

NUMERO: 2206A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Caruso Carlotta

MATERIA: Controllo e strumentazione dei processi chimici -
Teoria + Esercizi - Prof. Pisano

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

**ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.**

CONTROLLO e STRUMENTAZIONE nei PROCESSI CHIMICI

Come singola UNITÀ di PROCESSO, o una COMBINAZIONE delle stesse, usata per la CONVERSIONE di MATERIE PRIME con UTILIZZO di ENERGIA è un PROCESSO CHIMICO. Nel PROCESSO CHIMICO si intende operata in STATO STAZIONARIO ed in determinate condizioni delle CONDIZIONI NOMINALI in modo che il PRODOTTO abbia le CARATTERISTICHE DESIDERATE. Tuttavia i FENOMENI e le GRANDEZZE coinvolte nel processo sono INEVITABILMENTE SOGGETTI a VARIAZIONE: nelle FASE di ANNO (= da zero al valore nominale) e di SPEGNIMENTO (= dal valore nominale a zero) le REGIE NON può essere STAZIONARIO, sono SEMPRE PRESENTI VARIAZIONI nelle CONDIZIONI d'INGRESSO.

L'OBBIETTIVO PRIMARIO del CONTROLLO di PROCESSO è quindi quello di MANTENERE COSTANTI le CONDIZIONI NOMINALI in modo da ottenere il prodotto desiderato.

È possibile evitare di usare un sistema di controllo, tuttavia prima o poi le variazioni delle condizioni lo renderà necessario.

Il CONTROLLO, utile per gestire fasi di avvio/spegnimento e deviazioni delle condizioni nominali, si basa su:

- MONITORAZIONE delle VARIABILI INDICATRICI dello STATO del PROCESSO

- MANIPOLAZIONE delle VARIABILI di PROCESSO in modo da migliorare le condizioni del processo stesso

Nella conduzione di processo occorre tener conto di ASPETTI TECNICI, ECONOMICI, SOCIALI e di LEGGE. Le UNITÀ di PROCESSO infatti devono operare in:

- SICUREZZA in modo da prevenire incidenti e garantire la sicurezza sia agli operatori che alle popolazioni limitrofe
- RISPETTO di SPECIFICHE di PRODUZIONE in modo da garantire il livello di qualità e produzione desiderato
- CONSIDERAZIONE degli ASPETTI ECONOMICI in quanto le specifiche di mercato possono variare con la richiesta, disponibilità di materie prime e quotazione del prodotto
- RISPETTO dei VINCOLI di LEGGE e OPERATIVI, in particolare tenendo conto dei vincoli relativi a emissioni, produzione di scarti, smaltimento dei rifiuti e dei vincoli operativi necessari a garantire un corretto funzionamento dell'impianto.

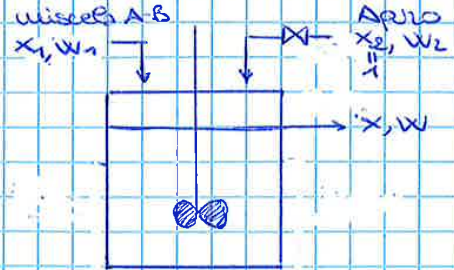
Pertanto, una volta definiti gli obiettivi del sistema di controllo, occorre tenere presente che la MANIPOLAZIONE delle VARIABILI NON può ESSERE ARBITRARIA, ma deve SODDISFARE NUMEROSE ESIGENZE.

Si distinguono due tipi di PROBLEMI di CONTROLLO:

- ASSERVIMENTO: intervento per TUTELA dell'OBBIETTIVO di USCITA
- REGOLAZIONE: intervento per CARATTERIZZAMENTO di CONDIZIONI in INGRESSO

ma con PORTATA della CORRENTE 1 COSTANTE (= parametro).
 Il problema può essere studiato con DUE APPROCCI:

- INGEGNERE di PROCESSO: Se \bar{x}_1 è il valore nominale di x_1 , qual è il valore nominale di w_2 per ottenere x_d ?



Si impostano i BILANCI di MATERIA in CONDIZIONI STAZIONARIE che hanno quindi accumulo nullo e, essendo una miscelazione, anche generazione nulla.

$$\begin{cases} \bar{w}_1 + \bar{w}_2 - \bar{w} = 0 \rightarrow \text{globale} \\ \bar{w}_1 \bar{x}_1 + \bar{w}_2 \bar{x}_2 - \bar{w} \bar{x} = 0 \rightarrow \text{componente A} \end{cases}$$

Perché $\bar{x}_2 = 1$ e $\bar{x} = x_d$:

$$w_2 = \bar{w}_1 \frac{x_d - \bar{x}_1}{1 - x_d}$$

Tali conclusioni sono VALIDE SOLO se $x_1 = \bar{x}_1$!

- INGEGNERE di CONTROLLO: Se x_d varia nel tempo, come posso garantire $x = x_d$?
 L'ingegnere di controllo può risolvere il problema in diversi modi:

1) CONTROLLO in RETROAZIONE: si misura x con un misuratore della concentrazione di A (=AT), lo si confronta con x_d e in base a questo si manipola w_2 con un attuatore (=AC) che generalmente agisce in modo automatico secondo una legge di controllo proporzionale alla variazione di x : $w_2(t) = \bar{w}_2 + K_c(x_d - x(t))$.

Viene detto in RETROAZIONE o FEEDBACK poiché si misura l'uscita e si agisce tornando all'ingresso.

2) CONTROLLO in ANTEAZIONE: si misura x_1 (con AT), si confronta con \bar{x}_1 e in base a questo si manipola w_2 secondo un modello matematico del processo in cui la variazione di w_2 non è proporzionale a quella di x_1 :

$$w_2(t) = \bar{w}_1 \frac{x_d - x_1(t)}{1 - x_d}$$
 (= correlazione tra x_1 e x)

Viene detto in ANTEAZIONE o FEEDFORWARD poiché si agisce e si misura direttamente l'ingresso.

- 3) Si misurano x_1 ed x per poi manipolare w_2
- 4) Per collaborazione tra ingegnere di processo e di controllo si progetta un algoritmo più grande se quale la variazione di x_1 non incide, ma aumentano i costi.

Se il controllo in RETROAZIONE ha lo SVANTAGGIO di AGIRE DOPO che il disturbo si è manifestato, ha però il VANTAGGIO di BASARSI su un MONITORAGGIO CONTINUO della VARIABILE di USCITA.

Analisi del Comportamento Dinamico di un Processo e Modellazione Matematica

Modellazione Matematica

La PROGETTAZIONE di un SISTEMA di CONTROLLO richiede la CONOSCENZA del PROCESSO in CONDIZIONI DINAMICHE. La DINAMICA di PROCESSO mette in CORRELAZIONE la VARIABILE CONTROLLATA con le VARIABILI d'INGRESSO che variano nel tempo.

I MODELLI MATEMATICI permettono di DESCRIVERE il COMPORTAMENTO dei PROCESSI in CONDIZIONI DINAMICHE, e quindi prevedere il comportamento a fronte di variazioni in ingresso, e di PROGETTARE SISTEMI di CONTROLLO.

Avendo una RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA del PROCESSO, l'ANALISI DINAMICA studia la RISPOSTA a TIPI di VARIAZIONI sulle CONDIZIONI d'INGRESSO. È pertanto richiesto l'UTILIZZO di un MODELLO MATEMATICO, che descriva il processo, e di FUNZIONI FORZANTI, che descrivano l'evoluzione delle variabili in ingresso.

IL MODELLO MATEMATICO però RIPRODUCE solo ALCUNE delle CARATTERISTICHE di PROCESSO e si basa su CONDIZIONI INIZIALI, pertanto TUTTI i MODELLI sono SBAGLIATI, ma forniscono PREVISIONI UTILI.

IL GRADO di COMPLESSITÀ del MODELLO va scelto sulla base di: APPLICAZIONE FINALE, BACKGROUND dell'UTENTE FINALE (che deve poterlo comprendere), LIVELLO di CONOSCENZA dei FENOMENI (che ne agevoli un'impiego).

La SCELTA del MODELLO deve essere pertanto un COMPROMESSO tra ACCURATEZZA e COMPLESSITÀ in quanto modelli molto complessi possono risultare inutilizzabili e modelli troppo semplici possono essere poco accurati.

I PROCESSI sono CLASSIFICATI in base alla NATURA del MODELLO che li descrive.

I MODELLI MATEMATICI sono usati per: MIGLIORARE la COMPRESIONE di un PROCESSO, FORNIRE gli ADDETTI a un impianto, SVILUPPARE NUOVE STRATEGIE di CONTROLLO, OTTIMIZZARE il PROCESSO.

Classificazione dei Modelli Matematici

I MODELLI MATEMATICI possono essere classificati in base a:

- METODO di DERIVAZIONE in → MODELLI TEORICI: basati su PRINCIPI PRIMI, COMPLESSI, ad ALTO SPETTRO
- MODELLI EMPIRICI: FACILE DERIVAZIONE, PREVISIONE LIMITATA
- MODELLI ISTRUMENTALI: DERIVAZIONE TEORICA quindi più APPLICABILE, ADATTATA a DATI Sperimentali che forniscono i PARAMETRI

Analisi dei Gradi di Libertà

L'ANALISI dei GRADI di LIBERTÀ permette di STABILIRE se
 E' INSIEME di EQUAZIONI di cui si compone il modello ha
 SOLUZIONE e se questa sia UNICA.
 IL NUMERO di GRADI di LIBERTÀ (N_f) è:

$$N_f = N_v - N_e \quad \text{con } N_v = \text{m}^\circ \text{ variabili dipendenti}$$

$$N_e = \text{m}^\circ \text{ equazioni indipendenti}$$

Si distinguono 3 situazioni:

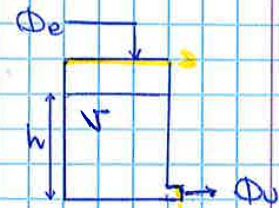
- $N_f = 0$, PROBLEMA ESATTAMENTE SPECIFICATO: il problema ha soluzione (che può non essere unica se il sistema di equazioni non è lineare)
- $N_f > 0$, PROBLEMA SOTTOSPECIFICATO: sono presenti più variabili che equazioni, pertanto le soluzioni sono infinite in quanto N_f variabili possono essere specificate arbitrariamente
- $N_f < 0$, PROBLEMA SOVRSPECIFICATO: sono presenti più equazioni che variabili, pertanto le equazioni non hanno soluzione

Per effettuare l'ANALISI dei GRADI di LIBERTÀ occorre quindi:

- 1) Identificare TUTTE le GRANDENZE FISICHE che descrivono il processo e sono COSTANTI, ovvero i PARAMETRI
- 2) Calcolare il NUMERO di EQUAZIONI INDIPENDENTI, N_e
- 3) Calcolare il NUMERO di VARIABILI DIPENDENTI, N_v
- 4) Calcolare il NUMERO di GRADI di LIBERTÀ, N_f
- 5) Se $N_f > 0$:
 - Ⓐ AGGIUNGERE una LEGGE di CONTROLLO per una VARIABILE d'INGRESSO MANIPOLABILE o una FUNZIONE FORZANTE per una VARIABILE d'INGRESSO di tipo DISTURBO
 - Ⓑ SPECIFICARE N_f VARIABILI dipendenti in modo da renderle PARAMETRI

Esempio

- 1) Si consideri un serbatoio cilindrico per lo stoccaggio di un fluido incompressibile



Obiettivo Derivare un modello che esprima la variazione di h se variano di Q_e : $h = f(t, Q_e)$

- Variabili**
- Q_e : variabile d'ingresso, disturbo, non misurabile
 - Q_u : variabile d'uscita non misurabile
 - V o h : variabile di stato non misurabile
 - T_e : variabile d'ingresso, disturbo, non misurabile
 - T_u : variabile d'uscita, non misurabile
 - T : variabile di stato non misurabile
 - proprietà del liquido in ingresso ed uscita

Con Variabili di Scarto [D]-[S]

$$h - h_s = x \quad \Phi_e - \Phi_{es} = d$$

$$\begin{cases} A_1 \frac{dh}{dt} + c_1 \sqrt{h} - c_1 \sqrt{h_s} = \Phi_e - \Phi_{es} \\ h(t=0) = h_s \end{cases}$$

Le termine $A_1 \frac{dh}{dt}$ diventa:

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh}{dt} &= A_1 \frac{d(h - h_s + h_s)}{dt} = A_1 \frac{d(h - h_s)}{dt} + A_1 \frac{dh_s}{dt} \\ &\Rightarrow A_1 \frac{dh}{dt} = A_1 \frac{d(h - h_s)}{dt} = A_1 \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

Le termine $c_1(\sqrt{h} - \sqrt{h_s})$ viene linearizzato con Taylor:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_s} + \frac{1}{2\sqrt{h_s}}(h - h_s) \Rightarrow \sqrt{h} - \sqrt{h_s} = \frac{1}{2\sqrt{h_s}}(h - h_s) = c_2(h - h_s)$$

$$\Rightarrow c_1(\sqrt{h} - \sqrt{h_s}) = c_1 c_2 (h - h_s) = c_1 c_2 x = c_3 x$$

Sottrarre quindi:

$$\begin{cases} A_1 \frac{dx}{dt} + c_3 x = d \\ x(t=0) = h(t=0) - h_s = h_s - h_s = 0 \end{cases}$$

Analisi dei Gradi di Libertà

$$N_f = N_w - N_e = 2 - 1 = 1 > 0 \rightarrow \text{problema sottospecificato}$$

[h, Φ_e]

Occorre aggiungere al modello una FUNZIONE FORZANTE $d(t)$ relativa a Φ_e

- ⊙ Una portata volumica costante di liquido Φ_e con T_e è alimentata ad un serbatoio con volume V_e area A . È presente una serpentina dove fluisce Φ_r di vapore che condensa. Il liquido in uscita ha T_u e stessa $\Phi_u = \Phi_e$.
 Sui indettrare noti: ρ densità del fluido, q_p calore specifico del liquido, λ calore latente di evaporazione.

$$\Rightarrow \rho \hat{c}_p V \frac{dT}{dt} + \rho \Phi \hat{c}_p (T_u - T^*) = \rho \Phi \hat{c}_p (T_e - T^*) + \Theta_v \hat{\lambda}_{ev}$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\Phi}{V} (T_e - T) + \frac{\hat{\lambda}_{ev}}{\rho V \hat{c}_p} \Theta_v$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_e - T) + \beta \Theta_v \quad [D], \quad T(t=0) = T_s$$

Bilancio di Energia in Condizioni Stazionarie

$$\rho \hat{c}_p \Phi (T_s - T^*) = \rho \hat{c}_p \Phi (T_{es} - T^*) + \Theta_{vs} \hat{\lambda}_{ev}$$

$$\Rightarrow \frac{\Phi}{V} (T_s - T^*) = \frac{\Phi}{V} (T_{es} - T^*) + \frac{\hat{\lambda}_{ev}}{\rho \hat{c}_p V} \Theta_{vs}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} (T_{es} - T) + \beta \Theta_{vs} = 0 \quad [S]$$

Con variabili di stato [D]-[S]

$$T - T_s = y \quad T_e - T_{es} = d \quad \Theta_v - \Theta_{vs} = u$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{d(T - T_s)}{dt} + \frac{dT_s}{dt} = \frac{1}{\tau} (T_e - T_{es}) - \frac{1}{\tau} (T - T_s) + \beta (\Theta_v - \Theta_{vs}) \\ (T)|_{t=0} - T_s|_{t=0} &= T_s - T_s = 0 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} (y - u) - d &= 0 \\ y(t=0) &= 0 \end{aligned} \right.$$

Analisi dei Gradi di Libertà

$$N_f = N_v - N_e = 3 - 1 = 2$$

[T_u, T_e, Θ_v]

$T_u \rightarrow$ ODE (= equazione differenziale ordinaria)

Occorre aggiungere le vincoli:

- una LEGGE di CONTROLLO per Θ_v , ad esempio usando i feedback: $\Theta_v - \Theta_{vs} = f((T - T_d), t)$
- una FUNZIONE FORZANTE per T_e , $T_e - T_{es} = f(t)$

$$\textcircled{2} \quad f(t) = e^{-at} \Rightarrow \hat{f}(s) = L\{e^{-at}\} = \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt =$$

$$= -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{+\infty}$$

$$\text{se } (s+a) > 0: \hat{f}(s) = 0 - \left(-\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{s+a}$$

se $(s+a) < 0$: $\hat{f}(s) \rightarrow \infty \Rightarrow$ NON SI PUÒ USARE LA TRASFORMATA di LAPLACE

• TRASFORMATA della DERIVATA PRIMA

$$L\{f'(t)\} = L\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = f(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f(t) \cdot (-s) e^{-st} dt =$$

$$= 0 - f(0) + s \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = -f(0) + s \hat{f}(s)$$

• TRASFORMATA della DERIVATA SECONDA

Detta $g(t) = f'(t)$ e quindi $g'(t) = f''(t)$

$$L\{f''(t)\} = L\{g'(t)\} = \int_0^{+\infty} g'(t) e^{-st} dt = g(t) e^{-st} \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} g(t) \cdot (-s) e^{-st} dt =$$

$$= 0 - f'(0) + s \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-st} dt = -f'(0) + s(-f(0) + s \hat{f}(s)) =$$

$$= s^2 \hat{f}(s) - s f(0) - f'(0)$$

Si può quindi generalizzare la TRASFORMATA della DERIVATA di ordine n come:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = \hat{f}(s) s^n - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(n-1-k)}(0) s^k$$

• TRASFORMATA dell'INTEGRALE

$$L\left\{\int_0^t f(\theta) d\theta\right\} = \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\theta) d\theta\right) e^{-st} dt =$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \left(\int_0^t f(\theta) d\theta\right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st}\right) f(t) dt =$$

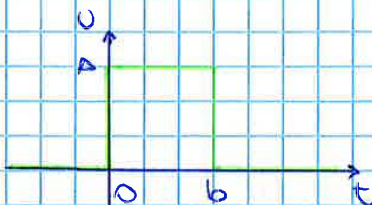
$$= 0 + \frac{1}{s} \cdot 0 + \frac{1}{s} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-st} dt = \frac{\hat{f}(s)}{s}$$

$$L\{\chi(t)\} = L\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow \hat{U}(s) = L\{u(t) = A\chi(t)\} = A \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s}$$

• FUNZIONE ONDA QUADRA

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A & 0 < t < b \\ 0 & t > b \end{cases}$$



$$u(t) = A\chi(t) - A\chi(t-b)$$

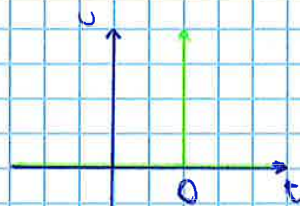
$$\begin{aligned} \Rightarrow L\{u(t)\} &= AL\{\chi(t)\} - AL\{\chi(t-b)\} = \\ &= A \frac{1}{s} - A \frac{1}{s} e^{-bs} = \frac{A}{s} (1 - e^{-bs}) \end{aligned}$$

• FUNZIONE IMPULSO

$$u(t) = A\delta(t) \quad \delta(t) = \begin{cases} +\infty & t=0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases}$$

funzione DELTA di DIRAC

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt = A$$

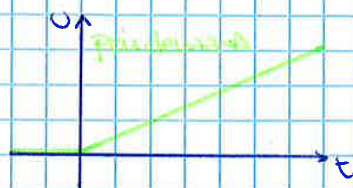


$$\Rightarrow L\{\delta(t)\} = L\left\{\frac{d\chi(t)}{dt}\right\} = sL\{\chi(t)\} - \chi(t)\Big|_{t=0} = s \frac{1}{s} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{U}(s) = L\{A\delta(t)\} = A$$

• FUNZIONE RAMPA di pendenza A

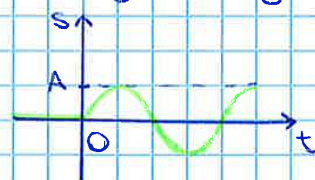
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ At & t > 0 \end{cases} = A \int_0^t \chi(\theta) d\theta$$



$$\Rightarrow L\{u(t)\} = AL\left\{\int_0^t \chi(\theta) d\theta\right\} = A \frac{1}{s} L\{\chi(t)\} = \frac{A}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A}{s^2}$$

• FUNZIONE SINUSOIDALE

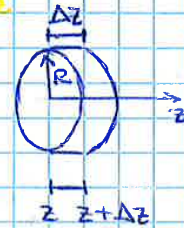
$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ A \sin(\omega t) & t > 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{U}(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$



- $T_w = \text{costante lungo } z \text{ e nel tempo}$
- $U = \text{costante}$
- $T(z, z, t) \approx T(z, t) \rightarrow$ variazioni radiali trascurabili
- $\rho(T), \hat{c}_p(T) = f(T) \approx \text{costante}$
- $q = 0 \rightarrow$ non avvengono reazioni o dissipazione viscosa

Modello a PARAMETRI DISTRIBUITI

Bilancio Energetico in Condizioni Elettive



$$\dot{a} = \frac{d}{dt} (\rho \pi R^2 \Delta z \hat{c}_p (T - T^*))$$

$$U = \dot{u} \hat{c}_p (T - T^*) \Big|_{z+\Delta z}$$

$$e = \dot{u} \hat{c}_p (T - T^*) \Big|_z + U (2\pi R \Delta z) (T_w - T)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\rho \pi R^2 \Delta z \hat{c}_p (T - T^*)) + \dot{u} \hat{c}_p (T - T^*) \Big|_{z+\Delta z} = \dot{u} \hat{c}_p (T - T^*) \Big|_z + U (2\pi R \Delta z) (T_w - T)$$

$$\Rightarrow \rho \pi R^2 \Delta z \hat{c}_p \frac{dT}{dt} + \dot{u} \hat{c}_p (T \Big|_{z+\Delta z} - T \Big|_z) - U (2\pi R \Delta z) (T_w - T) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \hat{c}_p \frac{dT}{dt} + \frac{\dot{u} \hat{c}_p}{\pi R^2} \frac{T \Big|_{z+\Delta z} - T \Big|_z}{\Delta z} = U \frac{2\pi R}{\pi R^2} (T_w - T) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \hat{c}_p \frac{dT}{dt} + \frac{\dot{u} \hat{c}_p}{\pi R^2} \frac{dT}{dz} - U \frac{2\pi R}{\pi R^2} (T_w - T) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \rho \hat{c}_p \frac{dT}{dt} + \frac{\dot{u} \hat{c}_p}{A_s} \frac{dT}{dz} - \frac{UA}{A_s L} (T_w - T) = 0 \quad [D] \right.$$

$$T(z, t) \Big|_{t=0} = T(z) \Big|_{t=0} = T_0(z) = T_s(z) \rightarrow \text{CONDIZIONE INIZIALE}$$

$$T(z, t) \Big|_{z=0} = T(t) \Big|_{z=0} = T_e(t) \rightarrow \text{CONDIZIONE al CONTOURNO}$$

Bilancio Energetico in Condizioni Stazionarie

$$\left\{ \frac{\dot{u} \hat{c}_p}{A_s} \frac{dT_s}{dz} - \frac{UA}{A_s L} (T_w - T_s) = 0 \quad [S] \right.$$

$$T_s(z) \Big|_{z=0} = T_{e,s} \rightarrow \text{CONDIZIONE al CONTOURNO}$$

$$\Rightarrow \frac{u \hat{c}_p}{A_s} \int_{\hat{x}(s)|_{z=0}}^{\hat{x}(s)|_z} \frac{d\hat{x}(s)}{\hat{x}(s)} = -\left(\hat{c}_p s + \frac{UA}{A_s L}\right) \int_0^z dz$$

$$\Rightarrow \frac{u \hat{c}_p}{A_s} \ln \left(\frac{\hat{x}(s)|_z}{\hat{x}(s)|_{z=0}} \right) = -\left(\hat{c}_p s + \frac{UA}{A_s L}\right) z$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{\hat{x}(s)}{\hat{d}(s)} \right) = -\left(\frac{A_s \hat{c}_p}{u} s + \frac{UA}{u \hat{c}_p L} \right) z$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = e^{-\frac{A_s \hat{c}_p z}{u} s} \cdot e^{-\frac{UA}{u \hat{c}_p L} z} \hat{d}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{x}(s) = e^{-\tau(z)s} \cdot e^{-\beta z} \hat{d}(s)$$

Applicando l'ANTITRASFORMATA:

- $L^{-1}\{\hat{x}(s)\} = x(t)$

- $L^{-1}\{e^{-\tau(z)s} \cdot e^{-\beta z} \hat{d}(s)\} = e^{-\beta z} L^{-1}\{e^{-\tau(z)s} \hat{d}(s)\} = e^{-\beta z} d(t - \tau(z))$

$$\Rightarrow x(z,t) = e^{-\beta z} d(t - \tau(z))$$

Analisi dei Gradi di libertà

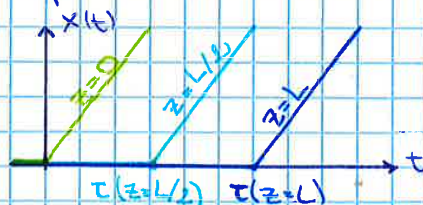
$$N_f = N_v - N_E = 2 - 1 = 1$$

[T₀, T_e]

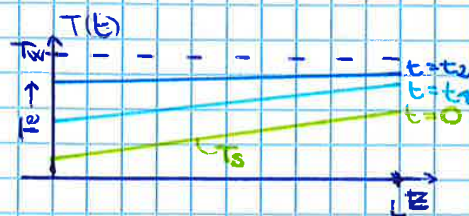
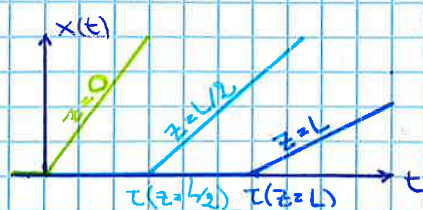
Occorre aggiungere al modello una FUNZIONE FORZANTE per T_e

Se ad esempio d(t) è una FUNZIONE RAMPA si può avere che:

- U = 0



- U ≠ 0



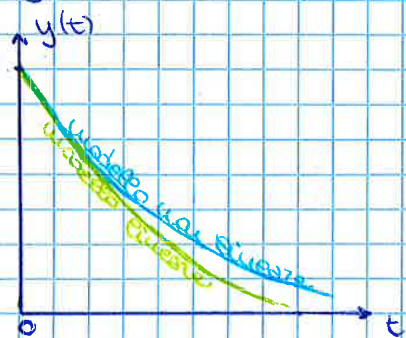
Si osserva che diminuendo la forza sprufoante, ovvero la quantità di calore scambiata, la pendenza si riduce.

MODELLO NON LINEARE: $A \frac{d(h-h_s)}{dt} = (\Phi_e - \Phi_{es}) - C_1(\sqrt{h} - \sqrt{h_s})$

MODELLO LINEARIZZATO in un intorno di h_s :

$$A \frac{d(h-h_s)}{dt} = (\Phi_e - \Phi_{es}) - \frac{C_1}{2\sqrt{h_s}} (h-h_s)$$

È possibile notare che l'aumento della risposta non è LINEARE a prescindere dal modello utilizzato in ingresso. È inoltre evidente che al tempo $t=0$ l'APPROSSIMAZIONE è molto buona ma allontanandosi da h_s ($h(t=0)$) per cui si è linearizzato il modello, le curve si discostano sempre di più. Si parla di SCOLAMENTO del MODELLO LINEARIZZATO in quanto la componente non lineare del modello dà un contributo via via maggiore.



Dinamica di Sistemi Lineari del Primo Ordine

Sistemi del Primo Ordine

Un SISTEMA è del PRIMO ORDINE se il suo COMPORTAMENTO può essere DESCRITTO con un'EQUAZIONE DIFFERENZIALE ORDINARIA, LINEARE e del PRIMO ORDINE. Si avrà quindi:

$$\begin{cases} a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = bu \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$$

Se $a_0 \neq 0$ allora otteniamo: $\begin{cases} \tau \frac{dy}{dt} + y = Ku \\ y(t=0) = 0 \end{cases}$, $\tau = \frac{a_1}{a_0}$, $K = \frac{b}{a_0}$

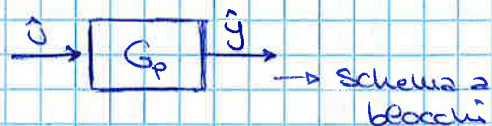
dove K viene detto GUADAGNO STATICO del processo e stabilisce di QUANTO viene AMPLIFICATA la RISPOSTA e τ è il TEMPO CARATTERISTICO del processo e stabilisce QUANTO RAPIDA è la RISPOSTA ad un disturbo in ingresso.

Passando al dominio di Laplace e risolvendo?

$$\begin{cases} \tau L\left\{\frac{dy}{dt}\right\} + L\{y\} = K L\{u\} \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tau (s\hat{y} - \hat{y}(0)) + \hat{y} = K\hat{u} \\ \hat{y}(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{K}{(\tau s + 1)} \hat{u}$$

$\hookrightarrow G_p$: FUNZIONE di TRASFERIMENTO



La derivata a $t=0$ non è nulla, pertanto a $t=0$ si ha una **VARIAZIONE ISTANTANEA** in accordo con A : se $A > 0$ la variazione sarà positiva, se $A < 0$ sarà negativa.

Si individua poi l'**INERZIA** del SISTEMA, ovvero la **DIFFERENZA** tra SISTEMA REALE ed IDEALE (che risponde solo a gradino) come:

$$J_I = \int_0^{\infty} (AK - (AK(1 - e^{-t/\tau}))) dt = \int_0^{\infty} AK e^{-t/\tau} dt =$$

$$= AK(-\tau) e^{-t/\tau} \Big|_0^{\infty} = 0 - AK(-\tau) = AK\tau$$

L'**INERZIA** del SISTEMA J_I si può identificare come l'area tra la curva e il gradino ed è **LINEARMENTE DIPENDENTE** da τ .

• **Disturbo di tipo Impulso di Area A**

$$\hat{U}(s) = A \Rightarrow \hat{Y}(s) = \frac{k}{s+1} A = \frac{AK/\tau}{s+1/\tau}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{AK}{\tau} e^{-t/\tau}$$



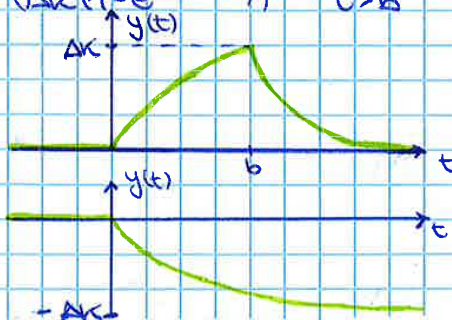
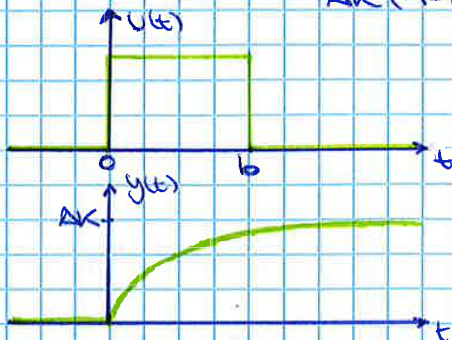
Notiamo che: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dt} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{AK}{\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\right) e^{-t/\tau} = -\frac{AK}{\tau^2} \neq 0$

• **Disturbo a Coda Quadrata**

$$\hat{U}(s) = \frac{A}{s} (1 - e^{-bs}) \Rightarrow \hat{Y}(s) = \frac{k}{s+1} \frac{A}{s} (1 - e^{-bs})$$

Ricordando però che per il disturbo a GRADINO si ha $y(t) = AK(1 - e^{-t/\tau})$ otteniamo:

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ AK(1 - e^{-t/\tau}) & 0 < t < b \\ AK(1 - e^{-t/\tau}) - (AK(1 - e^{-(t-b)/\tau})) & t > b \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 & C_{2,3} \int \hat{y}(s) (s^2 + \omega^2) \Big|_{s=j\omega} \\
 & \int \hat{y}(s) (s^2 + \omega^2) \Big|_{s=-j\omega} \\
 & \int \frac{Ak(s^2 + \omega^2)\omega}{T(s + \frac{1}{\tau})(s^2 + \omega^2)} \Big|_{s=j\omega} = 0 + C_2\omega + C_3s \Big|_{s=j\omega} \\
 & \int \frac{Ak\omega}{C(s + \frac{1}{\tau})} \Big|_{s=j\omega} = 0 + C_2\omega - C_3s \Big|_{s=-j\omega} \\
 & \int \frac{Ak\omega}{C(j\omega + \frac{1}{\tau})} = \frac{Ak\omega}{1 + j\tau\omega} = C_2\omega + C_3j\omega \\
 & \int \frac{Ak\omega}{C(-j\omega + \frac{1}{\tau})} = \frac{Ak\omega}{1 - j\tau\omega} = C_2\omega - C_3j\omega \\
 & \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \frac{Ak}{1 + \omega^2\tau^2} \\ C_3 = \frac{-Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \end{cases} \\
 \Rightarrow \hat{y}(s) = \frac{Ak\omega\tau}{s + \frac{1}{\tau}} + \frac{Ak}{s^2 + \omega^2} + \frac{-\frac{Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}}{s^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ak}{1 + \omega^2\tau^2} \sin(\omega t) - \frac{Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \cos(\omega t)$$

Per analogia con $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
 consideriamo $X = \omega t$ e

$$\frac{\sin(x-y)}{\cos y} = \sin x - \frac{\sin y}{\cos y} \cos x = \sin x - \tan y \cos x \Rightarrow \tan y = \omega\tau$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t) - \omega\tau(\cos(\omega t)) = \frac{\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau))}{\cos(\arctan(\omega\tau))}$$

Poiché $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \cos(\arctan(\omega\tau)) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow y(t) &= \frac{Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ak}{1 + \omega^2\tau^2} \left(\frac{\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau))}{\cos(\arctan(\omega\tau))} \right) \\
 &= \frac{Ak\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Ak}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} (\sin(\omega t - \arctan(\omega\tau)))
 \end{aligned}$$

Notiamo che $y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{Ak}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \sin(\omega t - \arctan(\omega\tau))$, pertanto
 la PRIMA TERMINA è un TRANSITORIO che si riduce esponenzialmente
 e si annulla per $t \rightarrow \infty$, mentre la SECONDA TERMINA persiste
 tendendo alla RISPOSTA ULTIMA una FUNZIONE SINUSOIALE
 con STESSA FREQUENZA ω del disturbo in ingresso, ma
 SFASATA di un ANGOLO $\phi = \arctan(\omega\tau)$.

Relazione Generale di Potenza in Condizioni Stazionarie

$$\Phi_{sp} = \Phi_{es} p_e \quad p_1 = p_2 = p = \text{cost}$$

$$\Rightarrow \Phi_{sp} = \Phi_{es} \quad [S]$$

Con Variabili di Stato [0] - [S]

$$\begin{cases} A \frac{dh}{dt} + \Phi_e - \Phi_{es} = \Phi_e - \Phi_{es} \\ \Phi_e(t) = \text{cost} = \Phi_{es} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A \frac{dh}{dt} = \Phi_e - \Phi_{es} \quad y = h - h_s \quad u = \Phi_e - \Phi_{es}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A \frac{dy}{dt} = u \\ y(0) = h|_{t=0} - h_s = h_s - h_s = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = K^* u \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad K^* = \frac{1}{A}$$

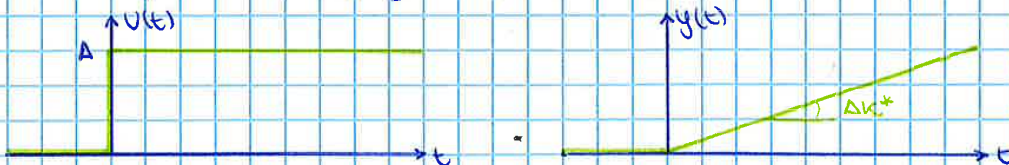
Nel dominio di Laplace:

$$\begin{cases} s\hat{y}(s) - y(0) = K^* \hat{u}(s) \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{y}(s) = \frac{K^*}{s} \hat{u}(s)$$

Comportamento Dinamico

- Disturbo a Gradino di Altezza A

$$\hat{u}(s) = \frac{A}{s} \Rightarrow \hat{y} = \frac{K^*}{s} \frac{A}{s} = \frac{AK^*}{s^2} \Rightarrow y(t) = AK^* L\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = AK^* t$$



Nota bene che in questo caso ad un disturbo in ingresso finito si ottiene una risposta infinita!

- Disturbo a Impulso di Area A

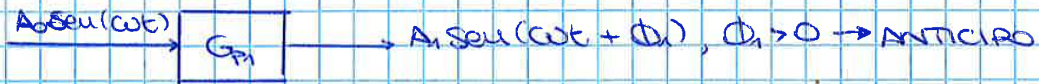
$$\hat{u}(s) = A \Rightarrow \hat{y}(s) = \frac{K^*}{s} A$$

$$\Rightarrow y(t) = AK^*$$

Sistema Anticipo Ritardo

IL SISTEMA ANTICIPA RITARDO, che in genere descrive un insieme di sistemi, è descritto come:

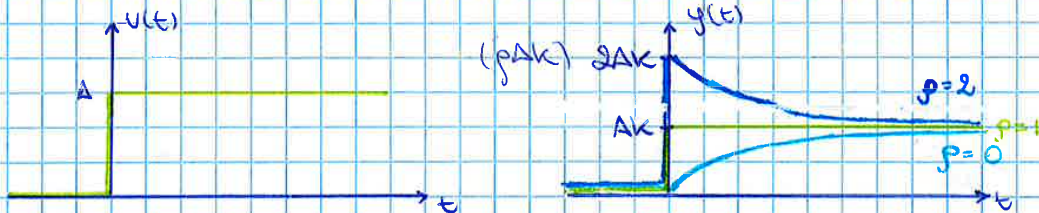
$$\hat{y}(s) = \frac{k(\frac{p}{T} s + 1)}{Ts + 1} \hat{u}(s) = k \underbrace{\left(\frac{p}{T} s + 1\right)}_{GP1} \underbrace{\frac{1}{Ts + 1}}_{GP2} \hat{u}(s)$$



Defin: $K = \text{GUADAGNO STATICO}$, $p = \frac{p}{T} = \text{RAPPORTO ANTICIPA/RITARDO}$
 Si ottiene:

$$\hat{y} = \underbrace{(pK)}_{\substack{\text{guadagno} \\ \text{pro con} \\ \text{peso } p}} + \underbrace{\left(1 - p\right) \frac{k}{Ts + 1}}_{\substack{\text{primo ordine con} \\ \text{peso } (1-p)}} \hat{u}$$

IL SISTEMA ANTICIPA RITARDO È COMBINAZIONE LINEARE di un SISTEMA a GUADAGNO PURO e del PRIMO ORDINE secondo p .



Dinamica di Sistemi Lineari di Ordine Superiore al Primo

Un SISTEMA LINEARE è di ORDINE SUPERIORE se la FUNZIONE di TRASFERIMENTO che lo descrive contiene a DENOMINATORE un POLINOMIO di GRADO SUPERIORE al PRIMO.

$$\hat{y} = \frac{N(s)}{(s+a)^d}, \quad d > 1$$

Serie di Due Sistemi del Primo Ordine

Se consideriamo un SISTEMA di DUE SERBATOI in SERIE distinguiamo:

- SERIE NON INTERAGENTE, se i serbatoi non si influenzano
- SERIE INTERAGENTE, se i comportamenti dinamici dei due serbatoi sono legati tra loro

$$\begin{cases} \Delta_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_{e,1} - Q_{e,1s} - C_1 h_1 + C_1 h_{1s} \\ \Delta_2 \frac{dh_2}{dt} = C_1 h_1 - C_1 h_{1s} - C_2 h_2 + C_2 h_{2s} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T_1 \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + k_1 d \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} = -y_2 + k_2 y_1 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases} \quad \text{dove } T_1 = \frac{\Delta_1}{C_1}, T_2 = \frac{\Delta_2}{C_2}, k_1 = \frac{1}{C_1}, k_2 = \frac{C_1}{C_2}$$

Nel dominio di LAPLACE:

$$\begin{cases} T_1 (s\hat{y}_1(s) - y_1(0)) = -\hat{y}_1(s) + k_1 \hat{d}(s) \\ T_2 (s\hat{y}_2(s) - y_2(0)) = -\hat{y}_2(s) + k_2 \hat{y}_1(s) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{y}_1(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \hat{d}(s) \\ \hat{y}_2(s) = \frac{k_2}{T_2 s + 1} \hat{y}_1(s) \end{cases}$$



$$\hat{y}_2(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \hat{d}(s) = \frac{k_1 k_2}{G_{P1} G_{P2}}$$



dove $k_1 k_2$ = GUADAGNO STATICO GLOBALE,
 T_1, T_2 = tempi caratteristici delle singole unità

Se si introduce una VARIAZIONE a GRADINO sulla portata in ingresso del primo serbatoio con ampiezza 1:

$$\hat{d}(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow \hat{y}_2(s) = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)s}$$

Se $T_1 \neq T_2$:

$$y(t) = k_1 k_2 \left(1 + \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} - \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right)$$

Modello a PARAMETRI CONCENTRATI

Bilancio Globale di Materia in Condizioni Dinamiche

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(A_1 \rho h_1)}{dt} = \rho \Phi_{e,1} - \rho \Phi_{o,1} \\ \frac{d(\rho A_2 h_2)}{dt} = \rho \Phi_{e,2} - \rho \Phi_{o,2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{dh_1}{dt} = \Phi_{e,1} - C_1(h_1 - h_2) \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = C_1(h_1 - h_2) - C_2 h_2 \end{array} \right. \quad [D]$$

Bilancio Globale di Materia in Condizioni Stazionarie

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \Phi_{e,1,s} = \rho \Phi_{o,1,s} \\ \rho \Phi_{e,2,s} = \rho \Phi_{o,2,s} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{e,1,s} = C_1(h_{1,s} - h_{2,s}) \\ C_1(h_{1,s} - h_{2,s}) = C_2 h_{2,s} \end{array} \right. \quad [S]$$

Con Variabili di Stato [D] - [S]

$$y_1 = h_1 - h_{1,s} \quad y_2 = h_2 - h_{2,s} \quad d = \Phi_{e,1} - \Phi_{e,1,s}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{dh_1}{dt} = \Phi_{e,1} - \Phi_{e,1,s} - C_1 h_1 + C_1 h_{1,s} + C_1 h_2 - C_1 h_{2,s} \\ A_2 \frac{dh_2}{dt} = C_1 h_1 - C_1 h_{1,s} - C_1 h_2 + C_1 h_{2,s} - C_2 h_2 + C_2 h_{2,s} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{A_1}{C_1} \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 + \frac{1}{C_1} d \\ \frac{A_2}{C_2} \frac{dy_2}{dt} = \frac{C_1}{C_2} y_1 - \left(1 + \frac{C_1}{C_2}\right) y_2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} T_1 = \frac{A_1}{C_1} \quad k_1 = \frac{1}{C_1} \\ T_2 = \frac{A_2}{C_2} \quad k_2 = \frac{C_1}{C_2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} T_1 \frac{dy_1}{dt} = -y_1 + y_2 + k_1 d \\ T_2 \frac{dy_2}{dt} = k_2 y_1 - (1 + k_2) y_2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

Da questo si ricava:

$$\hat{y}(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \hat{u}(s)$$

dove:

- K = GUADAGNO STATICO del processo
- ζ = COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO
- T = TEMPO CARATTERISTICO del processo

Una SERIE di DE SISTEMI del PRIMO ORDINE è descritta da un MODELLO del SECONDO ORDINE.

- SERIE NON INTERAGENTE

$$\frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{K_1 K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

con $T = \sqrt{T_1 T_2}$, $\zeta = \frac{T_1 + T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}$, $K = K_1 K_2$

- SERIE INTERAGENTE

$$\frac{\hat{y}}{\hat{u}} = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2 + K_2 T_1) s + 1}$$

con $T = \sqrt{T_1 T_2}$, $\zeta = \frac{T_1 + T_2 + K_2 T_1}{2\sqrt{T_1 T_2}}$, $K = K_1 K_2$

Comportamento Dinamico

Consideriamo la risposta di un SISTEMA del SECONDO ORDINE a un DISTURBO a GRADINO UNITARIO:

$$\hat{y} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta T s + 1} \cdot \frac{1}{s}$$

Stano i poli $z_{1,2} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{T}$, quindi: $\hat{y} = \frac{K/T^2}{s(s-z_1)(s-z_2)}$

Passando al dominio del tempo otteniamo:

$$y(t) = C_0 + C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}$$

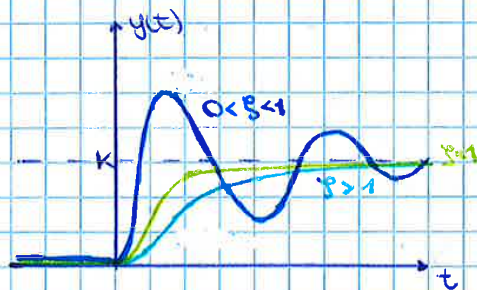
La RISPOSTA pertanto VARIA al VARIARE di ζ :

- Se $\zeta > 1$ la RISPOSTA è **SMORZATA** e z_1 ed z_2 sono REALI DISTINTI
- Se $\zeta = 1$ la RISPOSTA è **CRITICAMENTE SMORZATA** e z_1, z_2 sono REALI COINCIDENTI
- Se $0 < \zeta < 1$ la RISPOSTA è **SOTTO SMORZATA** e z_1 ed z_2 sono COMPLESSI CONIUGATI
- Se $\zeta < 0$ il SISTEMA è **INSTABILE**

Analizziamo quindi:

- TEMPO di RISALTA, t_r , tempo impiegato dal sistema per RAGGIUNGERE lo STAZIONARIO ed è FUNTA VOLTA $\rightarrow t_r = \frac{c}{\beta}(\pi - \phi)$
- TEMPO del PRIMO PICCO, t_p , tempo impiegato per RAGGIUNGERE il VALORE MASSIMO
- TEMPO di ASSESTAMENTO, t_s , tempo richiesto affinché il sistema RAGGIUNGA e RESTI entro un intervallo di $\pm 5\%$ della VARIAZIONE TOTALE di y .
- OVERTHOOT = a/b ESCURSIONE MASSIMA rispetto al VALORE UTILI $\rightarrow e^{-\pi\zeta/\beta}$
- VELOCITÀ di STORZAMENTO = c/a , dove c è l'escursione del secondo picco dallo stazionario $\rightarrow e^{-2\pi\zeta/\beta} \cdot (a/b)^2$
- PERIODO di OSCILLAZIONE, P , tempo TRA DEI PICCHI CONSECUTIVI $\rightarrow P = 2\pi/\beta$

Possiamo quindi concludere che un ELEVATO VALORE di ζ ($\zeta > 1$) produce una RISPOSTA PIÙ LENTA del sistema, ma se $0 < \zeta < 1$ la risposta presenta OSCILLAZIONI ed OVERTHOOT. Pertanto la RISPOSTA PIÙ VELOCE e SENZA OVERTHOOT è quella del SISTEMA CRITICAMENTE STORZATO ($\zeta = 1$)



Sistema di Ordine N

Consideriamo un SISTEMA costituito da N SISTEMI del PRIMO ORDINE NON INTERAGENTI tra loro.

Si avrà che ciascuna unità sarà definita come: $\hat{y}_m(s) = \frac{k_m}{\tau_m s + 1} \hat{y}_{m-1}(s)$

Sostituendo in cascata si ottiene:

$$\hat{y}_N = \prod_{i=1}^N \frac{k_i}{\tau_i s + 1} \hat{u}$$

Studiamo quindi la risposta ad una FUNZIONE FORZANTE a GRADINO di AMPIEZZA A:

$$\hat{y}_N(s) = \prod_{i=1}^N \frac{k_i}{\tau_i s + 1} \frac{A}{s} = \frac{C_0}{s} + \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s + 1/\tau_i}$$

$$\Rightarrow y(t) = C_0 + \sum_{i=1}^N C_i e^{-t/\tau_i}$$

$$\text{dove } C_0 = \hat{y}(s) \cdot s \Big|_{s=0} = s \frac{A \prod_{i=1}^N k_i/\tau_i}{s \prod_{i=1}^N (s + 1/\tau_i)} \Big|_{s=0} = A \prod_{i=1}^N k_i = AK$$

Notiamo che:

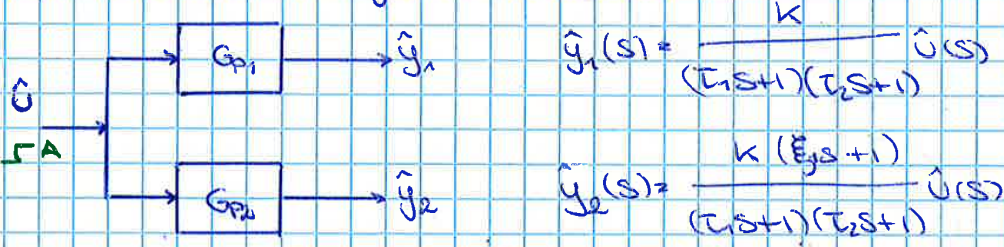
- per $t \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow AK$

- $\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} = 0$ & $\forall N \geq 2$, $\frac{dy}{dt} \Big|_{t=0} \neq 0$ & $N = 1$

VARIAZIONE FINITA IN ENTRATA SI DICEVA UNA VARIAZIONE FINITA IN USCITA. SI DICE INSTABILE INVECE QUANDO UNA VARIAZIONE FINITA IN INGRESSO PROVOCA UNA RISPOSTA INFINITA IN USCITA.

SE TUTTI I POLI, QUOVI E' RADICI DEL POLINOMIO A DENOMINATORE, HANNO PARTE REALE NEGATIVA IL SISTEMA E' STABILE; SE LA PARTE REALE E' POSITIVA IL SISTEMA E' INSTABILE. INOLTRE SE IL POLO E' COMPLESSO LA RISPOSTA SARÀ OSCILLATORIA, UERTRE SE E' REALE POCO LO.

DUE NUMERATORE SI TROVANO INVECE GLI ZERI CHE A SECONDA DELLA NUMEROSITA' POSSONO DIMINUIRE L'ORDINE DEL SISTEMA. IL SEGNO E IL NUMERO DEGLI ZERI, INOLTRE, PERMETTE DI STABILIRE SE CI SIA O UNO O RISPOSTA INVERSA. CONSIDERIAMO IL SEGUENTE SISTEMA:



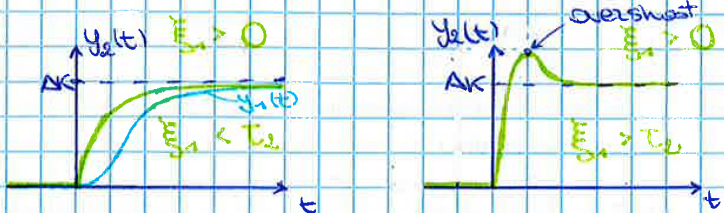
STUDIAMO L'ANDAMENTO DI $\hat{y}_1(s)$, QUOVI SISTEMA DI SECONDO ORDINE SENZA ZERI, A FRATTE DEL DENOMINATORE A GRADUO 1?

- $\lim_{t \rightarrow \infty} y_1(t) = AK$
 - $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_1}{dt} = 0$
-

PER $\hat{y}_2(s)$, QUOVI UN SISTEMA DEL SECONDO ORDINE CON UNO ZERO?

- $\lim_{t \rightarrow \infty} y_2(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{y}_2(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s k (\xi_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \frac{A}{s} = AK$
- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy_2}{dt} = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot L \left\{ \frac{dy_2}{dt} \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \hat{y}_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^2 \frac{A k (\xi_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{A k \xi_1}{\tau_1 \tau_2} \neq 0$

SE $\xi_1 > 0$ QUINDI:
($\tau_2 > \tau_1$)
→ ZERO NEGATIVO



Regressione Lineare per un Modello Stazionario

Si consideri un sistema con DIPENDENZA LINEARE tra la VARIABILE d'USCITA y e quella d'INGRESSO u . Il sistema è descritto da:

$$y = \beta_1 + \beta_2 u + e$$

con β_1 e β_2 PARAMETRI del MODELLO e e VARIABILE STOCASTICA che definiamo "errore".
Si vuole derivare un modello del tipo:

$$\bar{y} = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 u$$

Eseguendo DIVERSI TIPI di MISURA di DISTURBI in INGRESSO, ciascuna MISURA SPERIMENTALE Y_i di y soddisferà:

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 U_i + e_i$$

Per determinare $\bar{\beta}_1$ e $\bar{\beta}_2$ si usa il METODO dei MINIMI QUADRATI che minimizza le DISTANZE (S) tra DATI OSSERVATI e DATI PREDETI:

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2 U_i)^2$$

con N pari al NUMERO di OSSERVAZIONI SPERIMENTALI.
Si ottiene:

$$\bar{\beta}_1 = \frac{N \sum Y_i - \sum Y_i \sum U_i}{N \sum U_i^2 - (\sum U_i)^2} \quad \bar{\beta}_2 = \frac{N \sum Y_i U_i - \sum Y_i \sum U_i}{N \sum U_i^2 - (\sum U_i)^2}$$

$$\text{con } \sum U_i = \sum_{i=1}^N U_i, \quad \sum U_i^2 = \sum_{i=1}^N U_i^2, \quad \sum Y_i U_i = \sum_{i=1}^N U_i Y_i, \quad \sum Y_i = \sum_{i=1}^N Y_i$$

Tale metodo può essere ESTESO ad un SISTEMA con PIU' VARIABILI di ENTRATA e/O USCITA usando una FUNZIONE POLINOMIALE come funzione approssimante.

Regressione con Funzione di Trasferimento

Il COMPORTAMENTO DINAMICO di un SISTEMA può essere APPROSSIMATO con un SISTEMA LINEARE del PRIMO o SECONDO ORDINE ricavando i PARAMETRI per CONFRONTO con le OSSERVAZIONI SPERIMENTALI. Tali parametri sono ottenuti studiando la RISPOSTA ad un UNICO TIPO di DISTURBO in ENTRATA, il disturbo a GRADINO.

Se si hanno più variabili d'ingresso esse vengono considerate separatamente e sottoposte allo stesso disturbo.

La FUNZIONE di TRASFERIMENTO può essere:

- I ORDINE $\rightarrow G_p = k / (Ts + 1) \rightarrow k, T$
- I ORDINE + DELAY $\rightarrow G_p = (k / (Ts + 1)) e^{-as} \rightarrow k, T, \alpha$
- II ORDINE $\rightarrow G_p = k / (T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1) \rightarrow k, T, \zeta$
- II ORDINE + DELAY $\rightarrow G_p = (k / (T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1)) e^{-as} \rightarrow k, T, \zeta, \alpha$

Analisi della Risposta in Frequenza

La RISPOSTA ULTIMA (= risposta dopo tempo sufficiente da eliminare i transienti) di un SISTEMA LINEARE ad un DISTURBO SINUSOIDALE $u = A_0 \sin(\omega t)$ in ingresso è sempre una FUNZIONE SINUSOIDALE con STESSA FREQUENZA ω (= stesso periodo), ma SFASATO di ϕ radianti e con DIVERSA AMPIEZZA A .
 Sia SFASAMENTO che AMPIEZZA DIPENDONO da ω in ingresso e l'ANALISI della RISPOSTA in FREQUENZA studia COME variano questi due parametri con la FREQUENZA ω del disturbo in ingresso.

Ricordiamo che un NUMERO COMPLESSO z è identificato da una COPPIA di NUMERI REALI a e b :

$$z = a + jb$$

con $j = \sqrt{-1}$, $a = \text{Re}\{z\}$, $b = \text{Im}\{z\}$

Si ha che:

- $z_1 + z_2 = (a+c) + j(b+d)$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + j(ad + bc)$
- $\frac{1}{z_1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - j \frac{b}{a^2 + b^2}$

Un NUMERO COMPLESSO può essere rappresentato come un PUNTO sul PIANO di GAUSS dove $x = \text{Re}\{z\}$ e $y = \text{Im}\{z\}$. Si ricava quindi che:

$$z = r(\cos \phi + j \sin \phi) = r e^{j\phi}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\text{Re}\{z\})^2 + (\text{Im}\{z\})^2} = |z|$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan\left(\frac{\text{Im}\{z\}}{\text{Re}\{z\}}\right) = \Delta z$$

Si ha che:

- $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$
- $\Delta(z_1 z_2) = \Delta z_1 + \Delta z_2$

Teorema dell'Analisi in Frequenza

La RISPOSTA di un GENERICO SISTEMA, con FUNZIONE di TRASFERIMENTO G_p , ad un DISTURBO SINUSOIDALE ha lo STESSO MODULO e ARGOMENTO di $G_p(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$.

$$AR = |G(j\omega)| \quad \phi = \Delta G(j\omega)$$

$$G_p(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j \text{Im}(\omega)$$

Dimostrazione

Consideriamo un sistema lineare descritto da $\hat{y} = G_p \hat{u}$. La risposta ad $u = A_0 \sin(\omega t)$ sarà:

$$\hat{y} = G_p \frac{A_0 \omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet B_1 - B_2 &= \frac{A_0 G_p(j\omega)}{2j} + \frac{A_0 G_p(-j\omega)}{2j} = \frac{A_0}{2j} (G_p(j\omega) + G_p(-j\omega)) = \\
 &= \frac{A_0}{2j} (\text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega) + \text{Re}(\omega) - j\text{Im}(\omega)) = \\
 &= \frac{A_0}{2j} (2\text{Re}(\omega)) = \frac{A_0}{j} \text{Re}(\omega)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow U_{FR} = A_0 (\text{Im}(\omega) \cos \omega t + \text{Re}(\omega) \sin \omega t)$$

Ricorda $p \sin \omega t + q \cos \omega t = \rho \sin(\omega t + \Psi)$ con $\rho = \sqrt{p^2 + q^2}$, $\Psi = \arctg(q/p)$, assumendo $p = \text{Re}(\omega)$ e $q = \text{Im}(\omega)$ si ha:

$$\rho = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}, \quad \Psi = \arctg(\text{Im}(\omega)/\text{Re}(\omega))$$

$$\Rightarrow U_{FR} = A_0 \rho \sin(\omega t + \Psi)$$

Pertanto:

$$U_{FR} = \frac{A_0 \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}}{A} \sin(\omega t + \arctg(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)}))$$

$$\Rightarrow AR = \sqrt{\text{Re}^2(\omega) + \text{Im}^2(\omega)}, \quad \Phi = \arctg(\frac{\text{Im}(\omega)}{\text{Re}(\omega)})$$

$$\Rightarrow AR = |G_p(j\omega)|, \quad \Phi = \angle G_p(j\omega)$$

Procedura dell'Analisi di Risposta in Frequenza

Occorre:

1 - Verificare la STABILITÀ del sistema ($\forall i \text{ Re} < 0$)

2 - Valutare $G(j\omega)$

3 - Ricordare $G(j\omega) = \text{Re}(\omega) + j\text{Im}(\omega)$

4 - (A) Calcolo $AR = |G_p(j\omega)|$ e $\Phi = \angle G_p(j\omega)$

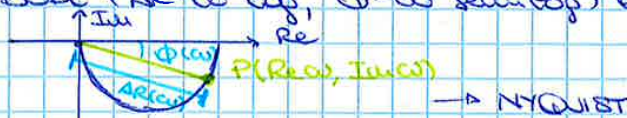
(B) Riscrivere $G(j\omega) = AR e^{j\Phi}$ e ricavare AR e Φ

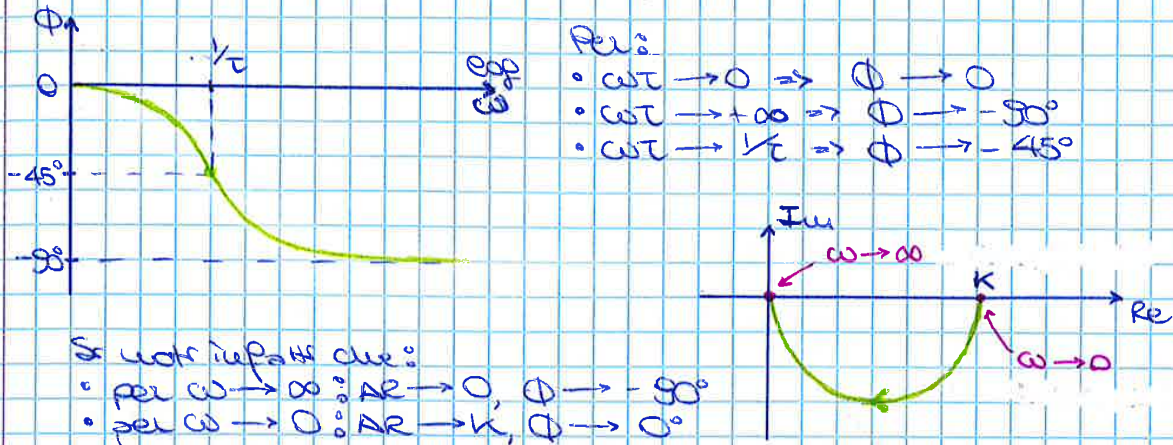
(C) Riscrivere $G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$

$$G(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)}$$

$$\text{e ricavare } AR = \frac{|N(j\omega)|}{|D(j\omega)|}, \quad \Phi = \angle N(j\omega) - \angle D(j\omega)$$

I valori di $AR = f_1(\omega)$ e $\Phi = f_2(\omega)$ sono rappresentati nei diagrammi di BODE ($AR - \omega \log$, $\Phi - \omega \text{ semi log}$) e di NYQUIST





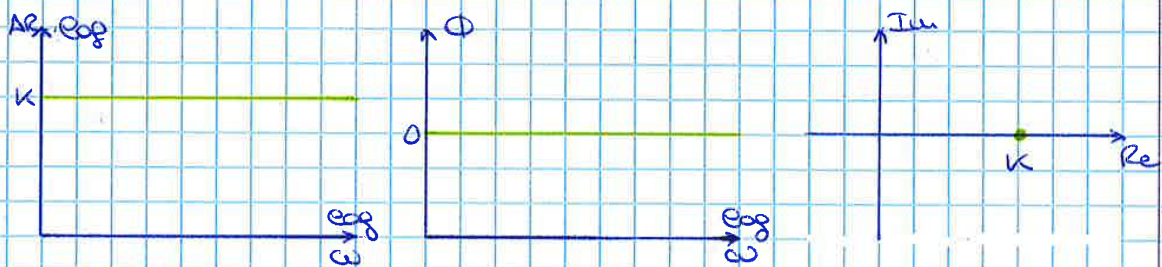
Processo a Guadagno Puro

$G_p = K$

$G_p(j\omega) = K \Rightarrow Re(\omega) = K, Im(\omega) = 0$

$\Rightarrow AR = K$

$\Rightarrow \Phi = 0$



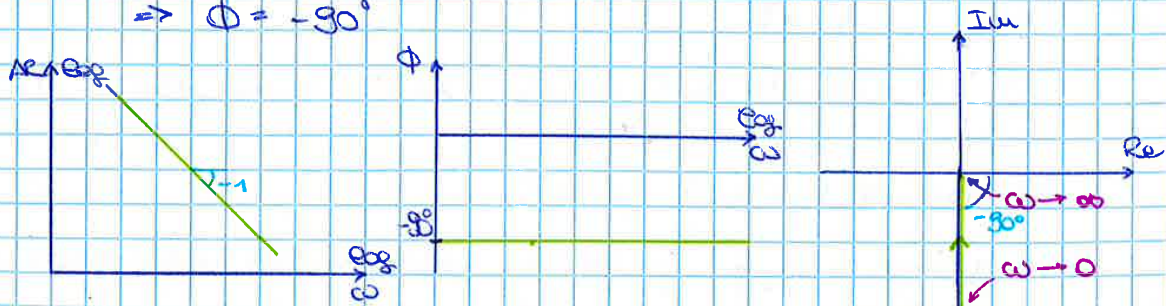
Sistema Capacitivo

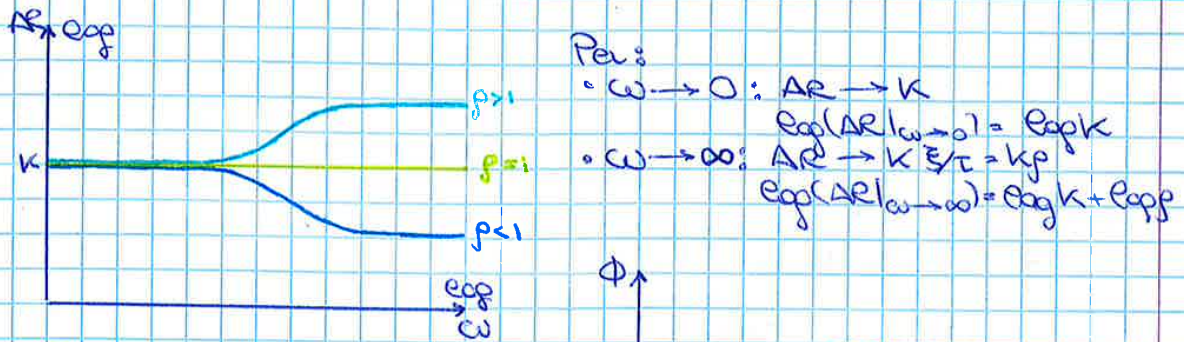
$G_p = \frac{K}{j\omega}$

$G_p(j\omega) = \frac{K}{j\omega} = \frac{K}{j\omega} \frac{j\omega}{j\omega} = -\frac{K}{\omega} j \Rightarrow Re(\omega) = 0, Im(\omega) = -\frac{K}{\omega}$

$\Rightarrow AR = \frac{K}{\omega} \quad (\rightarrow \log(AR|_{\omega \rightarrow \infty}) = \log(K/\omega) = \log K - \log \omega)$

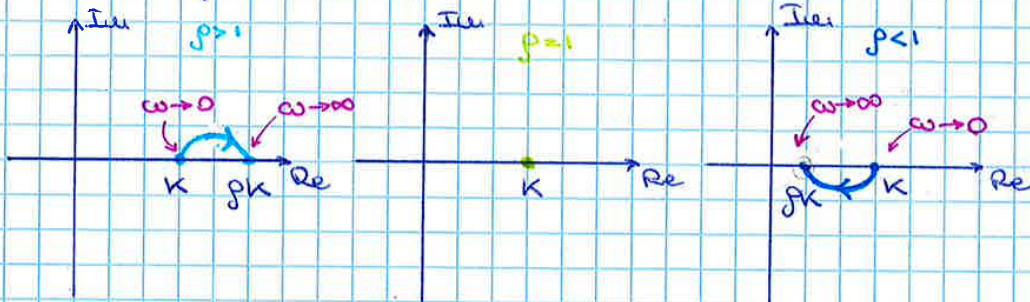
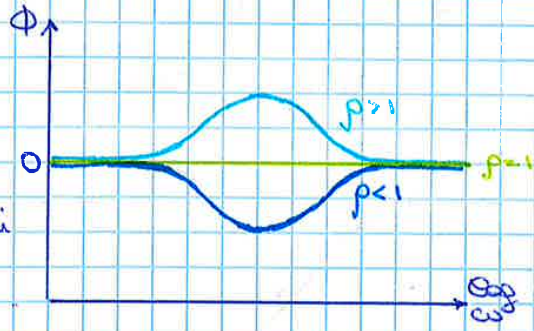
$\Rightarrow \Phi = -90^\circ$





Per:
 • $\omega \rightarrow 0$: $AR \rightarrow K$
 $e^{\sigma\phi}(AR|\omega \rightarrow 0) = e^{\sigma\phi}K$
 • $\omega \rightarrow \infty$: $AR \rightarrow K \frac{\omega}{T} = Kp$
 $e^{\sigma\phi}(AR|\omega \rightarrow \infty) = e^{\sigma\phi}K + e^{\sigma\phi}p$

Per:
 • $\omega \rightarrow 0$: $\phi \rightarrow 0^\circ$
 • $\omega \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow 0^\circ$
 Per determinare valori intermedi di ω prevarrà il termine $\arctg(\frac{p}{\omega})$ e per altri $\arctg(\frac{\omega}{T})$ causando queste variazioni.



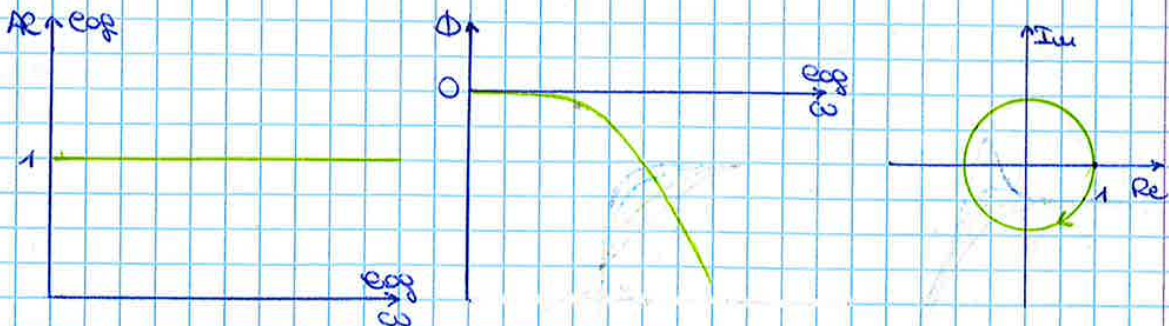
Sistema a Ritardo Puro

$$G_p = e^{-sT}$$

$$G_p(j\omega) = e^{-j\omega T} = |G(j\omega)| e^{j\Delta G(j\omega)}$$

$$\Rightarrow AR = 1$$

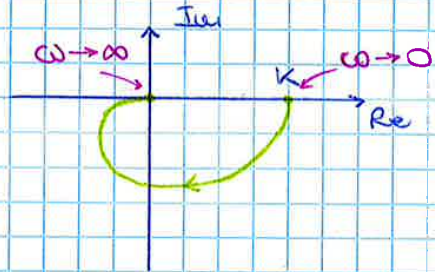
$$\Rightarrow \phi = -\omega T$$



Per:
 • $\omega \rightarrow 0$: $\phi \rightarrow 0^\circ$
 • $\omega \rightarrow \infty$: $\phi \rightarrow -\infty$

Il picco fondamentale è detto RISONANZA e si ha che la FREQUENZA di RISONANZA è pari a:

$$\omega_r = \frac{1}{T} \sqrt{1 - 2\xi^2}$$



Sistema del Secondo Ordine con Uno Zero

$$G_p = \frac{K(\xi s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

$$G_p(j\omega) = \frac{K(\xi j\omega + 1)}{(T_1 j\omega + 1)(T_2 j\omega + 1)}$$

$$\Rightarrow |N(j\omega)| = K \sqrt{1 + \xi^2 \omega^2}, \quad |D(j\omega)| = \sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}$$

$$\Rightarrow AR = \frac{K \sqrt{1 + \xi^2 \omega^2}}{\sqrt{1 + T_1^2 \omega^2} \sqrt{1 + T_2^2 \omega^2}}$$

$$\Rightarrow \Delta N(j\omega) = \arctg(\xi \omega), \quad \Delta D(j\omega) = \arctg(T_1 \omega) + \arctg(T_2 \omega)$$

$$\Rightarrow \Phi = \arctg(\xi \omega) - \arctg(T_1 \omega) - \arctg(T_2 \omega)$$

Compressivamente si ha che per:

• $\omega \rightarrow 0$: $AR \rightarrow K \Rightarrow \text{Arg}(AR | \omega \rightarrow 0) = \text{Arg} K$

$\Phi \rightarrow 0$

• $\omega \rightarrow \infty$: $AR \rightarrow 0 \Rightarrow \text{Arg}(AR | \omega \rightarrow \infty) \rightarrow \text{Arg}(\frac{1}{\omega}) = -\text{Arg} \omega$

$\Phi \rightarrow$ se $\xi > 0$ (zero negativo) $\rightarrow +90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -90^\circ$
 \rightarrow se $\xi < 0$ (zero positivo) $\rightarrow -90^\circ - 90^\circ - 90^\circ = -270^\circ$

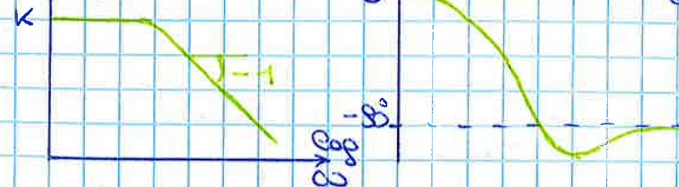
Pertanto la PRESENZA di N ZERI implica che: (m = ordine)

- La PENDENZA dell'ASINTOTO delle curve di AR venga DIMINUITA di N (pendenza = $-(m - N)$)
- lo SFASAMENTO AUMENTA di 90° se lo ZERO è NEGATIVO ($\Phi = -(m \cdot 90^\circ) + 90^\circ$), DIMINUISCE di 90° se lo ZERO è POSITIVO ($\Phi = -(m \cdot 90^\circ) - 90^\circ$)

La RISPOSTA in fase VARIA al VARIARE di ξ (positivo):

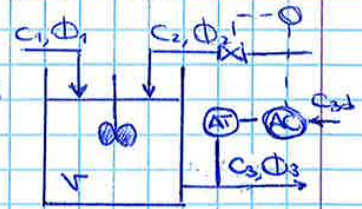
$\xi < T_1 < T_2$

$AR \rightarrow \text{Arg} K$



Sistemi di Controllo in Retroazione

Si consideri, ad esempio, la gestione di un miscelatore per cui occorre che la corrente in uscita C_3 sia costante nel tempo e pari a C_{3d} . Per fare sì che questo sia possibile progetta un SISTEMA AUTOMATICO che MONITORA la CONCENTRAZIONE in USCITA e INTERVIENE in caso di SCOSTAMENTI dal valore desiderato.



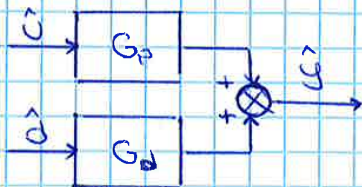
Il CONTROLLORE dovrà:

- 1- MISURARE la concentrazione del liquido in uscita ($y_m = C_{3m} - C_{3m,s}$)
- 2- CONFRONTARE il valore misurato (y_m) con il valore desiderato ($y_d = C_{3d} - C_{3d,s}$) e calcolare l'ERRORE ($e = y_m - y_d$).
- 3- DEFINIRE, sulla base di e , un'OPPOSITIVA AZIONE CORRETTIVA (c) che agisce sulla variabile manipolata u tramite l'elemento di controllo (= valvola).
- 4- INTERVENIRE quando CAMBIANO le CONDIZIONI in INGRESSO (y_m) o si CAMBIA l'OBBIETTIVO (y_d).

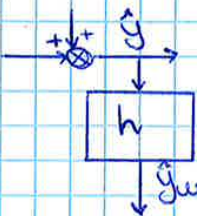
Schematizzando:

- PROCESSO NON CONTROLLATO

$$C_3 - C_{3s} = y \quad C_1 - C_{1s} = d \quad \Phi_2 - \Phi_{2s} = u$$



- ELEMENTO di MISURA



$$\hat{y}_m = h \hat{y}$$

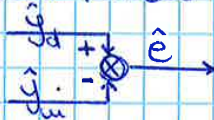
Individuare nel vostro esempio in (17).
Se è ideale $h=1$, quindi $\hat{y} = \hat{y}_m$, ovvero restituisce immediatamente il valore.

- CONTROLLORE



Presenta in entrata l'errore e grazie a G_c calcola l'azione correttiva c . Individuare in (18).

- COMPARATORE



Confronta il segnale dell'elemento di misura con il valore desiderato e fornisce l'ingresso al controllore.

Notiamo che Ψ e Ψ_d hanno stesso denominatore
 due il secondo addendo (= $G_G G_C h$) è definita
FUNZIONE ad ANELLO APERTO ed è pari al prodotto di
 tutte le funzioni di trasferimento dell'anello di
 controllo. Il numeratore di Ψ (= $G_G G_C$) è pari al prodotto
 delle funzioni di trasferimento che misurano \hat{y} e \hat{y}_d .
 Il numeratore di Ψ_d (= G_d) è pari al prodotto delle
 funzioni di trasferimento che misurano \hat{y} e \hat{d} .

In generale:

$$CLTF = \frac{\Pi_F}{1 + \Pi_L}$$

Π_F = produttoria funzioni tra uscita (\hat{y})
 ed ingresso (\hat{y}_d o \hat{d}), Π_L = produttoria
 funzioni dell'anello di controllo.
 ↳ funzione di trasferimento
 a ciclo chiuso

Legge di Controllo

L'obiettivo del controllore in retroazione è ridurre
 l'errore a zero ($e = y_d - y_m$).

La LEGGE di CONTROLLO è un'ESPRESSIONE che mette in
 relazione l'AZIONE di CONTROLLO (c) con l'ERRORE (e)
 e può essere:

- ON/OFF
- PROPORZIONALE
- INTEGRALE
- DERIVATIVA

Controllore On/Off

Con il CONTROLLORE ON/OFF l'AZIONE di CONTROLLO (c)
 può assumere SOLO DE VALORI:

$$\hat{c} = \begin{cases} c_1 & e < -a \\ 1 & -a < e < a \\ c_2 & e > a \end{cases}$$

dove a è il MARGINE di ERRORE o GAP rispetto al valore
 desiderato (y_d) entro il quale il controllore NON
 intraprende AZIONI CORRETTIVE. Esso dipende dalle
 caratteristiche di costruzione degli elementi dell'anello
 di controllo e dal ritardo di misura.

Se il valore di a viene ridotto eccessivamente il controllore
 farà un numero elevato di commutazioni che possono
 compromettere il funzionamento dell'attuatore.

IL SISTEMA CONTROLLATO ha una propria INERZIA, quindi,
 a fronte di una variazione d'ingresso, la variabile d'uscita
 tende prima ad allontanarsi dal valore desiderato e poi a
 convergere invertendo il cammino verso il SETPOINT. L'ERRORE
 MASSIMO raggiunto è l'OVERSHOOT.

Controllore Proporzionale Integrale

Per un CONTROLLORE PROPORZIONALE INTEGRALE (PI), si ha:

$$p(t) = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t') dt' \right) + p_s, \quad p_s = p(t) |_{e=0}$$

$$\Rightarrow c(t) = p(t) - p_s = K_c \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t') dt' \right)$$

con $T_I =$ TEMPO di INTEGRAZIONE o RESET TIME

$$\Rightarrow \hat{C}(s) = K_c \left(\hat{e}(s) + \frac{1}{T_I s} \hat{e}(s) \right) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right) \hat{e}(s)$$

$$\Rightarrow G_c(s) = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$$

GROSSO VANTAGGIO di questo tipo di controllore è che ELIMINA l'OFFSET. ESSO, TUTTAVIA, CAUSA un AUMENTO d'INERZIA e l'AZIONE CORRETTIVA CRESCE con l'ERRORE, MA RAGGIUNGE poi un LIVELLO di SATURAZIONE oltre il quale NON CATTURA PIÙ (= C_{max}). Ciò comporta che il CONTROLLORE sia "CONGELATO" a lungo nonostante l'errore sia soggetto ad ulteriore incremento o riduzione.

Questo fenomeno è detto RESET WINDUP o INTEGRAL WINDUP. Si nota che la logica integrale, grazie al termine integrale stesso, tiene conto del PASSATO del PROCESSO.

Controllore Proporzionale Derivativo

Per il CONTROLLORE PROPORZIONALE DERIVATIVO (PD), si ha:

$$p(t) = K_c \left(e(t) + T_D \frac{de}{dt} \right) + p_s, \quad p_s = p(t) |_{e=0}$$

$$\Rightarrow c(t) = p(t) - p_s = K_c \left(e(t) + T_D \frac{de}{dt} \right)$$

con $T_D =$ TEMPO di DERIVAZIONE

$$\Rightarrow \hat{C}(s) = K_c \left(\hat{e}(s) + T_D s \hat{e}(s) \right) = K_c (1 + T_D s) \hat{e}(s)$$

$$\Rightarrow G_c(s) = K_c (1 + T_D s)$$

L'AZIONE DERIVATIVA di questo tipo di controllore permette di PREVEDERE il COMPORTAMENTO FUTURO dell'ERRORE e ne tiene conto grazie al termine derivativo che costituisce la VELOCITÀ di VARIAZIONE dell'ERRORE. L'ANTICIPO dell'azione di controllo STABILIZZA il processo controllato, ma il CONTROLLORE PD IDEALE NON È REALIZZABILE poiché il SEGNALE dell'ERRORE è RUMOROSO. Per risolvere tale problema occorre modificare la funzione di trasferimento del

Dinamica di un Processo Controllato in Retroazione Controllatore Proporzionale

Sistema del Primo Ordine, Asservimento

Consideriamo un sistema del PRIMO ORDINE e ne studiamo la RISPOSTA a fronte di una VARIAZIONE a GRADINO UNITARIO sul VALORE DESIDERATO (y_d).

$$g = \frac{k}{Ts+1} \quad \hat{d} = 0 \quad \hat{y}_d = \frac{1}{s}$$

Se il controllore è PROPORZIONALE: $g_c = K_c$
 Quindi:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \Psi_d \hat{d} + \Psi_p \hat{y}_d = \Psi_d \hat{d} + \frac{g_c g}{1 + g_c g_r g h} \hat{y}_d \\ &= \frac{K_c \frac{k}{Ts+1}}{1 + K_c \frac{k}{Ts+1}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K_c k}{Ts+1 + K_c k} \cdot \frac{1}{s} = \frac{\frac{K_c k}{1 + K_c k}}{\frac{T}{1 + K_c k} s + 1} \cdot \frac{1}{s} = \frac{k^*}{T^* s + 1} \cdot \frac{1}{s} \end{aligned}$$

dove $k^* =$ GUADAGNO dell'ANELLO CHIUSO
 $T^* =$ TEMPO CARATTERISTICO dell'ANELLO CHIUSO
 avendo supposto ATTUATORE e MISURATORE IDEALI ($g_r, h = 1$).

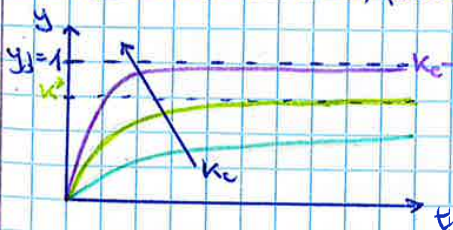
$$\Rightarrow y(t) = k^* (1 - e^{-t/T^*})$$

Il processo controllato risponde come un sistema del PRIMO ORDINE, ma con DIVERSO GUADAGNO k e TEMPO CARATTERISTICO T che DIPENDONO da K_c . Il sistema viene quindi modificato di poco.
 Si vede che:

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = k^* = \frac{K_c k}{1 + K_c k} < 1$$

$$\Rightarrow \text{OFFSET} = y_d - y_{\infty} = 1 - k^* = \frac{1}{1 + K_c k}$$

Il processo quindi si porta con ANDAMENTO ESPONENZIALE ad un nuovo valore STAZIONARIO k^* e NON RAGGIUNGE il valore DESIDERATO, pertanto si ha OFFSET.



Nota bene però che se $K_c \rightarrow \infty$ l'OFFSET TENDE a ZERO, pertanto all'aumentare di K_c l'offset diminuisce ed il processo tende allo stazionario $k = 1$.

Sistema Generico, Asservimento

$$g = G_p = \frac{K N(s)}{D(s)} \quad \hat{d} = 0 \quad \hat{y}_d = \frac{1}{s} \quad g_c = K_c \quad g_r, h = 1$$

$$\hat{y} = \frac{g g_c}{1 + g g_c} \hat{y}_d = \frac{K K_c \frac{N(s)}{D(s)}}{1 + K K_c \frac{N(s)}{D(s)}} \cdot \frac{1}{s} = \frac{K K_c N(s)}{D(s) + K K_c N(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Verificato che il sistema sia stabile (poli con $Re < 0$)
 si calcola la RISPOSTA ULTIMA:

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K K_c N(s)}{D(s) + K K_c N(s)} \frac{1}{s} = \frac{K K_c}{1 + K K_c}$$

$$\Rightarrow \text{OFFSET} = y_d - y_{\infty} = 1 - \frac{K K_c}{1 + K K_c} = \frac{1}{1 + K K_c}$$

Il sistema di controllo in retroazione con logica proporzionale possiede quasi sempre un OFFSET.

Se consideriamo un sistema capacitivo infatti:

$$g = \frac{K}{s} \Rightarrow \hat{y} = \frac{K_c \frac{K}{s}}{1 + K_c \frac{K}{s}} \frac{1}{s} \Rightarrow y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{K_c \frac{K}{s}}{1 + \frac{K K_c}{s}} \frac{1}{s} = 1$$

$$\Rightarrow \text{OFFSET} = y_d - y_{\infty} = 1 - 1 = 0$$

Il sistema capacitivo contiene in sé una componente integrale che elimina l'OFFSET. Stesse conclusioni per progetti di regolazione.

Controllore Proporzionale Integrabile

Sistema del Primo Ordine, Asservimento

$$g_c = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \quad \hat{d} = 0 \quad \hat{y}_d = \frac{1}{s} \quad g = \frac{K}{T_I s + 1} \quad g_r, h = 1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = 0 + \frac{K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K}{T_I s + 1}}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) \frac{K}{T_I s + 1}} \frac{1}{s} = \frac{K K_c (T_I s + 1)}{T_I T s^2 + T_I s + K K_c (T_I s + 1)} \frac{1}{s}$$

Il processo controllato risponde come un sistema del secondo ordine con uno zero. Pertanto la logica integrale causa l'aggiunta di un polo, che aumenta l'inerzia del processo, e di uno zero, che mitiga in parte l'aumento d'inerzia. Complessivamente il sistema sarà tendente a essere stabile ed esponenzialmente a portarsi a nuovo stazionario. Se i due poli sono reali e negativi il sistema sarà stabile ed esponenzialmente a portarsi a nuovo stazionario. Se i due poli sono complessi coniugati con parte reale negativa il sistema è ancora stabile, ma si porterà a nuovo stazionario.

DERIVATIVA COMPLETTA E' AGGIUNTA di UNO ZERO uolostante l'ORDINE sia COSTANTE. la risposta è quindi quella di un SISTEMA ANTICIRO-RITARDO.

Si vuol poi che:

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KK_c (T_D s + 1)}{(T + KK_c T_D) s + 1 + KK_c} \frac{1}{s} = \frac{KK_c}{1 + KK_c} < 1$$

⇒ OFFSET

ALLO STAZIONARIO il SISTEMA NON RAGGIUNGE il VALORE DESIDERATO, OVEZZO PRESENTA OFFSET. Conclusioni identiche per regolazione.

Sistema Generico, Asservimento

$$g = G_p = \frac{K N(s)}{D(s)} \quad \hat{d} = 0 \quad \hat{y}_d = \frac{1}{s} \quad g_c = K_c (1 + T_D s) \quad g_r, h = 1$$

$$\hat{y} = \frac{KK_c (T_D s + 1) N(s)}{D(s) + KK_c (T_D s + 1) N(s)} \frac{1}{s}$$

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KK_c (T_D s + 1) N(s)}{D(s) + KK_c (T_D s + 1) N(s)} \frac{1}{s} = \frac{KK_c}{1 + KK_c} < 1$$

⇒ OFFSET

Stesse conclusioni per i problemi di regolazione.

Controllore Proporzionale Integrale Derivativo

Sistema del Primo Ordine, Asservimento

$$g_c = K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad \hat{d} = 0 \quad \hat{y}_d = \frac{1}{s} \quad g = \frac{K}{T s + 1} \quad g_r, h = 1$$

$$\Rightarrow \hat{y} = \frac{K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \frac{K}{T s + 1}}{1 + K_c \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \frac{K}{T s + 1}} \frac{1}{s} = \frac{KK_c (T_I T_D s^2 + T_I s + 1)}{(T s + 1) T_I s K_c (T_I T_D s^2 + T_I s + 1)} \frac{1}{s}$$

Il PROCESSO CONTROLLATO risponde come un SISTEMA del SECONDO ORDINE con DUE ZERI. Pertanto la LOGICA PID completa e' AGGIUNTA di DUE ZERI, uno dovuto all'azione integrale e uno a quella derivativa, e di un PAO, dovuto all'azione integrale.

Si vuol che:

$$y(t) \Big|_{t \rightarrow \infty} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{KK_c (T_I T_D s^2 + T_I s + 1)}{(T s + 1) T_I s K_c (T_I T_D s^2 + T_I s + 1)} \frac{1}{s} = \frac{KK_c}{KK_c} = 1 \Rightarrow \text{NO OFFSET}$$

Il SISTEMA NON presenta OFFSET. Stesse conclusioni per regolazione.

Analisi della Stabilità di un Processo Controllato in Retroazione

Valutare la STABILITÀ di un PROCESSO CONTROLLATO in RETROAZIONE significa VALUTARE le RADICI del DENOMINATORE delle FUNZIONI di TRASFERIMENTO Ψ .
Sappiamo infatti che un processo è stabile se e solo se le radici del denominatore di Ψ hanno TUTTE PARTE REALE NEGATIVA.

A DENOMINATORE di Ψ troviamo le polinomio $1 + G_{OL}$ (= prodotto di funzioni dell'anello di controllo), pertanto se valuta la STABILITÀ risolvendo l'EQUAZIONE CARATTERISTICA:

$$1 + G_{OL} = 0$$

Poiché l'EQUAZIONE CARATTERISTICA ha GRADO ELEVATO generalmente, si ricorre a metodi che permettano di ricavare solo il SEGNO della PARTE REALE senza calcolare le radici (\rightarrow METODO di ROUTH).

Metodo di Routh

IL METODO di ROUTH permette di CALCOLARE solo il SEGNO delle RADICI senza calcolare il valore delle radici.

Tale metodo è applicabile solo ad EQUAZIONI CARATTERISTICHE POLINOMIALI, pertanto non è applicabile se Ψ presenta RITARDI o se g_c ha LOGICA PI, PD, PID.

Tale metodo consiste in:

- 1- Solvete in FORMA STANDARD l'EQUAZIONE CARATTERISTICA, quello cui $a_0 > 0$.

$$a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \dots + a_m = 0, \quad a_0 > 0$$

- 2- Verificare che TUTTI i COEFFICIENTI a_i siano POSITIVI. Ciò costituisce una CONDIZIONE NECESSARIA, ma NON SUFFICIENTE. Se anche solo un coefficiente è negativo allora il sistema è instabile.

- 3- Costruire la MATRICE di ROUTH costituita da $m+1$ RIGHE

1	a_0	a_2	a_4	a_6	...	due $^{\circ}$
2	a_1	a_3	a_5	...		$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$
3	b_1	b_2	...			$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$
4	c_1	...				$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$
...	...					
m	...					
$m+1$...					

- 4- Analizzare la matrice:

- Se TUTTI gli ELEMENTI della PRIMA COLONNA sono POSITIVI, il PROCESSO è STABILE (= condizione sufficiente).
- Se ALMENO un ELEMENTO della PRIMA COLONNA è NEGATIVO, il NUMERO di RADICI che causano INSTABILITÀ

Se $K_c \rightarrow 0$, l'equazione caratteristica diventa

$$D(s) + K_c N(s) = 0 \xrightarrow{K_c \rightarrow 0} D(s) = 0$$

ovvero si ricavano così i poli di G_c^* .

Se $K_c \rightarrow \infty$ invece si ha

$$\frac{D(s)}{K_c} + N(s) = 0 \xrightarrow{K_c \rightarrow \infty} N(s) = 0$$

ovvero si ricavano gli zeri di G_c^* .

Pertanto le **DIAGRAMME** del LOGO delle RADICI (= ROOT LOCUS) è composto da un **NUMERO** di CURVE pari al **NUMERO** di POLI in quanto, avendo l'equazione caratteristica grado d , si avranno d radici e quindi d curve.

Tali CURVE PARTONO dai POLI e, se i POLI sono PIÙ degli ZERI, m CURVE ARRIVANO negli ZERI e $(d-m)$ CURVE TENDONO a **INFINITO**.

Le **DIAGRAMME** è SEMPRE **SIMMETRICO** rispetto all'ASSE REALE in quanto, se le radici non appartengono ad esso, sono radici complesse coniugate, ovvero con stessa parte reale e parte immaginaria opposta.

Quando le CURVE INTERSECONO l'ASSE IMMAGINARIO individuano le K_c **CRITICHE** ($K_{c,crit}$), ovvero le **LIMITI** di **INSTABILITÀ** del SISTEMA. All'intersezione con l'asse **Im** in fatti, le radici diventano **immaginarie pure** e ad esse corrisponde il **valore limite** di K_c per cui il sistema è stabile.



La **RISPOSTA** del SISTEMA NON è **OSCILLATORIA**

solo se le **RADICI** giacciono **TUTTE** sull'ASSE REALE.

Se presentano in fatti parte immaginaria non nulla la risposta diventa **oscillatoria**.

Progettazione (Tuning) di un Controllore in Retroazione (Feedback)

Per progettare un controllore in retroazione occorre:

- 1) Capire se il controllore deve essere ad **AZIONE DIRETTA** ($K_c < 0$) o **AZIONE INVERSA** ($K_c > 0$)
- 2) Stabilire se il controllo è **PRIORITARIO** o **NON PRIORITARIO** a seconda dell'obiettivo e quindi definire la **LOGICA** di controllo (P, PD, PI, PID)
- 3) **TUNING** del controllore, ovvero determinare K_c , T_i e T_d secondo diversi metodi:
 - (A) **METODI** basati sul **MODELLO** del **PROCESSO** controllato
 - (B) **ANALISI** di **FREQUENZA**
 - (C) **METODI** **SENZA** **MODELLO**.

I CRITERI PRESTAZIONALI INTEGRALI sono:

- Integral Absolute Error (IAE)

$$IAE = \int_0^{t'} |E(t)| dt$$

- Integral Squared Error (ISE)

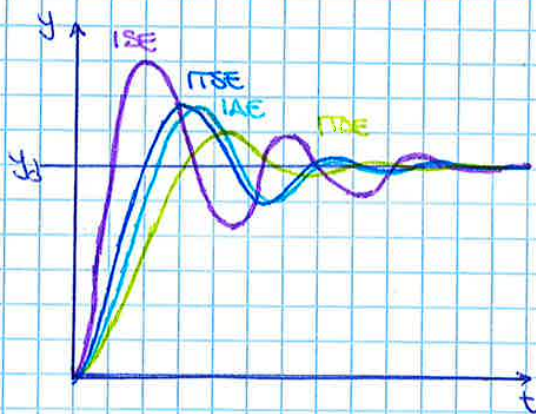
$$ISE = \int_0^{t'} E^2(t) dt$$

- Integral Time-weighted Absolute Error (ITAE)

$$ITAE = \int_0^{t'} t |E(t)| dt$$

- Integral Time-weighted Squared Error (ITSE)

$$ITSE = \int_0^{t'} t E^2(t) dt$$



Notiamo che ISE è molto aggressivo inizialmente, ma la maggiore velocità a y_d causa un aumento di overshoot e quindi un tempo di assestamento (t_s) maggiore. Se l'integrale è pesato nel tempo, il controllore sarà meno aggressivo inizialmente, ma più dopo. In questo caso aumenta l'inerzia, ma t_s

sarà più piccolo.

Metodo della Sintesi Diretta

Questo metodo permette di ricavare G_c a partire da una SPECIFICA FUNZIONE di TRASFERIMENTO ψ_{target} e valido sia per PROBLEMI di ASSERVIMENTO che di REGOLAZIONE. Occorre:

- 1) Scegliere ψ_{target} con tot poli e tot zeri
- 2) Risolvere l'EQUAZIONE

$$\psi_{target} = \frac{G_p G_c G_r}{1 + G_p G_c G_r h} \quad \text{con } G_v, h = 1$$

$$\Rightarrow \psi_{target}(1 + G_p G_c) = G_p G_c$$

$$\Rightarrow G_c = \frac{\psi_{target}}{G_p (1 - \psi_{target})}$$

- 3) Ricavo K_c, T_i, T_d . Si vuole che NON è stata scelta una LOGICA inizialmente

Analisi di Frequenza + Ziegler-Nichols

Con questo metodo occorre:

- 1) Disegnare i DIAGRAMMI di BODE a GUADAGNO NEUTRALE, ovvero $G_0 \cdot K_c / k_c = 1$
- 2) Determinare ω_c tale che $\Phi = -180^\circ$
- 3) Determinare $AR_c(\omega_c)$ e:
 - se $AR_c = 1$ → limite di instabilità → $K_{cv} = 1, \omega_{cv} = \omega_c$
 - se $AR_c < 1$ → STABILE → $K_{cv} = 1/AR_c, \omega_{cv} = \omega_c$
 - se $AR_c > 1$ → INSTABILE → $K_{cv} = 1/AR_c, \omega_{cv} = \omega_c$

Pertanto le diagrammi di Bode di AR mantengono la stessa forma ma con valori maggiori se cresce di K_c , mentre quello di Φ non cambia con K_c .

- 4) Noti K_{cv} e ω_{cv} si ricavano K_c, T_i, T_d con le FORMULE di ZIEGLER-NICHOLS.

Metodo dei Margini di Guadagno e Margini di Fase

Con questo metodo occorre:

- 1) Scegliere la LOGICA di CONTROLLO e quindi i PARAMETRI da ricavare
- 2) Determinare un VALORE TASSITO e MINIMO per ciascun PARAMETRO, ovvero un BOTTINO di ESISTENZA
- 3) Imporre un CRITERIO PRESTAZIONALE in termini di:
 - MARGINE di GUADAGNO

$$MG = \frac{1}{AR_c} = \alpha \quad \text{con } \alpha \text{ scelto e } \begin{cases} \Phi(\omega_c) = -180^\circ \\ AR_c(\omega_c) \end{cases}$$

- MARGINE di FASE

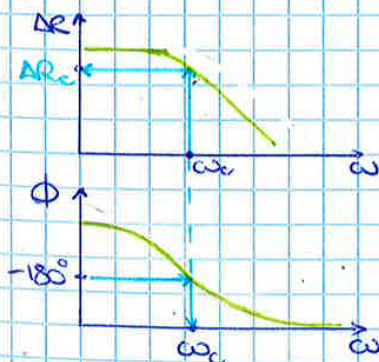
$$MP = \Phi_1(\omega_c) - (-180^\circ) = \beta \quad \text{con } \beta \text{ scelto e } \begin{cases} \Phi_1(\omega_c) \\ AR_c(\omega_c) = 1 \end{cases}$$

- 4) Scegliere una COMBINAZIONE di K_c, T_i, T_d e ne VERIFICO la STABILITÀ

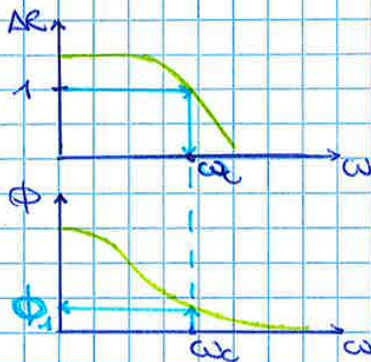
5A) Traccio BODE (G_0). Ricavare ω_c tale per cui $\Phi(\omega_c) = -180^\circ$, quindi ricavare $AR_c(\omega_c)$.

Calcolare $MG = \frac{1}{AR_c}$

e confrontare con α scelto.
 Se $MG \neq \alpha$, tornare al punto 4.
 Se $MG = \alpha$, la progettazione del controllore è conclusa



58) Tracciò BODE (Gc). Ricavare ω_c tale per cui $AR(\omega_c) = 1$ e quindi ricavare $\phi_1(\omega_c)$. Calcolare



$MP = \phi_1(\omega_c) - (-180^\circ)$
 e confrontare con β scelto.
 Se $MP \neq \beta$, tornare al punto 4.
 Se $MP = \beta$, progettazione del controllore conclusa.

Metodo Basato su Modello Semplificato

IL METODO basato su modello SEMPLIFICATO consiste nel:

1) Ricavare K, T, α e quindi $G_c = \frac{K e^{-sT}}{1 + sT}$ imponendo un disturbo a GRADINO sul segnale del controllore in un PROCESSO ad ANELLO APERTO.

In genere si determinano α e T graficamente e K dall'aumento dello statico ΔK in quanto si conosce l'altezza A del gradino imposto.

2) UTILIZZANDO FORMULE di PROGETTAZIONE, che differiscono tra loro per criterio prestazionale ottenuto per ricavare, si ottengono K_c, T_i e T_o .

Le più usate sono le FORMULE di ZIEGLER-NICHOLS, o quelle di Cohen-Coon, che possono essere applicate solo se $\alpha_2/\alpha_1 < 1/4$, ovvero se $0,1 < \alpha/T < 1$

	K_c	T_i	T_o
P	$\frac{1}{K} \frac{T}{\alpha}$	/	/
PI	$\frac{0,8}{K} \frac{T}{\alpha}$	$3,33\alpha$	/
PD	$\frac{1,2}{K} \frac{T}{\alpha}$	$2,0\alpha$	$0,5\alpha$

Formule di Ziegler-Nichols

Metodi di Progettazione senza Modello

Sono possibili due approcci:

1) Studiare la RISPOSTA SPERIMENTALE del PROCESSO CONTROLLATO con LOGICA PROPORZIONALE.

Aumentando per tentativi si ricavano K_c e P_o variando K_c finché il sistema non oscilla con ampiezza

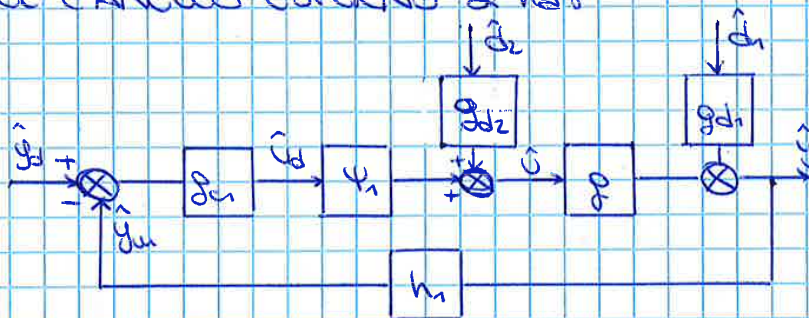
SET-POINT (\hat{y}_d). Pertanto è necessario che il CONTROLLORE dell'ANELLO SECONDARIO sia molto RAPIDO, e quindi AGGRESSIVO, rispetto a quello dell'anello primario, in modo che \hat{U} sia REGOLATA PRIMA che \hat{O}_2 disturbi il tutto processo. Per tale motivo viene spesso utilizzato un CONTROLLORE P per l'ANELLO INTERNO che, nonostante presenti offset, è AGGRESSIVO ed ABILITÀ in quanto il CONTROLLORE dell'ANELLO ESTERNO, in genere PI o PID, permette di ELIMINARE l'OFFSET.

Per l'ANELLO INTERNO si ha:

$$\hat{O}_2 = \Psi_1 \hat{O}_d + \Psi_2 \hat{O}_2$$

$$\text{dove } \Psi_1 = \frac{g_{c2} g_r}{1 + g_{c2} g_r h_2}, \quad \Psi_2 = \frac{g_{d2}}{1 + g_{c2} g_r h_2}$$

Per l'ANELLO ESTERNO si ha:



$$\hat{y} = \Psi_3 \hat{y}_d + \Psi_4 \hat{O}_d + \Psi_5 \hat{O}_1$$

$$\text{dove } \Psi_3 = \frac{g_{c1} \Psi_1 g}{1 + g_{c1} \Psi_1 g h_1}, \quad \Psi_4 = \frac{g_{d2} g}{1 + g_{c1} \Psi_1 g h_1}, \quad \Psi_5 = \frac{g_{d1}}{1 + g_{c1} \Psi_1 g h_1}$$

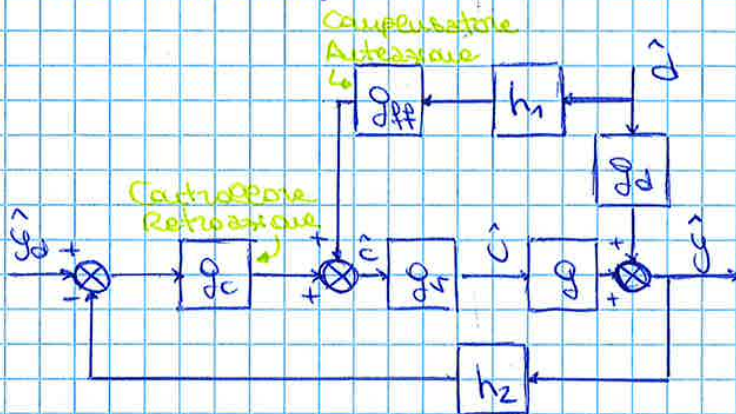
Per rendere il CONTROLLORE (g_{c2}) ancora più AGGRESSIVO l'uscita del K_c al LIMITE di INSTABILITÀ. Ciò è reso possibile dalla presenza dell'altro controllore (g_{c1}) che rende il sistema stabile.

Controllo in Anteaazione o Feedforward

Quando si hanno DEVIAZIONI SIGNIFICATIVE e FREQUENTI sull'USCITA del PROCESSO (\hat{O} su \hat{y}) si ricorre al CONTROLLO in ANTEAZIONE. Con questo sistema è possibile avere l'AZIONE CORRETTIVA PRIMA che il disturbo influisca sul processo, in quanto, poiché si misura il disturbo \hat{d} , il SISTEMA è PIÙ "PRONTO" in modo da mantenere costante la variabile d'uscita.

Controllo in Retroazione con Compensatore in Anteaazione

IL CONTROLLO IN RETROAZIONE NECESSITA di un COMPENSATORE in ANTEAZIONE, che persiste solo in retroazione, quando le VARIAZIONI su \hat{y} sono FREQUENTI e SIGNIFICATIVE.



IL COMPENSATORE in ANTEAZIONE tuttavia, NON è SEMPRE REALIZZABILE per i PROCESSI che presentano RITARDO. Infatti:

$$g = g^* e^{-\alpha s} \Rightarrow \begin{cases} g_{ff} = \frac{1}{g^*} e^{+\alpha s} \rightarrow \text{NON REALIZZABILE} \\ g_{ff} = \frac{g_{fd}}{g^*} e^{+\alpha s} \end{cases}$$

$$\text{se: } g_d = g_d^* e^{-\beta s} \Rightarrow g_{ff} = -\frac{g_d^*}{g^*} e^{(\alpha-\beta)s}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{se } \alpha > \beta \rightarrow g_{ff} \text{ NON REALIZZABILE} \\ \text{se } \alpha \leq \beta \rightarrow g_{ff} \text{ REALIZZABILE} \end{cases}$$

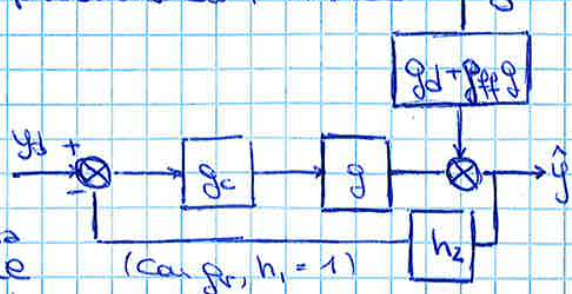
A meno che $\alpha \leq \beta$, g_{ff} NON è REALIZZABILE in quanto sarebbe necessario calcolare in ANTICIRO di α tempo i valori di \hat{y}_d o di \hat{y} .

(IL CONTROLLORE in ANTEAZIONE costituito da g_{ff} e g_{fd} NON è REALIZZABILE in presenza di RITARDO)

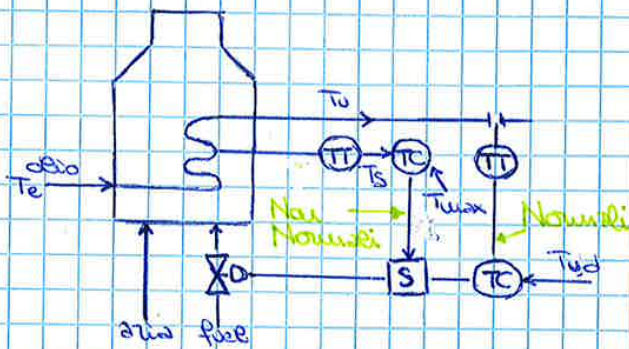
Suoi che:

$$\hat{y} = \frac{g_c}{1+g_c h_2} \hat{y}_d + \frac{g_d + g_{ff} g}{1+g_c h_2} \hat{y}_d$$

Pertanto la STABILITÀ, legata a $1+g_c h_2 = 0$, NON DIPENDE da g_{ff} , quindi resta INALTERATA dalla presenza del COMPENSATORE



Ad esempio in una fornace per il riscaldamento dell'olio si avrà il seguente schema.



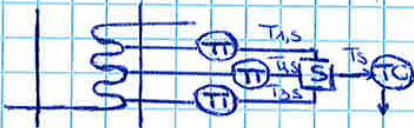
In questo caso si vuole mantenere T_u ad una temperatura ottimale per il processo (T_{ud}), ma si vuole anche che T_s sia inferiore ad una temperatura $T_{u_{max}}$ che mette l'impianto a rischio.

Per tanto si utilizza un SELETORE il quale in CONDIZIONI NORMALI SODDISFA l'OBBIETTIVO di QUANTITÀ ed IGNORA

il SEGNALE riguardante la SICUREZZA, in quanto in condizioni normali ($T_s < T_{u_{max}}$) è diretto di sicurezza e soddisfatto senza necessità di azioni correttive. In CONDIZIONI NON NORMALI ($T_s > T_{u_{max}}$) invece, il SELETORE IGNORA l'OBBIETTIVO di QUANTITÀ e SODDISFA quello di SICUREZZA. Per tanto il SELETORE spetta DECIDERE se le CONDIZIONI sono NORMALI o NON NORMALI e quindi quale dei due azioni percorrere.

Controllore Anticoupling

Il CONTROLLORE ANTI-COUPPING viene usato quando un ANELLO di CONTROLLO fa riferimento a PIÙ VARIABILI d'USCITA. Per tanto occorre utilizzare un SELETORE che SCELGA su quale MISURA BASEARE l'AZIONE CORRETTIVA.



Controllando sempre e' diretto di sicurezza di una fornace, il selettore baserà l'azione correttiva sulla più alta temperatura misurata tra T_{s1} e T_{s2} , che deve essere inferiore a $T_{u_{max}}$.

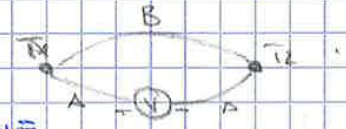
Compensatore Antireset Windup

Quando si veriifica il RESET WINDUP, anche se l'errore si riduce occorre tempo prima che il termine integrale si riporti al livello normale. Per PREVENIRE questo fenomeno occorre FERMARE e INCREMENTARE dell'ERRORE INTEGRALE quando si è in CONDIZIONI di SATURAZIONE.

Il COMPENSATORE ANTIRESET WINDUP fa parte quindi di un ANELLO di CONTROLLO in RETROAZIONE che ha come obiettivo quello di PORTARE a ZERO l'ERRORE

Varia da T_{d1} a T_{d2} e $T_{d2} < T_{d1}$, oltre a chiudere la valvola del vapore, si azionerà il sistema di refrigerazione, viceversa se si passa a T_{d2} con $T_{d2} > T_{d1}$ allora, oltre che aprire la valvola del vapore, si azionerà la resistenza. A regolare questo funzionamento vi sono quindi SELETTORI e CONTROLLORI, in genere on-off o proporzionali. Poiché è l'assenza di RESISTENZE e CONDUNG implicano la necessità di ENERGIA ELETTRICA e hanno COSTI relativi al loro impiego negli impianti, occorre che esse AGISCONO SOLO in caso di VARIAZIONI del SET-POINT, ovvero in presenza di un elevato errore che va eliminato nel minor tempo possibile.

GIUNTO FREDDO, dove si riferisce alla differenza di potenziale in presenza di un AT. Si vuol dire che la DIFFERENZA di POTENZIALE V NON dipende LINEARMENTE da ΔT ($\Delta T = \sum_{k=0}^n \Delta k \sqrt{k}$).



La termocoppia è posta all'interno di una GUAINA PROTETTIVA che penetra nell'apparecchiatura in cui si misura T che le permette di RESISTERE a SOLLECITAZIONI MECCANICHE, una spranga di RITARDO nella TUSURA. All'esterno i conduttori sono connessi da una MORSETTIERA di protezione dove una testina di protezione da cui altri conduttori uguali collegati ad un TERMORESISTENZA / TERMORESISTORE che riferisce la temperatura del punto freddo (morsetteria) compensando il segnale della termocoppia con COMPENSAZIONE della TEMPERATURA AMBIENTE. Il TIPO di TERMOCOPIA dipende dalla TEMPERATURA da MISURARE: se è BASSA occorre un ALTO COEFFICIENTE TERMOELETTRICO (tipi J), altrimenti tipi K o R.

- Vantaggio: poco costosa, dimensioni contenute, resistente a sollecitazioni meccaniche, ampio intervallo di misura, risposta rapida
- Svantaggio: non affidabile ad alte T , accurata limitata

Termoresistenza

- Funzionamento: Sfrutta la VARIAZIONE di RESISTIVITA' (ρ), e quindi della resistenza elettrica ($R = \rho L / S$), con la VARIAZIONE di TEMPERATURA da cui DIPENDE LINEARMENTE-ESISTENZA: tipi diversi di RTD a seconda del conduttore usato.
- Vantaggio: elevata precisione, elevata accuratezza, elevata stabilità
- Svantaggio: dimensioni maggiori, poco robusto, intervallo di misura più ridotto

Termoresistore

- Funzionamento: Stesso principio della RTD, ma applicato per un SEMICONDUOTORE dove ρ DECRESCe NON-LINEARMENTE con T
- Vantaggio: elevata precisione ed accuratezza
- Svantaggio: campo di misura limitato

Termometro a Riempimento

- Funzionamento: Sfrutta la variazione di LUNGHEZZA di un CORPO con la TEMPERATURA. Costituito da un BULBO, un CAPILLARE e una CASSA che contiene un TUBO di BOURDON riempito con GAS INERTE o LIQUIDO che, variando T , si espande nel bulbo spostando il tubo di Bourdon. Questo, con un collegamento meccanico, trasmette all'indice.
- Vantaggio: poco costoso, versatile, robusto, campo ampio di misura, un Europa
- Svantaggio: dimensioni superiori del bulbo, sensore collegato all'indicatore



Misuratore a Piezoelettrico

- Funzionamento: Sfrutta la VARIAZIONE di CONDUCIBILITÀ per VARIARE della PRESSIONE.

Misura di Portata

Si distinguono i MISURATORI basati su DIFFERENZA di PRESSIONE ed i DISPOSITIVI MECCANICI.

Venturimetro

- Funzionamento: Sfrutta la CONCENTRAZIONE nella SEZIONE di PASSAGGIO che implica un AUMENTO di VELOCITÀ e DIMINUIZIONE della PRESSIONE. Quest'ultima viene MISURATA a MONTE e alla VENA CONTRATTA e, nota la DIFFERENZA di P, con l'EQUAZIONE di BERNOLLI si risale alla PORTATA.



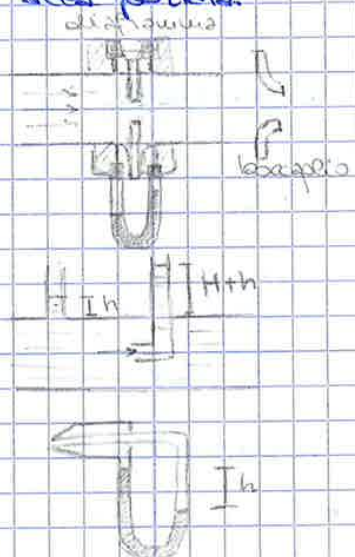
È costituito da un tratto di tubazione convergente, in cui si passa da D_1 a D_2 e viceversa, ed uno divergente, in cui si torna allo stesso modo da D_2 a D_1 .

Il sensore di pressione è inserito con due flange.

Applicando Bernoulli si ottiene: $\rho = \alpha \cdot S_2 \cdot \sqrt{2 \Delta h}$, dove α è il coefficiente di efflusso (fornito) e Δh il dislivello manometrico.

Misuratore a Orifoglio e a Boccapio

- Funzionamento: Costituito da un DISCO FORATO fissato con due flange e due punti di presa per il MANOMETRO DIFFERENZIALE. Si conosce quindi la differenza di pressione nella portata. Per ridurre le perdite di pressione all'interno del condotto, sono stati introdotti i MISURATORI a BOCCAPPIO che sono caratterizzati da un IMBOCO RACCORDATO.



Tubo di Pitot

- Funzionamento: Sfrutta il CONFRONTO tra PRESSIONE STATICA, rilevata da un piezometro nella tubazione, e DINAMICA, rilevata da un tubo orientato nella direzione del moto del fluido. La DIFFERENZA di PRESSIONE è la PREVALENZA DINAMICA correlabile alla PORTATA. Configurazione alternativa prevede la misura di pressione statica sovrapposta con quella dinamica in corrente. Usato per PORTATA di AERIFORMI.

Flussometro a Vortice

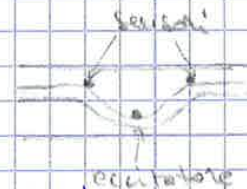


- **Funzionamento:** Un corpo non smussato posto al centro della corrente induce un moto instabile con vortici. Il distacco di un vortice dal corpo è misurato da un sensore di pressione e la frequenza di formazione dei vortici è proporzionale direttamente alla portata.
- **Vantaggi:** costo elevato, ampio campo di applicazione, elevata accuratezza, risposta lineare, perdite di carico ridotte.
- **Svantaggi:** bassa accuratezza per Re piccoli, non adatto a fluidi molto viscosi, non adatto per diametri $< 1''$.

Flussometro a Ultrasuoni

- **Funzionamento:** Si sfrutta il ritardo che un'onda sonora subisce quando si muove in un fluido in movimento (Lord Rayleigh). Coppie di sensori sono polarizzate nel tubo uno di fronte all'altro con un angolo definito e ricevono e trasmettono alternativamente il segnale nella sonora in quanto materiali piezoelettrici. Se il liquido è in movimento i segnali ultrasonori sono accelerati lungo il flusso e rallentati in direzione opposta. La differenza di tempo di transito è direttamente proporzionale alla portata. I sensori possono anche essere collocati all'esterno del tubo.
- **Vantaggi:** applicabile anche con grande diametro, basse perdite di carico, tempo di risposta basso, non dipende da proprietà fisiche del fluido.
- **Svantaggi:** segnale da collegare tenendo conto del profilo di velocità, costoso.

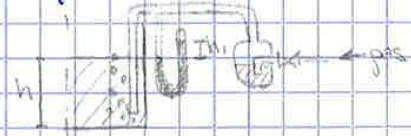
Flussometro di Corioli



- **Funzionamento:** Tubo ad U, posto in oscillazione costante con un eccitatore, che genera un'onda che il fluido oscilla uniformemente. Quando il fluido si muove, due sensori posti all'estremità del tubo ricevono il cambiamento di oscillazione in termini di tempo e spazio (= variazione di fase) dovuto all'effetto di Corioli, quello a cui comparenti torsionali che si aggrimpata. Tanto più grande è la deflessione del tubo, maggiore è la portata. Misurando poi la frequenza di oscillazione si può ricavare la densità del fluido rispetto a cui è inversamente proporzionale.

Sensori di livello a Gorgogliamento

- Funzionamento: In un tubo, inserito fino al livello cui viene misurato, viene inviata ARIA con una PRESSIONE tale da vincere la SPINTA IDROSTATICA data da una colonna di liquido alta quanto il tubo immerso. In questo caso compaiono BOLLE sulla superficie e la PRESSIONE dell'ARIA può essere correlata all'ALTEZZA di LIQUIDO. Applicati in serbatoi aperti.



Prof. Roberto Pisano. *Controllo e strumentazione per i processi chimici (02QWAMB)*

$$\begin{cases} V \frac{dC_A}{dt} + \phi_u C_A = \phi_{e2} C_{A,e} \\ C_A(0) = 0 \end{cases}$$

Quesito

Calcolare l'evoluzione della concentrazione di A nella corrente in uscita, sapendo che $V = 2 \text{ m}^3$, $\phi_{e,2} = 0,3 \text{ m}^3 \text{ min}^{-1}$ e $C_{Ae,2} = 50 \text{ kg m}^{-3}$.

→ Capire che $\phi_e = \phi_u$; $\phi_{e2} = \phi_{u2}$
 → Identificare gradino (+ concentrazione)

Esercizio 3

Si consideri un processo il cui comportamento dinamico, nel dominio di Laplace, è descritto dal seguente modello matematico nella forma delle funzioni di trasferimento:

$$y(s) = \frac{10}{20s+2} \hat{u}(s) \quad \frac{5}{10s+1}$$

Quesiti

- Qual è l'ordine del sistema? Identificare, inoltre, gli zeri e i poli della funzione di trasferimento.
- Qual è il guadagno statico del processo? E il tempo caratteristico?
- Se il processo fosse soggetto alla seguente funzione forzante $\hat{u}(s) = 2/s$, quale sarebbe il valore della variabile di uscita esauriti i transitori?
- Ripetere il punto c) considerando una diversa funzione forzante:
 - $\hat{u}(s) = \frac{(1 - e^{-s})}{s}$
 - $\hat{u}(s) = 1$
 - $u(t) = 2\sin(3t)$
- Tracciare il diagramma di Bode della funzione di trasferimento.

→ Conoscere le forzanti più comuni soprattutto ordine

Prof. Roberto Pisano. *Controllo e strumentazione per i processi chimici (02QWAMB)*

dove $\hat{y}(s)$ e $\hat{u}(s)$ sono variabili di scarto e si riferiscono alla temperatura del fluido di processo nella corrente d'uscita e alla portata di fluido tecnologico. Le costanti caratteristiche sono espresse in minuti.

Quesito

Calcolare l'ampiezza della risposta del sistema (cioè della temperatura del fluido di processo in uscita dallo scambiatore) esauriti i transitori sapendo che la portata di fluido tecnologico è forzata con una funzione sinusoidale di ampiezza 2 L/min e periodo 0.5 min.

$$\rightarrow A_1 = AR \cdot A_0$$

Prof. Roberto Pisano. *Controllo e strumentazione per i processi chimici (02QWAMB)*

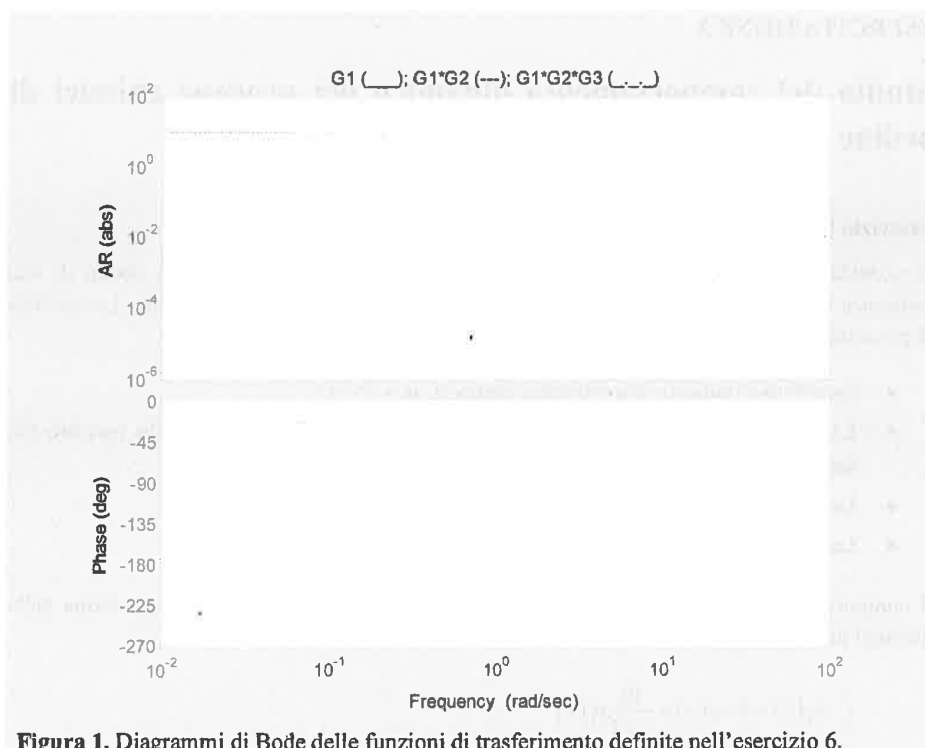


Figura 1. Diagrammi di Bode delle funzioni di trasferimento definite nell'esercizio 6.

Esercizio 7

Vi è stato assegnato il compito di derivare un modello sperimentale di un processo. A questo scopo un vostro collega ha condotto una prova sperimentale in cui ha misurato l'evoluzione della variabile di uscita (già espressa come deviazione rispetto allo stazionario) a fronte di una variazione a gradino di ampiezza unitaria sulla variabile di ingresso. Il risultato di questa prova sperimentale è riportato in Figura 2 da cui si evince che $t_{20} = 13.45$ s e $t_{60} = 46$ s.

Quesito

- i. Utilizzando la procedura grafica e il metodo di Sundaresan e Krishnaswamy, derivare un modello del primo ordine.
- ii. Utilizzando la procedura grafica e il metodo di Sundaresan e Krishnaswamy, derivare un modello del primo ordine con ritardo.
- iii. Utilizzando il metodo di Smith, derivare un modello del secondo ordine con ritardo.

→ Applicazione tra tangente si legge $\tau = \alpha + T$
 → $t_1 \rightarrow 35\% y_{\infty}$ $t_2 \rightarrow 85\% y_{\infty}$, $\alpha = 1,3 t_1 - 0,25 t_2$, $\tau = 0,67(t_2 - t_1)$
 → $t_{20}^* = t_{20} - \alpha$, $t_{60}^* = t_{60} - \alpha$