



**Appunti universitari**

**Tesi di laurea**

**Cartoleria e cancelleria**

**Stampa file e fotocopie**

**Print on demand**

**Rilegature**

**NUMERO: 2215A**

**ANNO: 2017**

# **A P P U N T I**

**STUDENTE: Cosentino Costantino**

**MATERIA: Fisica e Materiali per Tecnologie Avanzate - Prof. Giorgis**

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.  
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

## OTICA

Il punto di partenza della nostra analisi sono le equazioni di Maxwell. Nel vuoto, senza cariche né sorgenti:

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Campo conservativo e solenooidale}$$

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{legge di Faraday, il cui meno deriva dalla legge di Lenz} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{legge di Ampere-Maxwell} \end{cases}$$

Da queste 4 eqz. si può mostrare la natura ondulatoria della radiazione EM.

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times (-\partial_t \vec{B}) = -\partial_t (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\partial_t (\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

⇓

Applicando l'operatore rotore alla 3<sup>a</sup> ME:

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Definendo la velocità di prop. della luce nel vuoto:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Troviamo:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Applicando lo stesso ragionamento alla 4<sup>a</sup> ME:

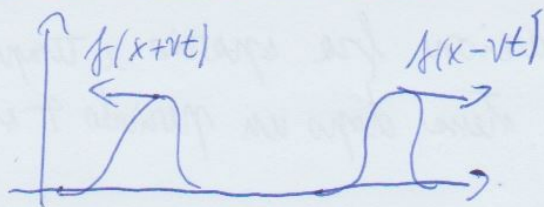
$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

Definendo l'operatore d'Alembertiano  $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ :

$$\begin{cases} \square \vec{E} = 0 \\ \square \vec{B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{eq. vettoriali}$$

Un'identica eq. scalare è obbedita dalle componenti di  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ . (1)





La sol. ancora più generale di  $\square\psi=0$  è data da una sovrapposizione di onde progressive e regressive:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0^+ e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} + \psi_0^- e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)}$$

$$\psi_0^\pm \in \mathbb{C}$$

L'argomento dell'esponenziale deve essere uno scalare.  
 $\vec{k}\cdot\vec{r}$  è un numero,  $\vec{k}$  è parallelo alla direzione di propagazione e  $\vec{r}$  è un punto generico dello spazio.

-  $\omega \rightarrow$  frequenza temporale [ $s^{-1}$ ]

-  $k \rightarrow$  frequenza spaziale [ $m^{-1}$ ]

La natura ondosa è data da particolari legami fra  $\omega$  e  $k$ .

$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$  è una f. armonica sia nello spazio che nel tempo.

Congelando il tempo e concentrandomi sul DOMINIO SPAZIALE:

- l'onda è periodica di  $\lambda$ ; [spazio dopo il quale l'onda si ripete identica]
- $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$  è la freq. spaziale, ossia il numero di oscillazioni nello nell'unità di spazio.

Essendomi in un punto  $r$ , concentrandomi sul DOMINIO TEMPORALE:

- l'onda è periodica di  $T$  [tempo dopo il quale l'onda si ripete identica];
- $\omega = 2\pi/T$  è il numero di oscillazioni nell'unità di tempo.

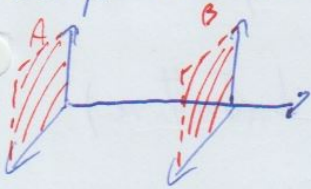


il valore di  $\psi$  in qualunque altro punto dello spazio, interno o esterno alla superficie in questione.

L'informazione che abbiamo a disposizione è deterministica, l'approccio è però difficilmente applicabile.

L'approccio di ~~Rayleigh~~ Rayleigh-Sommerfeld, partendo da una situazione più semplificata ma più realistica, da un'interpretazione più accessibile.

Un problema ottico è modellizzabile come un problema a 2D. Abbiamo un piano di partenza, una direzione privilegiata in cui il campo EM si propaga e un piano di arrivo.



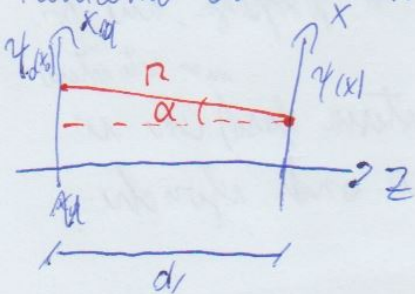
Quale sarà la dist. di campo in un certo punto conoscendo la dist. su un piano d'ingresso? Che distribuzione era presente nell'origine conoscendo quella di arrivo?

~~Fissare~~ Fissiamo la direzione lungo cui il campo si propaga. Questo non vuol dire fissare il  $\vec{k}$  ma vuol dire fissare la direzione della maggior parte del flusso di energia.

- Capire la relazione matematica che lega piano di partenza e di arrivo durante la prop. di un'onda EM.

CASO 1D

Partiamo da un caso semplificato.



$\psi_0(x_0)$  è una distribuzione nota, come arrivo a  $\psi(x)$ ?

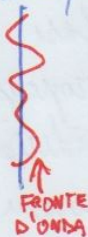
SDE

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int dx_0 \psi_0(x_0) \left( ik - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{z}{r} \right) \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right)$$

- $r$  è la distanza fra punto di arrivo e punto che sto considerando.
- $\left( \frac{z}{r} \right)$  è il fattore di obliquità, rende più pesante il fattore con  $\alpha = 0$  (deriva da Kirchhoff se punto è un certo punto sul piano di arrivo se che un punto all'origine che contribuisce massimo)



Rispetto Huygens, che necessita una conoscenza del fronte d'onda, mediante la formula di RS facciamo qualcosa di analogo a livello matematico ma, invece che partire dal fronte d'onda, si parte da un piano.



Partendo da un piano invece che da un fronte d'onda, le sorgenti non saranno in fase fra loro ma dovremo tenere conto che i punti sul piano (le sorgenti sferiche) non saranno tutti con la stessa fase, ma avranno una fase diversa e seconda del fronte d'onda di appartenenza.

Essendo  $\psi_0(k_0)$  una funzione complessa, al suo interno saranno contenute le info di fase (in Huygens non era presente tale info)

Questa era l'analogia con Huygens. ↑

Il termine  $(ik - \frac{1}{R})$ : risolvendo l'integrale esso si sdoppia in 2 termini (2 integrali). Non ci sono problemi per il termine  $ik$ , essendo il numero d'onda una costante, la teoria detta in precedenza si applica e tale integrale a lo si calcola.

Il problema nasce dal termine  $1/R$  nell'integrale:

$$\frac{1}{2\pi} \int d^3x_0 \psi_0(x_0) \approx \frac{e^{ikR}}{R^2}$$

Il problema nasce dal fatto che quello che si sta propagando in questo integrale non è un'onda sferica, non è neanche un'onda: ricordando che  $I \propto |E|^2$ :

$$I \propto |E|^2 \propto A^2 \frac{e^{i2kR}}{R^2} \Rightarrow P = \int I R^2 d\Omega \propto \frac{1}{R^2} \quad [\text{Ha anisotropia, no contributo di } d\Omega]$$

Del punto di vista fisico un'onda dovrebbe trasportare energia. Se l'onda si propaga senza perdite dovrai trovare sempre la stessa energia.

In questo caso l'energia non sta propagandosi. Questo termine non è un'onda ma è matematicamente corretto.

Ci sono due approcci:

- Se ci troviamo a  $R \gg \lambda$ , posso trascurare il 2° termine  $(-\frac{1}{R})$  e dire che la formula di RS funziona ancora bene.
- Se  $R \sim \lambda$  allora  $(-\frac{1}{R})$  diventa un termine importante, più di  $|ik|$ .

Vieni detta termine di fase di...



Ponendo in  $\vec{r}=0$ :

$$\vec{E}(t) \propto E_0 \sin(-\omega t) \Rightarrow |S| = \epsilon_0 c E_0^2 \sin^2(\omega t)$$

Nota:

sembra che  $|S|$  oscilli a una frequenza doppia rispetto al campo  $\vec{E}$  e il campo  $\vec{B}$ . Questo perché quando  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  cambiano segno il prodotto vettoriale resta lo stesso, questo perché il flusso dell'energia deve andare sempre nella stessa direzione  $\square$

È importante notare che  $\Phi_S$  dipende dal tempo.  
Calcoliamo  $\Phi_S(t)$ :

$$\Phi_S(t) = \int \vec{S} \cdot \vec{n} d\Omega = \int |S| R^2 d\Omega \stackrel{soe}{=} \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}^2 \rightarrow \text{Formule di Larmor}$$

$$[\Phi_S(t)] = \frac{W}{s} = W$$

$\Phi_S(t)$  si associa a  $\ddot{p}$ , un momento di dipolo, associato a un momento di dipolo che qui non c'è. L'intera ~~da~~ la sua derivata seconda che possiamo definire:

$$\vec{p} = e \vec{d}$$

$$\text{Chi è } \vec{d}? \rightarrow \vec{d} = \frac{e \vec{E}(t)}{m} \quad (F = ma, \vec{d} \text{ è un'accelerazione})$$

$$\Phi_S(t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \frac{e^2 E^2(t)}{m^2}$$

Questo è la potenza <sup>ISTANTANEA</sup> irradiata in tutto l'angolo solido ~~eccitato~~ dal mio elettrone.

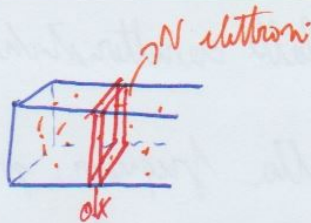
Se avessi cambiato il raggio  $r$  della mia sfera tale potenza sarebbe la stessa.

Notiamo che  $\Phi_S(t)$  varia nel tempo come  $E(t)$ .

Quanto energia si sta prendendo l'elettrone dall'onda incidente?

Se il nostro elettrone è puntiforme e l'onda piana è infinita, come ragiona? Si ragiona in termini di densità energetica.





Ogni elettrone irraggia:

$$\Phi_S = W \cdot \sigma_T$$

Tutti gli elettroni:

$$\Phi_S = N W \cdot \sigma_T$$

\*  $n$  densità volumica, prendo area unitaria

Considerando solo uno straterello  $dx$ :

Sia  $n$  la densità di elettroni:

\*  $n dx \rightarrow$  numero di elettroni sullo straterello

$dW = n dx W \cdot \sigma_T \rightarrow$  potenza sottratta all'onda dallo straterello.

Per convenzione mettiamo un meno, essendo un'energia persa dall'onda:

$$dW = - n dx W \cdot \sigma_T$$

Risolviendo questa ED:

$$W = W_0 e^{-n \sigma_T x}$$

Questa è l'energia ceduta dalla nostra onda man mano che procedo lungo il nostro parallelepipedo.

Notiamo che non stiamo considerando la frazione di energia che è stata irraggiata dagli elettroni in maniera isotropa, quindi se misurassi l'energia alle fine della scatola sarebbe maggiore di  $W$ .

### INTERAZIONE ONDA EM CON ELETTRONE LEGATO

Supponiamo che il nostro elettrone sia legato da una forza di richiamo di tipo elastico:

$$m \ddot{x} = -\alpha x$$

Le soluzioni  $\ddot{x}$ :

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$$

dove

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$



Segui che  $\langle \Phi_s \rangle$  sarà da confrontare con l'energia media portata dall'onda.

Esprimiamo  $P$  come:

$$P = \dot{L}X(t) = \dot{L}X_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{P} = -\dot{L}\omega_0^2 X_0 \cos(\omega_0 t)$$

Faccendo  $\dot{P}^2$  e prendendone il  $\langle \rangle$  si trova:

$$\langle \Phi_s \rangle = \frac{\dot{L}^2 X_0^2 \omega_0^4}{4\pi \epsilon} \cdot \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} = \frac{\dot{L}^2 \omega_0^4 X_0^2}{4\pi \epsilon_0^3 e^3} \quad [\langle \Phi_s \rangle] = W$$

Questo è la potenza, l'energia vale:

$$|\Delta W| = \langle \Phi_s \rangle \Delta t$$

L'energia si perde con un rate costante ( $\langle \Phi_s \rangle$ )

Nota:  $\langle \Phi_s \rangle \propto \omega_0^4$

La potenza irradiata sale con la  $4^a$  potenza della frequenza. Spesso si ha 2 radiazioni diverse ad un oscillatore legato ~~spesso~~ mi ritorna più fotoni sparsi rispetto alla  $\omega$  più alta che non per l' $\omega$  più bassa.

Vedo il cielo blu perché; ~~vedendo la radiazione~~ tutte le radiazioni arrivano sull'atmosfera, l'ultravioletto viene riassorbito dall'ozono e la frequenza diffusa che domina è il blu. Al tramonto il sole si trova in ~~una~~ una posizione tale per cui il cielo sembra rosso. Lo vediamo rosso solo perché ciò che ci arriva sono dei fotoni "balistici", quelli che si propagano in linea retta. ~~Quella~~ la componente blu è stata diffusa e ciò che vediamo è la componente restante, che è rossa. ■

Come caratterizzare la perdita di energia di un oscillatore?

In un sistema lineare il rate di perdita è la potenza, per un oscillatore la cosa non è così. ~~legata~~

Immaginiamo di avere due oscillatori: uno con  $\omega$  molto alta e uno con  $\omega$  molto bassa. Perdono energia con lo stesso rate temporale.



L'errore stava nel fatto di aver considerato  $\omega = \langle \dot{\phi}_s \rangle$  costante.  
 la giusta relazione diventa:

$\omega = \int \langle \dot{\phi}_s \rangle dt$  dove  $\langle \dot{\phi}_s \rangle \propto x_0^2(t)$

Dobbiamo riformulare il nostro sistema, esprimendolo delle grandezze. Mi aspetto di trovare un'espressione che mi permetta di mostrare le rel. fra  $\alpha$  e le caratteristiche dell'oscillatore. Prima lo abbiamo definito in maniera sperimentale.

$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma \dot{x}$  (\*)

L'ultimo termine serve per giustificare il damping, la dissipazione energetica dell'oscillatore.

Il termine in questione non deve dipendere da  $x$ , altrimenti sarebbe un termine elastico e quindi conservativo. Perché sia un termine di perdita deve dipendere da  $\dot{x}$ .

Il termine  $m\gamma \dot{x}$  ricorda l'attrito viscoso, è un meccanismo di perdita totalmente generale, nessuno dice che sia per irraggiamento. Questo termine serve per introdurre un canale di energia, dopo ~~aggiungiamo~~ aggiungiamo anche un termine che tenga conto dell'irraggiamento.

Prima il modello non emetterà canali di energia con l'esterno.

Se prima conservava sempre la sua energia era un sistema isolato che non poteva prendere energia.

Soluzioni di (\*)

$x(t) = x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t} e^{-i\omega_0 t}$

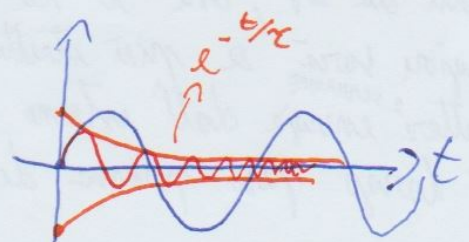
$\omega_0' = \omega_0 \left[ 1 - \left( \frac{\gamma}{2\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}$

L'oscillatore non oscilla più a  $\omega_0$  ma ha uno shift di frequenza. Prende il nome di Lamb-shift.

Scriviamo  $x(t)$  come:

$x(t) = x_0(t) e^{-i\omega_0 t}$

la costante di tempo con cui si attenua verifica l'attenuazione  $\tau = 2/\gamma$ .





Ricapitolando quanto fatto fino ad ora: abbiamo aggiunto un termine nell'equazione del moto legato al fatto che sia presente perdita di energia. Questo non basta, per migliorare la descrizione del nostro sistema bisogna aggiungere un termine legato al fatto che l'oscillatore irraggia energia.

La forza complessiva che agisce sull'oscillatore  $\vec{x}$ :

$$m\ddot{x} = \underbrace{-m\omega_0^2 x}_1 + \underbrace{-m\gamma\dot{x}}_2 + \underbrace{f_0}_3 + \underbrace{\epsilon E_0 e^{-i\omega t}}_4$$

Analizziamo i vari termini:

- 1 → forza di richiamo elastico;
- 2 → componente di dissipazione;
- 3 → irraggiamento;
- 4 → forzante esterna.

Notiamo come abbiamo introdotto il termine  $f_0$ , una sorta di forza equivalente, detta resistenza di radiazione, il cui lavoro corrisponde all'energia persa a causa dell'irradiazione.

Notiamo che, mentre il campo elettrico può oscillare a qualsiasi frequenza  $\omega$ , l'oscillatore si può pensare ad oscillare ad una frequenza intorno a  $\omega_0$ .

Ricordo che se non fossero presenti i termini dissipativi non potremmo eccitare il sistema ad una frequenza  $\omega$  e vedere il sistema oscillare a tale frequenza, esso oscillerebbe solo a  $\omega_0$ .

Stabilisciamo ora  $\epsilon$  e  $f_0$ . Considerazioni analoghe al termine dissipativo non può dipendere dalla posizione altrimenti sarebbe un termine conservativo non può dipendere dalla accelerazione (di nuovo conservativo), potrebbe dipendere dalla velocità.

$f_0$  deve compiere lavoro. Sappiamo che (formula di Larmor) l'energia irraggiata da un osc. dipende da  $\ddot{x}$ .



$\Gamma$  è legata alle perdite, ci dice i possibili meccanismi di perdite del nostro oscillatore.

Notiamo come  $\Gamma$  è moltiplicato per  $i$ , l'ampiezza  $x_0$  è un numero complesso: allora ci serve la parte reale!

Facendo questa si scopre che l'oscillatore non è più in fase con l'eccitazione ma c'è uno sfasamento dovuto al fatto che  $x_0$  è un termine complesso.

NOTA: capire la differenza fra errore in fase (differenza di fase nulla), errore in antifase (diff. di fase =  $\pi$ ) e coerenza (avere uno sfasamento costante nel tempo).

Oscillatore e campo sono ricorrenza coerenti ma non necessariamente in fase.

Queste note saranno utili nel momento in cui considereremo le sezioni d'urto, servirà sempre prendere il valore medio su almeno un periodo.

Occupiamoci del bilancio energetico:

$$\langle \Phi_s \rangle = \frac{U_0}{42\pi e} \cdot \dot{P}_0^2 \quad P_0 = e x_0$$

$$\langle \Phi_s \rangle = \frac{1}{42\pi \epsilon_0 c^3} \frac{e^2 E_0^2}{m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

Ritornare  $\omega^4$ , che caratterizza tutti i processi diffusivi.

Per reintrodurre il concetto di sez. d'urto: dividendo questa potenza ( $\langle \Phi_s \rangle$ ) per una potenza per unità di area (potenza su area dell'onda EM):

$$\langle W \rangle = \frac{\epsilon_0 e E_0^2}{2}$$

Consideriamo la stessa onda piana e mediamo il vettore di Poynting.

Definiamo lo  $\sigma$  di diffusione:

$$\sigma_D = \frac{\langle \Phi_s \rangle}{\langle W \rangle} = \frac{8}{3} \pi P_0^2 \left[ \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \right]$$

SEZIONE D'URTO DI DIFFUSIONE  
(SEZ. D'URTO DI RAYLEIGH)

$\sigma_D$  indica l'area (area fittizia) che, moltiplicata per  $\langle W \rangle$ , fornisce la potenza di energia che viene irradiata quando eccito l'oscillatore.



Ricordo che il significato e livello fisico di  $\sigma_0$  è  $\sigma_0$  è dato dal rapporto fra energie per unità di tempo emessa per irraggiamenti e densità superficiale di potenza dell'onda esterna con cui si eccita l'oscillatore.

$\sigma_0$  non tiene conto di tutti i processi fra la radiazione e il mio oscillatore. Può essere inteso come probabilità per unità di area che questo processo venga riverberato come diffusivo.

Con un approccio simile a quello usato per trovare  $f_n$ , analizziamo e ~~troviamo le forze~~ caratterizziamo gli ulteriori processi oltre la diffusione.

Al fine di definire tali "forze" partiamo da un P.D.V. diverso rispetto al problema precedente, mettendoci nel P.D.V. del campo incidente.

Il campo interagisce con una carica, ~~opera~~ opera una forza su di essa e compie un lavoro. Il rapporto fra tale quantità di lavoro compiuto per u.d.t. e la potenza per vds dell'onda mi dà la percentuale di energia che l'onda incidente trasferisce all'oscillatore. Stiamo esplorando il paradigma.

Teniamo conto di tutta l'energia che l'onda può trasferire all'oscillatore, non solo (come prima) l'energia irraggiata dall'oscillatore.

L'energia spesa dal campo EM incidente è la seguente:

$$W = \int_t^{t+\Delta t} \vec{E} \cdot \dot{\vec{x}} dt$$

→ integriamo su almeno un periodo di oscillazione.

$x(t)$  deriva dall'eq. di moto trovata per l'oscillatore legato:

$$x(t) = \frac{q E_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{q E_0 (-i\omega)}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\Gamma\omega}$$

→ Notiamo come, a causa di una parte complessa (la  $i$  che moltiplica il termine di perdita) l'oscillatore potrebbe non essere in fase con la rad. incidente.



Per esprimere la percentuale di energia, normalizzata su un'area unitaria

Normalizzando  $\sigma_T$  su un'area unitaria è possibile scoprire la percentuale di energia che il mio oscillatore assorbe quando interagisce con un campo EM.

Perché  $\sigma_{TOT} \neq \sigma_D$ ? Perché nella sez. di orto di Rayleigh mi limito all'energia assorbita dall'onda EM durante un processo diffusivo.

In  $\sigma_{TOT}$  invece è stata descritta la perdita totale di energia, sottratta dall'oscillatore e spese del campo EM. L'energia totale è diversa dall'energia diffusa dall'oscillatore, questo perché, oltre che essere diffusa, l'energia può essere assorbita dall'oscillatore. Conoscendo  $\sigma_{TOT}$  e  $\sigma_D$ :

$$\sigma_{TOT} = \sigma_D + \sigma_{ASS} \Rightarrow \sigma_{ASS} = \sigma_{TOT} - \sigma_D$$

$$\sigma_{ASS} = 6\pi e^2 z \frac{\gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$\sigma_{ASS}$  ~~domina~~  $\sigma_{ASS}$  governa i meccanismi per cui la radiazione viene dissipata non sotto forma di radiazione. Notiamo come se  $\gamma \rightarrow 0$  (il fattore di damping pari 0) non potrei far perdere in alcun modo energia al mio oscillatore senza invocare la diffusione.

Notiamo come i vari processi sono caratterizzati da:

- ASSORBIMENTO  $\propto \gamma$
- TOTALE  $\propto \Gamma$  (ASS + DIFF.)
- DIFFUSIONE  $\propto \omega^2$  [tipico dei processi diffusivi fuori della risonanza]

Da qui capiamo che:

- $\gamma$  è legato a un canale dissipativo qualunque ma non radiativo.
- $\Gamma$  comprende il canale  $\gamma$  più il canale radiativo.

Per il momento ci basta capire che tramite  $\gamma$  l'energia entra e non esce più, non ci interessa in che modo.

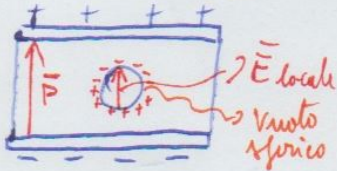


Tutto questo perché abbiamo ragionato in termini macroscopici. Andiamo a considerare ciò che accade ad un singolo oscillatore per capire meglio alcuni aspetti di tale fenomeno.

Date tali premesse, facciamo ricorso alla teoria del campo locale, ossia il campo che vede su un oscillatore singolo.

Immaginiamo di avere un dielettrico omogeneo con una certa polarizzazione indotta. Al fine di calcolare il campo elettrico di ogni vanto da un singolo dipolo, si immagina di sostituire l'oscillatore (ossia lo spazio che occupa) con una sfera vuota.

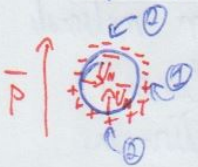
Il campo elettrico visto da tale sfera sarà quello che determinerà l'elongazione del mio dipolo.



Esempio in figura: dielettrico in un condensatore.

Il problema consiste nel considerare il campo creato da una distribuzione di carica non omogeneamente distribuita. Questo perché

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$



In ① trovo  $|\sigma_p|_{\min}$  e in ②  $|\sigma_p|_{\max}$ .



Facciamo una superficie  $dS$  della calotta con la sua normale orientata con un angolo qualunque rispetto alla verticale e consideriamo il campo elettrico  $d\vec{E}$  associato a  $dS$ . Considerando tutta la calotta ci rendiamo conto che il campo elettrico complessivo avrà (principio di sovrapp.) solo la componente verticale che sopravvive.

Dopo alcuni passaggi, svolgendo l'integrale sull'angolo giro, ci si rende conto che solo la componente verticale sopravvive, si trova che:

$$\vec{E}_{\text{locale}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = \vec{E}^*$$

[il fattore  $\frac{1}{3}$  deriva dall'integrale sul volume sferico]



Dalle equazioni di Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{D} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0$$

$$v^2 = \frac{c^2}{\epsilon_r}$$

$\epsilon_r$  ha un impatto sulla velocità di propagazione dell'onda  $\vec{D}$ .  
 Se nel vuoto questa oscillazione è ~~autosufficiente~~ autosufficiente, nella materia la descrizione si complica: i campi oscillanti mettono in oscillazione la materia che sostiene o accompagna la propagazione.

Nel modello di oscillatore individuato in precedenza abbiamo visto che essi sono costituiti da:

- $k$  della molla (costante elastica) che dipende da  $\omega$ ;
- $\gamma$  e  $\delta$  per le perdite.

Allora anche  $\alpha$ , e di conseguenza  $\epsilon_r$ , dipenderanno da  $\omega$ .

$$\alpha \rightarrow \alpha(\omega) \quad \epsilon_r \rightarrow \epsilon_r(\omega)$$

Parleremo sulla polarizzabilità. Si può indurre un momento di dipolo in un solido in due modi:

- operando sugli elettroni;
- operando sui nuclei;

Dico allora che  $\alpha$  è legata a:

- deformazione degli orbitali atomici (pol. atomica);
- deformazione legate allo spostamento degli ioni e dei nuclei (pol. per spostamento).

In base a tali premesse scriviamo  $\alpha$  come somma di due contributi:

$$\alpha = \alpha^{\text{ATOM}} + \alpha^{\text{SPOSTAMENTO}}$$

Andiamo a vedere le differenze fra i due casi.



Il modello più semplice è quello di considerare due oggetti in moto relativo uno rispetto all'altro.



$$\begin{cases} M_+ \ddot{u}_+ = -k(\bar{u}^+ - \bar{u}^-) + eE^* \\ M_- \ddot{u}_- = -k(\bar{u}^- - \bar{u}^+) - eE^* \end{cases}$$

Le eq. in parentesi rappresentano gli spostamenti relativi di  $M_+$  ed  $M_-$  rispetto al centro di massa.

Per descrivere lo spostamento relativo:

$$\bar{W} = \bar{u}_+ - \bar{u}_-$$

Definiamo la massa risolta  $M$ :

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{M^+} + \frac{1}{M^-}$$

Sottraendo la ~~prima~~ <sup>seconda</sup> eq. dalla prima:

$$\ddot{W} = \frac{e}{M} E^* - \frac{k}{M} W \rightarrow \text{Stessa eq. della pol. atomica, soluzioni analoghe.}$$

$$W(t) = \frac{e E_0^*}{M} \frac{e^{-i\omega t}}{(\bar{\omega}^2 - \omega^2)}$$

$$\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

$$\alpha_{sp} = \frac{ze^2}{\epsilon_0 M (\bar{\omega}^2 - \omega^2)}$$

L'espressione della pol. per spostamento è identica ad  $\alpha_{at}$ , cambia il termine della freq. propria ( $\omega_0 \rightarrow \bar{\omega}$ ).

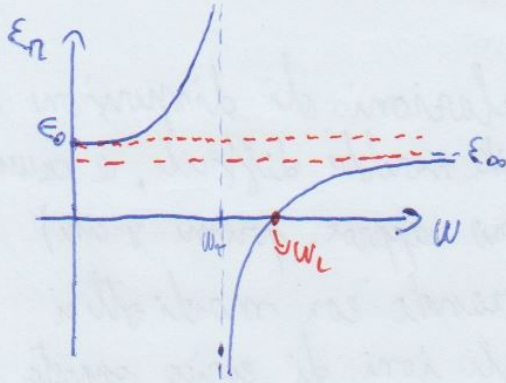
Se per  $\alpha_{at}$  si aveva  $\hbar\omega_0 \approx (1 \div 10) \text{ eV}$ , ora, essendo la massa del protone  $10^3 - 10^4$  volte quella dell'elettrone,  $\hbar\bar{\omega} \approx (10^{-2} \div 10^{-3}) \text{ eV}$

### IN SINTESI

Il dielettrico ha due modi per polarizzarsi:

- deformando la sua nube elettronica ( $\alpha_{at}$ )
- spostando le due basi atomiche una rispetto all'altra ( $\alpha_{sp}$ )





Dalla funzione  $\epsilon_r(\omega)$  si nota come essa di varia per  $\omega \rightarrow \omega_t$ .  
 Inoltre  $\epsilon_r(\omega_c) = 0$ , dove  $\omega_c^2 = \omega_t^2 \frac{\epsilon_0}{\epsilon_\infty}$   
 $\omega_t$  e  $\omega_c$  sono legate alle  $f$  di oscillazione proprie del reticolo.

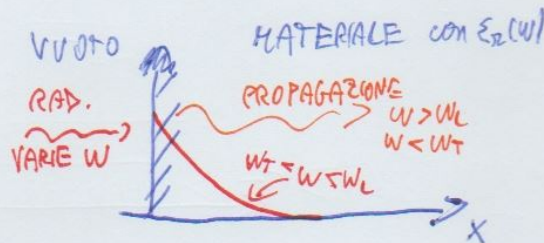
Notiamo anche come  $\epsilon_r(\omega) < 0$  per  $\omega_t < \omega < \omega_c$ .

Per  $\epsilon_r < 0$  l'indice di rifrazione  $n = \sqrt{\epsilon_r}$  sarà complesso. Il fatto che quest'ultimo sia complesso vuol dire che a livello di propagazione l'onda si riverbera come un'attenuazione.

Capiremo che se  $\omega_t < \omega < \omega_c$  le frequenze non si propagano ma si attenuano. In tale range di frequenza il reticolo è assorbente. Nelle altre regioni in base al valore di  $\epsilon_r$  decrota la velocità di propagazione dell'onda.

Il reticolo, eccitato da una vibrazione, può oscillare trasversalmente o longitudinalmente.

Esempio



Ricorda che:

$$\epsilon_r(\omega) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \Rightarrow n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r(\omega)} = \frac{ck}{\omega} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{\omega}{k} = v$$

Come l'onda e le sue componenti a freq. diverse si propagano nel mezzo.

(Condizioni affinché un campo trasverso di frequenza  $\omega$  e vettore d'onda  $k$  si propaghi).

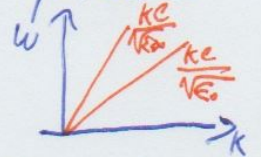


Proviamo a derivare le relazioni fra  $\omega$  e  $k$ , conoscendo  $\epsilon(\omega)$  e sfruttando la relazione

$$\epsilon(\omega) = \frac{k^2 c^2}{\omega^2}$$

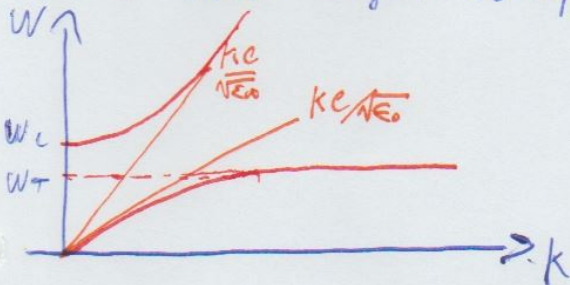
la velocità di gruppo  $\dot{\omega} = \frac{\partial \omega(k)}{\partial k}$  e poiché  $v = \frac{c}{n(\omega)}$  identifichiamo due pendenze limite.

- Notiamo che per  $0 < \omega < \omega_T$   $\epsilon$  assume un minimo quando  $\omega$  pari a  $\omega_0$ . In tale regione la pendenza massima sarà  $\frac{kc}{\sqrt{\epsilon_0}}$ .
- Per  $\omega > \omega_T$   $\epsilon$  ha un massimo  $\epsilon_{\infty}$ , quindi la pendenza minima sarà  $\frac{kc}{\sqrt{\epsilon_{\infty}}}$ .



Altre considerazioni:

- Per  $\omega \gg \omega_T$ ,  $\epsilon(\omega) \approx \epsilon_{\infty}$ , quindi mi avvicino asintoticamente a  $\frac{kc}{\sqrt{\epsilon_{\infty}}}$
- Per  $\omega \rightarrow 0$  mi avvicino a  $\frac{kc}{\sqrt{\epsilon_0}}$
- Non esistono valori di  $\omega_0 < \omega < \omega_{\infty}$  non mi aspetto valori di  $\omega$  nella regione compresa fra queste rette.



In figura è presente la relazione di dispersione nel mezzo.

Il ramo in basso descrive un modo ottico trasverso accompagnato da un campo elettrico, quello in alto (quando  $\omega$  è costante), quello in alto un modo trasverso per  $k \rightarrow 0$ .

Notiamo come non siano presenti valori di  $\omega_0 < \omega < \omega_T$  in quanto in tale regione  $\epsilon$  è negativo e  $k$  immaginario, quindi nessun modo si propagherà.

Notiamo come, nel ramo più basso, per  $k \rightarrow \infty$  mi trovo in una zona senza dispersione, sempre la stessa frequenza indipendente dal  $k$ : l'oscillazione temporale è sreganciata da quella spaziale.

Stiamo trasformando la radiazione EM in un fonone, ossia una vibrazione collettiva del nostro reticolo.



## PROPAGAZIONE DI ONDE E.M. NEI METALLI

Eq di Maxwell in forma differenziale:

$$\begin{cases} \text{I)} \quad \nabla \cdot \bar{D} = S_{lib} \\ \text{II)} \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \text{III)} \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{IV)} \quad \nabla \times \bar{H} = \bar{J}_{conv.} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{cases}$$

Relazioni costitutive:

$$\bar{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E} = \epsilon \bar{E}$$

$$\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\bar{B}}{\mu}$$

$$\bar{J}_{conv.} = \sigma \bar{E} \quad (\text{legge di Ohm})$$

$$\begin{cases} \text{I)} \quad \nabla \cdot \bar{E} = S_{lib} / \epsilon \\ \text{II)} \quad \nabla \cdot \bar{B} = 0 \\ \text{III)} \quad \nabla \times \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{IV)} \quad \nabla \times \bar{B} = \mu \bar{J}_{conv.} + \epsilon \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \end{cases}$$

Semplifichiamo le equazioni: dall'equazione di continuità della carica:

$$\nabla \cdot \bar{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \cdot \bar{J} = \nabla \cdot (\sigma \bar{E}) = \nabla \cdot \left( \sigma \cdot \frac{\bar{D}}{\epsilon} \right) = \frac{\sigma}{\epsilon} S_{lib}$$

↓

$$\frac{\sigma}{\epsilon} S + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{lib} = S_0 e^{-t/\tau}$$

$\tau$  è una costante, tempo di rilassamento, che vale nei metalli

$$\tau \approx (10^{-18} \div 10^{-20}) \text{ s}$$

la carica  $S_{lib}$  si redistribuisce quasi istantaneamente. Poniamo in prima approssimazione

$$\nabla \cdot \bar{E} \approx 0.$$



Analogamente si trova che  $k = k' + ik''$   
 $k''$  fornisce il termine di smorzamento o damping dell'onda EM.

$$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-k''z} e^{+i(k'z - \omega t)}$$

$$\delta = \frac{1}{k''} \rightarrow \text{skin depth}$$



Casi particolari:

$$- \omega \frac{\epsilon}{\sigma} \ll 1 \Rightarrow n' \approx n'' \approx \frac{1}{\sqrt{2\omega \frac{\epsilon}{\sigma}}} \Rightarrow k'' = \frac{\omega}{c} n'' = \sqrt{\frac{\omega \sigma}{2\epsilon c^2}}$$

Conoscendo  $k''$  ricavo  $\delta$ .

Il campo elettrico all'interfaccia è nullo se  $\omega < \frac{n\epsilon^2}{m} = \omega_p$ .  
 $\omega_p$  (freq. di plasma) è la frequenza propria di oscillazioni degli elettroni. Il campo elettrico viene annullato dal moto frenetico degli elettroni (all'interfaccia) nel momento in cui l'onda colpisce il materiale.

Se all'interfaccia il campo è nullo si deve necessariamente riflettere. Ecco perché i metalli si comportano come specchi.

$$- \omega \frac{\epsilon}{\sigma} \gg 1 \Rightarrow n' \approx \sqrt{\epsilon_r} \quad n'' \approx 0$$

$$\omega > \frac{n\epsilon^2}{m}$$

gli elettroni non riescono a seguire il metallo, non vedono un campo variabile nel tempo ma lo vedono continuo e si crea una situazione tipo dielettrico (il metallo è trasparente).



## CRISTALLI FOTONICI

I cristalli fotonici sono dei materiali modificati ingegneristicamente.

In generale, la radiazione può propagarsi in vari modi in un materiale, e seconda di quanto vicino alle sue frequenze di risonanza.

Nel metallo il grosso della radiazione viene assorbita a causa delle cariche libere, una densità di carica localmente non nulla che assorbe il campo.

Sono presenti 2 meccanismi di interazione radiazione-materia:

- tipo metallico: la radiazione viene trasferita alle cariche libere che si mettono in movimento e non hanno forze di richiamo di nuclei (quasi zero di elettroni di conduzione) nei metalli.
- tipo dielettrico: quando  $\omega < \omega < \omega_c$  è presente assorbimento, a causa di oscillazioni reticolari del materiale dielettrico.

In entrambi i casi l'assorbimento dipende dalla frequenza. Queste considerazioni valgono per i materiali bulk omogenei.

Nell'ambito dei cristalli fotonici facciamo qualcosa di diverso, cambiamo i materiali per avere un comportamento che trascende la materia costituente solo quando è presente interazione con la luce.

### Fisica di base dei cristalli fotonici

I cr. fot. sono costruiti mettendo periodicamente nello spazio materiali dielettrici di indici di rifrazione diversi.

Possono essere costruiti con una periodicità in 1-2 o 3 dimensioni.

Al fine di descrivere la fisica che sta dietro di loro andiamo a sviluppare un formalismo simile a quello sviluppato per affrontare il problema S.M. degli elettroni in un potenziale periodico.



Notiamo la presenza di un gap anche all'interno della relazione di dispersione del fotone nel dielettrico periodico. La luce che non si trova nel gap viene riflessa.

Diversamente dal cristallo periodico, in cui gli elettroni si trovano già dentro il solido e non possono essere "strappati", con una struttura passiva che non genera fotoni possono vedere questi ~~raggi~~ entrano o vengono riflessi.

Parliamo di CRISTALLI FOTONICI 1D.

Essi sono composti da strutture planari, tanti piani idealmente infiniti sovrapposti.



Ad ogni  $n$  piani la costante dielettrica è la stessa. Supponiamo che le costanti dielettriche in tale struttura siano  $\epsilon_1$  ed  $\epsilon_2$ . Se  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$  si apre un gap nella relazione di dispersione.

Non essendo nessun modo accessibile nella regione del gap, tale regione è detta band gap fotonico.

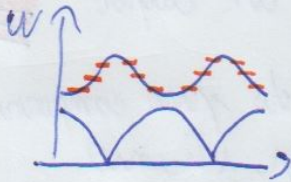
Questo è chiaro dal PDV del teorema di Bloch. Cosa accade fisicamente?

Prendiamo una successione di strati diversi e usando i coefficienti di trasmissione e riflessione (formule di Fresnel), analizzando a vedere cosa succede quando si applica una cascata di interfacce, applicando ricorsivamente i coefficienti scopriremo che, per frequenze nel BANDA GAP, c'è un'interferenza costruttiva che fa sì che tutta la potenza venga riflessa.

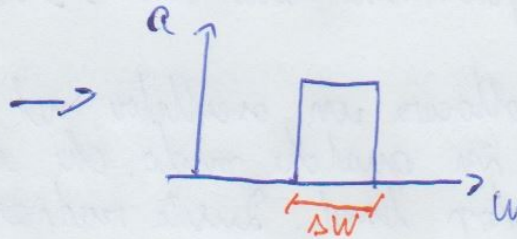
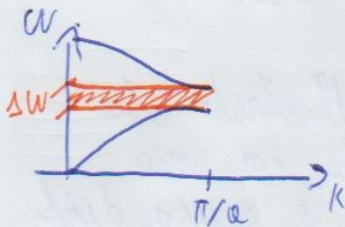
non sicuro → Per una successione idealmente infinita di strati dielettrici diversi ogni onda viene riflessa. Il materiale si comporta come se assorbisse, in realtà non si tratta di assorbimento perché  $\epsilon$  è reale, ossia l'energia non viene incamerata ma rispedita fuori.



Nella regione fuori dal gap i minimi di riflettanza sono i modi possibili (trasmissibili), è un modo sostenuto dal cristallo fotonico. I massimi relativi sono modi (non propri della struttura) in cui la luce in parte si riflette e in parte viene trasmessa.



Quello che succede è (come nel modello di Bloch) a causa del numero finito di strati nel nostro multilayer, i modi diventano discreti anche fuori dal gap, come se fosse presente una serie discreta di stati ~~come~~ emmessi.



→ Numero strati: infinito



→ Numero strati: finito

Per fissare il concetto:

- i minimi <sup>DI RIFLETTANZA</sup> corrispondono ai modi in cui la radiazione passa
- i massimi, che non sono del gap, corrispondono alla zona fra uno stato e l'altro. la radiazione è parzialmente riflessa.

Più il numero di strati aumenta più mi avvicino ad una funzione continua.

Inoltre vale la regola che più varia  $\epsilon_1$  da  $\epsilon_2$  più aumenta il gap. Accade lo stesso nel modello di Bloch, in cui il  $\Delta \epsilon$  è assunto dal  $\Delta V$ .

Parliamo di quello che accade in trasmissione.

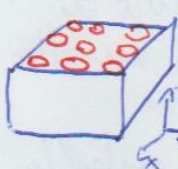


Come rendere più stulto un modo di difetto: si fa in modo che gli specchi siano molto efficienti, ~~ossia~~ aumentando il periodo da entrambe le parti fino a che non esce più niente, ossia la radiazione resta intrappolata: mi trovo davanti ad un oscillatore senza perdite.

Questo cristallo fotonico in qualche modo è un oscillatore il quale ha un campo all'interno che in qualche modo viene riflesso dalla presenza di questi specchi dielettrici e se ha delle perdite deve per passare la radiazione in qualche modo. Poiché  $\epsilon$  è reale la radiazione può solo uscire.

Ragionando in maniera simile all'oscillatore (lavorando), se la rad. esce ho delle perdite e ho un fattore  $\Gamma$  che allarga la risonanza, facendo tendere  $\Gamma$  (e le perdite) a zero, la luce non può più uscire e non emette più, si spegne, semplicemente impedendogli di emettere. Provare altri modi per disaccoppiare, ad esempio per mezzo di canali non radiativi.

## CRISTALLI FOTONICI IN 2D.



Consideriamo una slaba (fetta) di materiale dielettrico ad alto indice su cui sono stati realizzati dei buchi (ad esempio slab di vetro e aria nei buchi).

Cristallo fotonico 2D vuol dire vedere la radiazione che si propaga in 2 direzioni (su un piano) e qualunque sia la sua direzione, ossia il suo  $\vec{k}$ , vedo sempre una modulazione periodica di indice.

Come si fa a far muovere la radiazione lungo un piano?

Stiamo parlando di uno strato molto sottile.

Guardando la luce che si propaga lungo  $z$ , si può far modo che, ponendo un materiale ad alto indice  $n$  a contatto con l'aria, una cospicua parte di radiazione che rimbalza dentro queste slab può essere guidata per riflessione interna totale.

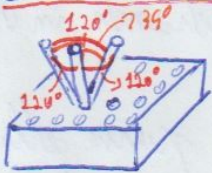
È una guida d'onda planare.

A questo punto posso ~~anche~~ emettere che la luce sia caratterizzata solo da un vettore  $k$  definito nel piano, che vede una modulazione di 23



Il problema delle guide d'onda classiche è che riducendo le dimensioni la frequenza di cutoff aumenta e, se volemmo guidare una certa frequenza, la guida d'onda diventa troppo piccola. Con i cristalli fotonici, non essendo presenti cutoff, si possono costruire guide di dimensioni ~~molto piccole~~ molto piccole.

### CRISTALLI FOTONICI IN 3D



Varie strategie per realizzare modulazioni in 3D di  $n$ . Nella Yablonovite si immagina di proiettare schiere di fasci cilindrici in un materiale omogeneo inclinati di  $39^\circ$  rispetto alla verticale ed equidistanti da un angolo giro di  $120^\circ$ .

Anche in questo caso si possono ottenere strutture a band gap completa, ~~le direzioni sono molte~~ analizzando e considerando tutte le direzioni possibili associate ad una cella.

Principi generali: non funzionano solo con la luce ma anche con le microonde e tutto lo spettro del visibile (secondo le dimensioni della struttura).

Strutture del genere funzionano anche con onde acustiche (cristalli fononici).

Esempi di altri cristalli fotonici 3D: i cosiddetti opali artificiali. Si tratta di strutture costituite da assemblaggi di perline. Possono avere una struttura cubica (FCC).

Si possono creare delle strutture in cui si tolgono gli opali e si fa una sorta di negativo della struttura precedente (opali inversi). Tali strutture si realizzano lavorando in camere pulite.

Un modo per depositare materiali dielettrici è la evd, assistita o no da un plasma. In una camera ad alto vuoto si mettono gas inerti e i precursori del gas che si vuol fare crescere.

Un materiale particolarmente rilevante in tale ambito è il nitruro di silicio amorfo, caratterizzato da diverse quantità di silicio. ~~Essi~~ Essi da (mescolando con un certo materiale) un alto grado di libertà 24



Sfruttando effetti inversi a quelli di superprisma si realizzano fibre dette super-continuum ( laser di luce bianca).

- Tali fibre si realizzano mettendo lastre cilindriche di vetro in una tora di filatura e si fila una fibra che ricalca la stessa distribuzione iniziale.

Confinamento di luce sulle superfici e multi-strati: si può confinare luce dentro il band gap che non è un modo di cavità ma un modo di superficie, legato al fatto che la successione di strati è troncata. Immaginandosi di vedere  $\perp$  la struttura multistrato in sezione trasversale, è presente un modo guidato fortemente asimmetrico la cui massima intensità è sulla superficie esterna (luce che "scivola"). Si usa un prisma per far accoppiare tali modi. Non si può lanciare semplicemente radiazione sul multistrato, servono particolari configurazioni.

Si parla di accoppiamento evanescente: nel cristallo fotonico avviene dal prisma una coda evanescente che, perturbata dal CF, genera un flusso di energia che instaura un modo di superficie (2 conf., Otto o Kretschmann)

- Questi modi di superficie che si possono lanciare sul CF sono sensibili: la perturbazione di questo modo si riflette dall'esterno, cedendo da qualcosa a meno sulla superficie.



## PLASMONI

La plasmonica è un dominio emergente nell'ambito della fisica di materiali.

Un plasmon è un quanto di ~~energia~~ oscillazione longitudinale di elettroni in un gas elettronico.

Possiamo interpretarlo come un quanto di "modo" di oscillazione, dove per "modo", a livello fisico, intendiamo una particolare configurazione (nello spazio e nel tempo) in cui gli elettroni possano oscillare.

In che modo gli elettroni oscillano nel gas di Drude? Come oscillano in accordo con un certo modo? Immaginiamo piccoli volumetti di elettroni che seguono particolari oscillazioni temporali che diventano oscillazioni nello spazio con una particolare relazione fra  $\omega$  e  $k$ .

Noi ci occupiamo solo di plasmoni di superficie, in cui gli elettroni oscillano solo nelle prime frazioni di nanometro di superficie. Ciò fa sì che si crei un campo EM caratterizzato da rel. di dispersione simili agli elettroni.

Da queste considerazioni, abbandonando le visioni <sup>separate</sup> ~~concentrate~~ sui soli elettroni, ci concentriamo sul campo EM generato da questi ultimi. Tale campo EM con le caratteristiche degli elettroni resta confinato sulla superficie (si parla di lato dielettrico del metallo).

Dalle HE si può vedere che esistono soluzioni di tipo propagativo relative a radiazioni EM localizzate ad una interfaccia metallo/dielettrico.

Che forma deve avere il campo EM? Ci si riferisce a tale argomento come SPP, surface plasmons polaritons.

Tipicamente l'energia dei plasmoni di superficie è in un range fra 1 e 10 eV.

Possano essere generati solo in alcuni materiali.



Come si accende un plasmoni? Secondo la teoria EM deve essere un processo reversibile.

Un plasmoni è un modo di superficie, ovvero confinato all'interfaccia metallo-dielettrico.

Se una volta che è stata eccitata ~~la superficie~~ non abbandona la superficie, come fa e essere irreversibile?

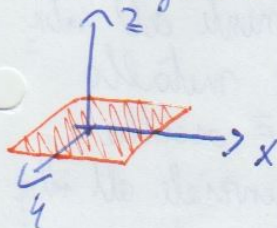
### Problema accoppiamento fra radiazioni libere e plasmoni

Il campo EM associato al SPO possiede una componente costeriana del vettore d'onda che è maggiore del modulo di  $\vec{k}$ , il che vuol dire che penetra nella superficie dove sono evanescenti.

[Almeno una componente immaginaria di  $\vec{k}$ ]

Da questo capiamo che non è possibile tra radiazione libera e plasmoni avere uno scambio di energia. Non è possibile avere un accoppiamento diretto fra plasmoni, campo evanescente, e radiazione libera.

Cosa significa tutto questo: supponiamo che in un S.A. cartesiano l'interfaccia si trovi su  $z=0$ .



Ogni onda che si propaga lungo  $x$  su  $z=0$ , ha una componente  $k_x$  e una  $k_z$ .

L'interfaccia separa il mezzo 1 dal 2.

Nel mezzo inferiore:

$$|k_x| = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{\epsilon_i} \left( \frac{\omega}{c} \right)$$

Se  $|k_x| > |k_i| \Rightarrow k_{z_i} = \sqrt{k_x^2 - k_i^2} = \sqrt{\epsilon_i} \Rightarrow k_{z_i} \in \mathbb{Im}$

Questo vuol dire che, quando si propaga:

$$e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = e^{i(k_x x + k_z z)} = e^{-k_z z} e^{i k_x x} \rightarrow \text{candamento evanescente}$$

Ci chiediamo: quale relazione lega la periodicità spaziale e quella temporale?  $[\omega(k)]$



## PLASMONI

La plasmonica è un dominio emergente nell'ambito della fisica dei materiali.

Un plasmon è un quanto di ~~energia~~ oscillazione longitudinale di elettroni in un gas elettronico.

Possiamo interpretarlo come un quanto di "modo" di oscillazione, dove per "modo", a livello fisico, intendiamo una particolare configurazione (nello spazio e nel tempo) in cui gli elettroni possono oscillare.

In che modo gli elettroni oscillano nel gas di Drude? Come oscillano in accordo con un certo modo? Immaginiamo piccoli volumetti di elettroni che seguono particolari oscillazioni temporali che diventano oscillazioni nello spazio con una particolare relazione fra  $\omega$  e  $k$ .

Noi ci occupiamo solo di plasmoni di superficie, in cui gli elettroni oscillano solo nelle prime frazioni di nanometro di superficie. Ciò fa sì che si crei un campo EM caratterizzato da rel. di dispersione simili agli elettroni.

Da queste considerazioni, abbandonando le visioni ~~concentrate~~ <sup>separate</sup> sui soli elettroni, ci concentreremo sul campo EM generato da questi ultimi. Tale campo EM con le caratteristiche degli elettroni resta confinato sulla superficie (si parla di lato dielettrico del metallo).

Dalle KE si può vedere che esistono soluzioni di tipo propagativo relative a radiazioni EM localizzate ad una interfaccia metallo/dielettrico.

Che forma deve avere il campo EM? Ci si riferisce a tale argomento come SPP, surface plasmons polaritons.

Tipicamente l'energia dei plasmoni di superficie è in un range fra 1 e 10 eV.

Possano essere generati solo in alcuni materiali.



All'interfaccia valgono inoltre le relazioni di continuità:

$$\left. \begin{aligned} E_{x1} &= E_{x2} \\ H_{y1} &= H_{y2} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Continuità componenti tangenziali all'interfaccia}$$

$$k_{x1} = k_{x2} \left. \right\} \rightarrow \text{continuità fase (legge di Snell)}$$

$$\epsilon_{z1} E_{z1} = \epsilon_{z2} E_{z2}$$

Eseguendo le derivate e sostituendo le relazioni di continuità nelle ME: [ricordo che la dip. dei  $\vec{r}$  e  $t$  è data da  $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} e^{-i\omega t}$ ]

nei mezzi 1 e 2

$$z > 0 \quad \vec{H}_2 = (0, H_{y2}, 0) e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)}$$

$$\vec{E}_2 = (E_{x2}, E_{y2}, E_{z2}) e^{i(k_{x2}x + k_{z2}z - \omega t)}$$

$$z < 0 \quad \vec{H}_1 = (0, H_{y1}, 0) e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)}$$

$$\vec{E}_1 = (E_{x1}, E_{y1}, E_{z1}) e^{i(k_{x1}x + k_{z1}z - \omega t)}$$

Si trova che

$$H_{y1} - H_{y2} = 0$$

$$\frac{k_{z1} H_{y1}}{\epsilon_1} + \frac{k_{z2} H_{y2}}{\epsilon_2} = 0$$

L'ultima equazione ha soluzioni se e solo se il determinante della matrice corrispondente è nullo:

$$D_0 = \frac{k_{z1}}{\epsilon_1} + \frac{k_{z2}}{\epsilon_2} = 0 \rightarrow \text{Relazione di dispersione SPP}$$

La relazione di dispersione si può esprimere come:

$$k_x = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right)^{1/2}$$

Se si assume che l'interfaccia sia verso l'aria ( $\epsilon_2 = 1$ ):

$$k_x = \frac{\omega}{c} \left( \frac{\epsilon_1}{1 + \epsilon_1} \right)^{1/2}$$

Affinché sia un modo di superficie ( $|k_{x1}| > |k_{x1}|$ ), allora:



Capiremo che i plasmoni non potranno andare ~~dall~~ lontano dall'interfaccia, essendo evanescenti lungo  $z$ , e ~~longo~~  $x$  sull'interfaccia, essendo evanescenti lungo  $x$ .

Nella direzione di propagazione, prima di essere assorbito, il plasmon percorre la distanza (lunghezza di propagazione):

$$L_i = \frac{1}{2k_x''} \rightarrow \text{Il termine } 1/2 \text{ dato dal fatto che non conta il campo ma l'energia } (P \propto e^{-2\alpha L} \text{ by EM APP})$$

Alcuni numeri:

-  $\hat{z}$  vale qualche centinaio di nm alle  $f$ . ottiche.

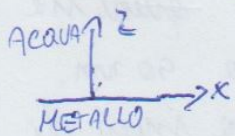
- Per  $\lambda = 514 \text{ nm}$ , nell'argento  $L \approx 22 \mu\text{m}$ .

### Accoppiamento di SPP da fotoni

Come eccitare un plasmon: essendo questi ultimi fatti da una duplice natura (si possono interpretare come oscillazioni elettroniche o propagazioni di radiazioni) possiamo pensarli di eccitarli in maniera altrettanto duplice (eccitazione elettronica o EM).

Noi affronteremo il problema dal P.V. ottico, eccitando un plasmon con una radiazione.

Qui incontriamo il primo problema. Le relazioni di dispersione dei plasmoni giace sempre a ~~sinistra~~ destra delle linee di luce, quelle dei ~~fotoni~~ fotoni (supponendo di incidere con un laser dall'acqua su un metallo) si trovano a sinistra.

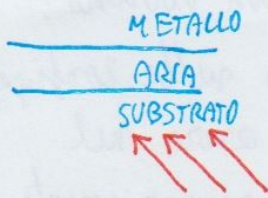


Il massimo valore che  $k_x$  può assumere è  $k_x = |k|$  per i fotoni che incidono, i plasmoni però hanno  $|k_x| > |k|$ .

Non avrò mai allora una radiazione incidente con un  $k_x$  tale da combaciare con i plasmoni (tale da avere un matching del momento).

È chiaro che eccitando i plasmoni con una radiazione con una certa energia (stessa freq. temporale) i plasmoni che si vanno eccitare





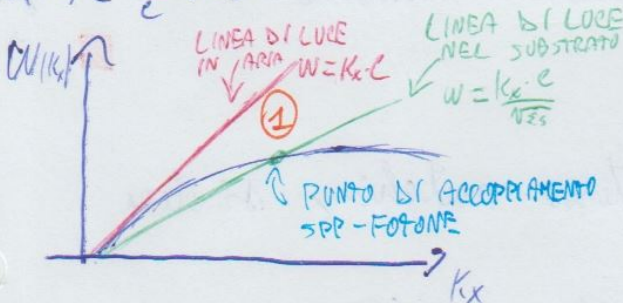
Una variante è quella riportata in figura. Qui l'accoppiamento è sempre una sorta di effetto tunnel attraverso l'aria. Incidiamo con un  $k_x > |k_{\text{aria}}$ , ossia illuminiamo il substrato con un angolo maggiore di quello critico ( $\theta_c$ ).

Li troviamo quindi in una configurazione di riflessione interna totale, dunque il campo dopo il substrato è una coda evanescente.

Se il metallo dista circa 100 nm dal substrato riesce ad intercettare le code evanescenti generate dall'interfaccia substrato-aria, generando un effetto tunnel risonante: la radiazione trova un modo plasmonico pronto a ricevere energia e si ha un trasferimento risonante.

Ricordando che in conf. ATR (Attenuated total internal-reflection): la luce incide sul metallo

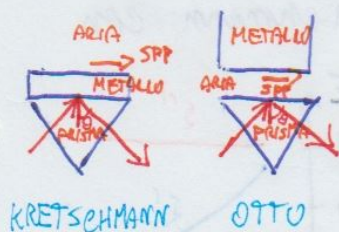
$$\max(k_x) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_s}$$



Capiamo a livello grafico come sia possibile generare un accoppiamento SPP-fotone arrivando con un  $k_x > |k_{\text{aria}}$ : variando la pendenza della linea di luce posso accoppiare i plasmoni che la cui relazione di disp. interseca la retta.

Semplicemente modulando l'angolo di incidenza si possono accoppiare tutti i plasmoni contenuti nell'area ① fra le due linee di luce

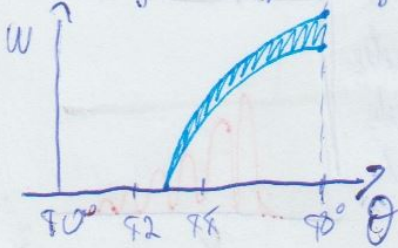
### NOMENCLATURA



L'accoppiamento secondo ATR si realizza in due configurazioni diverse, che fanno uso di prismi accoppiatori.



Immaginiamo che, fissato un certo  $\lambda$ , si faccia variare  $\theta$  e si misuri il valore dell'intensità riflessa. Si faccia questa operazione e si riporti su una matrice 2D il valore di intensità riflessa per ogni  $\omega$  e  $\theta$ .



Dal grafico in figura nei punti bianchi si vedono le zone in cui la luce è riflessa nei punti scuri la luce ~~non~~ <sup>non</sup> è riflessa, ma fino ad arrivare ad un insieme di punti in cui la luce riflessa è zero.

Riconosciamo le relazioni di dispersione plasmoniche dove al posto di  $k_x$  è presente  $\theta$  (che è comunque collegato a quest'ultimo).

Misurando la riflettività <sup>usando</sup> in funzione di un singolo  $\lambda$  si trova la figura al lato.



Notiamo come tale figura sia una Lorentziana rovesciata, ci ricorda gli oscillatori.

$$R = 1 - \frac{4P_i P_{rad}}{[k_x - (k_x^0 + \Delta k_x)]^2 + (P_i + P_{rad})^2}$$

Ricordandoci i parametri di una risonanza ritroviamo e numeratore la larghezza della risonanza, e denominatore le perdite e la posizione del picco.

Un plasmon è caratterizzato da una risonanza Lorentziana piccata a un certo  $k_x^0$  più una tolleranza  $\Delta k_x$  che riflette il fatto che variando la frequenza con cui incido questo picco si sposta.

I termini di perdite sono dovuti a due contributi separati:

- $P_i$  dovuto al fatto che il materiale plasmonico abbia perdite per assorbimento ( $\epsilon''$  del metallo).
- $P_{rad}$  (leakage) dovuto ad un effetto di reciprocità: se posso trasferire energia ai  $\dots$  partendo dai fotoni nel substrato, nel momento in cui i plasmoni si propagano possono convertirsi in fotoni nel substrato che escono.



Per quanto riguarda la polarizzazione, il plasmono vola un campo  $\vec{E}$  che fosse non parallelo all'interfaccia metallo aria.

Affinché si generi accoppiamento plasmone il campo  $\vec{E}$  deve oscillare sul piano del cilindro.

Se con la stessa struttura non facciamo accoppiare onde EM e plasmoni si ottiene un'onda riflessa con fronti d'onda sferici e senza effetto plasmone.

Una possibile applicazione dei plasmoni è l'imaging biologico, dove i plasmoni vengono sparsi nelle cellule e amplificano l'emissione fluorescente. È un processo non controllato.

La forma delle nanoparticelle determina la posizione spettrale del proprio modo fondamentale determinando ~~la forma~~ il colore della luce scaturita.

Tali oggetti si comportano come dei singoli oscillatori. Cambia che possiamo variare le caratteristiche di diffusione scegliendoci dall' $\omega^{\text{pl}}$  passando attraverso un'oscillazione di plasmoni posso ottenere picchi di diffusione a diverse  $\lambda$ .

Sono oscillatori alla Rayleigh un po' più complessi che posso vedere come nuclei di elettroni.

$$\frac{R_0}{\lambda} = \vec{E} \cdot \vec{D}$$

$$\frac{363}{36} = \vec{E} \cdot \vec{D}$$

$$0 = 33 \cdot \vec{D}$$

$$0 = 34 \cdot \vec{D}$$



Applichiamo  $\nabla \times$  alla prima:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

Si trova l'eq di D'Alembert:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad n = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)^{1/2} \rightarrow \text{indice di rifrazione}$$

Si arriva alla stessa eq. per  $\vec{H}$ .

Cambiamo notazione: indichiamo con  $u(P,t)$  [invece di  $\psi$ ] una generica componente cartesiana di  $\vec{H}$  o  $\vec{E}$ :

$$\nabla^2 u(P,t) - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 u(P,t)}{\partial t^2} = 0$$

Tale eq. ammette soluzioni:

$$u(P,t) = A(P) \cos[2\pi \nu t + \phi(P)] = \operatorname{Re} \left\{ U(P) e^{-i 2\pi \nu t} \right\}$$

$$U(P) = A(P) e^{-i \phi(P)}$$

$U(P)$  si chiama fase di  $u(P,t)$  ed  $\bar{\nu}$  un numero complesso.

Si arriva all'equazione di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2) U = 0 \quad k = 2\pi \nu \frac{n}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \text{numero d'onda}$$

Come visto in precedenza, la formula di RS è soluzione di tale eq. Supponendo di ragionare in termini di ~~campi~~ <sup>CAMPI</sup> che si propagano su distanze maggiori di  $\lambda$ : possiamo considerare solo la componente di FAR FIELD.

$$U(P_0) = \frac{1}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_s) \frac{e^{i k R_{0s}}}{R_{0s}} \cos \theta ds$$

Tale formula fornisce info sulla distribuzione del campo su un ~~dato~~ piano (empirezza e fase).

La formula di RS può essere scritta come <sup>una</sup> convoluzione:

$$U(P_0) = \iint h(P_0, P_s) U(P_s) ds \quad h(P_0, P_s) = \frac{1}{i\lambda} \frac{e^{i k R_{0s}}}{R_{0s}} \cos \theta$$



Un sistema di imaging lineare è detto invariante se

$$h(x_2, y_2; \xi, \eta) = h(x_2 - \xi, y_2 - \eta)$$

SISTEMA LSI  
linear space invariant

In tale caso

$$g_2(x_2, y_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} g_1(\xi, \eta) h(x_2 - \xi, y_2 - \eta) d\xi d\eta$$

Ma è un integrale di convoluzione!

$$g_2(x_2, y_2) = g_1 \otimes h$$

Sono importanti perché, facendo la FT:

$$G_2(f_x, f_y) = H(f_x, f_y) G_1(f_x, f_y)$$



La funzione  $h(P_0, P_1) = \frac{1}{\lambda} \frac{e^{jK P_{01}}}{P_{01}}$  è detta funzione di risposta all'impulso.

Usando l'approssimazione di Fresnel è possibile mostrare come

$$U(P_0) = \iint_{\Sigma} h(P_0, P_1) U(P_1) dS \approx \iint_{-\infty}^{+\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

dove il kernel di convoluzione è

$$h(x, y) = \frac{e^{jKz}}{\lambda z} e^{j\frac{K}{2z}(x^2 + y^2)}$$

Riconosciamo in  $U(P_0)$  un integrale di convoluzione.

Facciamo la <sup>DECOMPOSIZIONE DI FOURIER</sup> di  $U$  sul piano  $z=0$ :

$$U(x, y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(f_x, f_y, 0) e^{j2\pi(f_x x + f_y y)} df_x df_y$$

$A$  è la FT di  $U(x, y, 0)$  e viene detta spettro angolare del campo EM.

Vogliamo convertire l'espressione di  $A$  e quest'ulteriore espressione di  $U(x, y, 0)$ .

NOTA:

$$A(f_x, f_y, 0) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, 0) e^{-j2\pi(f_x x + f_y y)} dx dy$$





Nuovo problema: considerare lo spettro angolare di  $U$  su un piano parallelo a  $x, y$  ma ad una distanza  $z$  da quest'ultimo:

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} U(x, y, z) e^{-j2\pi\left[\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right]} dx dy$$

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) \cdot e^{j2\pi\left[\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right]} d\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) d\left(\frac{\beta}{\lambda}\right)$$

Sappiamo che  $U$  deve soddisfare l'eq. di Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0$$

Scrivendo  $U$  come IFT si trova che una soluzione è data da

$$A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) e^{j\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} \cdot z)} = A\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; 0\right) e^{jk_z z}$$

Il termine che mi dà la propagazione lungo  $z$ , ora che non possiamo trascurarlo non essendo su  $z=0$ , è necessario in  $A$ .

Se modulo di  $A$  non varia lungo  $z$ , la propagazione altera la sua fase.

Capiamo che:

- Avendo il campo sul piano di partenza,  $U(x, y, 0)$ , calcolando la FT trovo  $A(k_x, k_y, 0)$ .

- Per trovare lo spettro angolare in  $z \neq 0$  propago lo spettro angolare che avevo in  $z=0$ .

$$A(k_x, k_y; z) = A(k_x, k_y; 0) e^{jk_z z}$$

- Per trovare  $U(x, y, z)$  applico la IFT ad  $A$  sul non piano  $x, y$  distante  $z$  dal piano  $z=0$ .

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(k_x, k_y; z) e^{j2\pi[k_x x + k_y y]} dk_x dk_y$$



Capiremo come sia possibile vedere la luce diffusa come somma <sup>INFINITA</sup> di onde piane, ognuna con una <sup>certa</sup> direzione di propagazione e una certa ampiezza.

$\Psi(k_x)$  è quello che avremmo chiamato spettro angolare, che fornisce il peso che ogni frequenza dà al campo risultante.

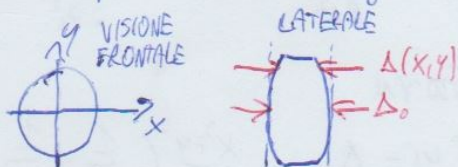
### Imaging in wave-optics formalism

Andiamo ora a parlare delle formazioni di immagini.

Iniziamo dando una descrizione della lente in termini di interazione con il campo: quando quest'ultimo va ad incidere su di essa non varia l'ampiezza ma la fase dell'onda che la lente non modifica l'ampiezza del campo ma la sua fase, quindi la descriveremo in funzione di quest'ultima.

Questa funzione di fase, moltiplicata opportunamente con il campo incidente, mi dà l'espressione del campo dopo aver interagito con la lente.

$$\Phi(x, y) = k_n \Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$$



Stiamo descrivendo la lente come fatta da (in una visione laterale) una prima interfaccia curva, poi una seconda esterna con concavità opposta.

Ricordo che la fase di un'onda EM dopo che incide su una lente di spessore  $d$  e indice  $n$  è  $\Phi = knd$ . Qui la fase non è omogeneamente distribuita su  $x, y$ .

$$\Phi(x, y) = \overbrace{k_n \Delta(x, y)}^1 + \overbrace{k \Delta_0}^2 - \overbrace{k \Delta(x, y)}^3$$

- Il termine 1 è l'effetto della prima interfaccia curva.
- 2 è dovuto al ritardo di fase nella zona centrale, identico per tutti i punti.
- 3 ha un meno per rendere conto dell'inversione di concavità.

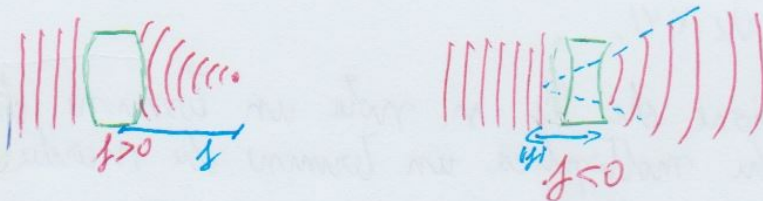
Definiamo una funzione di trasmissione che siamo da f.d.t. della lente.

$$t_e(x, y) = e^{i k \Delta_0} e^{-i k(n-1)\Delta(x, y)}$$



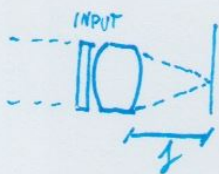
Troviamo un'onda con un profilo di fase parabolico, subito dopo aver interagito con la lente.

L'onda andrà a convergere nel fuoco della lente, ecco perché focalizza.



Stiamo trasformando un fronte d'onda piano in uno curvo facendo ritardare la fase in maniera diversa.

In base alle caratteristiche fisiche della lente  $f$  può essere  $> 0$  o  $< 0$ . Nel primo caso si ha una lente convergente, altrimenti la lente è divergente.



Piazzeremo di fronte ad una lente convergente di fuoco  $f$  un oggetto planare con impedenza di trasmissione  $t_a(x, y)$ .

Facciamo incidere un'onda piana contro tale oggetto, con cui il campo che arriva sulla lente ha la forma:

$$U_e(x, y) = A t_a(x, y) \quad [A \text{ ampiezza onda piana}]$$

NOTA: stiamo prendendo solo di impedenza e non di fase perché ci stiamo ponendo in  $z=0$ .

Teniamo in conto la finita estensione della lente usando le funzioni pupillari  $P(x, y)$  così definite:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro l'apertura della lente.} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

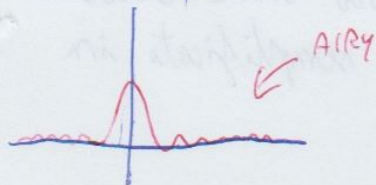
Per trovare il campo  $U_e$  dopo la lente facciamo una cascata di FFT:

$$U_e(x, y) = U_e(x, y) P(x, y) e^{-\frac{j k}{2f} (x^2 + y^2)}$$

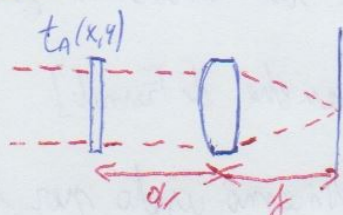
Per trovare la distribuzione sul piano focale propaghiamo il campo di una distanza  $f$ .



Essendo  $P(x,y)$  un foro circolare, la sua FT è la funzione sinc che elevata al quadrato, ~~forma~~ <sup>diventa</sup> la funzione di Airy.



Consideriamo un nuovo caso, più complicato del precedente ma l'approccio resta lo stesso.



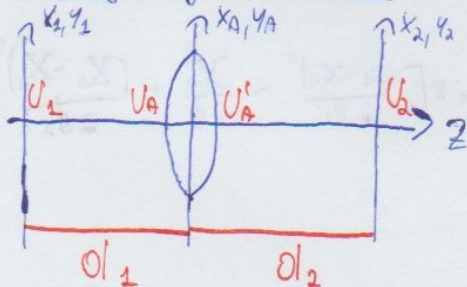
Un oggetto è posto ad una distanza  $d=f$  dalla lente. Nei tratti liberi si usano le classiche tecniche di propagazione. Non svolgiamo i calcoli esplicitamente ma, mostrando direttamente il risultato:

$$U_f(u,v) = \frac{e^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d}{f})(u^2+v^2)}}{i\lambda f} \mathcal{F}\{A(x,y)\}$$

In tale caso, se  $d=f$  il campo sul piano focale è esattamente uguale alla trasformata <sup>di FT</sup> dell'oggetto.

Diversamente, nel caso di oggetto attaccato alla lente avremo visto che solo l'intimità era legata al  $1/f^2$  della FT.

### Image formation

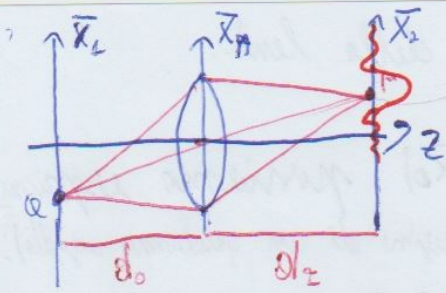


Allichiamo un oggetto definito sul piano  $x_1, y_1$  posto a distanza  $d_1$  dalla lente. Voglio vedere il campo su  $x_2, y_2$  posto a distanza  $d_2$  dalla lente.

Formula di diffrazione di Fresnel:

$$U_A(x_A, y_A) = \frac{e^{ikd_2}}{i\lambda d_2} \int dx_1 dy_1 U_1(x_1, y_1) e^{i\frac{k}{2d_2} [(x_A - x_1)^2 + (y_A - y_1)^2]}$$





[ Ora  $X_1 = \bar{X}_1$  e  $X_2 = \bar{X}_2$  ]

Nel caso di oggetto puntiforme:

$$U_2(\bar{x}_2) = \delta(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$$

Il campo in  $\bar{X}_2$  possiede dei termini quadratici che fanno sì che la relazione non sia una FT; inoltre allargano la risposta all'impulso.

Se vale la lens law:

$$\frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f}$$

→ è una legge classica, viene dall'ottica geometrica.

Alcuni termini quadratici spariscono e si trova

$$U_2(\bar{x}_2) = \frac{e^{ik(d_0+d_2)}}{-\lambda^2 d_0 d_2} e^{ik \left[ \frac{x_0^2}{2d_0} + \frac{x_2^2}{2d_2} \right]} \int d^2 x_1 P(\bar{x}_1) e^{-ik \bar{x}_1 \left[ \frac{x_2}{d_2} - \frac{x_0}{d_0} \right]}$$

FT DELLA F. PUPILLARE

Introducendo  $M = \frac{d_2}{d_0}$  (Magnification):

$$U_2(\bar{x}_2, \bar{x}_0) = \frac{e^{ik(d_0+d_2)}}{-\lambda^2 d_0 d_2} e^{ik \frac{M \bar{x}_0^2}{2f}} \hat{P} \left( \frac{\bar{x}_2 - M \bar{x}_0}{\lambda d_2} \right)$$

Il termine di fase restante mi dà la FT della funzione pupillare.

Notiamo come l'ampiezza di tale distribuzione di intensità vari in base a M.

~~Esistono infinite combinazioni di~~

le cose strane è che l'immagine di un oggetto puntiforme non è puntiforme. Se  $M=1$  si dovrebbe avere immagine con ingrandimento unitario ma se l'oggetto è puntiforme riduce una macchia non puntiforme. Copiamo un problema legato alla diffrazione.

Allora se ho due oggetti puntiformi molto vicini non posso risolverli (le 2 intensità del campo si "eccellano").



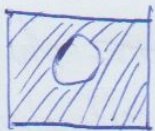
Capiamo che più la lente è grande, più stretta sarà la PSF. Più miniaturizzo la lente più perdo in risoluzione.

NOTA:

Più la PSF è piccola più la sua trasformata (la FST  $H$ ) diventa larga e più frequenze passano per quella lente.

### Esempio numerico:

Foro in uno schermo opaco che rade e illumina. La luce esce e ne faccio l'immagine con una lente qualunque.



$R = 20\lambda$

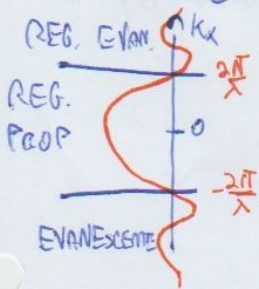
Se NA (apertura numerica) è pari a 1 ho riproduzione fedele dell'oggetto (raccolgo tutte le onde piane), lente ideale.

Anche se  $NA = 1$  ma diminuisco il raggio non riesco a ricostruire l'oggetto (esempio  $R = 0,1\lambda$ ).

Perché non posso ricostruire immagini di oggetti piccoli anche raccogliendo tutte le onde piane?

Ricordiamo il discorso sullo spettro angolare: è la FT del campo moltiplicata per la funzione di trasmissione dell'oggetto. Se l'oggetto è grande la sua FT sarà una sine molto stretta.

Tornando indietro al discorso dello spettro angolare, avremmo detto che  $k_x \in [-\frac{2\pi}{\lambda}, \frac{2\pi}{\lambda}]$ .



Se la sine è molto stretta lo spettro angolare si trova per la maggior parte nella regione detta di propagazione, altrimenti, se ad esempio l'oggetto è molto piccolo la sua FST si allarga e possiede molta informazione sui valori di  $k_x > \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Gli oggetti piccolissimi hanno i lobi su  $|k_x| > \frac{2\pi}{\lambda}$ , non si trovano su onde piane ma su onde evanescenti, non si rinnovano.



Intensità data dall'integrale su tutto i punti del piano imag. dell'intensità che ottengo.

Per ottenere tale formula abbiamo preso il campo di illuminazione, con moltiplicato con l'oggetto e convoluto per la risposta funzionale del sistema di raccolta.

$$I = |PSF_{focus}(x_s)|^2 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i |PSF_{collection}(x_i - x_s)|^2 = c \cdot |PSF_{focus}(x_s)|^2$$

COSTANTE

Lo stesso risultato trovato in precedenza. L'immagine di una  $\delta$  avremmo visto essere la risposta ad un impulso.

Con sistemi di tipo I non si riescono a migliorare le prestazioni di imaging di un sistema di tipo ottico. Si può fare una piccola variazione in cui si ha un detector puntiforme che raccoglie la luce solo sull'asse ottico.

Con questo accorciamento d'integrale precedente perde la dipendenza da  $x_i$ , si prende solo il valore dell'intensità su (esempio)  $x_i = 0$ .

$I \propto |PSF_{focus}(x_s)|^2 \Rightarrow$  Succede questo nei sistemi a scansione di tipo II. È un vantaggio, nonostante gli errori siano gli stessi il fatto che sia presente un ulteriore  $|I|^2$  fa sì che tale funzione sia più stretta.

Le immagini hanno risoluzione migliore (contrasto migliore).

In generale: convolvere con  $h^2$  invece che con  $h$  dà una resa migliore.

Questo non è il meglio che si poteva fare con le lenti convenzionali. Il problema restano gli oggetti piccoli.



~~Con la fibra ottica la radiazione~~

Si mette attraverso l'apertura una radiazione nelle fibre ottiche. Subito dopo l'apertura la radiazione è confinata in una regione spaziale grande quanto l'apertura. Portando a pochi nm dall'oggetto quell'apertura quell'oggetto sarà illuminato da una dist di luce grande quanto l'apertura. (20 nm di apertura → 20 nm di spot).

Violiamo principi finiti? No, ancora soddisfiamo il principio di Heisenberg.

$$\Delta x \cdot \Delta k_x \geq \pi$$

Considerando componenti propagative  $\Delta k_x \Rightarrow |k_x| \leq \frac{2\pi}{\lambda}$   
Affinché tale disuguaglianza sia soddisfatta:

$$\Delta x \geq \frac{\lambda}{2}$$

Ecco perché i fotoni propaganti non possono essere focalizzati per  $\Delta x < \frac{\lambda}{2}$ .

Tale vincolo cade se prendo i componenti evanescenti, dove  $|k_x| > \frac{2\pi}{\lambda}$ . Quando illuminiamo il campione con una sonda che passa per una nanoapertura:

- Dalla nanoapertura esce una componente evanescente che produce una localizzazione della rad su scale minori di  $\lambda/2$ .

Stiamo idealmente illuminando ogni atomo/molecola.

QUESTO ERA LO SNOM IN ILLUMINAZIONE

SNOM IN RACCOLTA

Esattamente il duale: illuminiamo il campione con lenti <sup>convenzionali</sup> ~~grandi~~ e con nano aperture eccetto a info di campo evanescenti che se mettessi una lente non potrei raccogliere. Le nanosonde funzionano sia come nanofocalizzatori di componenti evanescenti che da nanocollettore delle medesime.

Tecnica non più usata, serie di svantaggi.

CI PIAMO COME  
È POSSIBILE  
FOCALIZZARE  
FOTONI SU  
NANOPARTICELLE CON  
I PLASMONI



# EFFETTO RAMAN NEI CRISTALLI

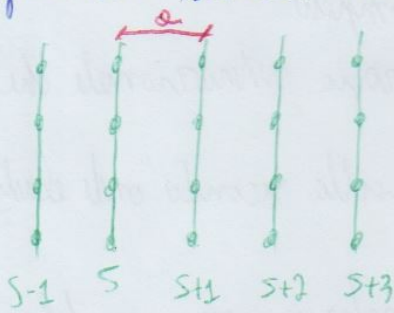
Partiamo dal caso più semplice: cristallo monoatomico 1D (ad esempio Si).

↳ piani atomici possono avere due tipi di vibrazioni:

- **LONGITUDINALI** se vibrano nella stessa direzione di propagazione dell'onda elastica.
- **TRASVERSALI** se le oscillazioni sono perpendicolari alle direzioni di propagazione.

Per ogni frequenza fononica è possibile identificare un modo longitudinale e due modi trasversali con direzioni di oscillazione mutuamente ortogonali.

Vogliamo trattare quest'onda propagante in modo che possa spiegare il sistema vibrante.



Gli atomi vicini esercitano forze di interazione (dovute al legame chimico).

Identifichiamo i piani atomici e consideriamo l'oscillazione su di essi come quella di una molla intorno al proprio punto di equilibrio. Allora sul piano  $s$  agisce la legge di Hooke:

$$F_s = \sum_p c_p (U_{s+p} - U_s) \rightarrow c_p \text{ costante di accoppiamento}$$

2<sup>a</sup> legge di Newton:

$$M \frac{d^2 U_s}{dt^2} = \sum_p c_p (U_{s+p} - U_s)$$

Andiamo a trattare solo i primi vicini:

$$M \frac{d^2 U_s}{dt^2} = c (U_{s+1} + U_{s-1} - 2U_s)$$

Soluzioni di tipo onda piana:

$$U_{s+p} = U(\phi) e^{i(s+p)Ka - i\omega t} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{Fc}{M}} \left| \sin\left(\frac{Ka}{2}\right) \right|$$

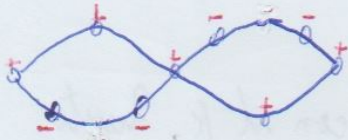
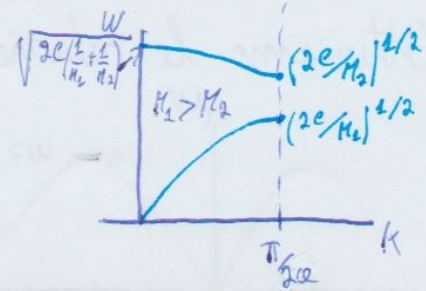
$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Per piccoli valori di  $k$ :

-  $\omega^2 \approx 2e \left( \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right) \rightarrow$  branca ottica ;

-  $\omega^2 \approx \frac{2e}{M_1+M_2} k^2 a^2 \rightarrow$  branca acustica ;



Per piccoli valori di  $k$ , in un modo ottico:  
 $\frac{\xi}{\eta} = -\frac{M_2}{M_1} \rightarrow$  le oscillazioni dei piani sono in controfase



Per quanto riguarda i modi acustici  $\xi = \eta$ , sono in fase, per quanto si chiamano in tale modo, comportandosi come onde acustiche [sempre per  $k \rightarrow 0$ ]

L'effetto Raman coinvolge una vibrazione ottica.



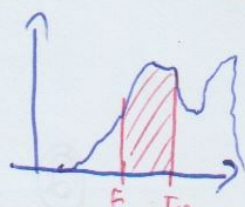
Notiamo la presenza di un gap fra banda ottica e acustica: esiste un range di energia che non può essere trasportato in un reticolo (ragioniamo da un PDV fononico).

In un reticolo con una base triatomica trova una terza banda, ~~acustica~~ e una seconda banda ottica.

Nel caso di reticolo 3D <sup>(triatomico)</sup> ogni banda si divide in 3 bande: 1 longitudinale e 2 trasversali.

NOTA SUI FONONI

I fononi sono bosoni, avendo uno stato vibrazionale caratterizzato da un  $\omega$  e un  $k$ , possiamo far corrispondere più fononi a tale stato. Tale numero dipende dalla funz. di Bose-Einstein.



Considerando la densità degli stati fononici tale numero vale:  
 $\int_{E_1}^{E_2} g(E) f_{BE}(E) dE \rightarrow$  Numero di fononi con  $E \in [E_1, E_2]$



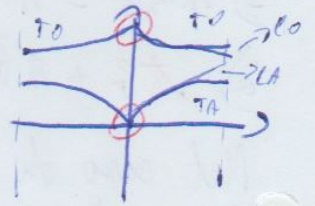
avendo i fononi energia di 2-3 ordini di grandezza minore dei fotoni,  $\lambda$  subirà uno shift non eccessivo.

Per quanto riguarda la conservazione del momento, il  $k^{tot}$  (nel range del visibile) vale al più  $10^8 \text{ cm}^{-1}$ .

Se  $\frac{\hbar}{\lambda} \approx 10^8 \text{ cm}^{-1}$  esprimiamo come la conservazione del momento cristallino è rispettata solo se  $k^{fon} \approx 0$ , cioè solo fononi prossimi al centro zona di Brillouin possono dare luogo a scattering Raman.

Lo scattering anelastico vale sia per la branca acustica che ottica.  
A rigore:

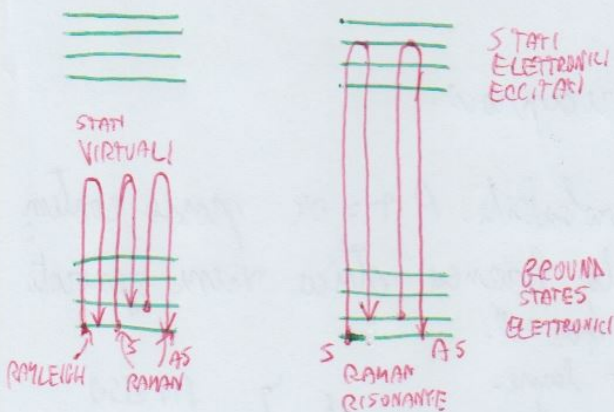
- Scattering di Brillouin: emissione o assorbimento di fononi acustici.
- Scattering Raman: emissione o assorbimento di fononi ottici.



### Vibrazioni molecolari

Spesso si definiscono fononi anche le vibrazioni collettive in cui non c'è un reticolo.

Nel caso di una molecola si analizzano gli stati elettronici e vibrazionali della stessa.



I diagrammi in figure <sup>sono detti</sup> ~~presentano~~ i diagrammi di Livinski. Rappresentano i vari livelli occupati da un elettrone per diversi stati vibrazionali della molecola. Il gap energetico fra i vari livelli (il loro  $\Delta E$ ) dipende dagli stati vibrazionali della molecola.

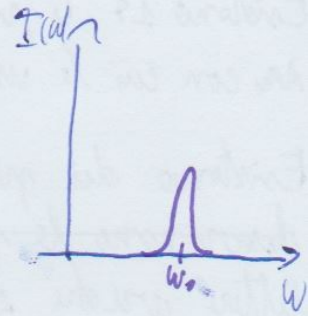
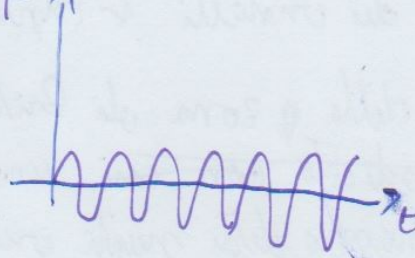
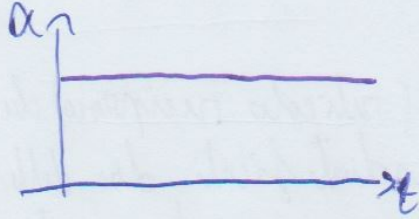
Facciamo un esperimento di scattering: irradichiamo una molecola con un flusso di fotoni.

Un elettrone in un certo livello del ground state viene eccitato in uno stato virtuale. Tale stato non esiste, è solo un artificio che si usa per dividere l'interazione in più stati (sono quelli rappresentati in mezzo al gap in figura).



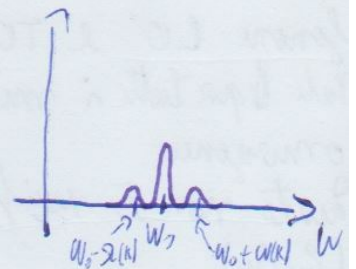
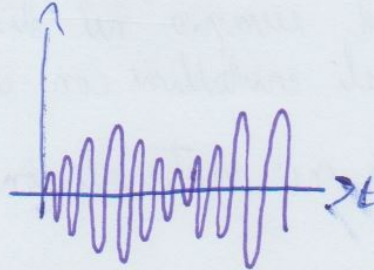
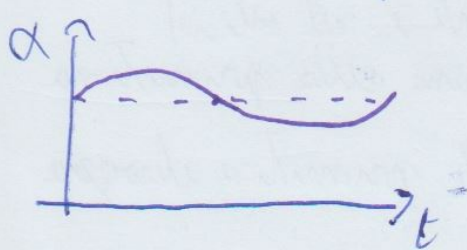
Vedendolo come grafico:

- Polarizzabilità non perturbata



Otteniamo campo EM con frequenza emessa solo a  $\omega_0$ .

- Polarizzabilità perturbata dalle vibrazioni del sistema:



1) fenomeni Stokes e anti-Stokes hanno uno shift energetico la cui entità dipende da materiale e materiale.

Si dimostra che la probabilità degli eventi stokes dipende <sup>da</sup> dalle ~~funzioni di Bose~~  $f_{BE} + 1$ , quelle degli eventi AS da  $f_{BE}$  (si dimostra attraverso gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$ ).

A Tamb  $n(\Omega, T) \ll 1$ , questo vuol dire che  $n+1 \approx 1$ , ossia i fenomeni di stokes non variano con  $T$ .

Si trova che l'intensità di fotoni di Stokes è più elevata di quelli di AS, con un peso di 10 a 1.

Conviene analizzare i fotoni Stokes.

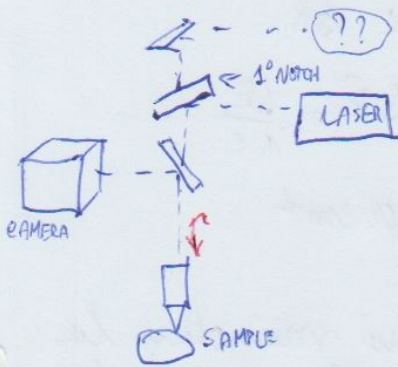
L'efficienza Raman in un cristallo è molto bassa.

$$\eta \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$$

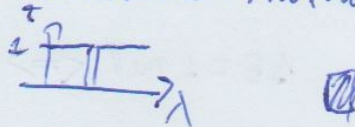


## Apparato Micro-Raman

Per realizzare spettroscopia Raman serve una sorgente di luce più monocromatica possibile, altrimenti otterrei una sovrapposizione di spetti Raman. Usiamo quindi un laser che mi generano fasci collimati su un'area esigua ricevo un importante numero di fotoni.



NOTA: il filtro NOTCH è un multistrato, un filtro estremamente selettivo con una trasmissione mostrata in figura:



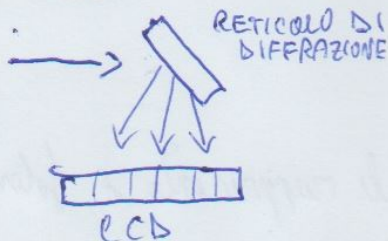
ma i fotoni del laser sono tali da essere riflessi dal notch; una volta riflessi

Il laser arriva, incide sul primo NOTCH, <sup>UN MICROSCOPIO</sup> ~~con fascio estremamente stretto (a frequenza)~~ incrociano in grado di focalizzare il fascio su uno spot molto piccolo del campione.

Il campione ne assorbe e ridiffonde una parte (anelasticamente e elasticamente).

I fotoni che provengono dal campione riescono ed essere trasmessi dal filtro NOTCH solo se hanno subito scattering anelastico.

Tali fotoni incontrano uno specchio e vengono indirizzati verso un secondo specchio che serve a ripulire il fascio dalle componenti elastiche residue.



Tale fascio (poliromatico) arriva su un reticolo di diffrazione che lo disperde nelle varie direzioni (un prisma avrebbe risoluzione peggiore).

Si usa un detector ecs per realizzare lo spetto del materiale eccitato plottando l'intensità di ogni componente in frequenza ricercata.