



Appunti universitari

Tesi di laurea

Cartoleria e cancelleria

Stampa file e fotocopie

Print on demand

Rilegature

NUMERO: 2205A

ANNO: 2017

A P P U N T I

STUDENTE: Caruso Carlotta

MATERIA: Esercizi di Meccanica strutturale - Prof. Goglio

Il presente lavoro nasce dall'impegno dell'autore ed è distribuito in accordo con il Centro Appunti.

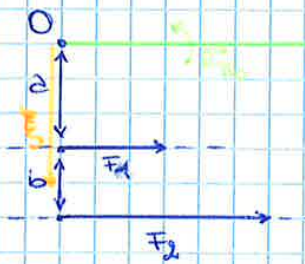
Tutti i diritti sono riservati. È vietata qualsiasi riproduzione, copia totale o parziale, dei contenuti inseriti nel presente volume, ivi inclusa la memorizzazione, rielaborazione, diffusione o distribuzione dei contenuti stessi mediante qualunque supporto magnetico o cartaceo, piattaforma tecnologica o rete telematica, senza previa autorizzazione scritta dell'autore.

ATTENZIONE: QUESTI APPUNTI SONO FATTI DA STUDENTIE NON SONO STATI VISIONATI DAL DOCENTE.
IL NOME DEL PROFESSORE, SERVE SOLO PER IDENTIFICARE IL CORSO.

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE

Equivalenza dei Sistemi Statici

① Due forze parallele sostituite con \vec{R}_F



$$R_F = F_1 + F_2$$

$$R_{T0} = F_1 a + F_2 (a+b)$$

$$j_{RF} = \frac{R_{T0}}{R_F} = \frac{F_1 a + F_2 (a+b)}{F_1 + F_2} = \frac{(F_1 + F_2) a}{F_1 + F_2} + \frac{F_2 b}{F_1 + F_2} = a + \frac{F_2 b}{F_1 + F_2}$$

Se $F_1 = F_2 \Rightarrow j_{RF} = a + \frac{b}{2}$

Se $F_2 = 0 \Rightarrow j_{RF} = a$

Se $F_1 = 0 \Rightarrow j_{RF} = a+b$

② Carico uniforme su linea

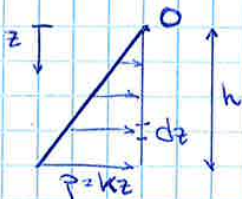


$$R_F = \int_0^e q dx = qe$$

$$R_{T0} = \int_0^e x q dx = q \frac{e^2}{2}$$

$$j_{RF} = \frac{R_{T0}}{R_F} = \frac{qe^2/2}{qe} = \frac{e}{2}$$

③ Carico distribuito variabile



$$R_F = \int_0^h p dz = k \int_0^h z dz = k \frac{h^2}{2}$$

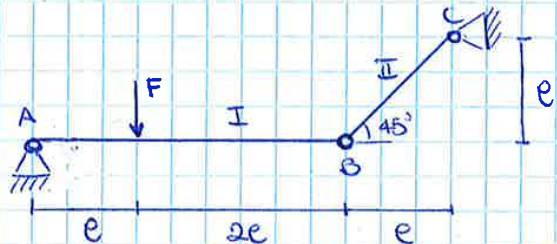
$$R_{T0} = \int_0^h z p dz = k \int_0^h z^2 dz = k \frac{h^3}{3}$$

$$j_{RF} = \frac{R_{T0}}{R_F} = \frac{kh^3/3}{kh^2/2} = \frac{2}{3} h$$

Esercitazione 1

① Determinare REAZIONI VINCOLARI INTERNE ed ESTERNE

- A → cerniera esterna → 2 reazioni vincolari esterne
- B → cerniera interna → 2 reazioni vincolari interne (spostam. ↑ e ↔ di I = a II)
- C → cerniera esterna → 2 reazioni vincolari esterne

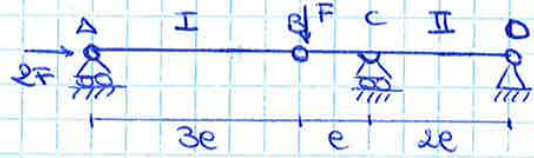


$$\Rightarrow v = 2+2+2 = 6 \quad \Rightarrow h = v - 3u = 6 - 3 \cdot 2 = 6 - 6 = 0 \rightarrow \text{isostatico!}$$

③ Determinare REAZIONI VINCOLARI

$$h = 1 + 2 + 1 + 2 - 3 \cdot 2 = 0$$

appoggi A e C cerniere B e D → ISOSTATICO!



8 incognite!
→ tratto per cerniera singolarmente

Corpo I:

$$\begin{aligned} \uparrow: V_A + V_B' &= 0 & \Rightarrow V_A = -V_B' \\ \rightarrow: 2F + Q_B' &= 0 & \Rightarrow Q_B' = -2F \\ A \downarrow: -V_B' \cdot 3e &= 0 & \Rightarrow V_B' = 0 \end{aligned}$$

Cerniera B:

$$\begin{aligned} \uparrow: -V_B' - F + V_B'' &= 0 & \Rightarrow F = V_B'' - V_B' = V_B'' \\ \rightarrow: -Q_B' + Q_B'' &= 0 & \Rightarrow Q_B'' = Q_B' = -2F \end{aligned}$$

Corpo II:

$$\begin{aligned} \uparrow: -V_B'' + V_C + V_D &= 0 & \Rightarrow V_D = V_B'' - V_C = F - \frac{3}{2}F = -\frac{1}{2}F \\ \rightarrow: -Q_B'' + Q_D &= 0 & \Rightarrow Q_B'' = Q_D = -2F \\ D \downarrow: -V_B'' \cdot 3e + V_C \cdot 2e &= 0 & \Rightarrow V_C = \frac{3}{2}V_B'' = \frac{3}{2}F \end{aligned}$$



Esercizio 2

① Dato $[\sigma] = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & -120 \end{bmatrix}$ MPa si calcolino:

- ⓐ le tensioni principali $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e α tra (x, y, z) e (p_1, p_2, p_3) .
- ⓑ σ, τ su un piano del fascio con asse p_1 e \vec{n} a 45° rispetto p_2

- ⓐ • Determinare direzione e σ principale
 $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \sigma_{yy} = 170$ MPa è principale
- Determinare $\sigma_{a,b}$

$$\sigma_{a,b} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 271 \text{ MPa} = \sigma_a \\ -141 \text{ MPa} = \sigma_b \end{cases}$$

• Ordinare le σ : $\sigma_1 = 271 \text{ MPa} > \sigma_2 = 170 \text{ MPa} > \sigma_3 = -141 \text{ MPa}$

• Determinare α^*
 $\tan 2\alpha^* = \left| \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}} \right| = 0,4865 \Rightarrow \alpha^* = 13^\circ$

$$\frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{zz} = \frac{N}{A} + \frac{I_x}{J_{xx}} y - \frac{I_y}{J_{yy}} x$$

$$k_T = 0,712 = 0,712$$

$$\frac{\sigma}{2} (2\sqrt{2}) = \sqrt{2}\sigma$$

$$\frac{\sigma}{2} \sqrt{2}\sqrt{\pi} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{2}\pi$$



$$\epsilon_0 = \epsilon_{xx} = 0,45 \cdot 10^{-3}$$

$$\epsilon_{45} = \frac{1}{2} \epsilon_{xx} + \frac{1}{2} \epsilon_{yy} + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \Rightarrow \gamma_{xy} = 2\epsilon_{45} - \epsilon_0 - \epsilon_{90} = -9 \cdot 10^{-4}$$

$$\epsilon_{90} = \epsilon_{yy} = -1,35 \cdot 10^{-3}$$

$$0,45 \cdot 10^{-3}$$

$$-4,5 \cdot 10^{-4}$$

$$-1,35 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{matrix} 0,45 \cdot 10^{-3} & -0,45 \cdot 10^{-3} \\ -0,45 \cdot 10^{-3} & -1,35 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) = 16$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = -27$$

$$\sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy} = -7$$

- $|m_1 \cdot |p_2| = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2}$
- $\vec{p} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$
- $f = \begin{bmatrix} 420 & 0 & 0 \\ 0 & 140 & 0 \\ 0 & 0 & -340 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \sqrt{3/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 0 \\ -170\sqrt{3} \end{pmatrix}$
- $\sigma = |m_1 \cdot |f| = -150 \text{ MPa}$
- $\tau = \sqrt{|f|^2 - \sigma^2} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - \sigma^2} = 329 \text{ MPa}$

Esercizio 3

- ① Dato $[\sigma] = \begin{bmatrix} 120 & 0 & 100 \\ 0 & 30 & 0 \\ 100 & 0 & 20 \end{bmatrix} \text{ MPa}$ di una lega GIL-300 con $E = 130000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,28$, $R_m = 300 \text{ MPa}$, si calcolino:
- Ⓐ le componenti di deformazione in (x, y, z)
 - Ⓑ le componenti di deformazione in (p_1, p_2, p_3)
 - Ⓒ il coefficiente di sicurezza C_s

Ⓐ
$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu (\sigma_{yy} + \sigma_{zz})) = 8,15 \cdot 10^{-4} \\ \epsilon_{yy} = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{zz})) = -7,08 \cdot 10^{-5} \\ \epsilon_{zz} = \frac{1}{E} (\sigma_{zz} - \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})) = -1,68 \cdot 10^{-4} \end{cases}, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} = 1,57 \cdot 10^{-3} \rightarrow \sigma_{yy} = 30 \text{ MPa principale} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0 \end{cases}$$

Ⓑ
$$\sigma_{3,6} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{zz}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \begin{cases} 182 \text{ MPa} = \sigma_3 \\ -42 \text{ MPa} = \sigma_6 \end{cases}$$

$\Rightarrow \sigma_1 = 182 \text{ MPa} > \sigma_2 = 30 \text{ MPa} > \sigma_3 = -42 \text{ MPa}$

$\epsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \nu (\sigma_2 + \sigma_3)) = 1,42 \cdot 10^{-3}$

$\epsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \nu (\sigma_1 + \sigma_3)) = -7,08 \cdot 10^{-5}$

$\epsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \nu (\sigma_1 + \sigma_2)) = -7,80 \cdot 10^{-4}$

Ⓒ $C_s = \frac{\sigma_{lim}}{\sigma_{id}} \geq 1$

- $\geq 1,5$ duttile $A > 10\%$ $\rightarrow \sigma_{lim} = R_{p0,2}, \sigma_{id} = \begin{cases} \sigma_{id \text{ VON MISES}} \\ \sigma_{id \text{ TRESCA}} \end{cases}$
- ≥ 3 fragile $A < 5\%$ $\rightarrow \sigma_{lim} = R_m, \sigma_{id} = \sigma_1$

$\sigma_{id \text{ V.M.}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}, \sigma_{id \text{ TRESCA}} = \sigma_1 - \sigma_3$

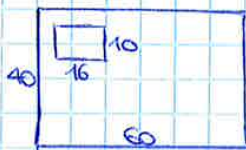
GHISA \rightarrow fragile $\rightarrow C_s = \frac{R_m}{\sigma_1} = \frac{300}{182} = 1,64 \leq 3 \rightarrow$ verificare se negativo!

- ② Dato $\epsilon_{xx} = -2,22 \cdot 10^{-3}, \epsilon_{yy} = 2,52 \cdot 10^{-3}, \gamma_{xy} = 2,28 \cdot 10^{-3}$ in stato di tensione pura di un ERGAL 7075-T6 con $E = 69000 \text{ MPa}$, $\nu = 0,31$, $R_{p0,2} = 500 \text{ MPa}$, $A = 11\%$, si calcolino:
- Ⓐ $[\sigma]$ in (x, y, z)
 - Ⓑ $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e α
 - Ⓒ C_s

- ② Consideriamo un sistema preo-voido con $G_1(30; 20)$, $G_2(13; 20)$,
 $A_1 = 60 \cdot 40 = 2,4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$, $A_2 = 16 \cdot 10 = 1,60 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$.

Calcoliamo:

- ① baricentro
 ② J_{xx} , J_{yy} , J_{xy}



- ③ $A = A_1 - A_2 = 2,24 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$
 $S_x = A_1 Y_1 - A_2 Y_2 = 4,320 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$
 $S_y = A_1 X_1 - A_2 X_2 = 6,992 \cdot 10^4 \text{ mm}^3$

$$\Rightarrow X_G = \frac{S_y}{A} = 31,2 \text{ mm}, \quad Y_G = \frac{S_x}{A} = 19,28 \text{ mm}$$

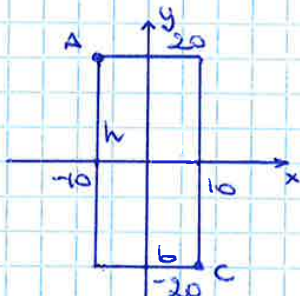
$$x_1 = X_1 - X_G = -1,21 \text{ mm} \quad y_1 = Y_1 - Y_G = 0,71 \text{ mm}$$

$$x_2 = X_2 - X_G = -18,21 \text{ mm} \quad y_2 = Y_2 - Y_G = 10,71 \text{ mm}$$

- ④ $J_{xx} = A_1 y_1^2 + J_{G_1, G_1} - A_2 y_2^2 - J_{G_2, G_2} = 3,02 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$
 $J_{yy} = A_1 x_1^2 + J_{G_1, G_1} - A_2 x_2^2 - J_{G_2, G_2} = 6,67 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$
 $J_{xy} = A_1 x_1 y_1 + J_{G_1, G_1} - A_2 x_2 y_2 - J_{G_2, G_2} = 2,914 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$

Esercitazione 5

- ① Consideriamo il seguente sistema con $M_p = 8 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$, $\varphi = 30^\circ$
 e $\text{Pork } 40 \text{ mm} = 20 \text{ mm}$. Calcoliamo φ , σ_{xx}^A , σ_{xx}^C .



$$M_x = M_p \cos \varphi = 8 \cdot 10^5 \cos 30^\circ = 6,93 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$M_y = M_p \sin \varphi = 8 \cdot 10^5 \sin 30^\circ = 4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$$

$$J_{xx} = \frac{bh^3}{12} = \frac{20 \cdot 40^3}{12} = 10,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

$$J_{yy} = \frac{hb^3}{12} = \frac{40 \cdot 20^3}{12} = 2,7 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$$

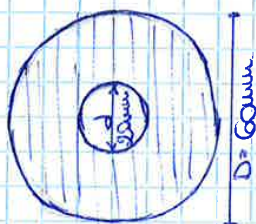
$$\varphi = \arctan\left(\frac{M_y}{M_x}\right) = 66,6^\circ$$

Ricordando che $A(-10, 20)$, $C(10, -20)$:

$$\sigma_{xx}^A = \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x = 279,91 \text{ MPa} \text{ e per simmetria } \sigma_{xx}^C = -279,91 \text{ MPa}$$

Se esercitassi una forza di 75 N le tensioni sarebbero $\sigma_{xx}^A = \sigma_{xx}^A + 75 = 354 \text{ N}$, $\sigma_{xx}^C = \sigma_{xx}^C + 75 = -204 \text{ N}$

- ② Consideriamo il seguente sistema costituito da una plisa
 con $R_{tt} = 300 \text{ MPa}$ sottoposta a $N = 6,5 \cdot 10^4 \text{ N}$ e $M_p = 1,1 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$.
 Calcoliamo le tensioni agli estremi ed il coefficiente di sicurezza.



$$J = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) = 6,28 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

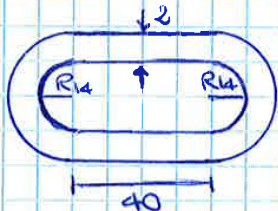
$$A = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) = 2,51 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{tt} = \frac{N}{A} + \frac{M_p}{J} r = \begin{cases} \sigma_{tt}^{\text{max}} = \frac{N}{A} + \frac{M_p}{J} \frac{D}{2} = 78 \text{ N} \\ \sigma_{tt}^{\text{min}} = \frac{N}{A} + \frac{M_p}{J} \left(-\frac{D}{2}\right) = -26 \text{ N} \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = \sigma_{tt}^{\text{max}} = 78 \text{ N} = \sigma_d \rightarrow CS = \frac{R_{tt}}{\sigma_d} = \frac{300}{78} = 3,85 > 3 \quad \checkmark$$

⑥
$$\Delta\theta = \frac{M_t}{GJ_t} L = \frac{9 \cdot 10^4 \cdot 600}{788 \cdot 10^4 \cdot 4482} = 0,133 \text{ rad} \approx 9^\circ$$

③ Consideriamo il seguente sistema con $L = 250 \text{ mm}$ e $G = 3,1 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ sottoposto a $M_t = 4 \cdot 10^5 \text{ Nmm}$. Calcoliamo: ① Tensioni, ② Rotazione relativa alle estremità



②
$$\Omega = 40 \cdot 30 + 2 \cdot \frac{\pi \cdot 15^2}{2} = 1907 \text{ mm}^2$$

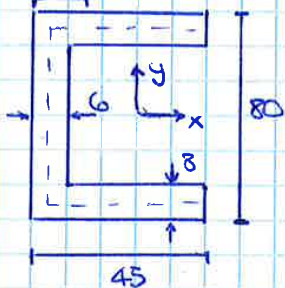
$$\Rightarrow \tau_{zs} = \frac{M_t}{2\Omega s} = \frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 1907 \cdot 2} = 52 \text{ MPa}$$

③
$$\Delta\theta = \frac{M_t}{J_t G} L, \quad J_t = \frac{4\Omega^2}{\sum \frac{e_i}{s_i}} = \frac{4\Omega^2}{2 \cdot \frac{40}{2} + \frac{2\pi \cdot 15}{2}} = 1,67 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 250}{1,67 \cdot 10^5 \cdot 3,1 \cdot 10^4} = 0,133 \text{ rad} \approx 1,1^\circ$$

Esercitazione 7

① Consideriamo il seguente sistema con $J_{xx} = 1,06 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ sottoposto a $M_x = 2,50 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$ e $T_y = 2,00 \cdot 10^4 \text{ N}$ esercitata nel centro di taglio. Calcolare: ① $\sigma_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$, ② Qual è il punto più sollecitato?



①
$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} y \quad y = \frac{80}{2} = 40 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = \frac{2,5 \cdot 10^6}{1,06 \cdot 10^6} \cdot 40 = \pm 94 \text{ MPa}$$

$$h = 80 - 2 \cdot \frac{8}{2} = 72 \text{ mm} \quad e = 4,2 - 3 = 1,3 \text{ mm}$$

$$b = 45 - 3 = 42 \text{ mm}$$

$$S_{x,1}^+ = \frac{h}{2} b s_1 \Rightarrow \tau_{xz} = \frac{T_y}{J_{xx}} \frac{S_{x,1}^+}{s_1} = \frac{T_y}{J_{xx}} \frac{bh}{2} = 28,5 \text{ MPa}$$

$$S_{x,2}^+ = \frac{h}{2} b s_1 + \frac{h}{2} s_2 \frac{h}{4} \Rightarrow \tau_{yz} = \frac{T_y}{J_{xx}} \frac{S_{x,2}^+}{s_2} = 50 \text{ MPa}$$

② Area superiore: • Massima $\tau \Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2} = \sqrt{94^2 + 4 \cdot 28,5^2} = 110 \text{ MPa}$
 • Ev. distorsione $\Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau^2} = 106 \text{ MPa}$

Metà destra anima: • Massima $\tau \Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 4\tau^2} = 2\tau = 100 \text{ MPa}$
 • Ev. distorsione $\Rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{zz}^2 + 3\tau^2} = 87 \text{ MPa}$

\Rightarrow Il punto che è maggiormente sollecitato è nell'area superiore in quanto sopporta anche la flessione

⑥ $\alpha^* = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}\right) \Rightarrow \alpha$

② Consideriamo una prisma rettangolare con base $b = 20 \text{ mm}$ e spessore $s = 10 \text{ mm}$ di acciaio con $E = 2,05 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $V = 0,25$ caricata da $M_f = 10^3 \text{ Nm}$ su cui sono posti 4 estensimetri con $k = 1,9$ a parte completa con $V = 5 \text{ V}$. Calcolare U .

$$\epsilon_{zz}^{\max} = \frac{\sigma_{zz}^{\max}}{E} \Rightarrow \epsilon_I = \epsilon_3 = \frac{\sigma_{zz}^{\max}}{E}, \quad \epsilon_2 = \epsilon_4 = -\frac{\sigma_{zz}^{\max}}{E}$$

da cui $\sigma_{zz}^{\max} = \frac{M_f}{J_{xx}} \frac{s}{2}$ e $J_{xx} = \frac{bs^3}{12}$

$$\Rightarrow U = \frac{KV}{4} (\epsilon_I - \epsilon_{II} + \epsilon_{III} - \epsilon_{IV}) = \frac{KV \sigma_{zz}^{\max}}{E} = 13,9 \text{ mV}$$

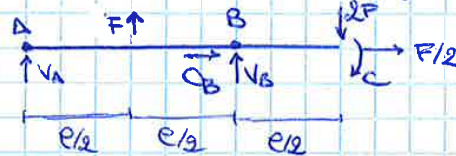
③ Consideriamo un estensimetro a tutto ponte con $V = 0,37$, $k = 2,2$, $V = 5 \text{ V}$, $U = 8 \text{ mV}$, $E = 6,86 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Calcolare σ

$$U = \frac{KV}{4} (\epsilon_{wI} - \epsilon_{wII}), \quad \epsilon_{wI} = \frac{\sigma}{E}, \quad \epsilon_{wII} = -\nu \epsilon_{wI}$$

$$\Rightarrow U = \frac{KV}{4} \frac{\sigma}{E} (1 + \nu) \Rightarrow \sigma = \frac{4EU}{KV(1 + \nu)} = 152 \text{ MPa}$$

Esercizio 9

① Consideriamo le seguenti strutture. Ricavare diagrammi N, T_y, M_x .



• Restricci vincolari:

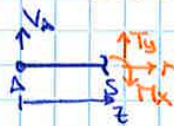
$$\rightarrow \circlearrowleft O_B + \frac{F}{2} = 0 \Rightarrow O_B = -\frac{F}{2}$$

$$B^{\downarrow} \circlearrowleft: V_A e + F \frac{e}{2} + 2F \frac{e}{2} + C = 0 \Rightarrow V_A = -\frac{3}{2}F - \frac{C}{e}$$

$$A^{\uparrow} \circlearrowleft: V_B e + F \frac{e}{2} - 2F \frac{3e}{2} - C = 0 \Rightarrow V_B = \frac{5}{2}F + \frac{C}{e}$$

• Caratteristiche di sollecitazione

Tutto 1 ↓



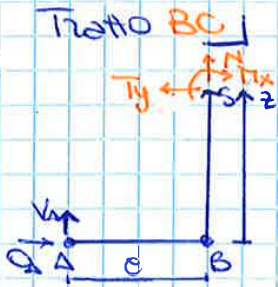
$$0 \leq z \leq \frac{e}{2}$$

$$\rightarrow \circlearrowleft: N = 0$$

$$\uparrow \circlearrowleft: V_A + T_y = 0 \Rightarrow T_y = -V_A = \frac{3}{2}F + \frac{C}{e}$$

$$S^{\downarrow} \circlearrowleft: M_x + V_A z = 0 \Rightarrow M_x = -V_A z = \left(\frac{3}{2}F + \frac{C}{e}\right) z$$

$$\Rightarrow z = 0: M_x = 0, \quad z = \frac{e}{2}: M_x = \frac{3}{4}Fe + \frac{C}{2}$$



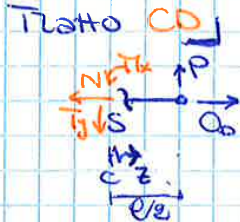
$0 \leq z \leq 2e$

$\uparrow: V_A + N = 0 \Rightarrow N = -V_A = -P$

$\leftarrow: T_y - Q_A = 0 \Rightarrow T_y = Q_A = -\frac{3}{4}P$

$\curvearrowright: M_x + V_A e - Q_A z = 0 \Rightarrow M_x = P(e - \frac{3}{4}z)$

$\Rightarrow z=0: M_x = Pe, z=2e: M_x = -\frac{Pe}{2}$



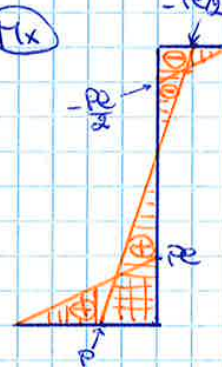
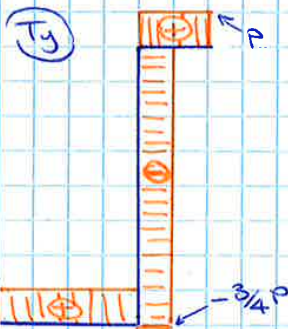
$0 \leq z \leq e/2$

$\uparrow: \dots + P = 0 \Rightarrow T_y = P$

$\rightarrow: -N + Q = 0 \Rightarrow N = Q = \frac{3}{4}P$

$\curvearrowright: M_x + P(e/2 - z) = 0 \Rightarrow M_x = -P(e/2 - z)$

$\Rightarrow z=0: M_x = -\frac{Pe}{2}, z=e/2: M_x = 0$



③ Consideriamo il seguente sistema. Ricavare i diagrammi di N, T_y, M_x .



• Reazioni Vincolari

$\uparrow: -qe + V_A + V_B = 0$

$\rightarrow: Q_B = 0$

$\curvearrowright: -qe(2e + \frac{e}{2}) + V_A 2e = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_B = 0 \\ V_A = \frac{5}{4}qe \\ V_B = -qe/4 \end{cases}$$

• Caratteristiche di sollecitazione

Tratto 1



$\uparrow: T_y - qz = 0 \Rightarrow T_y = qz$

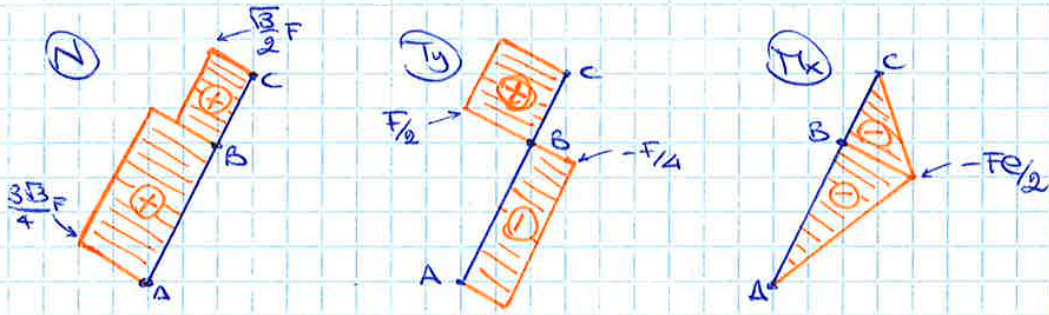
$\rightarrow: N = 0$

$0 \leq z \leq e$

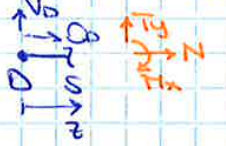
$\curvearrowright: M_x - qz \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow M_x = q \frac{z^2}{2}$

$\Rightarrow z=0: T_y = 0, M_x = 0; z=e: T_y = qe, M_x = \frac{qe^2}{2}$

$z = \frac{e}{2}: T_y = \frac{qe}{2}, M_x = \frac{qe^2}{8}$



Tratto **DB**



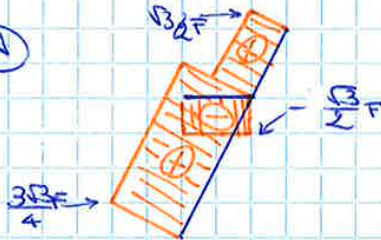
$$\rightarrow: O_D + N = 0 \Rightarrow N = -O_D = -\frac{\sqrt{3}}{2} F$$

$$\uparrow: T_y + V_D = 0 \Rightarrow T_y = -V_D = 0$$

$$0 \leq z \leq l$$

$$\curvearrowright: M_x + V_D z = 0 \Rightarrow M_x = -V_D z = 0$$

(Z)



5) Consideriamo il seguente sistema. Ricavare i diagrammi di N, T_y, M_x .



• Reazioni Vincolari

Elemento **BC**

$$\curvearrowright: V_B e - q e \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{q e}{2}$$

$$\uparrow: V_C e - q e \frac{e}{2} = 0 \Rightarrow V_C = \frac{q e}{2}$$

$$\rightarrow: O_B - O_C = 0 \Rightarrow O_C = O_B$$

Elemento **AB**

$$\curvearrowright: O_B \frac{e}{\sqrt{2}} - V_B \frac{e}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow O_B = V_B = \frac{q e}{2}$$

$$\uparrow: V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = V_B = \frac{q e}{2}$$

$$\rightarrow: F - O_B = 0 \Rightarrow O_B = F = \frac{q e}{2}$$

• Caratteristiche di Sollecitazione

Tratto **BC**



$$\rightarrow: N + O_B = 0 \Rightarrow N = -O_B = -\frac{q e}{2}$$

$$\uparrow: T_y + V_B - q z = 0 \Rightarrow T_y = q(z - \frac{e}{2})$$

$$\curvearrowright: M_x + V_B z - q z \frac{z}{2} = 0 \Rightarrow M_x = \frac{q}{2}(z^2 - e z)$$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_x}{dz} = \frac{T_x}{EJ_{xx}} \\ \frac{dv}{dz} = -\alpha_x \end{cases} \Rightarrow \alpha_x = \int \frac{T_x}{EJ_{xx}} dz, \quad v = -\int \alpha_x dz$$

Tratto **AD**

$$\alpha_x^{AD} = \int \frac{T_x^{AD}}{EJ_{xx}} dz = \frac{C}{EJ_{xx}e} \int z dz = \frac{Cz^2}{2EJ_{xx}e} + C_0$$

$$v^{AD} = -\int \alpha_x^{AD} dz = -\int \left(\frac{Cz^2}{2EJ_{xx}e} + C_0 \right) dz = -\frac{Cz^3}{6EJ_{xx}e} - C_0z + D_0$$

Tratto **DB**

$$\alpha_x^{DB} = \int \frac{T_x^{DB}}{EJ_{xx}} dz = -\frac{C}{EJ_{xx}e} \int \left(\frac{e}{2} - z \right) dz = -\frac{C}{EJ_{xx}e} \left(\frac{e}{2}z - \frac{z^2}{2} \right) + C_1$$

$$= -\frac{Cz}{2EJ_{xx}} + \frac{Cz^2}{2EJ_{xx}e} + C_1$$

$$v^{DB} = -\int \alpha_x^{DB} dz = \frac{Cz^2}{4EJ_{xx}} - \frac{Cz^3}{6EJ_{xx}e} - C_1z + D_1$$

• Condizioni di Vincolo e di Continuità

1) $v^{AD}(z=0) = 0 \rightarrow$ Vincolo: cerniera non consente \uparrow

2) $v^{DB}(z=e/2) = 0 \rightarrow$ Vincolo: appoggio non consente \uparrow

3) $\alpha_x^{AD}(z=e/2) = \alpha_x^{DB}(z=0) \rightarrow$ Continuità di α_x in D

4) $v^{AD}(z=e/2) = v^{DB}(z=0) \rightarrow$ Continuità di v in D

\Rightarrow 1) $D_0 = 0$

2) $\frac{Ce^2}{16EJ_{xx}} - \frac{Ce^3}{48EJ_{xx}e} - C_1 \frac{e}{2} + D_1 = 0$

3) $\frac{Ce^2}{8EJ_{xx}e} + C_0 = C_1$

4) $-\frac{Ce^3}{48EJ_{xx}e} - C_0 \frac{e}{2} + D_0 = D_1$

$$\Rightarrow \frac{Ce^2}{16EJ_{xx}} - \frac{Ce^2}{48EJ_{xx}} - \frac{Ce^2}{16EJ_{xx}} - \frac{Ce^2}{2} - \frac{Ce^2}{48EJ_{xx}} - C_0 \frac{e}{2} + \frac{D_0}{z=0} = 0$$

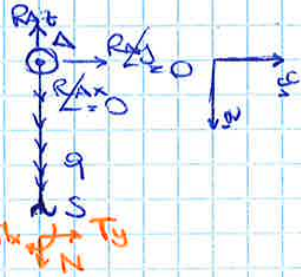
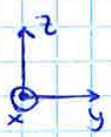
$- Ce^2 \qquad D_1$

$$\Rightarrow -\frac{Ce^2}{24EJ_{xx}} = C_0 e \Rightarrow C_0 = -\frac{Ce}{24EJ_{xx}}$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{Ce}{12EJ_{xx}}, \quad D_1 = 0$$

• Caratteristiche di Sollecitazione

Tratto AD



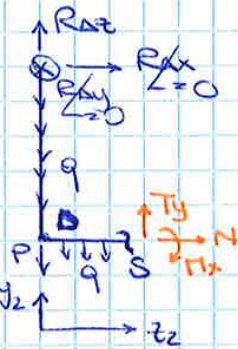
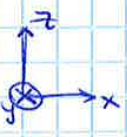
$$\downarrow \circ: N - R_{At} + qz_1 = 0 \Rightarrow N = R_{At} + qL + q\frac{e}{2} - qz_1$$

$$\rightarrow \circ: T_y = 0$$

$$S \circ: \Pi_x = 0$$

$\Rightarrow z_1 = 0: N = R_{At} = 756,2 \text{ N}; z_1 = L: N = R_{At} - qL = 414,2 \text{ N}$

Tratto DB



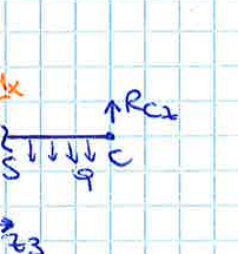
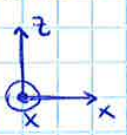
$$\rightarrow \circ: N = 0$$

$$\uparrow \circ: T_y + R_{At} - qL - P - qz_2 = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{qL}{2} + qz_2$$

$$S \circ: \Pi_x + R_{At}z_2 - qLz_2 - Pz_2 - qz_2\frac{z_2}{2} = 0 \Rightarrow \Pi_x = -\frac{qL}{2}z_2 - \frac{qz_2^2}{2}$$

$\Rightarrow z_2 = 0: T_y = -\frac{qL}{2} = -114,2 \text{ N}; \Pi_x = 0; z_2 = e: T_y = \frac{qL}{2} = 114,2 \text{ N}; \Pi_x = 0$
 $z_2 = \frac{e}{2}: T_y = 0, \Pi_x = -\frac{qe^2}{8} = -57,1 \text{ Nm}$

Tratto BC

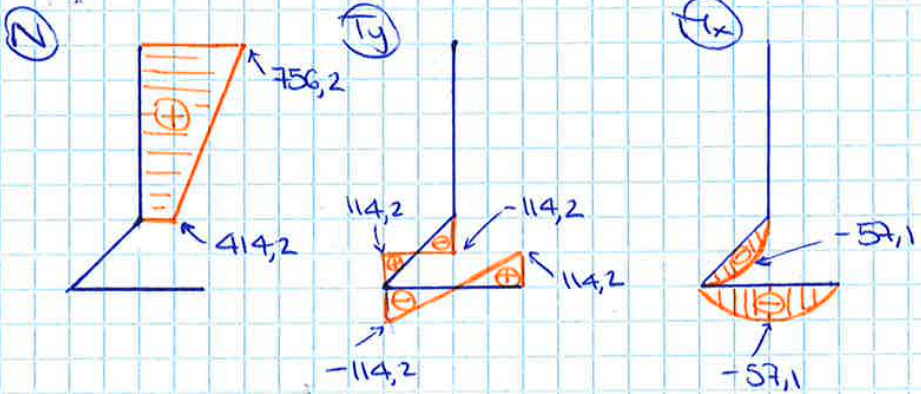


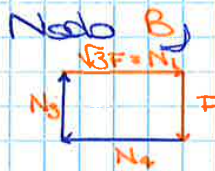
$$\leftarrow \circ: N = 0$$

$$\downarrow \circ: T_y - R_{Cz} + q(e - z_3) = 0 \Rightarrow T_y = qz_3 - \frac{qL}{2}$$

$$S \circ: \Pi_x + R_{Cz}(e - z_3) - q\frac{(e - z_3)^2}{2} = 0 \Rightarrow \Pi_x = -\frac{qL}{2}(e - z_3) + \frac{q}{2}(e - z_3)^2$$

$\Rightarrow z_3 = 0: T_y = -\frac{qL}{2} = -114,2 \text{ N}; \Pi_x = 0; z_3 = e: T_y = \frac{qL}{2} = 114,2 \text{ N}; \Pi_x = 0$
 $z_3 = \frac{e}{2}: T_y = 0, \Pi_x = -\frac{qe^2}{8} = -57,1 \text{ Nm}$





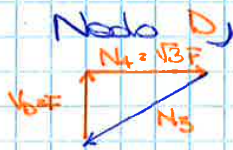
$$|N_3| = F$$

$$|N_4| = \sqrt{3}F$$

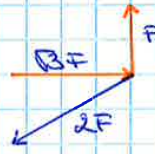


$$N_3 = -F$$

$$N_4 = -\sqrt{3}F$$

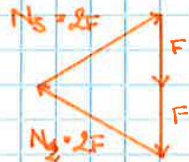


$$|N_5| = F / \cos 60^\circ = 2F$$



$$N_5 = 2F$$

Node C (Redundante)



Sono a maggior rischio di instabilità le aste 1 e 4 poiché sottoposte ai carichi più grandi: $|N_1| = |N_4| = \sqrt{3}F = 20,8 \text{ kN}$.
 Ricaviamo:

$$A = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = 707 \text{ mm}^2$$

$$J_d = \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) = 1,81 \cdot 10^5 \text{ mm}^4$$

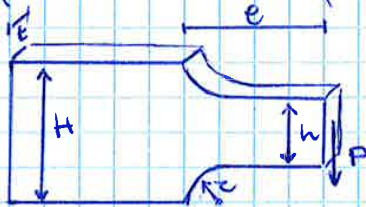
$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{J_d}{A}} = 16 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_{1,4} = \frac{e_0}{\rho} = \frac{\sqrt{3}/2 e}{\rho} = 108$$

$$\Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{1,4}^2} = 174 \text{ MPa}, \quad \sigma_{1,4} = \frac{|N_{1,4}|}{A} = 29 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow CS = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{1,4}} = \frac{174}{29} = 6$$

Esercizio 13

- ① Data la seguente prasta d'acciaio con $R_{p02} = 355 \text{ MPa}$, $z = 10 \text{ mm}$, $e = 200 \text{ mm}$, $t = 120 \text{ mm}$, $h = 80 \text{ mm}$, $t = 20 \text{ mm}$, si calcoli:
 ② Carico P che porta a svezziamento (P_{su}), ③ Carico P che porta a collasso plastico (P_{cp}).



$$\sigma_{max} = K_t \sigma_{uan} = R_{p02}$$

Da grafico leggo il K_t relativo a

$$H/h = 120/80 = 1,5 \quad \text{e} \quad z/h = 10/80 = 0,25$$

$$\text{Si ottiene } K_t = 1,65 \Rightarrow \sigma_{max} = 1,65 \sigma_{uan} = R_{p02}$$

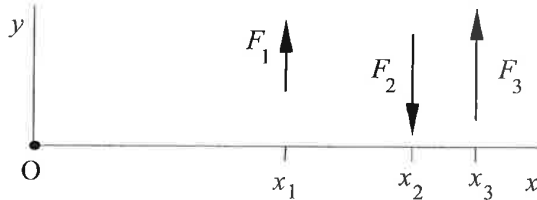
$$\Rightarrow \sigma_{uan} = \frac{R_{p02}}{1,65} = 215,15 \text{ MPa} = \frac{M_x}{J_{xx}} y_{max} = \frac{K_t e}{t^3/12} \frac{h}{2} = \frac{6 K_t e}{t^2} = \frac{6 F e}{t^2}$$

$$\Rightarrow P_{su} = \frac{\sigma_{uan} t^2}{6 e} = 22950 \text{ N}$$

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 1a

▷ capitolo 1

- 1) Sostituire il sistema di forze schematizzato in figura con la sola risultante opportunamente applicata.



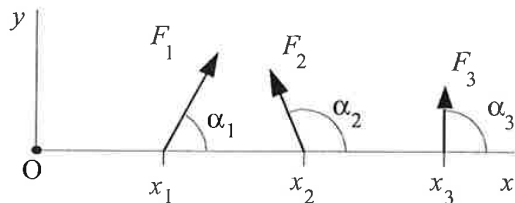
Dati:

$$F_1 = 500 \text{ N}, F_2 = 800 \text{ N}, F_3 = 1000 \text{ N};$$

$$x_1 = 5 \text{ m}, x_2 = 7 \text{ m}, x_3 = 8 \text{ m}.$$

$$[R_F = 700 \text{ N}, \xi = 7 \text{ m (misurata da O)}]$$

- 2) Per il sistema di forze schematizzato in figura, calcolare la risultante e determinare la retta d'azione su cui applicarla ai fini dell'equivalenza.



Dati:

$$F_1 = 100 \text{ N}, F_2 = 200 \text{ N}, F_3 = 50 \text{ N};$$

$$x_1 = 2 \text{ m}, x_2 = 3 \text{ m}, x_3 = 4 \text{ m};$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0 \text{ m};$$

$$\alpha_1 = 60^\circ, \alpha_2 = 135^\circ, \alpha_3 = 90^\circ.$$

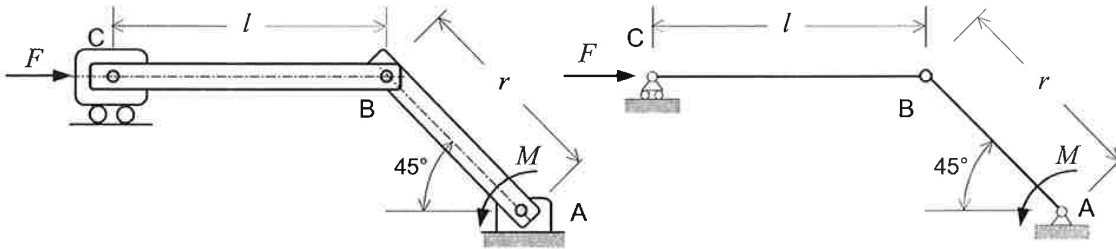
$$[R_F = 293 \text{ N}, \alpha = 108^\circ \text{ (misurato da } x), \xi = 2.72 \text{ m (misurata da O)}]$$

- A) Quante equazioni di equilibrio (linearmente indipendenti) si possono scrivere per un elemento nel piano?
- B) Spiegare perché in un sistema a forza risultante nulla il momento risultante è indipendente dal polo scelto.
- C) Giacché la risultante è un vettore libero, è possibile scegliere l'inclinazione della sua retta d'azione, a parità di modulo?
- D) Per quale scopo si aggiunge un momento "di trasporto"?
- E) Quale interpretazione hanno i carichi concentrati?

$$[|R_A| = |V_P| = \frac{C}{2l} = 1000 \text{ N}, |R_B| = \left| \frac{F}{2} - \frac{3C}{4l} \right| = 500 \text{ N}, |V_C| = \frac{F}{2} + \frac{C}{4l} = 1500 \text{ N},$$

$$|O_P| = |O_C| = 2F = 4000 \text{ N}]$$

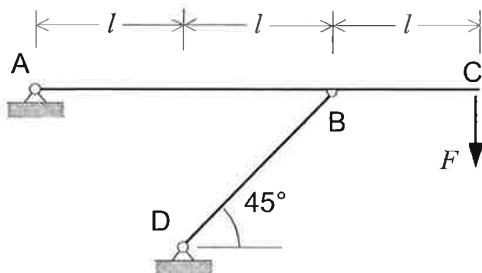
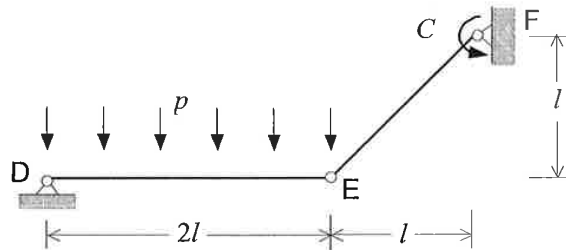
- 4) Nel sistema schematizzato in figura la forza F è equilibrata per effetto del momento M e delle reazioni vincolari nelle cerniere A, B e nel carrello C. Calcolato il grado di iperstaticità, determinare (in funzione di F) il momento M e le reazioni vincolari (interne ed esterne).



$$[|M| = Fr/\sqrt{2}, |O_A| = F, |V_A| = 0, |O_B| = F, |V_B| = 0, |R_C| = 0]$$

- 5) Calcolare tutte le reazioni vincolari (interne ed esterne) della struttura schematizzata in figura.

$$[|O_D| = |O_E| = |O_F| = pl + Cl, |V_D| = |V_E| = |V_F| = pl]$$



- 6) Calcolare tutte le reazioni vincolari (interne ed esterne) della struttura schematizzata in figura.

$$[|O_A| = |O_B| = |O_D| = |V_B| = |V_D| = 3/2 F, |V_A| = 1/2 F]$$

- A) Per un sistema labile soggetto a carichi, è sempre impossibile trovare l'equilibrio?
- B) In un sistema piano, avendo scritto due equazioni di equilibrio traslazionale lungo due direzioni distinte, una terza equazione di equilibrio traslazionale (nello stesso piano) è combinazione lineare delle precedenti? Perché?
- C) Quante equazioni di equilibrio si devono scrivere per un sistema piano di 3 elementi?
- D) Quante incognite distinte presenta una cerniera interna tra 2 elementi (non caricata direttamente)?
- E) Nel calcolo delle reazioni vincolari, quale vantaggio pratico presenta l'uso delle equazioni di equilibrio alla rotazione in luogo di quelle di equilibrio alla traslazione?

Corpo EF:

$$\uparrow: C - V_E e + Q_E e = 0 \Rightarrow Q_E = -pe - \frac{F}{e}$$

$$\rightarrow: Q_E - Q = 0 \Rightarrow Q = Q_E = -pe - \frac{F}{e} = Q$$

$$\uparrow: V_F - V_E = 0 \Rightarrow V_F = V_E = -pe$$



Corpo AC:

$$\Delta: V_B 2e - F 3e = 0 \Rightarrow V_B = \frac{3F}{2}$$

$$\uparrow: V_A + V_B = 0 \Rightarrow V_A = -V_B = -\frac{3F}{2}$$

$$\rightarrow: Q_A + Q_B = 0 \Rightarrow Q_A = -Q_B$$

Corpo BD:

$$\uparrow: V_D - V_B = 0 \Rightarrow V_D = V_B = \frac{3F}{2}$$

$$\Delta: Q_B \sqrt{2}e - V_B \sqrt{2}e = 0 \Rightarrow Q_B = V_B = \frac{3F}{2}$$

$$\rightarrow: Q_D - Q_B = 0 \Rightarrow Q_D = Q_B = \frac{3F}{2}$$

CERCHI DI MOHR

Determinazione dell'angolo formato tra il riferimento principale e quello xyz (α misurato dall'asse principale p_a all'asse x, z, y a seconda del caso).

<p>z direzione principale</p>	<p>$\tau_{xy} > 0$</p>		<p>$\tau_{xy} < 0$</p>	
<p>y direzione principale</p>	<p>$\tau_{xz} > 0$</p>		<p>$\tau_{xz} < 0$</p>	
<p>x direzione principale</p>	<p>$\tau_{yz} > 0$</p>		<p>$\tau_{yz} < 0$</p>	
<p>$\sigma_{xx} \geq \sigma_{yy}$</p> <p>$-45^\circ \leq \alpha < 0^\circ$</p>	<p>$\sigma_{xx} \leq \sigma_{yy}$</p> <p>$-90^\circ < \alpha \leq -45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{xx} \geq \sigma_{yy}$</p> <p>$0^\circ < \alpha \leq 45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{xx} \leq \sigma_{yy}$</p> <p>$45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$</p>	
<p>$\sigma_{zz} \geq \sigma_{xx}$</p> <p>$-45^\circ \leq \alpha < 0^\circ$</p>	<p>$\sigma_{zz} \leq \sigma_{xx}$</p> <p>$-90^\circ < \alpha \leq -45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{zz} \geq \sigma_{xx}$</p> <p>$0^\circ < \alpha \leq 45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{zz} \leq \sigma_{xx}$</p> <p>$45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$</p>	
<p>$\sigma_{yy} \geq \sigma_{zz}$</p> <p>$-45^\circ \leq \alpha < 0^\circ$</p>	<p>$\sigma_{yy} \leq \sigma_{zz}$</p> <p>$-90^\circ < \alpha \leq -45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{yy} \geq \sigma_{zz}$</p> <p>$0^\circ < \alpha \leq 45^\circ$</p>	<p>$\sigma_{yy} \leq \sigma_{zz}$</p> <p>$45^\circ \leq \alpha < 90^\circ$</p>	

$$\Rightarrow \sigma_1 = 165 \text{ MPa} > \sigma_2 = 0 \text{ MPa} > \sigma_3 = -15 \text{ MPa}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \cdot 50}{0 - 150} \right) = -17^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = -\alpha^* = 17^\circ \text{ con asse } z$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 80 \text{ MPa}$$

$$c) \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 \\ 0 & 380 & -100 \\ 0 & -100 & 170 \end{bmatrix} \rightarrow x \text{ principale } \sigma_{xx} = 40 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,b} = \frac{380 + 170}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{380 - 170}{2}\right)^2 + (-100)^2} \begin{cases} \sigma_a = 385 \text{ MPa} \\ \sigma_b = 186 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 385 > \sigma_2 = 186 > \sigma_3 = 40$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \cdot (-100)}{380 - 170} \right) = -24^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha^* = -24^\circ$$

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 172,5 \text{ MPa}$$

$$③ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 180 \\ 0 & 0 & 0 \\ 180 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow y \text{ principale } \sigma_{yy} = 0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3,b} = 0 \pm \sqrt{0^2 + 180^2} = \begin{cases} \sigma_a = 180 \text{ MPa} \\ \sigma_b = -180 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 180 \text{ MPa} > \sigma_2 = 0 \text{ MPa} > \sigma_3 = -180 \text{ MPa}$$

$$\alpha^* = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2 \cdot 180}{0} \right) = \frac{1}{2} 90^\circ = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = -\alpha^* = -45^\circ \text{ con asse } z$$

5) Per un elemento in materiale fragile si considerino i due stati di tensione (componenti non citate uguali a zero):

a) $\sigma_{yy} = 120 \text{ MPa}$, $\sigma_{zz} = 80 \text{ MPa}$, $\tau_{yz} = 35 \text{ MPa}$;

b) $\sigma_{xx} = 40$, $\tau_{xy} = 150 \text{ MPa}$.

Quale dei due casi è più pericoloso?

[a): $\sigma_{id} = 140 \text{ MPa}$, b): $\sigma_{id} = 171 \text{ MPa}$]

6) Un materiale duttile è sollecitato dalle tensioni $\sigma_{xx} = 110 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = -140 \text{ MPa}$, $\sigma_{zz} = 0 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = -150 \text{ MPa}$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$. Trovare i valori della tensione di snervamento necessari per ottenere un coefficiente di sicurezza 1.5 rispettivamente in base alle ipotesi dell'energia di distorsione e della massima tensione tangenziale.

[508 MPa, 586 MPa]

7) Un materiale fragile è sollecitato dalle tensioni $\sigma_{xx} = 90 \text{ MPa}$, $\sigma_{yy} = -55 \text{ MPa}$, $\sigma_{zz} = 70 \text{ MPa}$, $\tau_{xy} = 48 \text{ MPa}$, $\tau_{xz} = 0$, $\tau_{yz} = 0 \text{ MPa}$. Trovare quale deve essere la tensione di rottura minima del materiale per ottenere un coefficiente di sicurezza pari a 3.

[313 MPa]

- A) Spiegare perché il tensore di deformazione non risente del moto rigido. *che $[\epsilon]$ = deformazione e $[\sigma]$ = tensione*
- B) Qual è la differenza tra i prodotti $[J]\{dX\}$ e $[\epsilon]\{dX\}$? *Spostamento dovuto a rotazione rigida + deformazione o solo deformazione*
- C) In generale, un segmento orientato di un angolo qualsiasi rispetto a un asse principale di deformazione è soggetto a scorrimento o no? Perché? *Sì, non scorrimento se è su allineamenti principali*
- D) Quanti sono i parametri indipendenti che legano tensioni e deformazioni in un materiale elastico isotropo? *2 (E, ν)*
- E) In stato di tensione piana, quanti cerchi di Mohr delle tensioni passano per l'origine del diagramma $\sigma\tau$? *2*
- F) La misura della deformazione della provetta mediante estensimetro è influenzata dalla deformabilità della macchina di prova? *No, attaccato a provetta*
- G) L'allungamento dopo rottura risente della deformazione elastica? Quale indicazione si ottiene da esso? *Def. elastica recuperata. Duttile/fragile*
- H) Perché all'ipotesi della massima τ corrisponde una superficie limite prismatica a sei facce?
- I) Spiegare perché l'ipotesi della massima τ è più cautelativa di quella dell'energia di distorsione. *Inutile*
- J) Spiegare la differenza tra la "tensione limite" e "tensione ammissibile".

↳ Rotolo/Snervamento ↳ CS

5

a) $\sigma_{xx} = 0 \text{ MPa}$ principale

$$\sigma_{a,b} = \frac{120+80}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{120-80}{2}\right)^2 + 35^2} = \begin{cases} \sigma_a = 140 \text{ MPa} \\ \sigma_b = 60 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{id} = 140 \text{ MPa}$$

b) $\sigma_{zz} = 0 \text{ MPa}$ principale

$$\sigma_{a,b} = \frac{40+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{40-0}{2}\right)^2 + 150^2} = \begin{cases} \sigma_2 = 171 \text{ MPa} \\ \sigma_b = -131 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_{id} = 171 \text{ MPa}$$

6

$$\begin{bmatrix} 110 & -150 & 0 \\ -150 & -140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_{zz} \text{ principale}$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{110-140}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{110+140}{2}\right)^2 + 150^2} = \begin{cases} \sigma_2 = 180 \text{ MPa} \\ \sigma_b = -210 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 180 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 0 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -210 \text{ MPa}$$

Massima tensione tangenziale: $\tau_{max} = \frac{\sigma_{eiu}}{\sigma_{id}}, \quad \sigma_{id} = \sigma_1 - \sigma_3$

$$\Rightarrow \sigma_{eiu} = \tau_{max} (\sigma_1 - \sigma_3) = 1,5 (180 + 210) = 585 \text{ MPa}$$

Energia di distorsione: $\sigma_{id} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$

$$\Rightarrow \sigma_{eiu} = \frac{1,5}{\sqrt{2}} \sqrt{(180-0)^2 + (0+210)^2 + (180+210)^2} = 508 \text{ MPa}$$

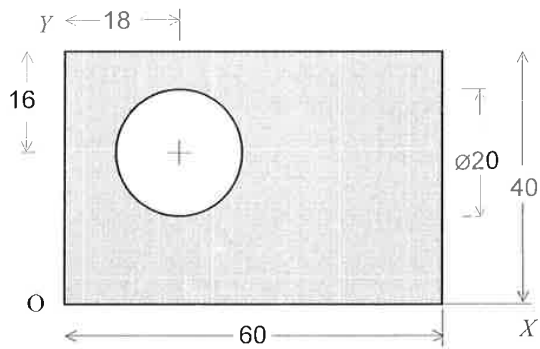
7

$$\begin{bmatrix} 80 & 48 & 0 \\ 48 & -55 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \end{bmatrix} \quad \sigma_{zz} \text{ principale}$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{80-55}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{80+55}{2}\right)^2 + 48^2} = \begin{cases} \sigma_2 = 104 \text{ MPa} \\ \sigma_b = -68 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_{id} = \sigma_1 = 104 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{eiu} = \tau_{max} \sigma_{id} = 3 \cdot 104 = 312 \text{ MPa}$$

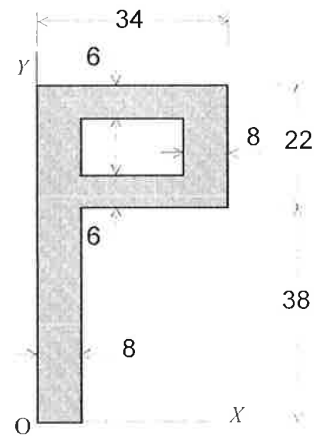


- 4) Per la sezione illustrata in figura, determinare:
- la posizione del baricentro G;
 - i momenti d'inerzia e centrifugo rispetto al riferimento G_{xy} avente assi paralleli a OXY ;
 - l'orientazione del riferimento centrale principale e i momenti d'inerzia principali.

$[X_G = 31.7 \text{ mm}, Y_G = 19.4 \text{ mm};$
 $J_{xx} = 3.06 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_{yy} = 6.60 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_{xy} = 1.73 \cdot 10^4 \text{ mm}^4;$
 $J_1 = 6.61 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_2 = 3.05 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, \alpha(p_1 \wedge x) = 87.2^\circ]$

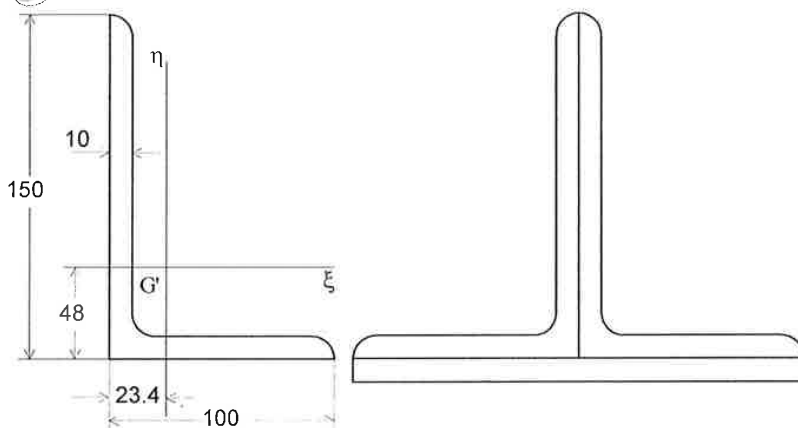
- 5) Per la sezione mostrata in figura, determinare:
- le coordinate del baricentro G rispetto al riferimento OXY ;
 - i momenti d'inerzia e centrifugo nel riferimento G_{xy} , avente assi paralleli a OXY ;
 - il riferimento centrale principale e i relativi momenti d'inerzia.

$[X_G = 12.5 \text{ mm}, Y_G = 38.5 \text{ mm};$
 $J_{xx} = 2.44 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_{yy} = 1.02 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_{xy} = 0.77 \cdot 10^5 \text{ mm}^4;$
 $J_1 = 2.78 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, J_2 = 0.68 \cdot 10^5 \text{ mm}^4, \alpha(p_1 \wedge x) = 23.8^\circ]$



- 6) Un elemento strutturale è costituito da due profilati a L a lati disuguali 150x100x10 UNI-EU 57 accostati lungo il lato maggiore e da una lamiera a sezione rettangolare 200x10 accostata ai lati liberi. Per la sezione complessiva così formata determinare:

- la posizione del baricentro G;
- i momenti d'inerzia nel sistema centrale principale.



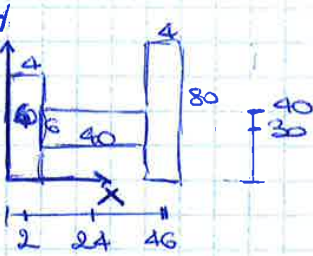
Dati profilato a L
(refer. $G'\xi\eta$):

$A = 2.42 \cdot 10^3 \text{ mm}^2;$
 $J_{\xi\xi} = 5.52 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$
 $J_{\eta\eta} = 1.98 \cdot 10^6 \text{ mm}^4;$
 $J_{\xi\eta} = -1.91 \cdot 10^6 \text{ mm}^4.$

[distanza baricentro dal bordo inferiore 42.5 mm; $J_1 = 15.03 \cdot 10^6 \text{ mm}^4, J_2 = 13.28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4]$

- Quali segni possono assumere rispettivamente il momento d'inerzia e quello centrifugo?
- Un riferimento baricentrico è anche centrale principale d'inerzia? Le due definizioni coincidono?
↳ centro baricentrico non principale (no centri coincidenti)
- Perché, per le sezioni composte, si sommano ai momenti "locali" quelli "di trasporto"?
↳ Cambia baricentro
- Quali informazioni si possono dedurre se la sezione presenta un asse di simmetria?
*↳ Non cent = 0 baricentro su asse
se O = baricentro è anche centrale*

③



$$A = 60 \cdot 4 + 40 \cdot 6 + 80 \cdot 4 = 800 \text{ mm}^2$$

$$S_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + A_3 Y_3 = 60 \cdot 4 \cdot 30 + 40 \cdot 6 \cdot 30 + 80 \cdot 4 \cdot 40 = 27200 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 X_1 + A_2 X_2 + A_3 X_3 = 60 \cdot 4 \cdot 30 + 40 \cdot 6 \cdot 30 + 80 \cdot 4 \cdot 40 = 20860 \text{ mm}^3$$

$$X_G = \frac{S_y}{A} = 26,3 \text{ mm} \quad Y_G = \frac{S_x}{A} = 34 \text{ mm}$$

$$y_1 = 30 - 34 = -4 \text{ mm} = y_2 \quad y_3 = 40 - 34 = 6 \text{ mm}$$

$$x_1 = 2 - 26,3 = -24,3 \text{ mm} \quad x_2 = 24 - 26,3 = -2,3 \text{ mm} \quad x_3 = 46 - 26,3 = 19,7 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} J_{yy} &= A_1 x_1^2 + J_{1yy} + A_2 x_2^2 + J_{2yy} + A_3 x_3^2 + J_{3yy} = \\ &= 60 \cdot 4 \cdot 24,3^2 + \frac{4 \cdot 60^3}{12} + 40 \cdot 6 \cdot 2,3^2 + \frac{40 \cdot 6^3}{12} + 4 \cdot 80 \cdot 6^2 + \frac{4 \cdot 80^3}{12} = 3 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{xx} &= A_1 y_1^2 + J_{1xx} + A_2 y_2^2 + J_{2xx} + A_3 y_3^2 + J_{3xx} = \\ &= 60 \cdot 4 \cdot 4^2 + \frac{4 \cdot 60^3}{12} + 40 \cdot 6 \cdot 4^2 + \frac{40 \cdot 6^3}{12} + 4 \cdot 80 \cdot 19,7^2 + \frac{4 \cdot 80^3}{12} = 2,63 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

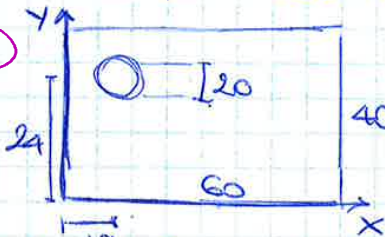
$$\begin{aligned} J_{xy} &= A_1 x_1 y_1 + A_2 x_2 y_2 + A_3 x_3 y_3 = \\ &= 60 \cdot 4 \cdot (-4) \cdot (-24,3) + 40 \cdot 6 \cdot (-4) \cdot (-2,3) + 4 \cdot 80 \cdot 6 \cdot 19,7 = 9,63 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$J_{1,2} = \frac{2,63 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2,63 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5}{2}\right)^2 + (9,63 \cdot 10^5)^2} = \begin{cases} J_1 = 3,47 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \\ J_2 = 2,15 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{cases}$$

$$|\tan 2\alpha| = \left| \frac{2 \cdot 9,63 \cdot 10^5}{2,63 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^5} \right| = 3,405 \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{2} \tan^{-1}(3,405) = 36,8^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 90 - \alpha^* = 53,2^\circ$$

④



$$A = 40 \cdot 60 - \frac{\pi}{4} 20^2 = 2086 \text{ mm}^2$$

$$S_x = A_1 Y_1 + A_2 Y_2 = 40 \cdot 60 \cdot 20 - \frac{\pi}{4} 20^2 \cdot 24 = 40460 \text{ mm}^3$$

$$S_y = A_1 X_1 + A_2 X_2 = 40 \cdot 60 \cdot 30 - \frac{\pi}{4} 20^2 \cdot 18 = 66348 \text{ mm}^3$$

$$X_G = \frac{S_y}{A} = 31,7 \text{ mm} \quad Y_G = \frac{S_x}{A} = 19,4 \text{ mm}$$

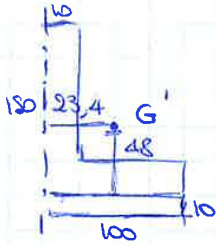
$$x_1 = 30 - 31,7 = -1,7 \text{ mm} \quad x_2 = 18 - 31,7 = -13,7 \text{ mm}$$

$$y_1 = 20 - 19,4 = 0,6 \text{ mm} \quad y_2 = 24 - 19,4 = 4,6 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} J_{xx} &= A_1 y_1^2 + J_{1xx} + A_2 y_2^2 + J_{2xx} = 40 \cdot 60 \cdot 9,6^2 + \frac{60 \cdot 40^3}{12} - \frac{\pi}{4} 20^2 \cdot 46^2 - \frac{\pi}{64} 20^4 = \\ &= 3,06 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{yy} &= A_1 x_1^2 + J_{1yy} + A_2 x_2^2 + J_{2yy} = 40 \cdot 60 \cdot 1,7^2 + \frac{40 \cdot 60^3}{12} - \frac{\pi}{4} 20^2 \cdot 13,7^2 - \frac{\pi}{64} 20^4 = \\ &= 6,60 \cdot 10^5 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

6



$$A_{tot} = 2 \cdot A_L + 2 \cdot A_R = 2 \cdot 2,42 \cdot 10^3 + 2 \cdot 100 \cdot 10 = 6840 \text{ mm}^2$$

$$X_L = 48 + 10 = 58 \text{ mm} \quad X_R = 5 \text{ mm}$$

$$S_y = 2,42 \cdot 10^3 \cdot 58 + 100 \cdot 10 \cdot 5 = 145360 \text{ mm}^3$$

$$X_G = \frac{2S_y}{A_{tot}} = 42,5 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{M_x}{J_{xx}} y - \frac{M_y}{J_{yy}} x \\ &= \frac{M_x}{J_1} \beta_2 - \frac{M_y}{J_2} \beta_1\end{aligned}$$

$$= \frac{-EK_y \int_A xy \, dA}{J_{xx}} y - EK_y$$

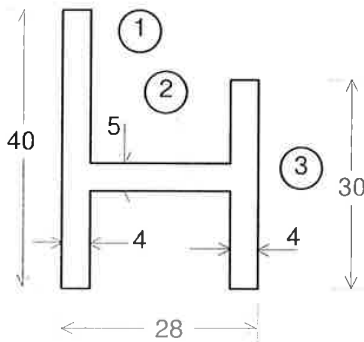
$$M_y \rightarrow v \rightarrow -$$

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 6

→ Capitolo 7 da pag 68 a pag 75

- 1) La sezione circolare di un albero di diametro $D = 35$ mm realizzato in ghisa grigia GJL-300 è soggetta alla forza normale $N = 50$ kN e al momento torcente $M_t = 400$ kNmm:
- calcolare l'andamento delle tensioni sulla sezione;
 - tracciare i cerchi di Mohr corrispondenti al centro e a un punto sul bordo esterno della sezione;
 - calcolare il coefficiente di sicurezza nel punto più sollecitato ($R_m = 300$ N/mm²).

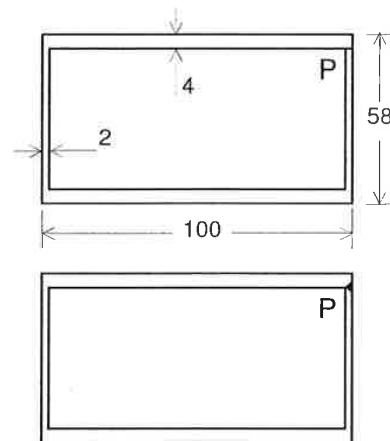
$[\sigma_{zz} = 52$ N/mm², $\tau_{cz,max} = 48$ N/mm², 3.7]



- 2) Calcolare le tensioni dovute al momento torcente $M_t = 1.80 \cdot 10^4$ Nmm nelle tre parti che compongono la sezione mostrata a lato e la rotazione relativa tra due sezioni distanti (assialmente) 600 mm.
 Dati materiale: $E = 6.8 \cdot 10^4$ N/mm², $\nu = 0.33$.

$[\tau_{max,1} = \tau_{max,3} = 32$ MPa, $\tau_{max,2} = 40$ MPa;
 $\Delta\theta = 0.19$ rad]

- 3) I due elementi illustrati in figura hanno dimensioni identiche e sono realizzati nello stesso acciaio; nel primo caso i lembi della sezione convergenti in P sono soltanto accostati, mentre nel secondo essi sono uniti per mezzo di una saldatura. Calcolare:



- il valore del modulo torsionale J_t per ciascuna delle due sezioni;
- la massima tensione tangenziale causata in ciascuna delle due sezioni dall'applicazione del momento torcente $M_t = 2.0 \cdot 10^5$ Nmm.

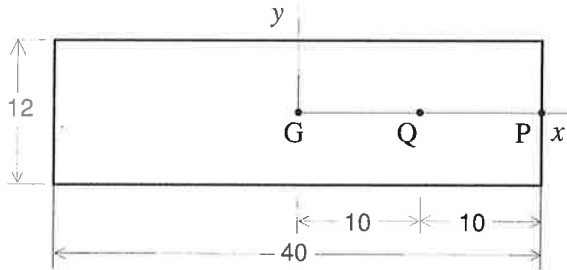
[sez. aperta $J_t = 4.46 \cdot 10^3$ mm⁴, $\tau_{max} = 179$ N/mm²;
 sez. chiusa $J_t = 1.09 \cdot 10^6$ mm⁴, $\tau_{max} = 9$ N/mm²]

- Perché nella torsione della sezione circolare la tensione agisce circonferenzialmente? *Superfici e*
- Spiegare il significato del gradiente di torsione θ' . *Rotazione per unità di lunghezza in ogni direzione*
- Perché negli elementi sottili soggetti a torsione le tensioni sono parallele alla linea media? *scarsa*
- Spiegare perché la sezione a parete sottile chiusa sopporta la torsione molto meglio di quella aperta. *sp. chi. scarsa*

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 7

→ capitolo 7 da pag 75 a 86

- 1) Una sezione rettangolare di lati $a=12$ mm e $b=40$ mm, è soggetta al momento flettente $M_y = -4.50 \cdot 10^5$ Nmm e al taglio $T_x = 1.3 \cdot 10^4$ N. Calcolare le tensioni σ_{zz} e τ_{xz} e la tensione ideale (ipotesi della massima tensione tangenziale) nei punti P, Q, G. Quale punto è il più sollecitato?



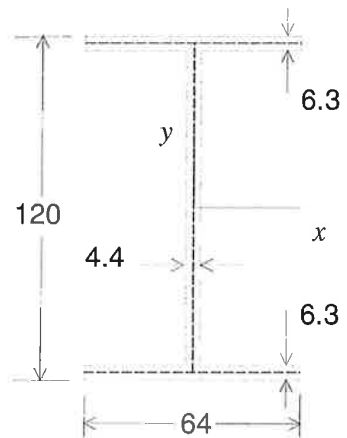
$$S_y = \frac{b}{2} \cdot a \left(\frac{b}{2} - \frac{a}{4} \right)$$
$$\frac{3b}{2} a \left(\frac{b}{2} - \frac{3a}{4} \right) = -\frac{3}{8} b^2 a$$

[P: $\sigma_{zz} = 141$ N/mm², $\tau_{xz} = 0$, $\sigma_{id} = 141$ N/mm²;
 Q: $\sigma_{zz} = 70$ N/mm², $\tau_{xz} = 30$ N/mm², $\sigma_{id} = 92$ N/mm²;
 G: $\sigma_{zz} = 0$, $\tau_{xz} = 41$ N/mm², $\sigma_{id} = 82$ N/mm²]

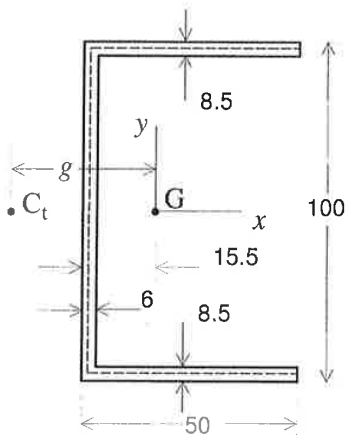
- 2) La figura mostra la sezione di un profilato IPE 120 UNI 5398 realizzato in acciaio S235 (tensione limite 235 N/mm²) soggetta al momento flettente $M_x = 6.5 \cdot 10^6$ Nmm e al taglio $T_y = 2.8 \cdot 10^4$ N. Determinare il coefficiente di sicurezza per il punto più sollecitato.

Dati:

$A = 1.32 \cdot 10^3$ mm²,
 $J_{xx} = J_1 = 3.18 \cdot 10^6$ mm⁴,
 $J_{yy} = J_2 = 2.77 \cdot 10^5$ mm⁴.



[$C_s \approx 1.9$]



- 3) Per la sezione di un profilato a U 100 UNI 5680 mostrata in figura e sottoposta al taglio $T_y = 1.00 \cdot 10^4$ N, valutare:

- a) la posizione del centro di taglio C_t ;
 b) le massime tensioni causate dal taglio nell'anima e nelle piattabande;
 c) le tensioni aggiuntive di torsione che si producono nell'anima e nelle piattabande se T_y è applicato nel baricentro G.

Dati: $A = 1.35 \cdot 10^3$ mm²,
 $J_{xx} = J_1 = 2.05 \cdot 10^6$ mm⁴,
 $J_{yy} = J_2 = 2.91 \cdot 10^5$ mm⁴.

[$g = 31.7$ mm; taglio: $\tau_{an.} = 20$ N/mm², $\tau_{piatt.} = 10$ N/mm²;
 torsione: $\tau_{an.} = 77$ N/mm², $\tau_{piatt.} = 109$ N/mm²]

- A) Spiegare perché in caso di momento flettente non costante lungo l'asse del solido di St. Venant il taglio deve essere non nullo. *→ $\tau_x = M_x + dM_x - T_y dx = 0 \Rightarrow \tau_y = \frac{dT_x}{dx}$ e cost. lungo*
- B) Nello studio delle tensioni di taglio i momenti d'inerzia J_{xx} , J_{yy} e quelli statici S_x^* , S_y^* si riferiscono alla stessa area? *No, S_{xx} e J_{yy} sono riferiti alla sezione intera, S_x^* e S_y^* a quella staccata dalle corde*
- C) Considerando una sezione rettangolare soggetta a taglio verticale, perché in corrispondenza dei bordi inferiore e superiore la tensione τ si deve annullare? *Superfici libere*
- D) Che effetto si produce se la forza di taglio non viene applicata nel centro di taglio? *Sollecitazioni aggiuntive dovute a tagli in $M_x = T_x$*

Torsione:

$$M_t = T_y \cdot \rho = 1 \cdot 10^4 \cdot 31,7 = 31,7 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

$$J_t = 2 \cdot \frac{1}{3} (b - 0,3 s_1) s_1^3 + \frac{1}{3} h s_2^3 =$$

$$= \frac{2}{3} (47 - 0,3 \cdot 8,5) \cdot 8,5^3 + \frac{1}{3} 91,56^3 = 24787 \text{ mm}^4$$

$$\Rightarrow \tau_{\max_{ax}} = \frac{M_t}{J_t} s_2 = \frac{31,7 \cdot 10^4}{24787} \cdot 6 = 77 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max_{\text{patt}}} = \frac{M_t}{J_t} s_1 = \frac{31,7 \cdot 10^4}{24787} \cdot 8,5 = 109 \text{ MPa}$$

Esercitazione 8

①

$$U = V \frac{K}{4} (\epsilon + \epsilon_a) \Rightarrow \epsilon = \frac{4U}{VK} - \epsilon_a$$

$$\sigma_{zz} = \epsilon E$$

$$\Rightarrow \sigma_{zz} = E \left(\frac{4U}{VK} - \epsilon_a \right) =$$

$$= 2,06 \cdot 10^5 \left(\frac{4 \cdot 3,65}{5 \cdot 2,1} - (-17 + 1,7 \cdot 95 - 5,1 \cdot 10^{-2} \cdot 95^2 + 2,4 \cdot 10^{-4} \cdot 95^3) \cdot 10^{-6} \right) =$$

$$= 308 \text{ MPa}$$

②

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = \epsilon_0 = 1200 \cdot 10^{-6} \\ \epsilon_{yy} = \epsilon_{45} - \frac{1}{2} \epsilon_0 - \frac{1}{2} \epsilon_{90} = (620 - \frac{1}{2} \cdot 1200 - \frac{1}{2} \cdot 410) \cdot 10^{-6} = -185 \cdot 10^{-6} \\ \epsilon_{zz} = \epsilon_{90} = 410 \cdot 10^{-6} \end{cases}$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}) = \frac{6,86 \cdot 10^4}{1-0,33^2} (1200 + 0,33 \cdot 410) \cdot 10^{-6} = 103 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}) = \frac{6,86 \cdot 10^4}{1-0,33^2} (-185 + 0,33 \cdot 1200) \cdot 10^{-6} = 62 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \epsilon_{xy} = \frac{6,86 \cdot 10^4}{1+0,33} (-185 \cdot 10^{-6}) = -9,5 \text{ MPa}$$

$$\Rightarrow |\tan 2\alpha| = \left| \frac{-9,5 \cdot 2}{103 - 62} \right| = 0,4634 \Rightarrow \alpha^* = \frac{1}{2} \tan^{-1}(0,4634) = 12,5^\circ$$

$$\sigma_{a,b} = \frac{103+62}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{103-62}{2}\right)^2 + 9,5^2} = \begin{cases} \sigma_a = 103 \text{ MPa} \\ \sigma_b = 60 \text{ MPa} \end{cases}$$

$$\sigma_1 = 103 \text{ MPa}, \sigma_2 = 60 \text{ MPa}, \sigma_3 = 0 \text{ MPa}$$

③

$$U = \frac{VK}{4} 2(1+\nu) \epsilon \quad \epsilon = \frac{\sigma_{zz}}{E} = \frac{F}{\Delta E}$$

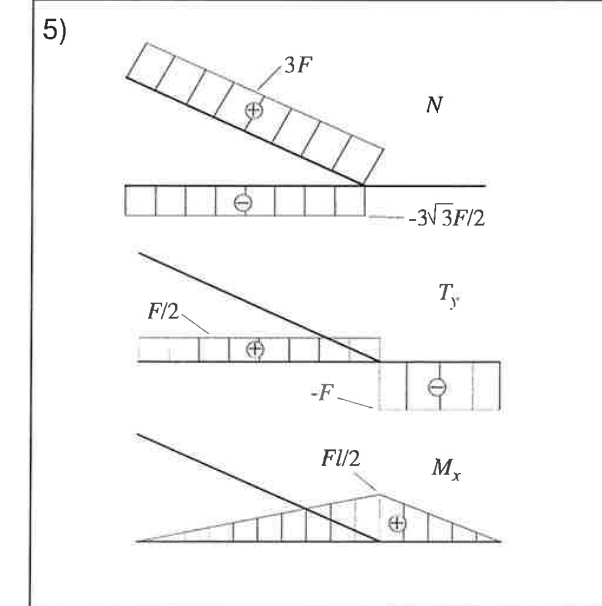
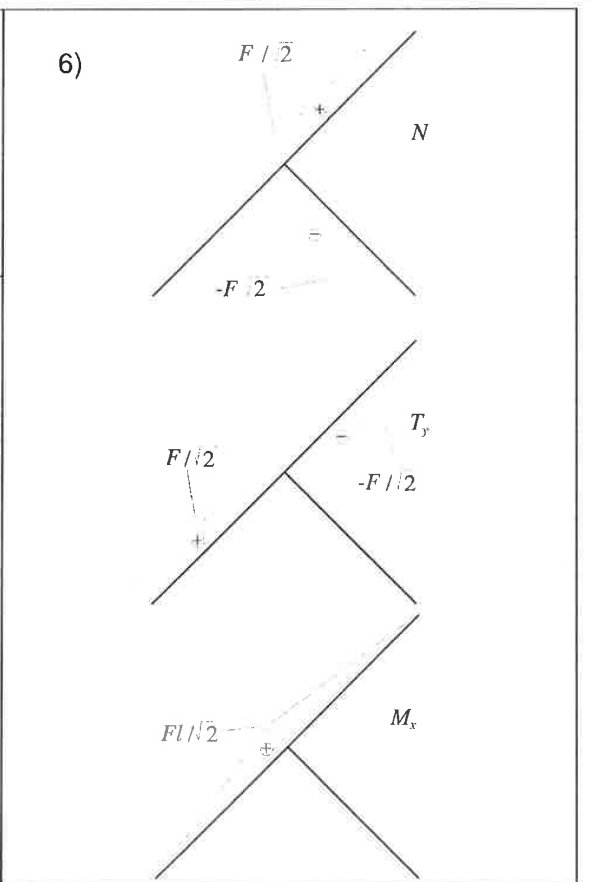
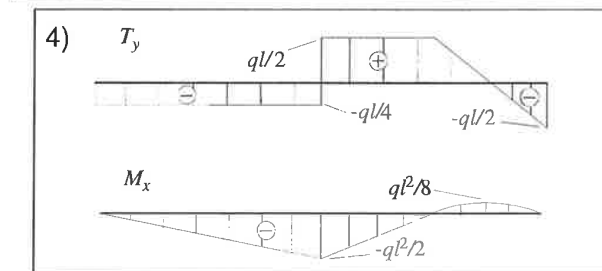
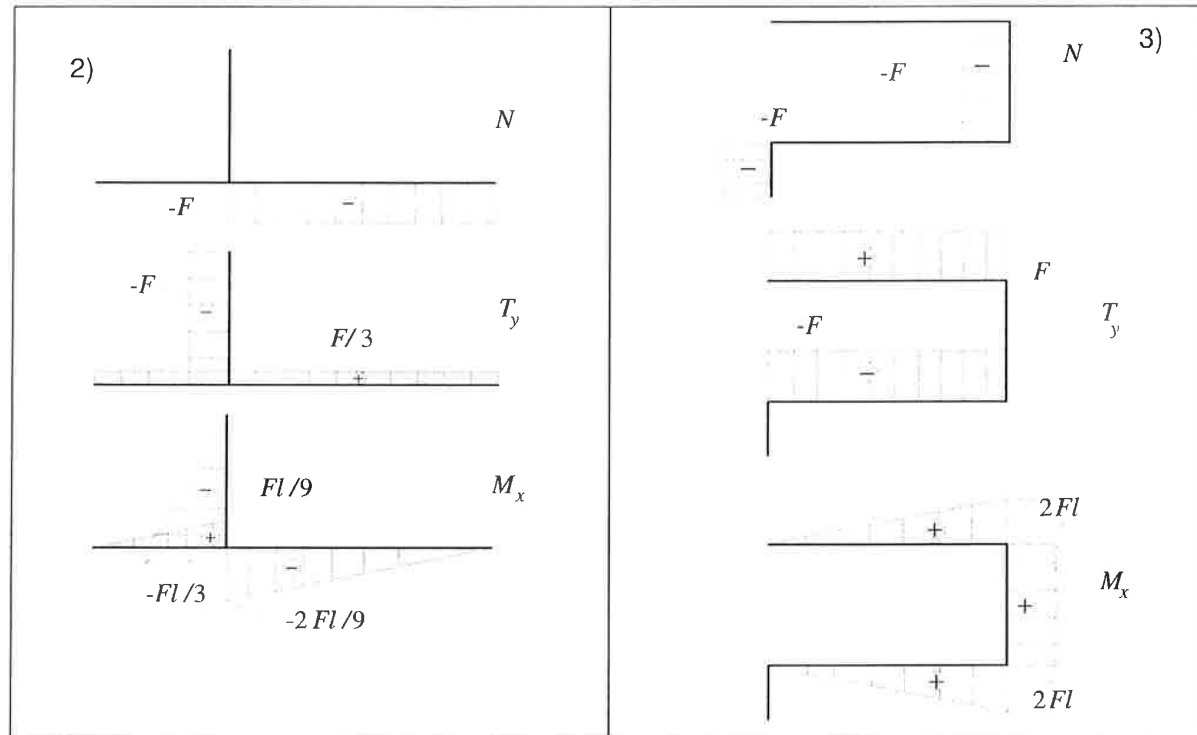
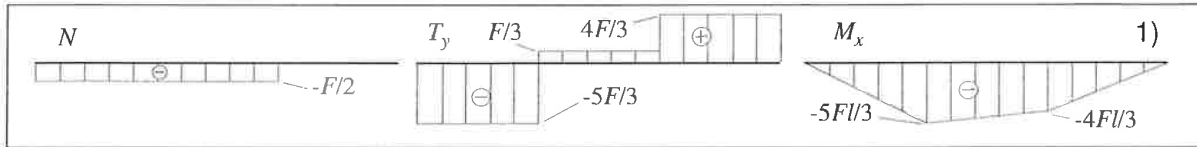
$$\Rightarrow U = \frac{VK}{4} 2(1+\nu) \frac{F}{\Delta E} = \frac{5 \cdot 2}{4} \cdot 2(1+0,29) \frac{F}{10 \cdot 95 \cdot 2,06 \cdot 10^5} = 10^3 \cdot 6,26 \cdot 10^{-3} \frac{F}{\text{N}}$$

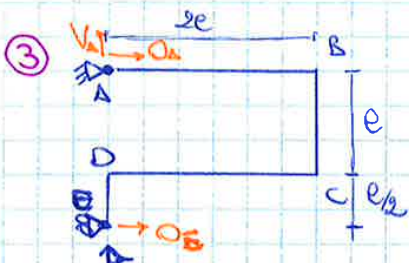
④

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{M_z}{J_p G} \tau = \frac{M_z \cdot 10^3}{\frac{\pi}{32} 50^4 \frac{2,06 \cdot 10^5}{(1+0,29) \cdot 2}} \frac{50}{2} = 5,10 \cdot 10^{-7} M_z$$

$$\epsilon = \gamma / \rho = 2,55 \cdot 10^{-7} M_z$$

$$U = \frac{VK}{4} \Delta E = VK \epsilon = 10 \cdot 10^3 \cdot 2 \cdot 2,55 \cdot 10^{-7} M_z = 5,1 \cdot 10^{-3} M_z$$



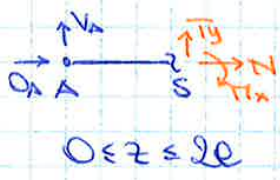


Reazioni vincolari:

$$\uparrow: V_A + F = 0 \Rightarrow V_A = -F$$

$$\rightarrow: Q_A = 0$$

$$\rightarrow: Q_C = 0$$

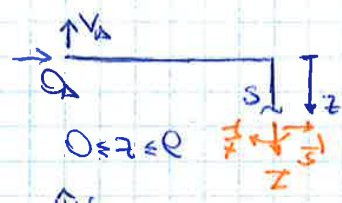


$$\rightarrow: N = 0$$

$$\uparrow: T_y + V_A = 0 \Rightarrow T_y = F$$

$$S \downarrow: M_x + V_A z = 0 \Rightarrow M_x = Fz$$

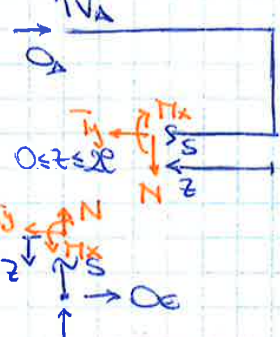
$z=0: M_x=0$
 $z=2e: M_x=2Fe$



$$\downarrow: N - V_A = 0 \Rightarrow N = -F$$

$$\rightarrow: T_y = 0$$

$$S \downarrow: V_A e + M_x = 0 \Rightarrow M_x = 2Fe$$



$$\leftarrow: N = 0$$

$$\downarrow: T_y - V_A = 0 \Rightarrow T_y = -F$$

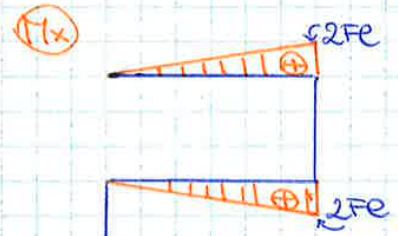
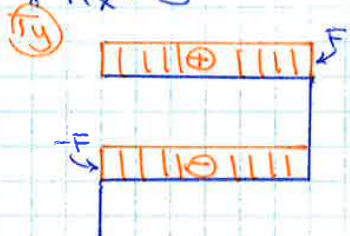
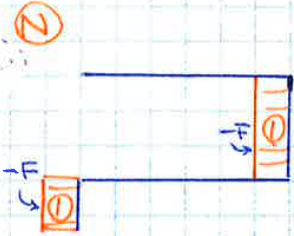
$$S \downarrow: M_x + V_A(2e - z) = 0 \Rightarrow M_x = F(2e - z)$$

$z=0: M_x=2Fe$
 $z=2e: M_x=0$

$$\uparrow: N + F = 0 \Rightarrow N = -F$$

$$\leftarrow: T_y = 0$$

$$S \downarrow: M_x = 0$$



Reazioni vincolari:

$$D \downarrow: qe \cdot e/2 - V_C e = 0 \Rightarrow V_C = qe/2$$

$$\rightarrow: Q_C = 0$$

$$\uparrow: V_A + qe - V_C = 0 \Rightarrow V_A = -qe/2$$

$$\Delta \downarrow: V_A 2e + V_C 3e = 0 \Rightarrow V_B = -3qe/4$$

$$\rightarrow: Q_A = Q_C = 0$$

$$\uparrow: V_A + V_B + V_C = 0 \Rightarrow V_A = qe/4$$

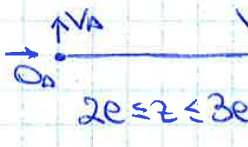


$$\rightarrow: N = 0$$

$$\uparrow: T_y + V_A = 0 \Rightarrow T_y = -qe/4$$

$$S \downarrow: M_x + V_A z = 0 \Rightarrow M_x = -\frac{qe}{4} z$$

$z=0: M_x=0$
 $z=2e: M_x = -\frac{qe^2}{2} = M_A$



$$\rightarrow: N = 0$$

$$\uparrow: T_y + V_A + V_B = 0 \Rightarrow T_y = qe/2$$

$$S \downarrow: M_x + V_A z + V_B(z - 2e) = 0 \Rightarrow M_x = \frac{qe}{2} z - \frac{3qe^2}{2}$$

$z=2e: M_x = -\frac{qe^2}{2}$
 $z=3e: M_x=0$



$$\downarrow \circ \circ \quad N - \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \Rightarrow N = \frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\downarrow \circ \circ \quad T_y + \frac{\sqrt{2}}{2} F = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

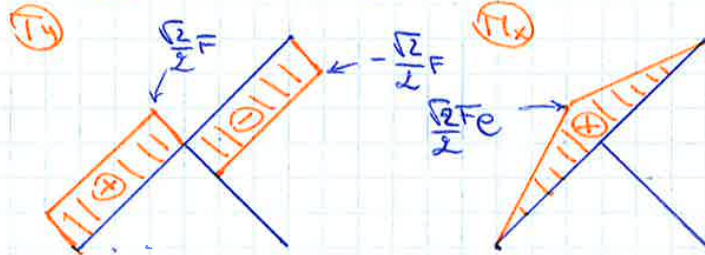
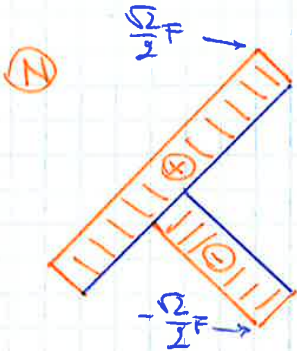
$$\downarrow \circ \circ \quad T_x - \frac{\sqrt{2}}{2} F (l - z) = 0 \Rightarrow T_x = \frac{\sqrt{2}}{2} F (l - z) \quad \left\{ \begin{array}{l} z = l: T_x = \frac{\sqrt{2}}{2} F \\ z = 0: T_x = 0 \end{array} \right.$$



$$\uparrow \circ \circ \quad N + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} Q_0 = 0 \Rightarrow N = -\frac{\sqrt{2}}{2} F$$

$$\downarrow \circ \circ \quad T_y + \frac{\sqrt{2}}{2} Q_0 - \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 = 0 \Rightarrow T_y = 0$$

$$\downarrow \circ \circ \quad T_x + \frac{\sqrt{2}}{2} v_0 (l - z) + \frac{\sqrt{2}}{2} Q_0 (l - z) = 0 \Rightarrow T_x = 0$$

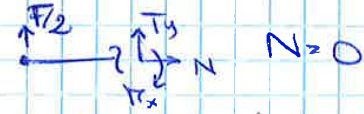


Esercitazione 10



Reazioni vincolari:

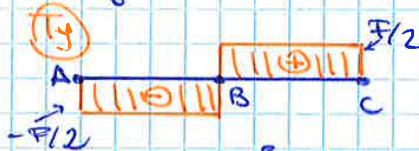
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0: & V_B e - F e/2 = 0 \Rightarrow V_B = F/2 \\ \sum F_y = 0: & V_A - F + V_B = 0 \Rightarrow V_A = F/2 \end{aligned}$$



$$N = 0, \quad T_y = -F/2, \quad M_x = -Fz/2$$



$$N = 0, \quad T_y = F/2, \quad M_x = -F(e-z)/2$$



$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_{xx}} \frac{d}{2} = \frac{-Fe/4}{\frac{\pi}{64} d^4} \frac{d}{2} = 144 \text{ MPa} \quad M_x = -\frac{Fe}{4} = -1,13 \cdot 10^5 \text{ Nm}$$

$$\alpha_{x1} = \int \frac{M_{x1}}{EJ_{xx}} dz = \int -\frac{Fz}{2EJ_{xx}} dz = -\frac{Fz^2}{4EJ_{xx}} + C_1$$

$$\alpha_{x2} = \int \frac{M_{x2}}{EJ_{xx}} dz = \int -\frac{F}{2EJ_{xx}} (e-z) dz = -\frac{F}{2EJ_{xx}} (ez - \frac{z^2}{2}) + D_1$$

$$v_1 = -\int \alpha_{x1} = \frac{Fz^3}{12EJ_{xx}} - C_2 + C_3$$

$$v_2 = -\int \alpha_{x2} = \frac{F}{2EJ_{xx}} (e \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6}) - D_1 z + D_2$$

1) $v(z=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$

2) $v(z=e) = 0 \Rightarrow \frac{F}{2EJ_{xx}} (e \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{6}) - D_1 e + D_2 = 0$

$$\Rightarrow D_2 = D_1 e - \frac{Fe^3}{6EJ_{xx}}$$

3) $\alpha_{x1}(z=e/2) = \alpha_{x2}(z=e/2) \Rightarrow -\frac{Fe^2}{16EJ_{xx}} + C_1 = -\frac{3Fe^2}{16EJ_{xx}} + D_1$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{Fe^2}{8EJ_{xx}} + D_1$$

4) $v_1(e/2) = v_2(e/2) \Rightarrow \frac{Fe^3}{96EJ_{xx}} - C_2 \frac{e}{2} = \frac{5Fe^2}{96EJ_{xx}} - D_1 \frac{e}{2} + D_2$

$$\Rightarrow \frac{Fe^3}{96EJ_{xx}} + \frac{Fe^3}{16EJ_{xx}} - D_1 \frac{e}{2} = \frac{5Fe^2}{96EJ_{xx}} - D_1 \frac{e}{2} + D_1 e - \frac{Fe^3}{6EJ_{xx}}$$

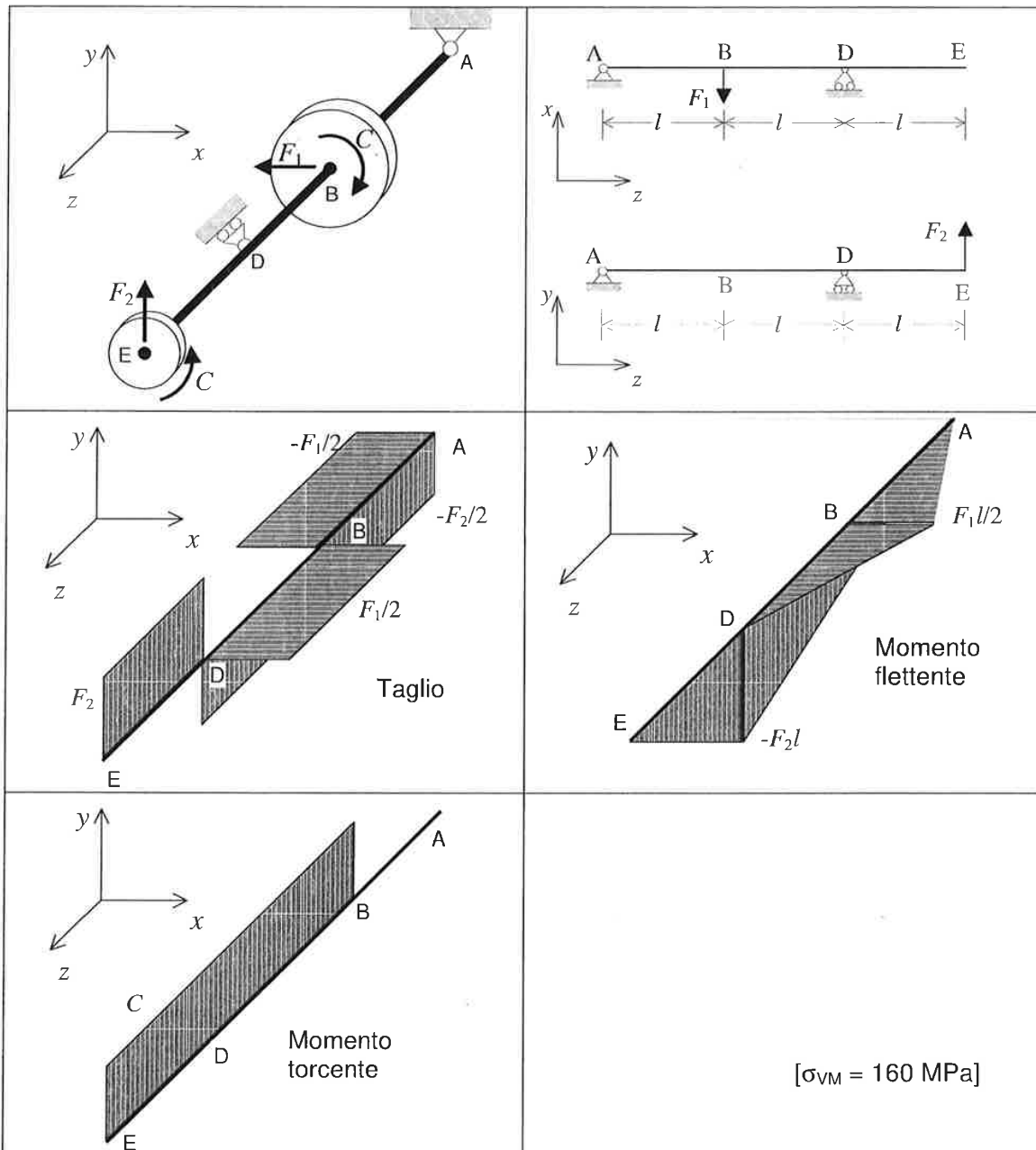
$$\Rightarrow D_1 = \frac{3Fe^2}{16EJ_{xx}} \Rightarrow C_2 = \frac{Fe^2}{16EJ_{xx}}$$

$$v_1(\frac{e}{2}) = \frac{Fz^3}{12EJ_{xx}} - \frac{Fe^2}{16EJ_{xx}} \Big|_{z=e/2} = -\frac{Fe^3}{48EJ_{xx}} = -0,5 \text{ mm}$$

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 11

→ capitolo 8 pag 103-105

- 1) Si consideri l'albero di lunghezza 900 mm di diametro $D = 40$ mm schematizzato in figura. Le due pulegge in B e in E trasmettono all'albero due forze $F_1 = 2$ kN e $F_2 = 3$ kN, e una coppia torcente $C = 500$ Nm.
- Calcolare le reazioni vincolari in corrispondenza dei cuscinetti, schematizzati come una cerniera (A) e un appoggio (D).
 - Calcolare e tracciare l'andamento delle caratteristiche di sollecitazione lungo l'albero.
 - Identificare la sezione più sollecitata e calcolare massima tensione ideale secondo il criterio di Von Mises.



Esercitazione II

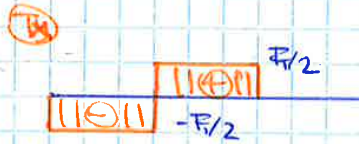
①



$\rightarrow: R_{ax} = 0$

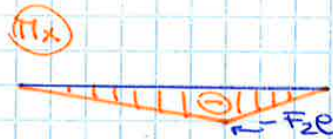
$\Delta: R_{dx} \cdot l - F_1 \cdot l = 0 \Rightarrow R_{dx} = F_1/2$

$\uparrow: R_{ax} - F_1 + R_{dx} = 0 \Rightarrow R_{ax} = F_1/2$



$\Delta: R_{dy} \cdot l + F_2 \cdot l = 0 \Rightarrow R_{dy} = -3F_2/2$

$\circlearrowleft: R_{ay} \cdot l - F_2 \cdot l = 0 \Rightarrow R_{ay} = F_2/2$



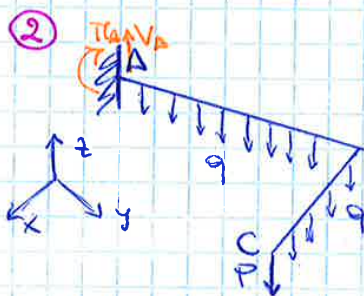
In D: $M_x = -F_2 \cdot l$ $M_y = 0$ $\Rightarrow \sigma_{xz} = \frac{M_x}{J} z - \frac{M_y}{J} z =$

$= \frac{-3 \cdot 10^3 \cdot 300}{\frac{\pi}{64} 40^4} \cdot 20 = -143 \text{ MPa}$

$M_c = 500 \cdot 10^3 \text{ Nmm} \Rightarrow \tau = \frac{M_c}{J_p} z = \frac{500 \cdot 10^3}{\frac{\pi}{32} 40^4} \cdot 20 = 40 \text{ MPa}$

$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{xz}^2 + 3\tau^2} = 160 \text{ MPa}$

②



$\uparrow: V_A - q \cdot l - q \cdot l_2 - P = 0$

$\Rightarrow V_A = P + q(l + l_2)$

$x: M_A = q \cdot l \cdot \frac{l_1}{2} - q \cdot l_2 \cdot l_1 - P \cdot l_1 = 0$

$\Rightarrow M_A = q \cdot l \cdot \frac{l_1}{2} + q \cdot l_2 \cdot l_1 + P \cdot l_1$

$y: M_{Ac} = q \cdot l_2 \cdot \frac{l_2}{2} - P \cdot l_2$

$\Rightarrow M_{Ac} = q \cdot \frac{l_2^2}{2} + P \cdot l_2$

Tutto AB:

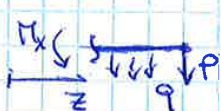


$M_x - M_A + V_A \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2} = 0$

$\Rightarrow M_x = \frac{q \cdot l^2}{2} + q \cdot l \cdot l_2 + P \cdot l_1 - (P + q(l + l_2)) \cdot z - \frac{q \cdot z^2}{2}$

$z=0: M_x = M_A$
 $z=l: M_x = 0$

Tutto CB:



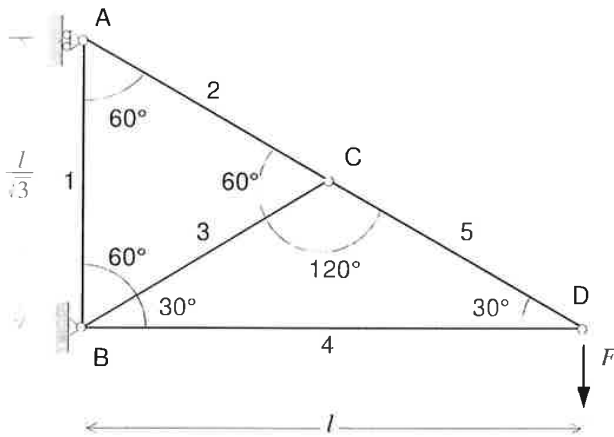
$M_x - q \cdot \frac{(l_2 - z)^2}{2} - P(l_2 - z) = 0$

$M_x = q \cdot \frac{(l_2 - z)^2}{2} + P(l_2 - z)$

$z=0: M_x = P \cdot l_2 + q \cdot \frac{l_2^2}{2}$
 $z=l_2: M_x = 0$

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 12

→ Copiato da pag 105 o pag 12 + capitolo 10



1) Dopo avere determinato le reazioni vincolari esterne, costruire per ogni nodo il corrispondente poligono delle forze e calcolare le forze normali in tutte le aste della struttura reticolare illustrata nella figura.

Dati: $l = 1500 \text{ mm}$,
 $F = 3000 \text{ N}$.

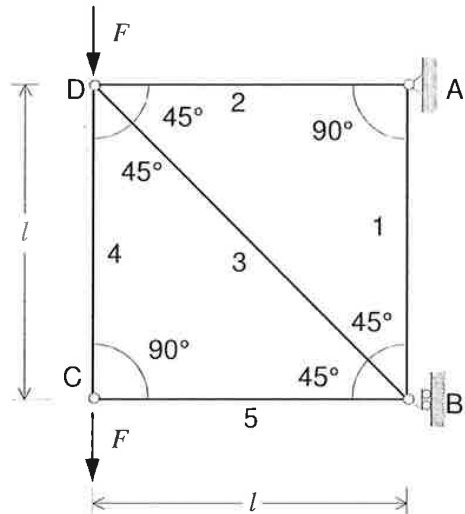
$[N_1 = -F = -3000 \text{ N}, N_2 = 2F = 6000 \text{ N}, N_3 = 0, N_4 = -\sqrt{3}F = -5200 \text{ N}, N_5 = 2F = 6000 \text{ N}]$

2) Le aste della struttura reticolare schematizzata in figura sono formate da elementi tubolari aventi diametro interno d_i e diametro esterno d_e :

- a) calcolare le reazioni vincolari e le forze normali nelle aste;
- b) verificare la resistenza delle aste, considerando anche il pericolo dell'instabilità per quelle compresse.

Dati:

$l = 2000 \text{ mm}, \quad F = 20 \text{ kN},$
 $d_e = 50 \text{ mm}, \quad d_i = 40 \text{ mm},$
 $E = 2.06 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2,$
 $R_{p0.2} = 230 \text{ N/mm}^2.$

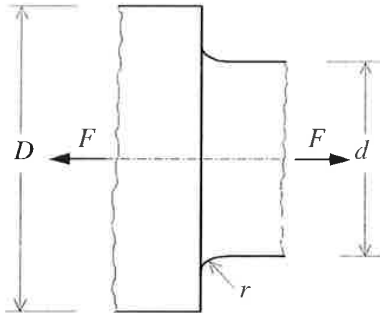


$[N_1 = 2F = 40 \text{ kN}, N_2 = 2F = 40 \text{ kN}, N_3 = -2\sqrt{2}F = -56.6 \text{ kN}, N_4 = F = 20 \text{ kN}, N_5 = 0;$
 asta 3: $p = 16 \text{ mm}, l_0 = 2830 \text{ mm}, \sigma_{cr} = 65 \text{ N/mm}^2]$

- A) Spiegare sotto quali ipotesi le aste sono soggette a sola forza assiale. *Carichi solo su nodi*
- B) Perché in una cerniera multipla le reazioni incognite non sono semplicemente due? *Artic. 100*
- C) Quali proprietà del materiale influenzano il carico critico di instabilità? E quali parametri geometrici? *→ E, I, l_0*
- D) In cosa differisce il comportamento, al crescere del carico, di un'asta non perfettamente rettilinea rispetto al caso senza imperfezione? *Divergenza con l'aumentare del carico*

FONDAMENTI di MECCANICA STRUTTURALE
Anno accademico 2016/2017 - Esercitazione n° 13

→ Capitolo II



1) Il particolare rappresentato in figura è sollecitato da una forza di trazione statica $F = 100$ kN. Determinato il fattore di concentrazione della tensione, stabilire la tensione limite richiesta al materiale per ottenere coefficiente di sicurezza C_S rispetto alla condizione di collasso nei casi:

- a) materiale fragile ($C_S = 3$);
- b) materiale duttile ($C_S = 1.5$).

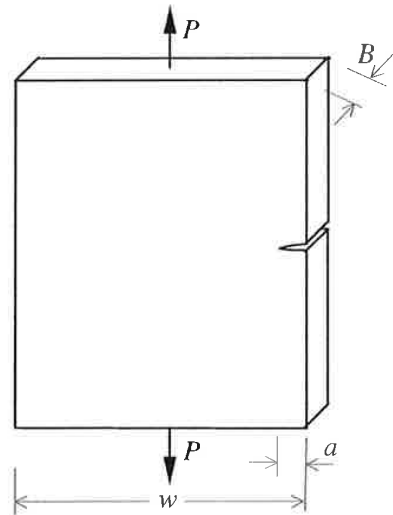
Dati: $D = 60$ mm, $d = 40$ mm, $r = 4$ mm.

$[K_t = 2$; a) $R_m = 480$ MPa; b) $R_{eH} = 120$ MPa]

2) Una lastra rettangolare di spessore B è larga $w = 100$ mm ed è sollecitata a trazione statica da un carico $P = 400$ kN; è presente una cricca laterale ($Y = 1.99$) di lunghezza $a = 6$ mm. Calcolare il valore dello spessore B affinché la lastra resista sia a snervamento (coefficiente di sicurezza minimo 1.5) sia a rottura per propagazione della cricca (coefficiente di sicurezza minimo 3).

Dati materiale (acciaio maraging 250): $R_{p0,2} = 1700$ MPa, $K_{Ic} = 75$ MPa \sqrt{m} .

$[B \approx 25$ mm]



3) Si esegue una prova su un elemento prismatico (sezione retta di lati $w = 500$ mm, $B = 20$ mm) che presenta una cricca centrale passante ($Y = \sqrt{\pi}$) di lunghezza $2a = 50$ mm, il cedimento avviene al carico $P = 1.35$ MN. Sapendo che la tensione di snervamento del materiale è $R_{p0,2} = 480$ MPa, dire se si è trattato di cedimento per propagazione di cricca e trovare l'eventuale tenacità a frattura.

$[\sigma_{eff} = 150$ MPa, $K_{Ic} = 38$ MPa \sqrt{m}]

- A) Spiegare la definizione del "fattore di concentrazione della tensione" per gli intagli.
- B) Da quali fattori dipende K_t ? Come se ne ottengono i valori per la soluzione dei casi pratici?
- C) Perché nei casi di elementi contenenti cricche la verifica in termini di tensione non è possibile?
- D) In che senso il "fattore di intensità della tensione" rappresenta il campo di tensione di fronte alla cricca?
- E) Quale proprietà del materiale esprime la "tenacità a frattura"? Perché è influenzata dallo spessore?

Handwritten notes: Aumento di σ che dipende da concentrazione del materiale. Piccolo spessore è la soluzione che si ottiene dalla soluzione...