



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2214A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Cosentino Costantino

MATERIA: Fisica Nucleare con Applicazioni Biomediche - Prof. Lavagno

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

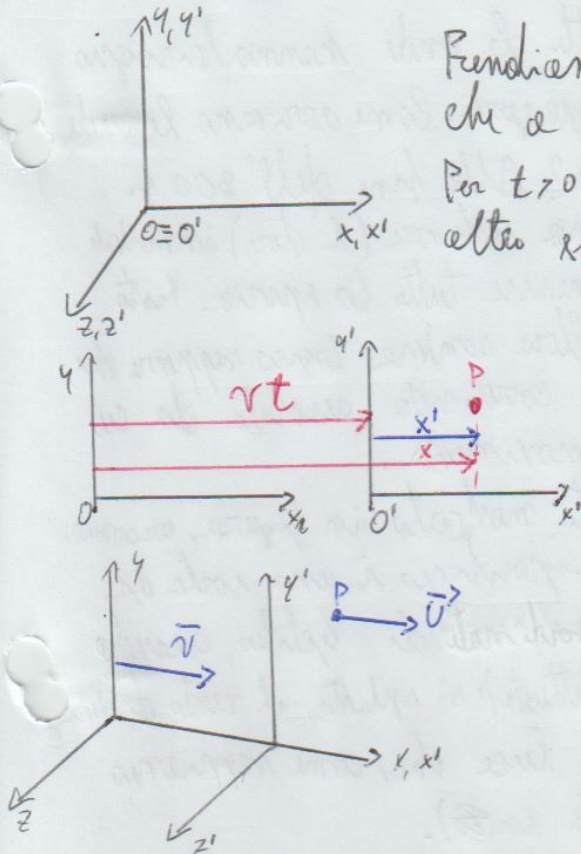
**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

PRINCIPI DI RELATIVITÀ RISTRETTA

1

Prendiamo due sistemi di riferimento. Supponiamo che a $t=0$ l'origine coincida.

Per $t > 0$ il sistema con gli assi si sposta dall'altro solo lungo x con velocità v ($|v| = \text{costante}$):



Sia P un evento.

Secondo le trasformate di Galileo le relazioni fra i due sistemi di riferimento sono:

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

TRASFORMATE DI GALILEO

Se \vec{u} è la velocità della particella le trasformate della velocità sono:

$$\begin{cases} u_x' = u_x - v \\ u_y' = u_y \\ u_z' = u_z \end{cases}$$

TRASFORMATE DELLA VELOCITÀ

$u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_x' = \frac{dx'}{dt'}$ → dovremmo assumere $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt'}$, visto che se $t=t'$ i dt sono uguali

$$\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases}$$

→ l'accelerazione è invariante per tutti gli S.R.I., segue che vale lo stesso per $\vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{p} = \int \vec{F} \cdot dt$$

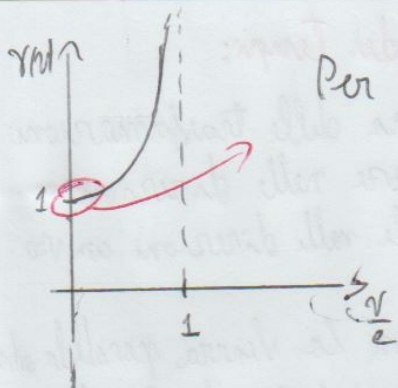
Prendiamo ora un sistema in cui esistono $\vec{E}(x, y, z, t)$ e $\vec{B}(x, y, z, t)$.

$\vec{F}(x, y, z, t) = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow$ supponiamo di trovarci in O .

È lecito dire che $\vec{a} = \frac{(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})q}{m}$ è un invariante relativistico?

$$\vec{F}'(x', y', z', t') \neq \vec{F}(x, y, z, t)!$$

Sembra che le eq. di Maxwell non siano invarianti.



Per $\frac{v}{c} \ll 1$ ritrovo le coordinate di Galileo

Come si ricavano le trasformate della velocità?

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} = \frac{(v_x - v)}{1 - \frac{v_x v}{c^2}}$$

$$\frac{dt'}{dt} = \left(1 - \frac{v_x v}{c^2}\right)^{-1/2} \quad \frac{dx'}{dt'} = (v_x - v) \gamma(v)$$

I postulati di Einstein riguardanti la relatività ristretta, in definitiva, sono:

- ① Tutte le leggi fisiche sono invarianti in tutti i S.R.I.
- ② La velocità della luce nel vuoto è uguale in tutti i S.R.I.

La velocità della luce c è quindi invariante per tutti gli osservatori (in S.R.I.)

Vediamo il caso limite in cui il punto P si muove in O con velocità pari a c :

$$v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = c^2 \quad \bar{J} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k} ; \quad \bar{U}' = v'_x \bar{i} + v'_y \bar{j} + v'_z \bar{k}$$

Se la relazione precedente è vera segue che:

$$v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z = c^2 \quad \text{da } \textcircled{2}$$

Altro caso limite: il moto relativo fra O ed O' è pari a c .

Usando le transf. di Lorentz:

$$v'_x = \frac{v_x - c}{1 - \frac{v_x c}{c^2}} = -c \quad v'_y = \frac{v_y - c}{c^2 - v_x c} = -c \quad v'_z = \frac{v_z - c}{c - v_x} = -c$$

dove $v = c$

Ricordiamo le trasformate inverse sulle coordinate: 5

$$\begin{cases} x = (x' + vt') \gamma(v) \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \gamma(v) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{In } O \quad \Delta t(v) = t_2 - t_1 &= \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} \right) \gamma(v) - \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right) \gamma(v) \\ &= (t'_2 - t'_1) \gamma(v) = \Delta t(\emptyset) \gamma(v) \end{aligned}$$

L'orologio in moto rispetto ad O misura una certa quantità di tempo. Lo stesso orologio in quiete rispetto ad O' misura una quantità di tempo minore.

$$\Delta t(v) = \Delta t(\emptyset) \gamma(v)$$

Se si parla di S.R.T. un osservatore in O vede il tempo scorrere più lentamente in O' e un osservatore in O' vede scorrere più lentamente il tempo in O .

Il paradosso dei gemelli (uno invecchia e l'altro no) funziona solo nell'ottica della relatività generale, un gemello viene accelerato fino alla velocità di quasi c ed è lì che effettivamente diventa più giovane del gemello. Fino a quando viaggia ad una velocità prossima a c , seppur costante, il tempo per loro due scorre allo stesso modo.

Il caso dei muoni:

La terra ogni giorno è soggetta ad una pioggia di particelle di provenienza extraterrestre, i cosiddetti raggi cosmici. Queste radiazioni è formata da protoni, elio, nuclei, elettroni e pochissimi raggi γ . Queste particelle urtano contro gli atomi nell'atmosfera terrestre e producono particelle che vengono identificate sulla superficie terrestre. Così vengono generati i pioni che decadono dando vita a muoni, elettroni e raggi γ . Le uniche particelle che sopravvivono fino al livello del mare sono i muoni (μ) e i neutroni prodotti più in alto.

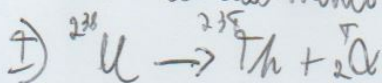
MASSA

18

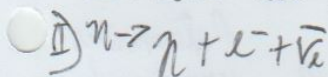
La massa non è più massa inerziale a livello relativistico. Nel caso non relativistico l'energia di un corpo, in assenza di un potenziale, è solo cinetica. In questo contesto le equazioni del moto sono facili da scrivere:

$$K(v) = \frac{1}{2} m v^2 \quad \vec{p}(v) = m \vec{v} \quad K(\vec{v}) = \frac{p^2}{2m}$$

Già dal 1890 si notò un fenomeno strano: il rapporto e/m dei raggi catodici dipendeva dal potenziale di accelerazione degli elettroni. Inoltre nel decadimento dell'uranio:



Così come nel decadimento del neutrone:



Si scopì che in questi processi si liberava energia, legata alla variazione di massa.

$$\Delta H_I = M_U - M_{Th} - M_{He} > 0 \iff \Delta K_I$$

$$\Delta H_{II} = M_n - m_p - m_e > 0 \iff \Delta K_{II}$$

La massa ha una corrispondenza diretta con la variazione di m cinetica.

$$E(v) = m f(v) = m \frac{f(v)}{c^2} \cdot c^2 = m f(v) c^2 \quad [f(v) = \frac{f(v)}{c^2}]$$

$$\vec{p} = m v f(v)$$

Perché ci sia il contatto classico $f(0) = 1, g(0) = 1$ se $v \rightarrow 0$

Una volta ipotizzati i valori di $f(v)$ e $g(v)$ bisogna cimentarsi con gli esperimenti.

Sfruttando le condizioni iniziali, la conservazione dell'energia e delle quantità di moto Einstein usò l'idea introdotta da Lorentz nel 1899 che $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ (massa di un oggetto in funzione della sua v).

m_0 è la massa dell'oggetto quando è a riposo.

In questo modo si trova che (chiamiamo $m_0 = m$)

$$f(v) = g(v) = \gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$$

$$\vec{p} = \gamma(v) m \vec{v} \quad ; \quad E(v) = m(v) c^2$$

Ritornando ad $E(p)$:

$$E(p) = \pm \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \Rightarrow E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$$

[Abbiamo usato il + perché è l'unica ad avere senso fisico; nel 1927 Dirac scoprì che anche il meno aveva un significato fisico, l'antimateria.]

Se la massa a riposo fosse nulla ($m=0$), da \star risulterebbe che $v=c$ e da \star che $E=pc$.

Se $m=0$ non esiste un sistema di riferimento in cui possiamo dire che la particella sia ferma.

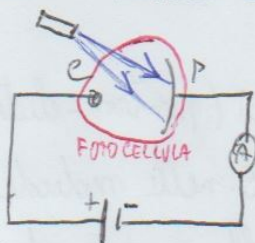
EFFETTO FOTOELETTRICO

Einstein ipotizzò il comportamento corpuscolare della luce; in base alle considerazioni sopra fatte una "particella" di luce avrebbe $E_\gamma = h\nu$ e $p_\gamma = \frac{h\nu}{c} = \frac{E_\gamma}{c}$.

La cosa incredibile è che nonostante $m=0$ γ è una quantità finita.

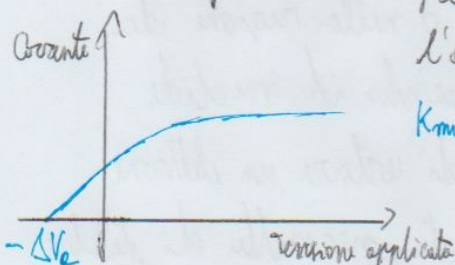
$E(\gamma) = \gamma(m)mc^2 \rightarrow$ Da queste equazioni notiamo che anche se $m \rightarrow 0$, $\gamma(\gamma) \rightarrow +\infty$
 $p_\gamma = \gamma(m)m\vec{v}$ sono forme indeterminate che convergono ad un risultato finito.

L'effetto fotoelettrico (Einstein 1905) mostra che effettivamente l'ipotesi sulla natura corpuscolare della luce era corretta.



In un tubo a vuoto si dispongono una piastra metallica P e un elettrodo C, collegati ad una piastra P e ad un generatore. Quando una radiazione a frequenza sufficientemente alta incide sulla piastra l'empirismo indica il passaggio di corrente.

$K_{max} = e\Delta V_a \rightarrow$ Misurando la tensione alla quale la corrente cade a zero si misura l'en. cinetica massima di un elettrone.



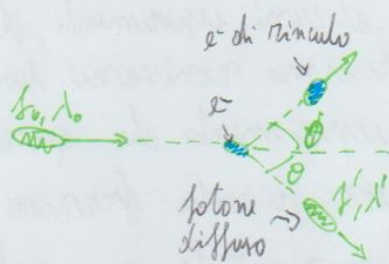
- L'energia cinetica degli elettroni è indipendente dall'intensità della luce.
- Gli elettroni vengono emessi quasi istantaneamente dalla superficie.
- Se la frequenza della luce è minore ad una certa frequenza di taglio non è presente emissione.
- L'en. cinetica max cresce al crescere della frequenza della luce.

EFFETTO COMPTON

L'effetto Compton è una teoria classico-ondulatoria che descrive l'interazione di un'onda EM con la materia che una sola teoria classica non potrebbe spiegare correttamente.

Classicamente un'onda EM incidente ad una certa frequenza pone in vibrazione gli elettroni che emettono onde EM a loro volta alla stessa frequenza incidente.

Quello che si osserva però è che ad un certo angolo si osserva solo una frequenza di radiazione diversa da quella incidente.

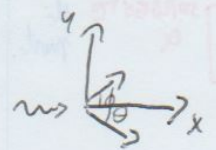


Secondo l'effetto Compton l'interazione fra elettroni e fotoni si modella come un urto elastico, dove energia cinetica e quantità di moto si conservano.

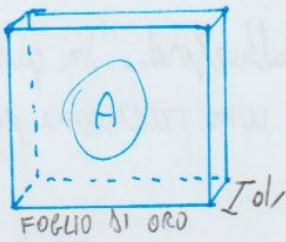
$$E) \quad h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu' + \gamma(v) m_e c^2 \quad [e^- \text{ fermo prima dell'urto}]$$

$$N_x) \quad \frac{h\nu_0}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos\theta + \gamma(v) m_e v \cos\phi$$

$$N_y) \quad 0 = -\frac{h\nu'}{c} \sin\theta + \gamma(v) m_e v \sin\phi$$



Conoscendo ν_0 , in base agli angoli in cui si effettua la misura si ritrovano i dati sperimentali.



la superficie in figura è perpendicolare al fascio. 1.3
 Chiamiamo $N_t = n_t \cdot A \cdot l$ il numero di particelle nella sezione di volume $A \cdot l$ perpendicolare al fascio.
 Chiamiamo $\dot{n} = \frac{dN}{dt}$ il numero di particelle che interagisce con il foglio per unità di tempo.

$N \propto$ flusso di particelle $\Rightarrow \dot{N} = \Phi_0 \cdot N_t \cdot \sigma_t$

σ_t è il termine che prende il nome di **sezione d'urto**, quello che tiene conto dell'interazione. Vogliamo conoscerlo.

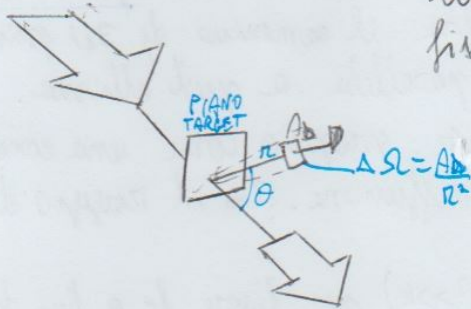
$$\sigma_t = \frac{\dot{N}}{\Phi_0 \cdot N_t} = \frac{\dot{N}}{A \cdot \Phi_0 \cdot \frac{N_t}{A}} = \frac{\dot{N}}{I_0 \cdot \left(\frac{N_t}{A}\right)}$$

$I =$ intensità del fascio $= \Phi_0 \cdot A$

Per come la abbiamo definita, la sezione d'urto rappresenta il numero di particelle che subisce scattering (scatterate) per unità di area della sezione bersaglio (A).

Misuriamo ora σ contando tutte le particelle in tutto l'angolo solido.

SEZIONE D'URTO DIFFERENZIALE



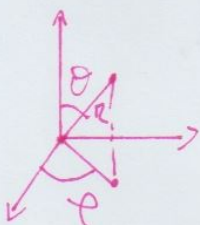
Troviamo la sezione d'urto misurata ad un fissato angolo solido $d\Omega$.

Se quest'ultima fosse isotropa osserveremmo sempre le stesse particelle per ogni angolo solido, ma come si nota nell'esperimento di Rutherford questa era fortemente anisotropa.

$[\sigma] = l^2$

lavorando con le sezioni d'urto, dimensionate come aree, in fisica nucleare spesso si lavora con un'unità di misura detta **Barn**; $10^{-28} m^2 = 1b = 100\mu b$.

Altre volte trovata la sezione d'urto differenziale e come varia rispetto l'angolo solido, passando in coordinate sferiche e integrando rispetto tutto l'angolo solido troveremo la sezione d'urto totale.



$$\sigma_{TOT} = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} \cdot d\Omega$$

IN PRATICA

Detta $\sigma_c = \frac{d\sigma}{d\Omega}$ la sez. d'urto differenziale scatterate per numero di atomi, unità di area del bersaglio e per angolo solido. $\sigma_c(\theta) = \frac{dN'}{N_t \cdot d\Omega}$, numero di particelle particelle incidenti per angolo solido.

$\sigma_c(\theta) = \frac{dN'}{N_t \cdot d\Omega} \cdot A$ se usiamo le nostre convenzioni.

$$\int_{V_i}^{V_f} d\vec{v} = 2v \sin \frac{\theta}{2} \vec{v}_r = 2v \sin \frac{\theta}{2} \left(\sin \frac{\theta}{2} \vec{v}_x + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}_y \right)$$

Il termine dx di Φ :

$$\int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{L} \cdot d\phi \vec{v}_r(\phi) = \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{L} \int_0^{\pi-\theta} d\phi \vec{v}_r(\phi)$$

$$\vec{v}_r(\phi) = \cos \phi \vec{v}_x + \sin \phi \vec{v}_y \rightarrow \int_0^{\pi-\theta} \vec{v}_r(\phi) d\phi = \int_0^{\pi-\theta} (\cos \phi \vec{v}_x + \sin \phi \vec{v}_y) d\phi = \left[\sin \phi \vec{v}_x - \cos \phi \vec{v}_y \right]_0^{\pi-\theta} = \sin \theta \vec{v}_x + (\cos \theta + 1) \vec{v}_y = 2 \cos \frac{\theta}{2} \left[\sin \frac{\theta}{2} \vec{v}_x + \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}_y \right]$$

Abbiamo usato le formule di binomio nell'ultimo passaggio.

$$\int_{V_i}^{V_f} d\vec{v} = \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{L} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \vec{v}_r(\phi) d\phi$$

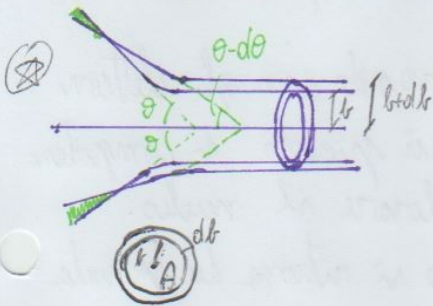
Ricordando che $v = \omega r = mrv$:

$$2v \sin \frac{\theta}{2} \vec{v}_r = \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{mrv} \cdot 2 \cos \frac{\theta}{2} \vec{v}_r \rightarrow b = \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{Kmv} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cot \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

COULOMB SCATTERING FORMULA

$$a = \frac{K_e z_1 z_2 e^2}{Kmv} \rightarrow b = \frac{a}{2} \cot \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

Abbiamo legato b a θ e notiamo che con il crescere di θ b si rimpicciolisce. Consideriamo ora tutte le particelle con parametro compreso fra un b e $b+db$. Il loro angolo di scattering andrà fra θ e $\theta+d\theta$.



Quale probabilità hanno le particelle di colpire l'anello che va da b a $b+db$? l'area dell'anello è $2\pi b|db|$. A è l'area del foglio su cui le particelle incidono. la probabilità che le particelle α colpiscano l'anello è:

$$\frac{2\pi b|db|}{A} = \frac{2\pi}{A} \left(\frac{a}{2} \cot \frac{\theta}{2} \right) \cdot \left| -\frac{a}{2} \cot^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} d\theta \right| = \frac{2\pi}{8A} \cdot a^2 \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} \cdot d\theta = \frac{2\pi a^2}{16A} \cdot \frac{\sin \theta}{\sin^5 \frac{\theta}{2}} d\theta$$

Poniamo scrivere il tutto in funzione dell'angolo solido del cono formato in figura \star :

$$d\Omega = \frac{2\pi \sin \theta \cdot \theta d\theta}{r^2} = 2\pi \sin \theta d\theta \rightarrow \text{sostituiamo nella formula precedente:}$$

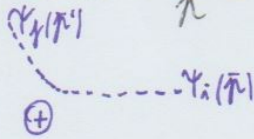
$$\frac{2\pi b|db|}{A} = \frac{a^2 d\Omega}{16A \sin^5 \frac{\theta}{2}} \rightarrow \text{probabilità di diffusione di una singola particella carica in un centro di diffusione.}$$

$$n(\theta) = \frac{a^2}{16A} \cdot \frac{\Delta \Omega}{\sin^5(\theta/2)}$$

CASO QUANTISTICO

Se abbiamo una particella carica incidente e vogliamo sondare una regione dell'ordine di λ che è circa 1 fm :

$$\lambda \approx \Delta x = \frac{h}{p} \approx 1 \text{ fm} \quad m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV} \rightarrow \Delta K \approx 200 \text{ MeV (ultrav.)}$$



Sia prima che dopo l'urto la particella è libera. Possiamo allora usare delle onde piane come funzioni d'onda. Ricordiamo che il modulo delle quantità di moto

non varia prima e dopo l'urto: $|\vec{p}| = |\vec{p}'|$.

$$\psi_i(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

Dobbiamo anticipare un concetto per trattare questo argomento:

FERMI GOLDEN RULE

$$W = \frac{2\pi}{h} |\langle \psi_k | H_{int} | \psi_i \rangle|^2 \rho_f(E')$$

NORMALIZZ.
DENSITÀ STATISTICALI

Questa formula rappresenta la probabilità che l'elettrone con cui sondiamo il target passi da uno stato \vec{p} a uno \vec{p}' , dal punto di vista interattivo.

Classicamente $H_{int} \rightarrow e$ Coulomb

Il termine $\langle \psi_k | H_{int} | \psi_i \rangle = M_{ki}$ è un elemento della matrice di trasmissione, anche detto ampiezza di probabilità della trasmissione.

Consideriamo una particella scatterata in un volume V e con un intervallo di momenti pari a p' e $p' + dp'$.

Sappiamo che nello spazio delle fasi, visto che $\Delta x \Delta p \approx h$, ogni particella occupa un volume pari a $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Ricorda che lo spazio delle fasi ha 6 dimensioni. Nello spazio dei momenti invece, dato che il range di \vec{p} è $\vec{p}' \rightarrow \vec{p}' + d\vec{p}'$, questo intervallo corrisponde ad una shell di spessore dp' e volume $4\pi p'^2 dp'$.

Gli stati finali che la reazione di scattering può occupare sono $dn(p') = V \frac{4\pi p'^2 dp'}{(2\pi\hbar)^3} \rightarrow dn(k') = \frac{d^3 k' V}{(2\pi)^3} \rightarrow$ stati compresi tra \vec{k}' e $\vec{k}' + d\vec{k}'$

Poiché $dE' = v' dp'$ possiamo trovare la densità degli stati finali nel range di energia dE' :

$$\rho_f(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{dp'}{dE'} = \frac{V 4\pi p'^2}{v' (2\pi\hbar)^3}$$

$f(\vec{x})$ soddisfa le condizioni di normalizzazione

$$\int f(\vec{x}) d^3x = 1$$

$$M_{fi} = \frac{Z_2 e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 V q^2} \int f(\vec{x}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x$$

$= |F(\vec{q})|$

$F(\vec{q})$ è la trasformata di Fourier di $f(\vec{x})$, è detto **FATTORE DI FORMA DEL NUCLEO**

Sapete che:

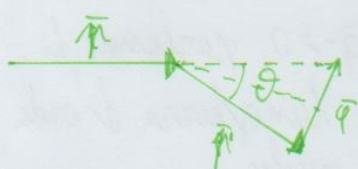
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{E^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^2} \frac{Z_2^2 e^4 \hbar^4}{\epsilon_0^2 \cdot q^4} |F(\vec{q})|^2$$

Ritorniamo la sezione d'urto di Rutherford anche a livello quantistico. Se la carica fosse puntiforme, $f(\vec{x}) = \delta(\vec{x})/\pi^3$, $F(\vec{q}) = 1$. In questo caso si ritroverebbe la dipendenza $1/q^4$ della sezione d'urto, quindi per elettroni ad alta quantità di moto σ sarebbe monotona decrescente senza picchi, come che non accade in realtà, non esistendo nuclei puntiformi. Questo modello permette di spiegare la forma della sezione d'urto e alcuni suoi picchi grazie alla presenza del fattore di forma.



Ricordando che $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137}$ possiamo riscrivere la sezione d'urto differenziale come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2 E^2}{(q e)^4} |F(\vec{q})|^2$$



Notiamo che $|q| = |p - p'| = 2p \sin \frac{\theta}{2}$
 $q_e = 2p_e \sin \frac{\theta}{2}$

Nel caso di un elettrone in regime ultrarelativistico $E \approx pc$, segue che:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z^2 \alpha^2 (\hbar c)^2}{4 E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(\vec{q})|^2 \rightarrow \text{Nel caso di carica puntiforme ritroviamo proprio la formula di Rutherford.}$$

Adesso fanno considerazioni su $f(\vec{x})$. Ricordiamo che la funzione di distribuzione è normalizzata ad 1.

$$\int f(\vec{x}) d^3x = 1 \rightarrow \begin{matrix} \text{in coordinate polari} \\ \text{in caso di simm. sferica} \end{matrix} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \int_0^{+\infty} r^2 f(r) dr = 1$$

Un'altra strada ancora:

si fa un'ipotesi su $\rho(r)$, si trasforma in $F_{a,b,c}(q)$, si calcola $\frac{d\sigma}{dq}$. Da qui faccio il confronto sperimentale e fisso i parametri a, b, c .

Questo lavoro è stato fatto quasi per ogni valore di Z .

Nel corso degli esperimenti effettuati negli anni sulla determinazione della densità di carica radiale $\rho(r)$ si è capito che:

1) I nuclei non sono sferici con una superficie ben definita. Al loro interno $\rho(r)$ è circa costante, sulla superficie inizia a decadere. Può essere descritta con buona approssimazione dalla funzione di Fermi con due parametri:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{(r-a)/b}}$$

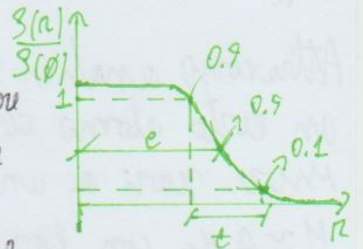
e e e i parametri

2) Le costanti a e b la distanza radiale in cui $\rho(r)$ si dimezza. Empiricamente, per nuclei grandi: $C = 1,07 \text{ fm} \cdot A^{1/3}$, $a = 0,97 \text{ fm}$.

3) Da questa densità di carica si può calcolare il raggio quadratico medio in modo approssimato: $\langle r^2 \rangle^{1/2} = R_0 \cdot A^{1/3}$; $R_0 = 0,97 \text{ fm}$.

In genere $R^2 = \frac{3}{5} \langle r^2 \rangle \rightarrow R = 1,21 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$

4) lo spessore di superficie t è definito come lo spessore dello strato sul quale la densità di carica diminuisce dal 90% al 10%. $t = R(\rho/\rho_0 = 0.1) - R(\rho/\rho_0 = 0.9)$



Nota su 4: la dist. di Fermi funziona solo su nuclei pesanti, su quelli leggeri serve una gaussiana.

Nota su 3: ipotizzando una distribuzione omogenea su una sfera:

$$\langle r^2 \rangle_s = \int \rho(r) r^2 d^3r = \frac{4\pi}{4\pi R^3} \int_0^R r^4 dr = \frac{4\pi}{4\pi R^3} \cdot \frac{3}{5} R^5 = \frac{3}{5} R^2$$

$$R^2 = \frac{5}{3} \langle r^2 \rangle$$

sfruttando il fatto che $\int \rho(r) d^3r = K_s \int d^3r = K_s \frac{4\pi}{3} R^3 = 1 \rightarrow K_s = \frac{3}{4\pi R^3}$

5) Se $R = R_0 A^{1/3}$ si trova che la densità, almeno per il centro dove è quasi costante ($\rho(0)$):

$$\rho_p = \frac{A}{V} = \frac{A}{\frac{4\pi}{3} R^3} = \frac{A}{\frac{4\pi}{3} R_0^3 A} = \frac{3}{4\pi R_0^3} = 0,17 \text{ fm}^{-3}$$

È una densità costante, iniziamo a capire come funzionano le forze nucleari: l'interazione fra nucleoni non dipende dal numero di questi ultimi. Significa che agiscono solo fra vicini e la loro interazione tende subito a zero.

ENERGIE DI LEGAME

23

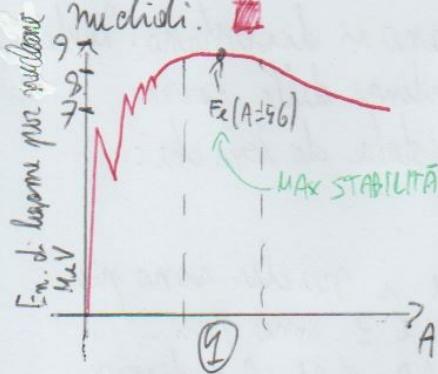
Dopo aver caratterizzato i mattoncini costituenti il nucleo degli atomi (protoni e neutroni) è possibile analizzare l'energia che li tiene insieme. Saranno chiaramente presenti forze maggiori del campo elettrico e magnetico che lega gli atomi.

L'interazione che andremo a descrivere è complessa, non semplice come quella coulombiana. Per descriverla correttamente ci baseremo su modelli fenomenologici.

L'energia di legame di un sistema è definita come la differenza fra la massa di un sistema e la somma delle masse dei suoi costituenti:

$$\frac{1}{c^2} B.E.(N, Z) = M(N, Z) - (N M_n + Z M_p)$$

NOTA LESSICALE: il numero di massa A è pari alla somma di protoni e neutroni ($A = N + Z$). Diverse combinazioni di Z ed A si chiamano **nucleidi**.

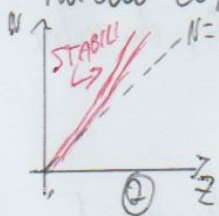


Nel seguente grafico viene mostrato quanto è legato ogni nucleone in funzione di A . Si vede che il massimo si ha nel caso del ferro ($A=56$), dopo di che l'energia di legame inizia a diminuire (più del cemento rispetto la salita).

Da queste evidenze empiriche costruiremo il nostro modello fino ad arrivare alla formula semi-empirica della massa.

FORMULA SEMI-EMPIRICA DI MASSA

Usiamo in questa descrizione il modello a goccia del nucleo: vediamo il nucleo come una goccia stabile fatta da neutroni e protoni.



Facciamo alcune considerazioni.

Notiamo che i nuclei stabili solo inizialmente coincidono con la bisettrice $N=Z$ nel grafico, per Z più grandi si trovano nel settore $N > Z$.

Ricordiamo che per nuclei molto grandi abbiamo visto che S è costante.

I nuclei più leggeri hanno meno protoni vicini, S per loro è minore (lo stesso vale per S lungo i nuclei periferici).

Ricordiamo anche che $V \propto A$.

Iniziamo con lo scrivere la formula commentando successivamente i vari termini presenti in essa.

$$Z_m = \frac{M_n - M_p + Q_c A^{-1/3} + \frac{4}{7} Q_{sym}}{2 Q_{coul} A^{-2/3} + 8 Q_{sym} \cdot A^{-1}} \approx \frac{A}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{7} \frac{Q_{coul} A^{2/3}}{Q_{sym}}} (*)$$

$Q_{sym} \approx 23 \text{ MeV}/c^2$

$Q_{coul} \approx 0.7 \text{ MeV}/c^2$

$$Z_m = \begin{cases} \frac{A}{2} \approx \frac{1}{7} \frac{Q_{coul} A^{2/3}}{Q_{sym}} \ll 1 \\ < \frac{A}{2} \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Ecco spiegato l'andamento del grafico
 (*) in maniera analitica.

Il fatto che sia presente questo scostamento è dovuto alla repulsione coulombiana che diventa sempre maggiore per nuclei sempre più pesanti.

Mostriamo alcuni esempi di come ben predice l'andamento di nuclei questa formula:

${}^{197}_{79}\text{Au} \rightarrow \frac{Z}{A} = 0.4$; ${}^{208}_{82}\text{Pb} \rightarrow \frac{Z}{A} = 0.394$; ${}^{63}_{29}\text{Cu} \rightarrow \frac{Z}{A} = 0.46$

in $A=150$ da (*) $Z_m = 97.8 \rightarrow {}^{150}_{98}\text{Ce}$

Ricavare Q_{coul} :

Sfruttiamo l'analogia con il caso di una sfera carica: vediamo il lavoro che occorre spendere per caricare una sfera di raggio R :

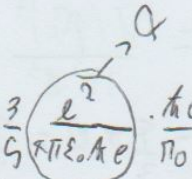
$dQ \rightarrow Q$ $dU = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{R}$

$W = \int dU = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q dq}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \int_0^Q q dq \rightarrow q(r) \text{ è costante nella parte centrale}$

$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ $r(q) = \left(\frac{q}{Q}\right)^{1/3} R$

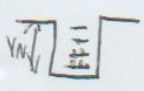
$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^{1/3}}{R} \frac{3}{5} Q^{5/3} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 Z^2}{R_0 A^{2/3}}$ $\rightarrow Q_{coul}$

$\rightarrow Q_{coul} \approx \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k_e} \frac{k_e}{\pi_0} \approx 0.77 \text{ MeV}$



$$\frac{|BEI|}{A} \rightarrow 7 \div 8 \text{ MeV}$$

Il valore di V_0 allora è: $V_0 \approx \epsilon_F + \frac{|BEI|}{A} \approx 90 \text{ MeV}$



Questo valore non dipende da A e questo fa sì che, visto che l'energia cinetica dei nucleoni è paragonabile a V_0 , il legame nei nuclei è piuttosto debole.

Caso generale: $N \neq Z$

In questo caso $n > z$. Visto che il livello di Fermi deve essere uguale per tutti sia stabilizzato nel nucleo, ciò che varia è la profondità della buca di potenziale, i neutroni hanno una buca più profonda e di conseguenza sono più legati dei protoni.

Vediamo come dipende l'energia di legame dal surplus di neutroni.

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle_N + \langle K \rangle_Z$$

$$\langle K \rangle_N = 2 \int \frac{p^2}{2M} dn = 2 \frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3 2M} \int_0^{p_F^N} p^3 dp = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3 2M} \cdot \frac{(p_F^N)^5}{5} = \frac{4}{3} \frac{\rho_0^3 A}{\pi \hbar^3 10M} \cdot (p_F^N)^5 =$$

$$= \frac{3}{10M} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{\rho_0^2} \frac{N^{5/3}}{A^{2/3}}$$

$$\langle K \rangle = \frac{3}{10M} \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{\rho_0^2} \cdot \frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Si nota che il valore minimo di $\langle K \rangle$ si ha quando $Z = N = \frac{A}{2}$
 Se $Z \neq N$ chiamiamo $\Delta = N - Z$

$$N = \frac{A}{2} + \frac{\Delta}{2} \quad Z = \frac{A}{2} - \frac{\Delta}{2} \quad ; \quad \text{se } \frac{\Delta}{A} \ll 1 : \quad (1+x)^n = 1 + nx + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2}$$

$$N = \frac{A}{2} \left(1 + \frac{\Delta}{A}\right) \quad Z = \frac{A}{2} \left(1 - \frac{\Delta}{A}\right)$$

$$\frac{N^{5/3} + Z^{5/3}}{A^{2/3}} = \frac{1}{A^{2/3}} \cdot \frac{A^{5/3}}{2^{5/3}} \left[\left(1 + \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} + \left(1 - \frac{\Delta}{A}\right)^{5/3} \right] = \frac{1}{2^{5/3}} \left[2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{2/3}} \left[1 + \frac{5}{9} \left(\frac{\Delta}{A}\right)^2 \right]$$

$$\langle K \rangle = \frac{3}{10M} \cdot \frac{\hbar^2}{\rho_0^2} \cdot \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A} + \dots \right]$$

↙ termine volume

Nonostante sia un modello rozzo, ci permette di capire da dove venire il termine sym anche se non lo riproduce esattamente.

$$|BEI| = \text{sym} \frac{(N-Z)^2}{A}$$

MODELLO A SHELL

129

Alcune evidenze sperimentali riguardanti il nucleo non hanno riscontro nel modello che abbiamo fornito fino ad ora. Analizzando e studiando fenomeni come energia di separazione di protoni e neutroni o assorbimento di neutroni da parte del nucleo, sono presenti dei numeri di N o di Z (i cosiddetti numeri magici) che mostrano un comportamento simile agli elettroni negli orbitali nel momento in cui andavamo a riempire le shell.

Il numeri di N o Z in questione sono: 2-8-20-28-50-82-126.

Quello che andremo a fare sarà, attraverso l'ipotesi che esista un modello a shell del nucleo, confrontare i dati sperimentali.

$$S_{2n}^{EXP} = BE^{EXP}(Z, N) - BE^{EXP}(Z, N-2)$$

$$S_{2n}^{FSM} = BE^{FSM}(Z, N) - BE^{FSM}(Z, N-2)$$

$$A_s = S_{2n}^{FSM} - S_{2n}^{EXP}$$

Quello che è stato fatto sperimentalmente è stato misurare l'energia di separazione di 2 neutroni (con il termine di pairing non può dare contributi diversi) e confrontare la differenza con l'analogo risultato della formula semi empirica di massa (FSM).

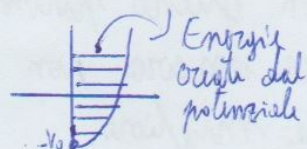
Inoltre per $N = 90, 82, 126$ si vede che bombardando vari nuclei con neutroni veloci, la sezione d'urto (probabilità che il neutrone venga assorbito) diminuisce intorno ai numeri magici.

Potenziale del modello a shell

Il primo passo nello sviluppo del modello è la scelta del potenziale a cui sono soggetti i nucleoni. Possiamo considerare due potenziali da cui ricaviamo già risolto l'Hamiltoniana e ne conosciamo gli autostati: il potenziale a buca con pareti infinite e l'oscillatore armonico (HO). Nel primo caso ciò che troviamo sono livelli energetici non equispaziati e che non rispondono ai numeri magici.

Vediamo l'oscillatore armonico:

$$V_{HO} = \frac{1}{2} \mu \omega^2 r^2 - V_0$$



Andiamo a vedere se, una volta trovati i livelli, riempilandoli si ritrovano i numeri magici.

Usiamo la stessa notazione spettroscopica per annotare i livelli (n, l, m) con l'unica eccezione che n non è il numero quantico principale ma conta il numero di livelli con un certo l .

POTENZIALE DI SPIN ORBITA

131

Le interazioni di spin-orbita nascono dall'interazione elettromagnetica fra il momento magnetico dell'elettrone con il campo magnetico generato dal suo moto intorno al nucleo.

$$V(R) = V_{CENTR}(R) - V_{SO}(R) \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{\hbar^2}$$

La presenza del termine $\vec{L} \cdot \vec{S}$ causa il riordinamento dei livelli, elimina la degenerazione di questi ultimi a fissato momento angolare. Se prima il sistema era descritto da $L^2, L_z, S^2, S_z \rightarrow |l, m_l, s, s_z\rangle$, ora succede questo: $[H, L_z] \neq 0, [H, S_z] \neq 0$. Questo significa che m e s_z non sono più dei buoni numeri quantici.

Il problema si risolve introducendo l'operatore $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ (momento angolare totale).

$$J^2 \rightarrow j(j+1) \quad J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

Se scriviamo $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$ otteniamo un buon set di operatori scegliendo $L^2, S^2, J^2, J_z \rightarrow |j, m_j, l, s\rangle$.

Fissato l , e meno che non sia uguale a 0, j può assumere 2 valori:

$$j_+ = l + \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad j_- = l - \frac{1}{2}$$

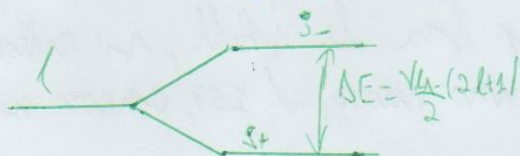
Potremo calcolare le differenze energetiche calcolando il termine

$$\begin{aligned} \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle &= \langle j, m_j, l, s | \vec{L} \cdot \vec{S} | j, m_j, l, s \rangle = \langle j, m_j, l, s | \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2) | j, m_j, l, s \rangle = \\ &= \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \end{aligned}$$

$$\text{Se } j = j_+ \quad \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} l$$

$$\text{Se } j = j_- \quad \langle \vec{L} \cdot \vec{S} \rangle = -\frac{\hbar^2}{2} (l+1)$$

$$\Delta E = \langle V_{SO} \rangle_{j_-} - \langle V_{SO} \rangle_{j_+} = -\frac{V_{SO}}{\hbar^2} \left[-\frac{\hbar^2}{2} l(l+1) - \frac{\hbar^2}{2} l \right] = \frac{V_{SO}}{2} [2l+1]$$



OPERATORE PARITÀ

Definiamo l'operatore parità definito nel seguente modo:

$$P\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$$

ossia causa la riflessione di tutte le coordinate attraverso l'origine. Se un sistema resta invariato dallo scambio (riflessione) delle coordinate, ci aspettiamo che nessuna osservabile cambi in seguito alla riflessione.

Se per esempio ci troviamo di fronte ad un potenziale centrale ($V(\vec{r}) = V(-\vec{r})$) allora $|\psi(\vec{r})|^2 = |\psi(-\vec{r})|^2$.

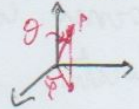
In questo caso $\psi(\vec{r}) = \pm \psi(-\vec{r})$.

Se $\psi(\vec{r}) = \psi(-\vec{r})$ ci troviamo nel caso in cui $P^2\psi(\vec{r}) = P(\psi(-\vec{r})) = \psi(\vec{r})$, ossia $P^2 = 1$ (che può assumere valori $P = \pm 1$) e quindi $P = \pm 1$. Questo caso è conosciuto come parità positiva.

Se $\psi(\vec{r}) = -\psi(-\vec{r})$ è il caso di $P = -1$ e parità negativa.

Supponiamo di trovarci nel caso di un potenziale centrale (o di spin orbita). Si dimostra che fissato l la parità è definita. Nel caso di un oscillatore armonico:

$Y_{lm}(\theta, \varphi)$ è la f. d'onda che lo descrive. Applicando l'operatore



di parità: $P Y_{lm}(\theta, \varphi) = Y_{lm}(\pi - \theta, \pi + \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$

Questo perché $Y_{lm}(\theta, \varphi) \propto e^{im\varphi} P_{lm}(\cos\theta) \xrightarrow{P} (-1)^m (-1)^{m+l} e^{im\varphi} P_{lm}(\cos\theta) \rightarrow (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi)$

In queste condizioni se l è dispari la parità è dispari, se l pari la parità è pari.

Ritorniamo al caso dell' ^{29}O e ^{22}O . Il ground state dell' ^{29}O ha il neutrone spaiato nella shell $P_{1/2}$, con $l=1$, ha quindi parità pari.

Nell' ^{22}O l'ultimo neutrone è nella shell con $l=3$ e quindi ha parità dispari la f. d'onda che descrive il nucleo.

INTERAZIONI NUCLEARI

135

Prima di entrare nello specifico e di studiare a livello quantitativo le interazioni nucleari, vediamo cosa possiamo supporre da evidenze sperimentali:

- All'interno del nucleo queste forze sono maggiori di quelle coulombiane, infatti contrastano la repulsione dei protoni nel nucleo.
 - Fuori dal nucleo, su scala atomica, sono trascurabili le interazioni fra diversi atomi e quindi fra diversi nuclei possono essere capite solo attraverso le forze coulombiane.
 - Particelle come elettroni sono immuni alle forze nucleari.
 - La forza fra nucleoni è indipendente dal fatto che siano protoni o neutroni (indipendenza di carica).
- Consideriamo il caso di ${}_{10}^{24}\text{Ne}_{14}$ e ${}_{11}^{24}\text{Ne}_{13}$ oppure ${}_{9}^{24}\text{F}_{15}$ e ${}_{12}^{24}\text{Mg}_{12}$.
- Si trova sperimentalmente che, in questi due casi, scambiando protoni e neutroni si trovano gli stessi stati eccitati e gli stessi livelli di energia. Nel seguito esploreremo in dettaglio la differenza fra questi quattro elementi e la diversa natura fra coppie di neutroni e protoni.
- La forza fra due nucleoni dipende dal parallelismo o antiparallelismo dei due spin.
 - Nell'interazione fra nucleoni è presente un termine repulsivo che li tiene ad una certa distanza media fra loro.
 - Questa forza ha un componente non centrale che non conserva il momento angolare orbitale.

DEUTONE

Iniziamo la nostra analisi da elementi leggeri, ad esempio il deutone, nucleo di deuterio (un protone ed un neutrone).

Il deutone sta ai fisici nucleari come l'idrogeno sta ai fisici atomici. L'unica differenza sta nel fatto che il deutone ha un legame con gli altri fra nucleoni che esistono solo due stati, neutrone e protone legati o liberi.

Lo trovo scritto come ${}^2_1\text{H}$, ${}^2_1\text{D}$ oppure d .

$$|BE| = M_p + M_n - M({}^2_1\text{H}) = 2,22 \text{ MeV}$$

Molto più basso degli altri nuclei, 7 volte più basso dell'Elio 4.

Possiamo scrivere uno stato con $L=0$ come diverse combinazioni B7
 ni di stati con momento angolare pari a 0 o 2.

Insomma se il sistema ha parità pari la sua f d'onda può essere scritta (usando per convenzione $^{2s+1}L_S$, dove $L=S, P, D, \dots$)

$$\Psi_{SD} = a \Psi(^3S_1) + b \Psi(^3D_1) \rightarrow S=1$$

$$S \Rightarrow L=0 \quad D \Rightarrow L=2$$

$$\Psi_{PP} = c \Psi(^3P_1) + d \Psi(^1P_1) \rightarrow S=1, 0$$

$$P \Rightarrow L=1$$

Ricordando quanto detto sulla parità pari:

$$\langle \Psi_{SD} | \hat{M}_d | \Psi_{SD} \rangle \rightarrow \text{Esistono } a \text{ e } b \text{ che riproducono } \mu_d^{\text{exp}}$$

$$\langle \Psi_{PP} | \hat{M}_d | \Psi_{PP} \rangle \rightarrow \text{Non esistono } c \text{ e } d \text{ che...} //$$

Sai trovare che, dagli esperimenti:

$$S=1 \quad \mu_d^{\text{exp}} = 0,897 \mu_N \quad a = 0,288 \text{ fm}^2$$

$$c^2 = 0,96 \quad b^2 = 0,04 \rightarrow \text{prob di trovare } \Psi(^3S_1) \text{ e } \Psi(^3D_1)$$

Il discostamento di μ_d da $0,88 \mu_N$ è dato dalla sovrapposizione di $\Psi(^3D_1)$.

Arrivati a questo punto capiamo che ci troviamo davanti a forze non centrali, in cui L non è costante ma dato da una miscela di stati con L diverso.

ISOSPIN

Neutrone e protone possono essere visti come due stati quantistici di una stessa entità: il nucleone.

Protone e neutrone sono fermioni con spin pari a $1/2$ ($S_z = \pm 1/2$). Stabilisce un nuovo numero quantico che distingue protone da neutrone e che quindi possa assumere solo due valori. Esso avrà la stessa algebra degli operatori di spin $1/2$.

L'operatore di isospin \hat{T} assume solo il valore $T=1/2$ e la terza componente T_z vale:

$$T_z |n\rangle = -\frac{1}{2} |n\rangle$$

$$T_z |p\rangle = \frac{1}{2} |p\rangle$$

Supponiamo che un singolo nucleone sia descritto da:

$$\psi_{\alpha, t_z, s_z}(\vec{r}) = \psi_{\alpha}(\vec{r}) \chi_{s_z} \eta_{t_z} \quad [\alpha \rightarrow n, l, m]$$

Definiamo gli stati di una particella separando la f. d'onda spaziale:

$$\psi_{\alpha, \beta}^A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\alpha}(\vec{r}_1) \psi_{\beta}(\vec{r}_2) - \psi_{\beta}(\vec{r}_1) \psi_{\alpha}(\vec{r}_2)] \quad \text{ANTISIMMETRICA}$$

$$\psi_{\alpha, \beta}^S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\alpha}(\vec{r}_1) \psi_{\beta}(\vec{r}_2) + \psi_{\beta}(\vec{r}_1) \psi_{\alpha}(\vec{r}_2)] \quad \text{SIMMETRICA}$$

Possiamo scrivere una f. d'onda di due nucleoni completamente antisimmetrica nei seguenti modi (abbinata con stati di tripletto (simm.) o di singoletto (antisimm.) di spin e isospin):

$$\psi_{\alpha, \beta, S, T}(1, 2) = \psi_{\alpha, \beta}^A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \times \begin{cases} |S=1, S_z\rangle |T=1, T_z\rangle \\ |S=0\rangle |T=0\rangle \end{cases} \quad S = \text{SPIN TOTALE}$$

$$\psi_{\alpha, \beta, S, T}(1, 2) = \psi_{\alpha, \beta}^S(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \times \begin{cases} |S=1, S_z\rangle |T=0\rangle \\ |S=0\rangle |T=1, T_z\rangle \end{cases}$$

Le interazioni p-p e n-n sono identiche?

Per quanto riguarda le pure forze nucleari gli stati di isospin interagiscono in maniera identica (simmetria di carica).

Analizziamo i 7 elementi in figura. F e Mg hanno gli stessi livelli energetici, così come Ne e Na.

Scambiando da F a Ne così come da Mg a Na, si scambia un neutrone con un protone e qui i livelli energetici

cambiano. Se ne deduce che, essendo questi livelli più bassi energeticamente, il legame p-n è più legato del legame p-p o n-n (indipendenza della carica).

Queste considerazioni derivano da veri esperimenti.

Il prossimo passo è descrivere un potenziale che quantifichi la simmetria di carica. Deve essere invariante per protoni e neutroni che si scambiano.

²⁴ F	²⁴ Mg
9 ⁺ 15 ⁺	12 ⁺ 12 ⁺
10 ⁺ 14 ⁺	11 ⁺ 13 ⁺
10 ⁺ 14 ⁺	11 ⁺ 13 ⁺
²⁰ Ne	²⁰ Na
10 ⁺ 10 ⁺	11 ⁺ 9 ⁺
10 ⁺ 10 ⁺	11 ⁺ 9 ⁺

Per due particelle:

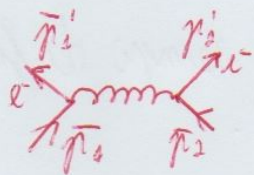
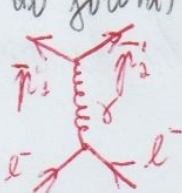
$$\begin{cases} \Psi_{pp}(1,2) = \Psi^A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) |T=1, T_z=+1\rangle \\ \Psi_{nn}(1,2) = \Psi^A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) |T=1, T_z=-1\rangle \\ \Psi_{np}(1,2) = \Psi^A(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) |T=1, T_z=0\rangle \\ \Psi_{pn}(1,2) = \Psi^S(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) |T=0\rangle \end{cases}$$

Per $T=1$ la parte spaziale e di spin sono entesimmetriche, per $T=0$ entesimmetrica della parte isospinometrica e Ψ sarà simmetrica (spazio e spin).

Si può dimostrare che:

$$[\vec{E}^{(1)}, \vec{E}^{(2)}, \Pi_{x_1}] = 0$$

A livello maggiormente quantitativo queste forze vengono descritte all'intorno della QED (Quantum electrodynamics). In questo paradigma l'interazione nucleare viene vista come scambio di pioni, descritto in maniera simile alla interazione fra elettroni (interagiscono scambiando fotoni).



DIAGRAMMI DI FEYNMAN

Il fatto che i fotoni abbiano massa nulla fa sì che il potenziale di interazione vada come $k \propto \frac{1}{r}$.

I diagrammi in figura, detti diagrammi di Feynman, nascondono dietro tutte le equazioni che descrivono la probabilità di questo evento.

Si tratta di un diagramma spazio-temporale in cui sono presenti alcune particellari convezioni per rappresentare le particelle.

Le particelle che non appaiono né nello stato iniziale né in quello finale, come i fotoni in questo caso, sono dette particelle virtuali.

I punti in cui le particelle si incontrano si chiamano vertici. Ogni vertice corrisponde ad un elemento della matrice di transizione.

Per ogni vertice l'ampiezza della transizione si porta dietro un fattore pari a $\sqrt{\alpha}$. L'elemento di transizione della matrice si porta dietro include la sovrapposizione di tutte le ampiezze di transizione che

In questa equazione manca il termine di sorgente del campo ϕ .
 Nel caso dell'interazione e.m. abbiamo un'equazione in cui le sorgenti sono le cariche elettriche, e gli elettroni.

Le equazioni del campo e.m.:

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{POISSON})$$

ρ indica la densità di carica, se estesa ha densità nello spazio, se puntiforme è una $\delta(\vec{r})$. Si indica in genere come:

$$\rho(\vec{r}) = Z \cdot e \cdot f(\vec{r}) \quad [f(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \text{ nel caso puntiforme}]$$

$$\int f(\vec{r}) d^3r = 1$$

Per tornare in analogia con il caso e.m. supponiamo che la sorgente sia puntiforme ed abbia, questo termine, la forma

$$\Delta \phi = -g \delta(\vec{r})$$

dove g è un fattore di accoppiamento che misura l'intensità dell'interazione nucleare.

~~Per tornare~~ Per tornare nel limite statico dell'equazione di Klein-Gordon (non c'è il termine $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$) aggiungiamo la sorgente:

$$\nabla^2 \phi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi - g \delta(\vec{r})$$

È una generalizzazione dell'equazione di Poisson per oggetti con $m \neq 0$.
 La soluzione di quest'ultima equazione differenziale è:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{g}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} e^{-\frac{m c}{\hbar} \cdot r}$$

$\frac{\hbar}{m c} = \frac{\hbar c}{m c^2} = \lambda \rightarrow$ la lunghezza d'onda di questo oggetto misterioso con $m \neq 0$, detta **lunghezza d'onda di Compton**.

Notiamo che $\phi(r)$ tende rapidamente a zero, facendo capire che l'interazione nucleare ha un corto raggio d'azione, piccola rispetto le dimensioni dei nuclei stessi, essendo λ dell'ordine di ± 1 fm. Questo fatto, ossia che $\lambda \approx 1$ fm poiché $\hbar c \approx m c^2$ ($\hbar c \approx 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$) quando $r \rightarrow 0$ prende il nome di **teoria di Yukawa**.

Questi oggetti con $m_\pi \approx 140 \text{ MeV}$ prendono il nome di Pioni.

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$$

OSCILLAZIONE NEUTRINI

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

LEPTONI

Alle particelle elementari appartiene un'altra classe, prima di struttura i leptoni. Ne esistono quattro tipi: elettroni, muoni, tauoni e neutrini. I neutrini sono suddivisi in tre categorie associate ai primi 3 leptoni:

$$\begin{pmatrix} e^- \\ \bar{\nu}_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau^- \\ \bar{\nu}_\tau \end{pmatrix} \quad S = \frac{1}{2}$$

I leptoni sono caratterizzati da 3 numeri quantici, chiamati numeri leptonici. Ad ogni doppietto di leptoni viene associato un numero leptonico diverso che deve essere conservato in tutte le interazioni. Esso è definito come il numero di ~~nuovi~~ leptoni di un certo genere (ad esempio e^-) più il numero di neutrini ed esso associato meno il numero delle loro antiparticelle.

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad l_e = 0 = +1 - 1$$

$$m_e = 0,511 \text{ MeV}$$

$$m_\mu = 106 \text{ MeV}$$

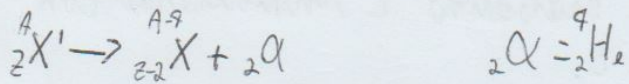
$$m_\tau = 1800 \text{ MeV}$$

DECADIMENTI RADIOATTIVI

42

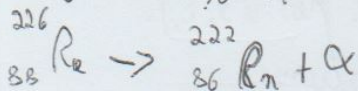
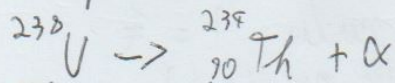
Plottando l'insieme di nuclei stabili sul piano Z-N si vede che essi si trovano in una banda molto sottile. Fuori da questa zona i nuclei sono instabili e decadono spontaneamente in vari modi:

DECADIMENTI α



Notiamo che il numero barionico si conserva.

Esempi di decadimenti α :



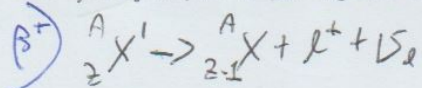
Questo decadimento avviene perché energeticamente favorevole.

$$Q = (M_{X'} - M_X - M_\alpha) c^2 > 0$$

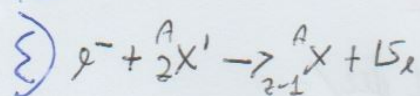
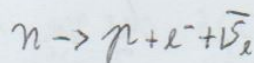
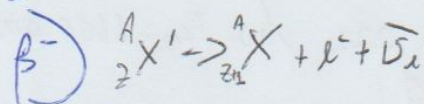
$$Q = |BE_X + BE_\alpha| - |BE_{X'}| = K_X + K_\alpha > 0$$

DECADIMENTI β

Ne esistono tre sottotipi:



Un protone si trasforma in: $p \rightarrow n + e^+ + \bar{\nu}_e$



Il nucleo cattura un elettrone della nuvola elettronica dando vita a questa reazione.

Notiamo che nel caso β^+ :

$$Q_{\beta^+} = (M_{X'} - M_X - m_e) c^2 < 0 \rightarrow \text{Il protone ha massa minore del neutrone, non è un decadimento spontaneo.}$$

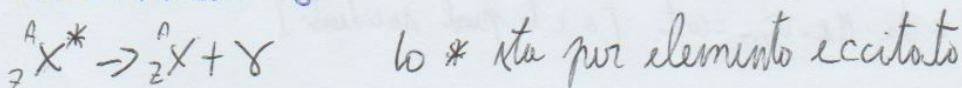
$$|BE_X| > |BE_{X'}|$$

Per il β^- :

$$Q_{\beta^-} = (M_{X'} - M_X - m_e) c^2 > 0 \rightarrow (M_n - M_p - m_e) c^2 > 0$$

Può avvenire spontaneamente

DECADIMENTI γ

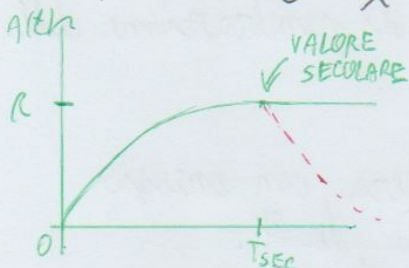


Determiniamo $A(t)$:

$$\frac{dN}{dt} = R - \lambda N(t) \quad \frac{dN}{dt} + \lambda N(t) = R \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} [N(t)e^{\lambda t}] = R e^{\lambda t}$$

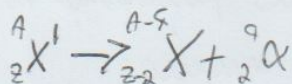
$$N(t)e^{\lambda t} \Big|_0^t = R \int_0^t e^{\lambda t'} dt' \quad N(0) = 0$$

$$N(t)e^{\lambda t} = R \left[\frac{e^{\lambda t} - 1}{\lambda} \right] \quad \rightarrow \quad A(t) = \lambda N(t) = R [1 - e^{-\lambda t}]$$



In prossimità del valore secolare l'attività è costante. Quando si produce una situazione del genere in laboratorio con un acceleratore di particelle, arrivati al valore secolare si spegne l'acceleratore e il campione è pronto per essere trasportato, decedendo secondo la solita legge λP .

DECADIMENTI α



Si vedono decadimenti radiattivi α solo sopra $A > 150$, sotto non esistono nuclei che decadono spontaneamente.

Studiamo la dinamica di questi decadimenti.

Supponiamo che inizialmente: $K_x = 0$ e $\vec{p}_x = 0$ (X' in quiete).

Applichiamo le leggi di conservazione:

$$\text{E) } M_{X'} c^2 = M_X c^2 + M_\alpha c^2 + K_X + K_\alpha$$

$$\text{P) } 0 = \vec{p}_X + \vec{p}_\alpha \rightarrow \vec{p}_X = -\vec{p}_\alpha$$

$$Q_{\text{reazione}} = (M_{X'} - M_X - M_\alpha) c^2 = K_X + K_\alpha > 0$$

Per l'espressione di K_α visto che viene rispettata la relazione:

$$M_\alpha c^2 \gg K_\alpha$$

possiamo allora usare l'espressione non relativistica $K_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha}$

$$Q = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha} + \frac{p_X^2}{2M_X} = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha} \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_X} \right) = K_\alpha \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_X} \right) \rightarrow K_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{M_\alpha}{M_X}} \approx Q \left(1 - \frac{M_\alpha}{M_X} \right)$$

$$Q \approx K_\alpha \approx 7 \div 9 \text{ MeV}$$

$$\begin{cases} K_\alpha = Q \left(1 + \frac{M_\alpha}{M_X} \right)^{-1} \\ K_X = Q - K_\alpha \end{cases}$$

$T = e^{-2G}$ $G = \frac{1}{\hbar} \int_0^{R_c} \sqrt{2M\alpha(U_c(r) - K\alpha)} dr$ ← **Fattore di Gamow** 51

$U_c(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(Z-2)e^2}{r}$ $K\alpha = U_c(R_c) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2(Z-2)e^2}{R_c}$

$G = \frac{\sqrt{2M\alpha K\alpha}}{\hbar} \int_0^{R_c} \sqrt{\frac{U_c(r)}{K\alpha} - 1} dr = \frac{\sqrt{2M\alpha K\alpha}}{\hbar} \int_0^{R_c} \sqrt{\frac{R_c}{r} - 1} dr = R_c \frac{\sqrt{2M\alpha K\alpha}}{\hbar} \int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx$

Quello che abbiamo fatto è stato fare un cambio di variabile.
L'ultimo integrale è noto se l'estremo di integrazione inferiore vale 0. Se $\frac{R_c}{R_c} \rightarrow 0$ $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1} dx = \frac{\pi}{2}$

$\frac{R_c}{R_c} = \frac{K\alpha}{U_c(R_c)} = \frac{7.4 \text{ MeV}}{70 \text{ MeV}} \ll 1 \rightarrow \bar{x}$ **giusto approssimare!**

$G \approx R_c \frac{\sqrt{2M\alpha K\alpha}}{\hbar} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{e^2 2(Z-2) \cdot \hbar c \sqrt{2M\alpha K\alpha}}{4\pi\epsilon_0 \cdot K\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot \pi (Z-2) \alpha}{\gamma_{\alpha}/e}$

La probabilità per o.d.t. λ per una particella α di fuggire dal nucleo sarà proporzionale a:

$\lambda \propto T \propto e^{-2G}$

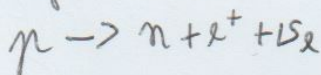
Poiché $\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \rightarrow \ln T_{1/2} \propto G \propto \frac{Z}{\sqrt{K\alpha}}$

**LEGGE DI
GEIGER-NUSSBAUM**

ci aspettiamo che $\ln T_{1/2}$ vari con Z e con $K\alpha^{-1/2}$.



Nuclii instabili con un protone in eccesso decadono che:



Tali processi prendono il nome di decadimenti β^+ .

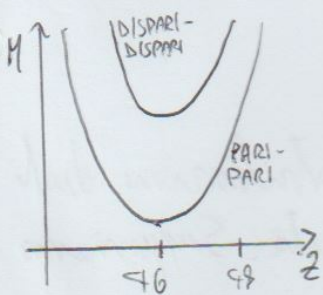
$$Q_{\beta^+} = (M_{X_1} - M_{X_2} - m_e) c^2 = [M_A(Z_1 X_1) - Z_2 m_e] c^2 - [M_A(Z_2 X_2) - (Z_2 - 1) m_e] c^2 - m_e c^2 =$$

$$= M_A(Z_1 X_1) - M_A(Z_2 X_2) c^2 - 2 m_e c^2$$

Notiamo come, derivando l'espressione di $M(A, Z)$, è possibile ricavare Z_{MIN} :

$$\frac{\partial M(A, Z)}{\partial Z} = 0 \rightarrow Z_{MIN} = \frac{B}{28}$$

DECADIMENTI β CON A PARI



Consideriamo $A = 106$. Se $A > 70$ spesso c'è più di un isotopo β stabile.

L'isotopo più stabile è il $^{106}_{46}Pd$; il $^{106}_{48}Cd$ può anche essere considerato stabile perché i suoi vicini immediati sono alla parabola odd-odd, segue che per decadere in Pd deve subire un doppio decadimento β , così improbabile da essere considerato stabile.

Tutti i nuclei dispari dispari sono genericamente instabili.

Alcuni elementi come il $^{70}_{19}K$ e $^{64}_{29}Cu$ decadono sia β^- che β^+ .

CATTURA ELETTRONICA

Un altro tipo di decadimento è la cattura da parte del nucleo di un elettrone appartenente alla nube elettronica dell'atomo stesso.

Succede che:



Vengono in genere catturati gli elettroni appartenenti alle shell più interne, che si trovano più vicini al nucleo, emettendo un raggio X dopo la cattura (compiti con β^+)

TEMPO DI VITA

I tempi di vita di un decadimento β variano da qualche ms a

10^{11} anni.

Per quanto riguarda le singole particelle, un protone non può decadere se non si trova in un nucleo, il neutrone avrebbe in questo caso massa

Nelle nostre applicazioni supporremo sempre $m_\nu = 0$.

Consideriamo il seguente decadimento:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

L'energia cinetica si dividerà fra k_e e $k_{\bar{\nu}_e}$. ~~Supponiamo $k_p \approx 0$.~~
 Ci chiediamo il valore di $k_{e|_{max}}$ nel caso in cui $k_{\bar{\nu}_e|_{min}} \approx 0$.

$$Q = (M_n - M_p - m_e)c^2 = k_p + k_{e|_{max}}$$

$$\vec{p}_p + \vec{p}_e = 0 \quad (\vec{p}_{\bar{\nu}_e} \approx 0)$$

$k_{e|_{max}} \approx Q$ della reazione (supponiamo)

$k_{e|_{max}} \geq m_e c^2$ (maggiore dell'energia a riposo ma non \gg , ~~regime~~ regime relativistico ma non ultra-relativistico)

$k_p \ll M_p c^2$ (regime n.r.)

Poiché $|\vec{p}_p| = |\vec{p}_e|$ e ricordando la relazione:

$$k^2 + 2Mc^2k = p^2c^2 \rightarrow p_p^2 = p_e^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow k_{e|_{max}}^2 + 2m_e c^2 k_{e|_{max}} = 2M_p c^2 k_p$$

$$k_e^2 + 2[(M_p + m_e)c^2]k_e - 2M_p c^2 Q = 0$$

$$k_e = -(M_p + m_e)c^2 + \sqrt{(M_p + m_e)^2 c^4 + 2M_p c^2 Q}$$

Dal valore di Q sperimentale si ricava $k_e = 0,78 \pm 1 \text{ MeV}$, dimostrando che $k_p = Q - k_e \approx 0$.

Ancora sul neutrino:

Esso interagisce poco con la materia. Due possibili reazioni sono:

$$\alpha) \nu_e + n \rightarrow p + e^-$$

$$\beta) \bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$$

Negli anni '90 sono stati condotti esperimenti sull'interazione debole (quelle che avviene fra leptoni e quark, come in questo caso).

Le sezioni d'urto di questi esperimenti dell'interazione del nucleo con i neutrini erano molto basse:

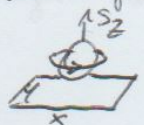
$$\sigma_\nu = 10^{-49} \text{ b} \quad [1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ cm}^2]$$

$$\sigma_\nu = 10^{-52} \text{ cm}^2$$

ESPERIMENTO DI YANG-LEE - WU

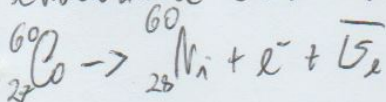
57

Se in un sistema si ha $[H, P] = 0$ si ha a che fare con una interazione che, invertendo le coordinate si comporta allo stesso modo. Un mezzo che cade davanti uno specchio è invariante per riflessione rispetto ad un piano verticale ma non orizzontale. Un nucleo con spin s diretto lungo z è simmetrico per parità (riflessione rispetto al piano x, y). Invertendo le coordinate la direzione dello spin non cambia.



Le forze deboli viola la parità.

In questo esperimento si usa del ^{60}Co che decade β , ossia nella cui evoluzione entra in gioco un'interazione debole.

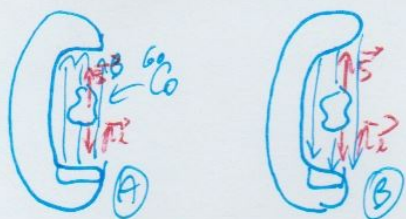


L'esperimento consiste nell'immergere nuclei di ^{60}Co in un campo magnetico per $T \rightarrow 0,01\text{K}$, così da far allineare gli spin di tutti i nuclei:

$$S(^{60}\text{Co}) = S \hbar$$

Per questo T l'orientazione è molto precisa.

Invece di duplicare i rivelatori di elettroni se ne utilizza solo uno invertendo il campo B .



Se lo stato finale è simmetrico per parità significa che tanti elettroni vengono emessi in (A) come in (B).

Si trovò che $N_e^A \gg N_e^B$.

$$N_e^{tot} \approx N_e^A$$

Definiamo l'elicità:

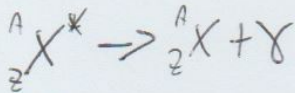
$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}| \cdot |\vec{p}|}$$

In (A) $h = -1$ (\vec{s} e \vec{p} antiparalleli) e in (B) $h = 1$.

DECADIMENTO γ

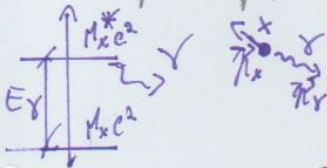
59

Frequentemente, un nucleo che subisce un decadimento radioattivo rimane in uno stato energetico eccitato. Può subire un decadimento ad uno stato ad energia più bassa emettendo un fotone con energie dell'ordine del MeV (raggi γ).



$$M_x^* c^2 = M_x c^2 + E_\gamma + K_x$$

$$0 = \vec{p}_x + \vec{p}_\gamma$$



L'energia cinetica del nucleo è trascurabile nell'espressione della conservazione dell'energia:

$$K_x = \frac{p_x^2 c^2}{2 M_x c^2} = \frac{p_\gamma^2 c^2}{2 M_x c^2} = \frac{E_\gamma^2}{2 M_x c^2}$$

Se $E_\gamma \approx 2 \text{ MeV}$ e $A \approx 90$:

$$M_x c^2 \approx 50 M_p c^2 = 50,939 \text{ MeV} \rightarrow K_x \approx 70 \text{ eV} \ll E_\gamma$$

Allora

$$E_\gamma \approx M_x^* c^2 - M_x c^2$$

Dal punto di vista operativo per trovare E_γ basta fare la differenza fra le masse.

$$b = \sqrt{\frac{R^2}{1+\epsilon}}$$

Quanto vale il contributo dovuto alla superficie? Si può dimostrare che:

$$\Sigma_{\text{sup}} = 2\pi \left(b^2 + ab \frac{k}{\sin(kl)} \right) \quad k = \omega r \cos\left(\frac{l}{a}\right)$$

Si dimostra che, facendo vari sviluppi:

$$E_{\text{sup}}|_{\text{DEFORMATA}} = Q_s \cdot A^{2/3} \left(1 + \frac{2}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

$$E_{\text{coul}}|_{\text{DEF}} = Q_c Z^2 \cdot A^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{5} \epsilon^2 + \dots \right)$$

La deformazione diventa conveniente solo quando $\Delta E < 0$:

$$\Delta E = (E_{\text{sup}} + E_{\text{coul}})_s - (E_{\text{sup}} + E_{\text{coul}})_{\text{ris}} = \frac{\epsilon^2}{5} (2 Q_s A^{2/3} - Q_c Z^2 A^{-1/3}) < 0$$

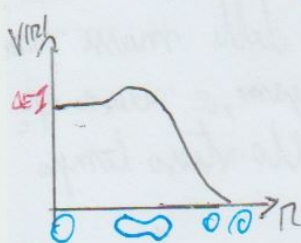
$$\frac{Z^2}{A} > 2 \frac{Q_s}{Q_c} \approx 49$$

Questo significa che, poiché per nuclei pesanti $Z < A/2$:

$$\begin{cases} Z \geq 116 \\ A \geq 270 \end{cases}$$

Questi sono elementi che vengono riprodotti solo in laboratorio.

Solo lo 0.06% degli elementi subisce una fissione spontanea.



Quello che capita nell'²³⁸U è una barriera di potenziale come in figura (²³⁸U come gli altri elementi). Per ottenere la fissione bisogna fornire una quantità di energia pari a questo ΔE .

In genere nell'Uranio $\Delta E \approx 7.5 \text{ MeV}$

Una volta che viene fornita questa energia il termine Coulombiano diminuisce, vincendo sul termine superficiale.

Quando nell'²³⁵U viene assorbito un neutrone si arriva a $\Delta E \approx 6 \text{ MeV}$.



La prob di fissione è maggiore se il neutrone è termico.

$$\frac{1}{\tau} = e^{-(E_0/k)^{1/2}} \propto \sigma_{FUS}$$

Nell'espressione precedente $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Ancora la descrizione non basta. Facendo un esempio numerico, in base a ciò che accade nel sole:

$$p + p, T = 10^7 K, k \sim 1 \text{ KeV}, Z_1 = Z_2 = 1, E_0 = 490 \text{ KeV}$$

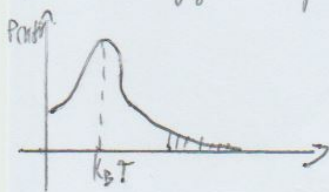
$$\tau \sim e^{-22} = 10^{-96}$$

È troppo basso come valore.

Nel caso in cui: $T = 10^8 K, k \sim 10 \text{ KeV}, T \ll 1$.

L'aver introdotto il solo effetto tunnel non basta, bisogna tenere in conto anche il fatto che i nuclei non hanno tutti la stessa velocità ma seguono la distribuzione di Maxwell-Boltzmann, dove il fattore di probabilità è $e^{-K/k_B T}$.

La maggior parte delle particelle sarà ad energie $k_B T$.



Le particelle che partecipano alla fusione saranno allora un numero abbastanza ristretto.

La probabilità di avere 2 nuclei con velocità relativa v è data da:

$$p(v) dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{k_B T} v^2} v^2 dv$$

dove continueremo ad indicare con m la massa ridotta delle 2 particelle.

Definiamo il numero di reazioni nell'unità di tempo nel plasma di particelle nel seguente modo, ricordando che v non è costante, per cui:

$$R_r = \frac{R}{V} = n_e n_p \langle \sigma(v) \cdot v \rangle$$

dove

$$\langle \sigma(v) \cdot v \rangle = \int_0^{+\infty} \sigma(v) \cdot v \cdot p(v) dv$$

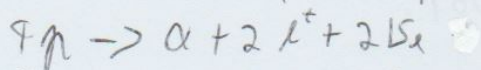
risorge la sezione d'urto. Ricordando quanto detto sull'effetto tunnel:

$$\sigma(k) = q(k) e^{-(E_0/k)^{1/2}}$$

Il termine $q(k)$ è sperimentale, può essere fattorizzato come:

$$\sigma(k) = \frac{S(k)}{k} e^{-(E_0/k)^{1/2}}$$

Combinando queste equazioni:

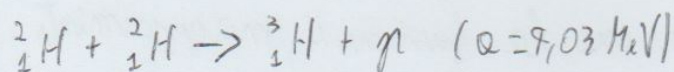
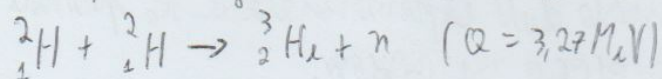


L'energia totale rilasciata è 26,72 MeV. Di queste ogni neutrino porta con sé nello spazio 0,26 MeV.

REATTORI DI FUSIONE

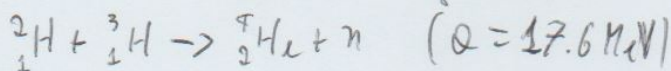
Ciò che si vorrebbe ottenere al giorno d'oggi è una fusione controllata che produca energia pulita. Le reazioni p-p hanno una sezione d'urto troppo bassa, è improbabile che avvenga una reazione se non si hanno a disposizione il numero di atomi nel sole.

Più aumenta Z , più diminuisce la probabilità di fusione. $Z=1$ è ciò che serve, il miglior candidato allora è il deuterio.



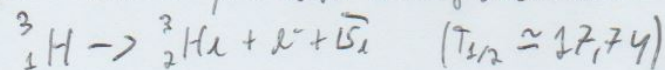
Il deuterio è un buon candidato per alimentare un reattore a fusione.

Le reazioni ancora migliori è:

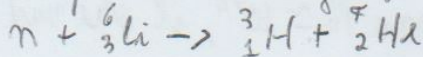


Inoltre $\sigma_{D-T} \gg \sigma_{D-D}$.

Lo svantaggio nell'uso del trizio è che non si produce in natura ma deve essere prodotto artificialmente. Inoltre è radioattivo:



Si produce nel seguente modo:



Il calore rilasciato da questi reattori viene sfruttato per produrre energia. Questo è rilasciato viene visto come energia cinetica delle particelle. La maggior parte dell'energia cinetica viene presa dal neutrone: è difficilmente sfruttabile, esso interagisce poco con i materiali.

Si dimostra che se $Q_{DT} \approx 17,6 \text{ MeV}$, $K_n \approx 14 \text{ MeV}$ e $K_\alpha \approx 3,5 \text{ MeV}$.

L'energia prodotta viene ulteriormente ridotta a causa del calore emesso dal plasma. Il meccanismo è Bremsstrahlung elettronico.