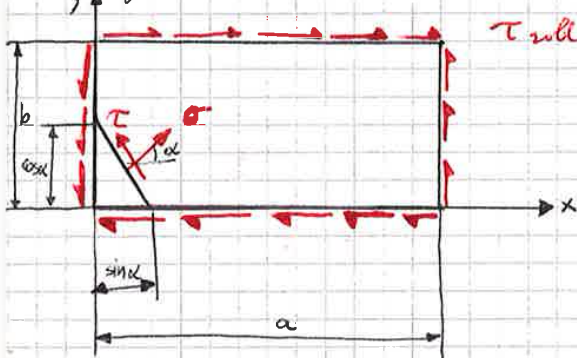
EQUAZ. D'EQUILIBRIO

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0$$

$$\Rightarrow N_x=0 \quad N_y=0 \quad N_{xy} = \lambda \bar{P}_{xy}^0 = h \tau_{soll} \quad \text{STATO DI SOLLECITAZ.}$$

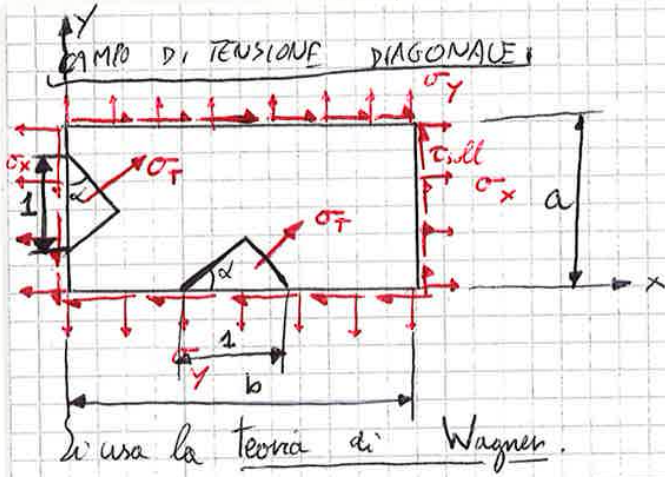
Immaginiamo di isolare un elemento di forma triangolare al vertice del pannello.



Facendo l'equilibrio alla traslazione del triangolino avremo:

$$\rightarrow): \sigma \cdot \cos \alpha - \tau \cdot \sin \alpha = \tau_{soll} \cdot \sin \alpha$$

$$\uparrow): \sigma \cdot \sin \alpha + \tau \cdot \cos \alpha = \tau_{soll} \cdot \cos \alpha$$



$\tau_{roll} > \tau_{cr} \Rightarrow$ CAMPO DI TENSIONE DIAGONALE PARZIALE

$\tau_{roll} \gg \tau_{cr} \Rightarrow$ CAMPO DI TENSIONE DIAGONALE COMPLETO

• DIAGONALE COMPLETO

Prendiamo un elemento a forma di triangolo rettangolo, con l'ipotenusa di lunghezza unitaria, posto sul lato verticale s_x , e facciamo l'equilibrio alla trazione sulle sue facce:

$x \rightarrow$: $(\sigma_T \cdot h \cdot \cos \alpha) \cdot \cos \alpha = \sigma_x \cdot h \cdot 1 \Rightarrow \sigma_x = \sigma_T \cdot \cos^2 \alpha$

$y \uparrow$: $(\sigma_T \cdot h \cdot \cos \alpha) \cdot \sin \alpha = h \tau_{roll} \cdot 1 \Rightarrow \sigma_T = \frac{2 \cdot \tau_{roll}}{\sin(2\alpha)} = \frac{\tau_{roll}}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}$

Sostituendo la seconda nella prima si ha:

$\sigma_x = \tau_{roll} \cdot \cot^2 \alpha$

Ripetendo il ragionamento per un elemento infinitesimo triangolare con l'ipotenusa sul lato orizzontale inferiore si ottiene

$x \rightarrow$: $(\sigma_T \cdot h \cdot \sin \alpha) \cdot \cos \alpha = \tau_{roll} \cdot h \cdot 1 \Rightarrow \sigma_T = \frac{\tau_{roll}}{\sin \alpha \cos \alpha}$

$y \uparrow$: $(\sigma_T \cdot h \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha = \sigma_y \cdot h \cdot 1 \Rightarrow \sigma_y = \sigma_T \cdot \sin^2 \alpha$

$\Rightarrow \sigma_y = \frac{\tau_{roll}}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \sin^2 \alpha = \tau_{roll} \cdot \tan \alpha$

per $\alpha = 45^\circ$ si ha:

$\sigma_T = 2 \cdot \tau_{roll}$

$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{roll}$

DOMANDA ESAME:

QUAL È LO STATO DI SOLLECITAZIONE PRE-BUCKLING?
 È lo stato di sollecitazione caratterizzato da $\sigma_x = \sigma_y = 0, \tau = \tau_{soll}$.

TANGENZIALE (CRITICO) PURO	DIAGONALE COMPLETO	DIAGONALE PARZIALE
$\tau'_{soll} = \tau_{cr}$	$\tau''_{soll} = \Delta \tau$	τ_{soll}
$\sigma_T = \tau_{cr}$	$\sigma_T = 2 \cdot \Delta \tau$	$\sigma_T = \tau_{cr} + 2 \Delta \tau = 2 \tau_{soll} - \tau_{cr}$
$\sigma_c = \tau_{cr}$	$\sigma_c = 0$	$\sigma_c = \tau_{cr}$
$\sigma_x = 0$	$\sigma_x = \Delta \tau$	$\sigma_x = \Delta \tau = \tau_{soll} - \tau_{cr}$
$\sigma_y = 0$	$\sigma_y = \Delta \tau$	$\sigma_y = \Delta \tau = \tau_{soll} - \tau_{cr}$

La formula per l'instabilità globale del pannello sollecitato a taglio è del tutto uguale a quella del pannello sollecitato a compressione, cambia solo il parametro di carico critico:

$\sigma_{cr} = k_{\sigma} E \left(\frac{1}{b}\right)^2$ lato corto

TENSIONE CRITICA A COMPRESSIONE

$\tau_{cr} = k_{\tau} E \left(\frac{1}{b}\right)^2$

TENSIONE CRITICA TAGLIO

lato più corto (poiché tutti i lati sono caricati allo stesso modo)

